

SENADA KALABUŠIĆ
ESMIR PILAV
EMIN BEŠO
ZENAN ŠABANAC

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE: KLASIČNA TEORIJA, METODE I RIJEŠENI ZADACI

Analitički i numerički
pristup

Sarajevo, 2026.

Senada Kalabušić - Esmir Pilav - Emin Bešo - Zenan Šabanac

Parcijalne diferencijalne jednadžbe: klasična teorija, metode i riješeni zadaci

Analitički i numerički pristup

Sarajevo, 2026.

Autori:

DR. SENADA KALABUŠIĆ
DR. ESMIR PILAV
DR. EMIN BEŠO
DR. ZENAN ŠABANAC

Naziv djela:

PARCIJALNE DIFERENCIJALNE JEDNADŽBE: KLASIČNA TEORIJA, METODE I
RIJEŠENI ZADACI
ANALITIČKI I NUMERIČKI PRISTUP

Broj izdanja: Prvo izdanje

Izdavač:

UNIVERZITET U SARAJEVU - PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Recenzenti:

PROF. DR. DAVID KALAJ,
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET, UNIVERZITET CRNE GORE

PROF. DR. ALEKSANDRA KOSTIĆ,
MAŠINSKI FAKULTET, UNIVERZITET U SARAJEVU

PROF. DR. NACIMA MEMIĆ,
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET, UNIVERZITET U SARAJEVU

Korekturu izvršili autori

Kompjuterska obrada teksta i naslovna strana:

AUTORI

ISBN 978-9926-594-04-6

CIP zapis dostupan u COBISS sistemu Nacionalne i univerzitetske
biblioteke BiH pod ID brojem 69269254

Studentima, s kojima učimo i podučavamo.

Sadržaj

Predgovor	vii
Popis slika	xi
Popis oznaka	xiii
1 Osnovni pojmovi i koncepti diferencijalnog računa realnih funkcija više realnih varijabli	1
1.1 Skupovi u $\mathbb{R}^n$	1
1.2 Funkcije u $\mathbb{R}^n$	4
1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$	8
1.4 Površ i normale u $\mathbb{R}^3$	12
1.5 Teorem o implicitno datim funkcijama	15
1.6 Diferencijabilnost vektorske funkcije. Divergencija i rotor vektorskog polja	17
1.7 Krive i tangente u $\mathbb{R}^3$	19
1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti	23
2 O rješenjima, klasifikaciji i početno-rubnim problemima	27
2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija	27
2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi	40
2.3 Početni i rubni problemi	45
2.4 Zadaci za samostalan rad	51
3 Parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda	55
3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe	55
3.1.1 Određivanje općeg rješenja	55
3.1.2 Cauchyjev problem početnih vrijednosti	68
3.1.3 Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti	77
3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe	81
3.2.1 Određivanje općeg rješenja	82
3.2.2 Cauchyjev problem početnih vrijednosti	90
3.2.3 Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti	94

3.3	Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe sa dvije nezavisne varijable	103
3.3.1	Sistem od dvije jednađžbe sa jednom nepoznatom funkcijom	103
3.3.2	Potpuni integral	110
3.3.3	Opće i singularno rješenje	113
3.3.4	Posebni slučajevi nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednađžbi prvog reda	118
3.3.5	Metoda Lagrange-Charpita za nalaženje potpunog integrala	124
3.3.6	Cauchyjev problem	134
3.3.7	Cauchyjeva metoda karakteristika	143
3.4	Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe sa više od dvije nezavisne varijable	161
3.4.1	Potpuni, opći i singularni integral	161
3.4.2	Metoda Lagrange-Charpita za nalaženje potpunog integrala	163
3.4.3	Cauchyjeva metoda karakteristika	168
3.5	Pfaffova diferencijalna jednađžba	176
3.5.1	Pfaffova diferencijalna jednađžba sa dvije varijable	177
3.5.2	O Pfaffovoj diferencijalnoj jednađžbi sa tri varijable	179
3.5.3	Integrabilnost Pfaffovih diferencijalnih jednađžbi	181
3.5.4	Metode integracije	187
3.6	Teorem Cauchy-Kovalevsky	214
3.7	Zadaci za samostalan rad	224
4	Parcijalne diferencijalne jednađžbe drugog reda	233
4.1	Operatorska metoda za jednađžbe višeg reda	233
4.2	Klasifikacija jednađžbi drugog reda sa dvije varijable	246
4.3	Talasna jednađžba	256
4.3.1	Rubni problemi i teoremi jedinstvenosti	256
4.3.2	D'Alembertova formula	259
4.3.3	Teorem jedinstvenosti i oblast zavisnosti	268
4.3.4	Kirchhoffova i Poissonova formula	272
4.3.5	Nehomogena talasna jednađžba	276
4.3.6	Fourierova metoda	279
4.4	Laplaceova jednađžba	295
4.4.1	Rubni problemi i princip maksimuma	295
4.4.2	Fundamentalno rješenje i Greenova funkcija	299
4.4.3	Harmonijske funkcije	313
4.4.4	Fourierova metoda	315
4.5	Jednađžba provođenja toplote	327
4.5.1	Početni i rubni uvjeti	327
4.5.2	Princip maksimuma	328
4.5.3	Poissonova formula	334
4.5.4	Nehomogena jednađžba provođenja toplote	339
4.5.5	Fourierova metoda	340
4.6	Zadaci za samostalan rad	356

5	Metoda konačnih razlika za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi	369
5.1	O metodi konačnih razlika	370
5.1.1	Mreža i diskretizacija	370
5.1.2	Konačne razlike kao aproksimacija derivacija	371
5.1.3	Konzistentnost, stabilnost i konvergencija	373
5.2	Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa	378
5.3	Rješavanje Dirichletovog rubnog problema metodom iteracije	397
5.4	Metoda mreža za jednadžbe paraboličkog tipa	399
5.5	Metoda mreža za jednadžbe hiperboličkog tipa	413
5.6	Zadaci za samostalan rad	419
	Bibliografija	425
	Index pojmova	428

Predgovor

Ideja za ovu knjigu nastajala je postepeno, kroz višegodišnje iskustvo u izvođenju nastave iz parcijalnih diferencijalnih jednačbi i drugih predmeta. Kao i u mnogim drugim matematičkim predmetima, pokazalo se da postoji razlika između onoga kako se gradivo formalno može izložiti i onoga kako ga studenti zaista doživljavaju i usvajaju. Upravo iz tog razloga javila se potreba za tekstom koji bi studentima ponudio jasniji, postupniji i sadržajno zaokružen pristup ovom području.

Parcijalne diferencijalne jednačbe prirodno se pojavljuju u opisu brojnih fizikalnih i tehničkih pojava i procesa, poput mehaničkih, toplotnih i elektromagnetnih pojava. Njihova savremena teorija oslanja se na širok spektar matematičkih disciplina, ali u nastavnom procesu najčešće se polazi od klasičnih modela i metoda, koje i danas čine osnovu razumijevanja i primjene parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Ova knjiga zadržava takav pristup, nastojeći da teoriju razvija iz konkretnih problema i primjera, uz stalno povezivanje formalnih rezultata s njihovim značenjem.

Raniji udžbenik iz parcijalnih diferencijalnih jednačbi, autora Senade Kalabušić, Nacime Memić i Esmira Pilava, dugi niz godina predstavljao je značajan nastavni oslonac studentima Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Iskustva stečena njegovom upotrebom, zajedno s promjenama u nastavnim planovima i savremenim pristupima nastavi, bila su važan poticaj za daljnji razvoj i proširivanje nastavnog materijala, što je rezultiralo ovom knjigom u njenom sadašnjem obliku.

Knjiga je prvenstveno namijenjena studentima matematike, ali može poslužiti i studentima tehničkih i prirodnih nauka koji se tokom svog obrazovanja susreću s parcijalnim diferencijalnim jednačbama. Polazi se od pretpostavke da studenti poznaju osnove diferencijalnog i integralnog računa funkcija jedne i više varijabli, linearne algebre te teorije običnih diferencijalnih jednačbi. Gradivo je izloženo postepeno, s ciljem da se novi pojmovi sistematski nadovezuju na već poznate koncepte.

Struktura knjige slijedi prirodan tok nastave. U uvodnom dijelu izloženi su osnovni pojmovi diferencijalnog računa u $\mathbb{R}^n$, kao i opći koncepti parcijalnih diferencijalnih jednačbi, uključujući razmatranje početnih i rubnih problema.

Nakon toga slijedi detaljna obrada parcijalnih diferencijalnih jednačbi prvog reda, linearnih i nelinearnih, s posebnim naglaskom na Cauchyjev problem i metodu karakteristika. Posebna poglavlja posvećena su Pfaffovim diferencijalnim jednačbama te teoremu Cauchy–Kovalevskaya.

Drugi dio knjige posvećen je parcijalnim diferencijalnim jednačbama drugog reda, njihovoj klasifikaciji te kanonskim predstavnicima eliptičkog, paraboličkog i hiperboličkog tipa. Detaljno su razmotrene talasna jednačba, Laplaceova jednačba i jednačba provođenja toplote, uz prikaz klasičnih metoda rješavanja, teorema jedinstvenosti i standardnih rubnih problema. Posebna pažnja posvećena je Fourierovoj metodi, Greenovim funkcijama i principu maksimuma.

U završnom dijelu knjige razmatra se numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Predstavljene su metode konačnih razlika i metode mreža za eliptičke, paraboličke i hiperboličke jednačbe, s ciljem da se studentima omogući uvid u praktične aspekte aproksimacije rješenja, neizostavne u savremenim primjenama.

Koliko je autorima poznato, na našim prostorima i u regionu trenutno ne postoji udžbenik koji na jednom mjestu, u koherentnoj i sistematičnoj formi, objedinjuje klasičnu teoriju parcijalnih diferencijalnih jednačbi, metode rješavanja, veliki broj detaljno riješenih primjera te uvod u numeričke metode. Upravo takav objedinjeni pristup, koji povezuje analitičke i numeričke aspekte parcijalnih diferencijalnih jednačbi u jedinstvenom nastavnom okviru, predstavlja jednu od osnovnih namjera ove knjige.

U svakom poglavlju riješen je veći broj primjera koji ilustruju osnovne ideje i metode, dok su na kraju poglavlja dati zadaci za samostalan rad. Njihova svrha nije samo uvježbavanje tehnika, nego i razvoj matematičke intuicije te dubljeg razumijevanja gradiva.

Cilj ovog udžbenika nije donošenje novih teorijskih sadržaja, već predstavljanje postojećeg znanja na jasan, sistematičan i studentima pristupačan način, uz pažljiv izbor primjera i objašnjenja koja doprinose razumijevanju suštine problema. Nadamo se da će ova knjiga studentima olakšati učenje parcijalnih diferencijalnih jednačbi i poslužiti kao dobar temelj za dalji studij i primjene.

Autori zahvaljuju recenzentima, profesorima Aleksandri Kostić i Nacimi Memić te profesoru Davidu Kalaju, na pažljivom čitanju rukopisa i korisnim sugestijama.

Sarajevo, 2026.

Autori

Popis slika

1.1	Geometrijsko tumačenje parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$	6
1.2	Nivo-površ, tangenta ravan i gradijent.	15
1.3	Grafik krive $(\cos t, \sin t, t)$ iz Primjera 1.7.1.	20
1.4	Grafici funkcija $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ i krive $(t, \pm\sqrt{1-t^2}, 1)$ iz Primjera 1.7.2.	21
2.1	Karakteristične linije: za $x < 0$ ($u = 1$) su plave boje; za $0 \leq x \leq 1$ ($u = \frac{1-x}{1-t}$) su crvene boje; za $x > 1$ ($u = 0$) su zelene boje.	51
3.1	Konus $u^2 = x^2 + y^2$, $u \geq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$	74
3.2	Paraboloid $u = x^2 + y^2$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$	74
3.3	Polusfera $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, $u \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$	75
3.4	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ za $a = 1$, $b = 3$ i krive (t, t, t^2) iz Primjera 3.1.14.	80
3.5	Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive $(t, 1, t^2)$ iz Primjera 3.2.6.	93
3.6	Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive $(2, t, t^2 + 1)$ iz Primjera 3.2.7.	94
3.7	Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive (t, t^2, t^3) iz Primjera 3.2.8.	98
3.8	Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i kružnice $\{x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 4\}$ iz Primjera 3.2.9.	100
3.9	(i) Grafik preslikavanja $u = u(x, y)$ i krive $(t, 2t, 9t^2)$, (ii) grafik preslikavanja $v = v(x, y)$ i krive $(t, 2t, 6t^2)$ iz Primjera 3.2.11.	103
3.10	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i točka T iz Primjera 3.3.1.	110
3.11	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ za i krive $(1, t, \sqrt{1+t^2})$ iz Primjera 3.3.13.	141
3.12	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(t, t, \pm\sqrt{t})$ iz Primjera 3.3.14.	143
3.13	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(0, t, t)$ iz Primjera 3.3.15.	156
3.14	Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(1, t, t^3)$ iz Primjera 3.3.16.	158
3.15	Geometrijska interpretacija Cauchyjevog problema i lokalne egzistencije rješenja.	217
4.1	Oblast zavisnosti rješenja za $x > 0$ i $t > 0$	261

4.2	Paralelogram sa stranicama koje su paralelne sa karakterističnim krivim.	263
4.3	Metoda refleksije za određivanje rješenja.	265
4.4	Oblast zavisnosti D	266
4.5	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [-5, 5]$, $t \in [0, 10]$ iz Primjera 4.3.4.	279
4.6	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, 6]$ iz Primjera 4.3.6 za $c = 1$, $A = 2$, $\omega = 4$	284
4.7	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, 10]$, $t \in [0, 10]$ iz Primjera 4.3.7 za $c = 1$ i $F(x) = h = 1$, $f(x) = g(x) = A = B = 0$	286
4.8	Dvadeset i pet "snimaka" titrajuće žice iz Primjera 4.3.8.	291
4.9	Grafik funkcije $u = u(x, y, t)$ iz Primjera 4.3.9	294
4.10	Greenova funkcija za kuglu.	307
4.11	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 2]$ iz Primjera 4.4.5 za $f(x) = \sin^2(x)$	317
4.12	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$ iz Primjera 4.4.6 za $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-3x^2}$, $h(y) = \cos^2 y$ i $k(y) = 1$	321
4.13	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$ iz Primjera 4.4.7 za $f(x) = x^2$	322
4.14	Grafik funkcije $u = u(x, y, z)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$, iz Primjera 4.4.8 za $f(x, y) = \sin \pi x \cos \pi y$ i $g(x, y) = e^{-x^2 - y^2}$	324
4.15	Grafik funkcije $U = U(r, \theta)$, $1 < r < 2$, $0 < \theta < 2\pi$ iz Primjera 4.4.9.	326
4.16	Rješenje $u(x, t)$ iz Primjera 4.5.1 u vremenima 0, 20, 60 i 300 (sekundi).	333
4.17	Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 2]$ iz Primjera 4.5.2 za $k = 1$	343
4.18	Grafik funkcije $u = u(x, y, t)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, iz Primjera 4.5.5 za $k = 1$ i $f(x, y) = \sin \pi x \sin 2\pi y$	349
4.19	Koncentracija CO u cijevi iz Primjera 4.5.8 nakon 1, 2, 4, 6 i 100 sati.	355
5.1	Pravougaona (uniformna) mreža Ω_h sa koracima h_x i h_y	371
5.2	Stabilne i nestabilne <i>leapfrog</i> aproksimacije jednadžbe $u_t = u_x$	377
5.3	Unutrašnji i rubni čvorovi mreže.	378
5.4	Mreža čvorova iz Primjera 5.2.1.	381
5.5	Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.1.	381
5.6	Prva osnovna shema.	382
5.7	Druga osnovna shema.	383
5.8	Prva i druga osnovna shema.	385
5.9	Rubne vrijednosti iz Primjera 5.2.2.	386
5.10	Vrijednosti u čvorovima mreže iz Primjera 5.2.2.	387
5.11	Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.2.	387
5.12	Mreža čvorova iz Primjera 5.2.3.	388
5.13	Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.3.	389

5.14 Tačno rješenje $u = u(x, y)$ (narandžasto), tačke $u_{i,j}$ (crveno), xy ravan (plavo), aproksimacija rješenja (zeleno) iz primjera 5.2.3. . .	389
5.15 Mreža čvorova iz Primjera 5.2.4.	390
5.16 Vrijednosti u čvorovima mreže iz Primjera 5.2.4.	391
5.17 Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.5.	392
5.18 Korekcija rubnih čvorova mreže metodom linearne interpolacije. . .	398
5.19 Rubne vrijednosti iz Primjera 5.3.1.	399
5.20 Pravougaona mreža.	400
5.21 Eksplicitna shema za PDJ paraboličkog tipa.	401
5.22 Mreža čvorova iz Primjera 5.4.1 a).	402
5.23 Rubne vrijednosti iz Primjera 5.4.1 a).	403
5.24 Shematski prikaz rješenja Primjera 5.4.1 a).	404
5.25 Shematski prikaz rješenja Primjera 5.4.1 b).	405
5.26 Shema za PDJ hiperboličkog tipa.	415
5.27 Shematski prikaz rješenja Primjera 5.5.1.	418
5.28 Rubne vrijednosti iz Zadatka 3.	420

Popis oznaka

$\mathbb{N}$	skup prirodnih brojeva
$\mathbb{N}_0$	skup nenegativnih cijelih brojeva, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Z}$	skup cijelih brojeva
$\mathbb{R}$	skup realnih brojeva
$\mathbb{C}$	skup kompleksnih brojeva
i	imaginarna jedinica, $i^2 = -1$
$\cap$	presjek skupova
$\cup$	unija skupova
$\setminus$	razlika skupova
Ω	oblast u $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	granica oblasti Ω
$\overline{\Omega}$	zatvorenje skupa ili domena
$\mathbb{R}^n$	n -dimenzionalni realni euklidski prostor
(a, b)	otvoreni interval u $\mathbb{R}$
$[a, b]$	zatvoreni interval u $\mathbb{R}$
$(a, b], [a, b)$	poluotvoreni intervali
$f : A \rightarrow B$	funkcija sa domenom A i kodomenom B
R_f	rang (slika) funkcije f
$\mathbf{x}$	vektor u $\mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$
$ \mathbf{x} $	intenzitet vektora $\mathbf{x}$, $ \mathbf{x} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$
$\mathbf{x} \times \mathbf{y}$	vektorski proizvod u $\mathbb{R}^3$
$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$	kanonski jedinični vektori u $\mathbb{R}^3$
$d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$	udaljenost (metrika) između $\mathbf{x}$ i $\mathbf{y}$
$B(\mathbf{x}^0, \rho)$	otvorena kugla sa centrom $\mathbf{x}^0$ i radijusom ρ
$\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)}$	zatvorena kugla
$S(\mathbf{x}^0, \rho)$	sfera (skup tačaka na udaljenosti ρ od $\mathbf{x}^0$)

$\mathcal{K}(x, y, u)$	Mongeov konus
$\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$	konus prošlosti/budućnosti
α	multiindeks $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n$
$ \alpha $	$\alpha_1 + \dots + \alpha_n$
$\alpha!$	$\alpha_1! \dots \alpha_n!$
$\mathbf{x}^\alpha$	$x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	parcijalni izvod funkcije f po x_i
D_i	$\frac{\partial}{\partial x_i}$
$D_i D_j f$	drugi parcijalni izvod
D^α	parcijalni izvod reda α
∇	$(D_1, \dots, D_n)$
∇f	gradijent funkcije f
Δ	Laplaceov operator
grad	gradijent
div	divergencija
rot	rotor
$\nabla \cdot \mathbf{F}$	divergencija vektorskog polja $\mathbf{F}$
$\nabla \times \mathbf{F}$	rotacija vektorskog polja $\mathbf{F}$
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	prostor funkcija sa neprekidnim izvodima do reda k na Ω
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	prostor beskonačno diferencijabilnih funkcija na Ω
$\ \cdot\ $	norma (opća notacija)
$T_n f(x; x_0)$	Taylorov polinom reda n funkcije f u okolini tačke x_0
$r_n f(x; x_0)$	ostatak u Taylorovoj formuli funkcije jedne promjenljive
$R_m(x_0, y_0; h_1, h_2)$	ostatak u Taylorovoj formuli funkcije dvije promjenljive
$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k$	stepeni red
$\binom{n}{k}$	binomni koeficijent
J_f	Jacobijeva matrica (Jakobijan) preslikavanja f
δ	Diracova delta-distribucija (delta funkcija)

Osnovni pojmovi i koncepti diferencijalnog računa realnih funkcija više realnih varijabli

U ovom poglavlju ćemo definirati osnovne pojmove i izložiti osnovne koncepte diferencijalnog računa funkcija jedne i više realnih varijabli. Konkretno primjere, kao i definiranje nekih pojmova, ćemo najčešće dati u slučaju dvodimenzionalnog i trodimenzionalnog realnog vektorskog prostora. Notacija i oznake koje ovdje uvedemo koristit ćemo u narednim poglavljima. Teoreme koji će nam trebati u daljnjem radu najčešće ćemo navesti bez dokaza, a zainteresirani čitaoci dokaze mogu potražiti u drugim knjigama matematičke analize, diferencijalnog računa realnih funkcija jedne i više nezavisnih varijabli, i diferencijalne geometrije.

1.1 Skupovi u $\mathbb{R}^n$

Sa $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, označavamo realni n -dimenzionalni Euklidski prostor, u kojem svaka tačka ima n koordinata $x_1, x_2, \dots, x_n$. Položaj tačke u prostoru opisujemo njenim vektorom položaja $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. U posebnim slučajevima, za dimenzije $n = 1$, $n = 2$ i $n = 3$, često koristimo drugačije oznake za koordinate, poput x u jednodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}$, (x, y) u dvodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^2$ i (x, y, z) , odnosno (x, y, u) , u trodimenzionalnom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Rastojanje ili *udaljenost* između dvije tačke $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ u $\mathbb{R}^n$ definiramo sa

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \left[\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right]^{1/2}.$$

Funkcija d ima sljedeće osobine:

1.1 Skupovi u $\mathbb{R}^n$

- 1) (pozitivna definitnost) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ za $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ i $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$,
- 2) (simetričnost) $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ za $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
- 3) (nejednakost trougla) $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$ za $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$.

Za funkciju d koja zadovoljava gore navedene osobine kažemo da je *metrika*.

Otvorena kugla sa centrom u tački $\mathbf{x}^0 \in \mathbb{R}^n$ i radijusom $\rho > 0$ predstavlja skup tačaka u $\mathbb{R}^n$ koje zadovoljavaju uvjet

$$B(\mathbf{x}^0, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) < \rho\}. \quad (1.1)$$

Odgovarajuća *zatvorena kugla* data je sa

$$\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) \leq \rho\}. \quad (1.2)$$

Skup tačaka koje su date sa

$$S(\mathbf{x}^0, \rho) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : d(\mathbf{x}, \mathbf{x}^0) = \rho\} \quad (1.3)$$

naziva se *sfera*.

Za skup tačaka $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kažemo da je *otvoren* ako za svaku tačku $\mathbf{x} \in A$ postoji kugla sa centrom u $\mathbf{x}$ koja je sadržana u A . Za podskup skupa $\mathbb{R}^n$ kažemo da je *zatvoren* ako je njegov komplement otvoren skup. Tačka $\mathbf{x}$ se naziva *graničnom tačkom* skupa A ako svaka kugla sa centrom u $\mathbf{x}$ sadrži tačke iz skupa A i tačke iz njegovog komplementa. Skup svih graničnih tačaka skupa A naziva se *rubom* ili *granicom* skupa A i označava se sa ∂A .

Lako je pokazati da je otvorena kugla $B(\mathbf{x}^0, \rho)$ definirana sa (1.1) otvoren skup, dok je zatvorena kugla $\overline{B(\mathbf{x}^0, \rho)}$ definirana sa (1.2) zatvoren skup. Rub oba ova skupa je sfera $S(\mathbf{x}^0, \rho)$ definirana sa (1.3).

Slično, za $a < b$ skup u $\mathbb{R}$ dat sa

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

je otvoren (i zovemo ga *otvoreni interval*), a skup

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

je zatvoren (i zovemo ga *zatvoreni interval*).

S druge strane, skupovi

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \quad \text{i} \quad (a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$$

(koje zovemo *poluzatvoreni* ili *poluotvoreni interval*) nisu ni otvoreni ni zatvoreni skupovi u $\mathbb{R}$. Rub sva ova četiri skupa je isti, i dat je skupom $\{a, b\}$ koji ima samo dva elementa a i b .

Skup u $\mathbb{R}^2$

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$$

1.1 Skupovi u $\mathbb{R}^n$

je otvoren, dok je skup

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$$

zatvoren. Rub oba ova skupa je osa Ox . Također u $\mathbb{R}^2$, pravougaonik definiran sa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < x < b, c < y < d\}$$

je otvoren, dok je pravougaonik definiran sa

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$$

zatvoren. Na primjer, nejednakostima

$$a \leq x < b, c < y \leq d$$

je definiran skup koji nije ni otvoren ni zatvoren.

Okolina tačke u $\mathbb{R}^n$ je bilo koji otvoreni skup koji sadrži tu tačku. Sve otvorene kugle sa centrom u tački $\mathbf{x}^0$ su također okoline tačke $\mathbf{x}^0$. Dakle, tačka ima okoline koje mogu biti proizvoljno male. Također, otvoreni skup je okolina svake svoje tačke.

Otvoreni skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se *povezanim* ako se bilo koje dvije tačke skupa A mogu povezati poligonalnom linijom (putem) koji je u potpunosti sadržan u A . Otvoren i povezan skup u $\mathbb{R}^n$ naziva se *oblast*. Oblast će u ovoj knjizi obično biti označena simbolom Ω .

Skup $A \subseteq \mathbb{R}^n$ naziva se *ograničenim* ako je sadržan u nekoj kugli konačnog radijusa sa centrom u koordinatnom početku.

U ovoj sekciji uvest ćemo i pojmove skalarnog i vektorskog proizvoda vektora, koje ćemo u daljem koristiti.

U realnom n -dimenzionalnom Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^n$ definišemo *skalarni proizvod* dva vektora $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ formulom

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

U posebnom slučaju $n = 3$, u prostoru $\mathbb{R}^3$, uvodimo i *vektorski proizvod*. Za vektore $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ i $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3)$ definišemo

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = (x_2 y_3 - x_3 y_2) \mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3) \mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1) \mathbf{k},$$

gdje su $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ (jedinični) vektori u $\mathbb{R}^3$ dati sa

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

Rezultat vektorskog proizvoda $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ je vektor koji je ortogonalan i na $\mathbf{x}$ i na $\mathbf{y}$.

1.2 Funkcije u $\mathbb{R}^n$

Pod pojmom *funkcije* smatramo pravilo pomoću kojeg se svakom elementu jednog skupa (zovemo ga domenom funkcije) pridružuje tačno jedan element drugog skupa (zovemo ga kodomenom funkcije). Često se u literaturi ne pravi razlika između pojmova funkcije i pojma *preslikavanja*. Mi ćemo, međutim, u ovoj knjizi praviti razliku između ta dva pojma. Kod preslikavanja, jednom elementu prvog skupa može se pridružiti više od jednog elementa drugog skupa. Stoga svaka funkcija jeste preslikavanje, ali obrnuto ne vrijedi.

Poseban tip funkcije koji djeluje na elemente određenog prostora (na primjer vektorskog prostora ili prostora funkcija), često izvodeći neku matematičku operaciju, zove se *operator*. Operator se može posmatrati kao funkcija koja preslikava funkcije u funkcije ili vektore u vektore, pri čemu obično ima dodatnu strukturu i osobine. Dakle, svaki operator jeste funkcija, ali nisu sve funkcije operatori. Operatori često uključuju specifične operacije i mogu imati dodatna svojstva, poput linearnosti ili ograničenosti.

U mnogim oblastima, poput fizike, inženjerstva, tehnike i tehnologije, često se koriste pojmovi skalarnih i vektorskih veličina. Neke skalarne veličine zavise od jednog parametra, dok druge zavise od dva ili više parametara. Slična situacija važi i za vektorske veličine. Zbog toga se javlja potreba za proučavanjem funkcija oblika

$$\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \text{gdje su } n, m \in \mathbb{N}.$$

Neki važni posebni slučajevi uključuju:

- $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ — realna funkcija n realnih varijabli;
- $\mathbf{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ — vektorska funkcija jedne realne varijable;
- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, pri čemu su $n, m > 1$ — vektorska funkcija n realnih varijabli.

U prethodno navedenim slučajevima pravimo razliku između skalarnih i vektorskih funkcija tako što za skalarne funkcije koristimo oznaku f , a za vektorske funkcije oznaku $\mathbf{f}$. Ove oznake ćemo dosljedno koristiti kroz cijelu knjigu.

U nastavku ćemo detaljnije posmatrati funkcije $f : A \rightarrow B$, definirane na svim tačkama nekog skupa $A \subseteq \mathbb{R}^n$ i čije vrijednosti su sadržane u skupu $B \subseteq \mathbb{R}$. Kao što smo ranije naveli, takve funkcije nazivamo *realnim funkcijama n realnih varijabli*. Skup A se naziva *domenom funkcije*, a skup B *kodomenom funkcije*. Skup svih vrijednosti funkcije f , u oznaci R_f , naziva se *rangom funkcije*. Dakle,

$$R_f = \{f(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in A\} \subseteq B.$$

Jednostavnosti radi, uzmimo $n = 2$, odnosno razmotrimo samo funkcije od dvije nezavisne varijable. Sve definicije i tvrdnje koje ćemo spomenuti vrijede i za funkcije sa više od dvije nezavisne varijable.

1.2 Funkcije u $\mathbb{R}^n$

Neka je funkcija f definirana u svim tačkama $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Neka je (x_0, y_0) proizvoljna ali fiksirana tačka koja pripada skupu A ili njegovom rubu ∂A . Kažemo da funkcija f ima *limes* L kad (x, y) teži ka (x_0, y_0) i pišemo

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da vrijedi

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

za sve $(x, y) \neq (x_0, y_0)$ takve da

$$(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap A.$$

Drugim riječima, $f(x, y) \rightarrow L$ kad $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ ako za svaki pozitivan broj ε možemo naći pozitivan broj δ tako da je udaljenost $f(x, y)$ od L manja od ε za sve tačke (x, y) iz A koje su na udaljenosti manjoj od δ od tačke (x_0, y_0) , osim možda same tačke (x_0, y_0) .

Funkcija f se naziva *neprekidnom* u tački $(x_0, y_0) \in A$ ako

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkcija f se naziva *neprekidnom* na skupu A ako je neprekidna u svakoj tački skupa A .

Vrijedi sljedeći klasični rezultat o ekstremnim vrijednostima neprekidnih funkcija. Ako je $A \subset \mathbb{R}^n$ zatvoren i ograničen skup (dakle, kompaktan) i $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ je neprekidna, tada f postiže i maksimum i minimum na A , tj. postoje tačke $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in A$ takve da

$$f(\mathbf{a}) \geq f(\mathbf{x}), \quad \text{za svaki } \mathbf{x} \in A,$$

i

$$f(\mathbf{b}) \leq f(\mathbf{x}), \quad \text{za svaki } \mathbf{x} \in A.$$

U nastavku uvodimo pojam parcijalnih izvoda funkcije f u tački $(x_0, y_0) \in A$. Budući da definicija koristi vrijednosti funkcije f u tačkama iz okoline (x_0, y_0) , pretpostavljamo ili da je domen A otvoren skup, ili da je (x_0, y_0) unutrašnja tačka skupa A . U oba slučaja podrazumijevamo da tačke $(x_0 + h, y_0)$ i $(x_0, y_0 + k)$, za dovoljno male $|h|$ i $|k|$, pripadaju skupu A .

Kažemo da parcijalni izvod funkcije f u odnosu na x (označavamo ga sa $\frac{\partial f}{\partial x}$) postoji u tački (x_0, y_0) ako postoji konačan limes

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h},$$

i tada pišemo

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

1.2 Funkcije u $\mathbb{R}^n$

Slično, parcijalni izvod funkcije f u odnosu na y u tački (x_0, y_0) definira se kao

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + k) - f(x_0, y_0)}{k}.$$

Ako parcijalni izvodi funkcije f u odnosu na x ili y postoje u svakoj tački nekog podskupa $B \subset A$, onda su i oni funkcije s domenom B . Te funkcije ćemo označavati kao

$$D_1 f \quad \text{ili} \quad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{ili} \quad f'_x \quad \text{ili samo} \quad f_x$$

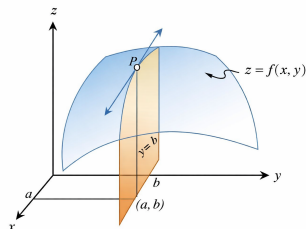
i

$$D_2 f \quad \text{ili} \quad \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{ili} \quad f'_y \quad \text{ili samo} \quad f_y.$$

Općenito, u $\mathbb{R}^n$ operator D_j označava diferenciranje po j -toj varijabli:

$$D_j = \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Pogledajmo šta je geometrijsko tumačenje parcijalnih izvoda. Za funkciju $z = f(x, y)$, parcijalni izvod $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na krivu koja se dobije kao presjek grafika $z = f(x, y)$ sa ravni $y = y_0$. Analogno, $\frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0)$ je koeficijent smjera tangente na krivu koja je presjek površi $z = f(x, y)$ i ravni $x = x_0$.



Slika 1.1: Geometrijsko tumačenje parcijalnog izvoda $\frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Ako sami parcijalni izvodi imaju parcijalne izvode, govorimo o parcijalnim izvodima drugog reda funkcije. Tako funkcija f sa dvije varijable može imati četiri parcijalna izvoda drugog reda,

$$D_1^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad D_2^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

$$D_2 D_1 f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \quad D_1 D_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}.$$

Nije teško pokazati da, ako su $D_1 f$, $D_2 f$, $D_1 D_2 f$ i $D_2 D_1 f$ neprekidne funkcije na otvorenom skupu A , tada su mješoviti parcijalni izvodi jednaki na A , tj.

$$D_2 D_1 f = D_1 D_2 f.$$

Ova se tvrdnja u literaturi često naziva **Schwarzov teorem** ili **Clairaut–Schwarzov teorem o jednakosti mješovitih parcijalnih izvoda**.

Nadalje, uslovi se mogu oslabiti. Naime, ako u okolini tačke (x_0, y_0) postoje $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ i jedan od mješovitih izvoda, recimo $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, i ako je taj mješoviti izvod neprekidan u toj okolini, tada postoji i drugi mješoviti izvod te su jednaki, tj

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0).$$

Parcijalni izvodi bilo kojeg reda većeg od drugog definiraju se analogno.

Neka je f funkcija definirana na oblasti Ω , i neka su f i svi njezini parcijalni izvodi reda $\leq k$ neprekidni na podskupu $B \subseteq \Omega$. Tada kažemo da je f klase $\mathcal{C}^k$ na B . Skup svih funkcija klase $\mathcal{C}^k$ na B označava se sa $\mathcal{C}^k(B)$, pa kada želimo da naglasimo da je f klase $\mathcal{C}^k(B)$ kraće pišemo $f \in \mathcal{C}^k(B)$. Dalje, $\mathcal{C}^0(B)$ označava skup svih neprekidnih funkcija na B , dok $\mathcal{C}^\infty(B)$ označava skup svih funkcija čiji su parcijalni izvodi svakog reda neprekidni na B . U skladu s tvrdnjom o jednakosti mješovitih parcijalnih izvoda, vrijednosti mješovitih izvoda funkcije $f \in \mathcal{C}^k(B)$ ne zavise od redoslijeda računanja parcijalnih izvoda.

Primjer 1.2.1. Svi polinomi jedne ili više varijabli, kao i funkcije $\sin x$, $\cos x$, e^x , e^{-x} , $\sin(x^3 + y^4)$, $e^x \cos y$, $e^{-(x^2 + y^2)}$ i $e^{-(x^2 + y^2 + z^2)}$ su klase $\mathcal{C}^\infty$ na odgovarajućim prostorima $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, jer postoje izvodi bilo kojeg reda po svakoj varijabli.

Primjer 1.2.2. Funkcija

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ako } x \leq 0, \\ x, & \text{ako } x > 0, \end{cases}$$

je klase $\mathcal{C}^0$ na $\mathbb{R}$, ali f nije klase $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$. Naime, funkcija f je neprekidna u svim tačkama, ali nije diferencijabilna za $x = 0$.

S druge strane, funkcija

$$g(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako } x \leq 0, \\ 1 + x^2, & \text{ako } x > 0, \end{cases}$$

je klase $\mathcal{C}^1$ na $\mathbb{R}$, ali g nije klase $\mathcal{C}^2$ na $\mathbb{R}$. Naime, prvi izvod je $g'(x) = 0$ za $x \leq 0$ i $g'(x) = 2x$ za $x > 0$, odakle vidimo da je on neprekidan u 0, dok drugi izvod ne postoji u $x = 0$.

Primjer 1.2.3. Definirajmo

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2)^2 \log \sqrt{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Nije teško provjeriti da $f \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$. Međutim, duž ose $y = 0$ dobivamo jednodimenzionalnu funkciju

$$g(x) = |x|^4 \log |x| \text{ za } x \neq 0, \quad g(0) = 0.$$

1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$

Za $x > 0$ vrijedi

$$g^{(4)}(x) = 24 \log x + 50 \rightarrow -\infty \quad (x \rightarrow 0^+),$$

pa četvrti parcijalni izvod funkcije f nije ni ograničen (a kamoli neprekidan) u tački $(0, 0)$. Stoga $f \notin \mathcal{C}^4(\mathbb{R}^2)$.

Prethodni primjeri ilustruju da vrijedi niz inkluzija

$$\mathcal{C}^0(B) \supseteq \mathcal{C}^1(B) \supseteq \mathcal{C}^2(B) \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{C}^\infty(B),$$

pri čemu je svaki skup $\mathcal{C}^k(B)$ zapravo strogo sadržan u $\mathcal{C}^{k-1}(B)$, tj. vrijedi

$$\mathcal{C}^0(B) \supset \mathcal{C}^1(B) \supset \mathcal{C}^2(B) \supset \cdots \supset \mathcal{C}^\infty(B).$$

1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$

Ako realna funkcija f jedne realne varijable ima izvode reda n u tački x_0 , onda možemo napisati polinom

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n,$$

pri čemu $f^{(k)}$ predstavlja k -ti izvod funkcije f . Ovaj polinom označavamo sa $T_n f(x_0, x)$ i zovemo Taylorov polinom n -tog stepena funkcije f u tački x_0 . Dakle,

$$T_n f(x; x_0) := f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Vrijednost

$$r_n f(x; x_0) := f(x) - T_n f(x; x_0)$$

zovemo n -ti ostatak u Taylorovoj formuli

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + r_n f(x; x_0). \quad (1.4)$$

Ako je $x_0 = 0$, Taylorova formula (1.4) se često zove MacLaurinova formula. Ako postoji $(n + 1)$ -vi izvod unutar intervala s krajevima x_0 i x , onda se n -ti ostatak u Taylorovoj formuli može napisati u sljedećem obliku

$$r_n f(x; x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n + 1)!}(x - x_0)^{n+1},$$

gdje je c tačka između x_0 i x . Ovaj oblik ostatka zove se ostatak u Lagrangeovom obliku.

1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$

Neka je f realna funkcija klase $\mathcal{C}^\infty$ jedne realne varijable x definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, i neka je x_0 bilo koja tačka iz intervala I . Red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad (1.5)$$

naziva se *Taylorov red* funkcije f u tački x_0 . Za proizvoljnu funkciju $f \in \mathcal{C}^\infty$, Taylorov red (1.5) može u potpunosti divergirati, ili, ako konvergira, ne mora konvergirati ka $f(x)$. Funkcije $f \in \mathcal{C}^\infty$ za koje Taylorov red konvergira ka vrijednosti $f(x)$ za sve x u okolini tačke x_0 nazivaju se *analitičkim funkcijama* u tački x_0 .

Definicija 1.3.1. *Za realnu funkciju f jedne realne varijable x kažemo da je analitička u tački x_0 ako postoji $\rho > 0$ tako da se funkcija f može na intervalu $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ predstaviti stepenim redom, tj. ako je*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \quad (1.6)$$

za $|x - x_0| < \rho$.

Iz teorije stepenih redova znamo da se u intervalu konvergencije stepeni red može diferencirati član po član. Izračunavajući $f'(x)$, $f''(x)$, ... u tački x_0 , dobiva se $f(x_0) = a_0$, $f'(x_0) = a_1$, $f''(x_0) = 2a_2$, ... i općenito $f^{(n)}(x_0) = n!a_n$, za $n = 0, 1, 2, \dots$. Dakle, $a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, pa je zapravo stepeni red (1.6) Taylorov red funkcije f u tački x_0 , tj. red (1.5). Dakle, funkcija f je analitička u tački x_0 ako njen Taylorov red oko tačke x_0 postoji i ima pozitivan radijus konvergencije. Također, analitička funkcija ima izvode svakog reda u tački x_0 , tj. ona je klase $\mathcal{C}^\infty$.

Taylorov red funkcije $f(x) = e^x$ razvijen u okolini tačke $x_0 = 0$ glasi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n,$$

a poznato je da ovaj red konvergira ka e^x za svako $x \in \mathbb{R}$. Prema tome, funkcija e^x je analitička u tački $x = 0$. Zapravo, ona je analitička za sve $x \in \mathbb{R}$, pa možemo zapisati

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Slično, funkcije $\sin x$ i $\cos x$ su analitičke na $\mathbb{R}$, te vrijedi

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$

Očigledno je da je svaki polinom analitička funkcija na $\mathbb{R}$.

Funkcija $f(x) = (1 - x)^{-1}$ je analitička za sve $|x| < 1$, pri čemu vrijedi

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1.$$

Općenito, za $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ vrijedi sljedeći razvoj funkcije $f(x) = (1 + x)^\alpha$ u red

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{\alpha}{k} x^k = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + \dots.$$

Ovaj red, koji nazivamo *binomnim redom*, konvergira za $x \in (-1, 1)$ ukoliko je $\alpha \leq -1$. Ako je $\alpha > 0$, konvergencija vrijedi i na zatvorenom intervalu $[-1, 1]$, dok u slučaju $-1 < \alpha < 0$ red konvergira za sve $x \in (-1, 1]$.

Neka je $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren skup i $f \in \mathcal{C}^{m+1}(\Omega)$. Fiksirajmo $\mathbf{x}^0 \in \Omega$ i stavimo $\mathbf{h} = \mathbf{x} - \mathbf{x}^0$. Koristit ćemo sljedeću multiindeks notaciju:

$$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}_0^n,$$

$$|\boldsymbol{\alpha}| = \sum_{j=1}^n \alpha_j = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n,$$

$$\boldsymbol{\alpha}! = \prod_{j=1}^n \alpha_j! = \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_n!,$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha = \prod_{j=1}^n (x_j - x_j^0)^{\alpha_j} = (x_1 - x_1^0)^{\alpha_1} (x_2 - x_2^0)^{\alpha_2} \dots (x_n - x_n^0)^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Sada smo u prilici da definiramo Taylorov polinom i Taylorov red funkcije više varijabli.

Taylorov polinom reda m u tački $\mathbf{x}^0$ funkcije f je

$$T_m f(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) = \sum_{|\boldsymbol{\alpha}| \leq m} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\boldsymbol{\alpha}!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha.$$

Za funkcije više varijabli Taylorova formula s ostatkom u Lagrangeovom obliku glasi

$$f(\mathbf{x}) = T_m f(\mathbf{x}; \mathbf{x}^0) + \frac{1}{(m+1)!} \left(\sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right)^{m+1} f(\mathbf{x}^0 + \theta \mathbf{h}), \quad \theta \in (0, 1).$$

Ako je f realna funkcija dvije realne varijable x i y , Taylorov polinom prvog stepena u okolini tačke (x_0, y_0) glasi

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

1.3 Taylorova formula, Taylorovi redovi i analitičke funkcije u $\mathbb{R}^n$

a Taylorov polinom drugog stepena je dat sa

$$\begin{aligned} f(x, y) = f(x_0, y_0) &+ \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left[\frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x^2}(x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial x \partial y}(x - x_0)(y - y_0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 f(x_0, y_0)}{\partial y^2}(y - y_0)^2 \right]. \end{aligned}$$

Ako funkcija f dvije varijable pripada klasi $\mathcal{C}^{m+1}$ u okolini tačke (x_0, y_0) , tada Taylorova formula glasi

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^m \frac{1}{j!} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^j f(x_0, y_0) + R_m(x_0, y_0; h_1, h_2),$$

pri čemu je ostatak R_m dat sa

$$R_m(x_0, y_0; h_1, h_2) = \frac{1}{(m+1)!} (h_1 D_1 + h_2 D_2)^{m+1} f(x_0 + \theta h_1, y_0 + \theta h_2),$$

za neko $\theta \in (0, 1)$.

Ako je $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$, Taylorov red funkcije f u tački $\mathbf{x}^0$ glasi

$$\sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{D^\alpha f(\mathbf{x}^0)}{\alpha!} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^0)^\alpha. \quad (1.7)$$

Na primjer, za $n = 2$, prvih nekoliko članova Taylorovog reda (1.7) su

$$\begin{aligned} &f(x_1^0, x_2^0) + D_1 f(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0) + D_2 f(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0) \\ &+ \frac{1}{2!} D_1^2 f(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0)^2 + \frac{1}{1!1!} D_1 D_2 f(x_1^0, x_2^0)(x_1 - x_1^0)(x_2 - x_2^0) \\ &+ \frac{1}{2!} D_2^2 f(x_1^0, x_2^0)(x_2 - x_2^0)^2 + \dots \end{aligned}$$

Ovdje su zapisani samo članovi čiji je stepen ≤ 2 (tj. $0 \leq |\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 \leq 2$), dok tačke označavaju članove stepena ≥ 3 ($|\alpha| \geq 3$). U slučaju funkcije f dvije varijable Taylorov red u okolini tačke (x_1^0, x_2^0) se može kraće zapisati u obliku

$$f(x_1^0, x_2^0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} ((x_1 - x_1^0)D_1 + (x_2 - x_2^0)D_2)^j f(x_1^0, x_2^0).$$

Ako je f funkcija n varijabli $x_1, \dots, x_n$ klase $\mathcal{C}^\infty$, onda njen Taylorov red možemo napisati u sljedećem obliku

$$f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{1}{j!} ((x_1 - x_1^0)D_1 + \dots + (x_n - x_n^0)D_n)^j f(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

1.4 Površi i normale u $\mathbb{R}^3$

Kao i u slučaju funkcija jedne varijable, Taylorov red (1.7) proizvoljne funkcije klase C^∞ možda uopće ne konvergira, ili, ako konvergira, ne mora konvergirati ka $f(\mathbf{x})$.

Slično kao u slučaju realnih funkcija jedne realne varijable, možemo definirati pojam analitičke funkcije realne funkcije više realnih varijabli koristeći stepene redove više varijabli, čime se mi nećemo baviti u ovoj knjizi. Karakterizaciju analitičkih funkcija više varijabli dat ćemo preko Taylorovog reda.

Definicija 1.3.2. *Neka je $f \in C^\infty(\Omega)$, gdje je Ω oblast u $\mathbb{R}^n$, i neka je $\mathbf{x}^0$ proizvoljna tačka iz Ω . Ako Taylorov red (1.7) funkcije f u tački $\mathbf{x}^0$ konvergira ka $f(\mathbf{x})$ za svako $\mathbf{x}$ u okolini tačke $\mathbf{x}^0$, tada kažemo da je f analitička u tački $\mathbf{x}^0$. Ako je f analitička u svakoj tački oblasti Ω , tada se f naziva analitičkom funkcijom na Ω .*

Taylorov red za funkciju $f(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2}$ razvijen oko tačke $(0, 0)$ je

$$\sum_{\alpha \geq 0} \frac{1}{\alpha!} \mathbf{x}^\alpha = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2},$$

a ovaj red konvergira za sve $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. Funkcija $e^{x_1+x_2}$ je analitička na cijelom $\mathbb{R}^2$, te možemo zapisati

$$e^{x_1+x_2} = \sum_{\alpha_1, \alpha_2=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha_1! \alpha_2!} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}, \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Funkcija $\cos(2x_1 - x_2 + x_3)$ je analitička na cijelom $\mathbb{R}^3$, dok je funkcija

$$f(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{x_1^2 + \dots + x_n^2 - 1}$$

analitička u $\mathbb{R}^n$ osim na jediničnoj sferi. Slično, svi polinomi sa n varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$ su analitički u $\mathbb{R}^n$.

1.4 Površi i normale u $\mathbb{R}^3$

Često je vrlo korisno vizualizirati funkciju f jedne varijable x crtajući njen grafik u (x, y) -ravni. Pišemo $y = f(x)$ i crtamo skup tačaka oblika $(x, f(x))$, gdje x uzima vrijednosti iz domena funkcije f . Obično je grafik funkcije f neka kriva u (x, y) -ravni. Međutim, nije svaka kriva u (x, y) -ravni grafik neke funkcije. Na primjer, kružnica nije grafik nijedne funkcije.

U principu, trebali bismo biti u mogućnosti da nacrtamo grafik funkcije sa bilo kojim brojem varijabli, ali smo ograničeni nemogućnošću crtanja figura u više od tri dimenzije. Stoga možemo crtati grafike funkcija sa najviše dvije varijable. Ako je f funkcija varijabli x i y , pišemo $z = f(x, y)$ i crtamo u (x, y, z) -prostoru skup tačaka oblika $(x, y, f(x, y))$, gdje (x, y) uzimaju vrijednosti iz domena funkcije

1.4 Površi i normale u $\mathbb{R}^3$

f. Iako je grafik funkcije f obično površ, nisu sve površi u tri dimenzije grafici funkcija sa dvije varijable. Na primjer, sfera nije grafik nijedne funkcije.

Budući da će površi igrati centralnu ulogu u mnogim našim razmatranjima, opisat ćemo novu klasu površi koje su općenitije od površi dobivenih kao grafici funkcija. Radi jednostavnosti, ograničit ćemo naša razmatranja na slučaj tri dimenzije.

Neka je Ω oblast u $\mathbb{R}^3$ i neka je $F(x, y, z)$ skalarna funkcija klase $\mathcal{C}^1(\Omega)$.

Nabla operator (∇ operator ili Hamiltonov operator) je diferencijalni operator oblika $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$ gdje su $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ jedinični ortogonalni vektori.

Djelovanjem operatora nabla na funkciju F dobivamo vektorsku funkciju koju nazivamo *gradijent* funkcije F , a označavamo je sa **grad** F ili ∇F :

$$\mathbf{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right).$$

Vrijednost **grad** F u tački $(x, y, z) \in \Omega$ predstavlja vektor čije su komponente vrijednosti parcijalnih izvoda funkcije F u toj tački. Prikladno je vizualizirati **grad** F kao vektorsko polje (polje vektora), gdje jedan vektor **grad** F izlazi iz svake tačke $(x, y, z) \in \Omega$.

Sada pretpostavimo da vrijedi

$$\mathbf{grad} F(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \quad (1.8)$$

za svaku tačku oblasti Ω . Ovo znači da parcijalni izvodi funkcije F ne iščezavaju istovremeno ni u jednoj tački iz Ω . Pod pretpostavkom (1.8), skup tačaka (x, y, z) u Ω koji zadovoljavaju jednadžbu

$$F(x, y, z) = c \quad (1.9)$$

za neku odgovarajuću vrijednost konstante c , je površ u Ω . Ova površ se naziva *nivo-površ* funkcije F . Konstantu c uzimamo iz skupa vrijednosti funkcije F na skupu Ω . Na primjer, ako je (x_0, y_0, z_0) data tačka u Ω i ako uzmemo $c = F(x_0, y_0, z_0)$, jednadžba

$$F(x, y, z) = F(x_0, y_0, z_0)$$

predstavlja površ u Ω koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0, z_0) . Za različite vrijednosti konstante c , jednadžba (1.9) predstavlja različite površi u Ω . Svaka tačka u Ω leži na tačno jednoj nivo-površi funkcije F , a dvije tačke (x_0, y_0, z_0) i (x_1, y_1, z_1) leže na istoj nivo-površi ako i samo ako je

$$F(x_0, y_0, z_0) = F(x_1, y_1, z_1).$$

Na ovaj način se oblast Ω može vizualizirati kao oblast sačinjena od nivo-površi funkcije F .

Često smatramo da je c u jednadžbi (1.9) parametar i kažemo da jednadžba (1.9) predstavlja *jednparametarsku familiju površi* u Ω .

Kao primjer uzmimo funkciju

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

Tada je

$$\mathbf{grad} F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

i ako je Ω cijeli prostor $\mathbb{R}^3$ osim ishodišta, uvjet (1.8) je zadovoljen u svakoj tački skupa Ω . Nivo-površ funkcije F su sfere sa centrom u koordinatnom ishodištu.

Kao još jedan primjer, posmatrajmo funkciju

$$F(x, y, z) = y.$$

Tada je

$$\mathbf{grad} F(x, y, z) = (0, 1, 0),$$

i uvjet (1.8) je zadovoljen u svakoj tački prostora $\mathbb{R}^3$. Nivo-površ funkcije su ravni paralelne (x, z) -ravni.

Razmotrimo sada određenu nivo-površ S_c zadanu jednađbom (1.9) za fiksnu vrijednost c . Pod prethodno navedenim pretpostavkama o funkciji F , u svakoj tački na S_c postoji tangentna (tj. tangencijalna) ravan. U toj ravni se nalaze svi tangentni vektori na krive koje leže na površi S_c i prolaze kroz tačku (x_0, y_0, z_0) za koju vrijedi $F(x_0, y_0, z_0) = c$.

U tački dodira, gradijent $\mathbf{grad} F$ je normalan (okomit) na tu tangentnu ravan. Zbog toga kažemo da je u svakoj tački nivo-površ S_c vektor $\mathbf{grad} F$ normalan na S_c .

Podsjetimo se jednađbe ravni u $\mathbb{R}^3$. Budući da koristimo oznake x, y, z za koordinate, koristit ćemo oznaku $\mathbf{r}$ za vektor položaja tačke sa koordinatama (x, y, z) . Dakle, $\mathbf{r} = (x, y, z)$. Pretpostavimo sada da je P ravan koja prolazi kroz fiksnu tačku $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i da je vektor normale dat sa $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$. Ako je $\mathbf{r}$ vektor položaja proizvoljne tačke na ravni P , tada vektor $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ leži u ravni P i mora biti normalan na $\mathbf{n}$. Iz toga slijedi da je

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0,$$

ili, u skalarnom obliku,

$$(x - x_0)n_x + (y - y_0)n_y + (z - z_0)n_z = 0. \quad (1.10)$$

Jednađba (1.10) je jednađba ravni P . Primijetimo da (1.10) ima oblik (1.9), gdje je $F(x, y, z)$ lijeva strana jednađbe (1.10), a $\mathbf{grad} F = (n_x, n_y, n_z)$.

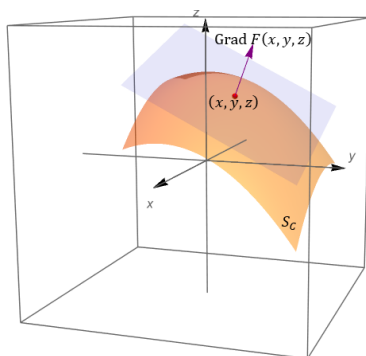
Vraćajući se sada na nivo-površ S_c zadanu jednađbom (1.9), lako je vidjeti da je jednađba tangentne ravni na S_c u tački (x_0, y_0, z_0) data kao

$$(x - x_0)\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0)\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) + (z - z_0)\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = 0,$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{grad} F(\mathbf{r}_0) = 0.$$

1.5 Teorem o implicitno datim funkcijama



Slika 1.2: Nivo-površ, tangentna ravan i gradijent.

Kao primjer, nađimo jednadžbu tangentne ravni na sferu

$$x^2 + y^2 + z^2 = 6$$

u tački $(1, 2, -1)$. Imamo

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

$$\mathbf{grad} F(x, y, z) = (2x, 2y, 2z),$$

i

$$\mathbf{grad} F(1, 2, -1) = (2, 4, -2).$$

Vektor $(2, 4, -2)$ je normalan na sferu u tački $(1, 2, -1)$, a jednadžba tangentne ravni u tački $(1, 2, -1)$ je

$$2(x - 1) + 4(y - 2) - 2(z + 1) = 0,$$

odnosno

$$x + 2y - z - 6 = 0.$$

Ponovo razmotrimo površ S_c zadanu jednadžbom (1.9) i pretpostavimo da tačka (x_0, y_0, z_0) leži na toj površini. Postavlja se pitanje da li je moguće opisati S_c jednadžbom oblika

$$z = f(x, y),$$

tako da S_c bude graf funkcije f . Ovo je ekvivalentno pitanju da li je moguće riješiti jednadžbu (1.9) za z preko x i y . Odgovor nam daje teorem o implicitno datim funkcijama kojem je posvećena sljedeća sekcija.

1.5 Teorem o implicitno datim funkcijama

Ako je $\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$, tada se jednadžba (1.9) može riješiti po z u odnosu na x i y u okolini tačke (x_0, y_0, z_0) . Štaviše, parcijalni izvodi od z u odnosu na x i y ,

1.5 Teorem o implicitno datim funkcijama

tj. parcijalni izvodi funkcije f u (1.9), mogu se dobiti implicitnim diferenciranjem jednadžbe (1.9), gdje se z smatra funkcijom od x i y :

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

Slično, ako $\frac{\partial F}{\partial x}$ ne isčezava u tački (x_0, y_0, z_0) , tada u okolini tačke (x_0, y_0, z_0) možemo riješiti (1.9) po x i možemo izračunati izvode od x u odnosu na y i z pomoću implicitnog diferenciranja. Zapravo, ako F zadovoljava uvjet (1.8) u svakoj tački Ω , tada teorem o implicitno datim funkcijama tvrdi da u okolini bilo koje tačke u Ω uvijek možemo riješiti jednadžbu (1.9) za bar jednu od varijabli u odnosu na preostale dvije.

Ponovo, kao primjer, razmotrimo jednadžbu jedinične sfere

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1. \quad (1.11)$$

U tački $(0, 0, 1)$ ove površi imamo $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, 1) = 2$. Prema teoremu o implicitno datim funkcijama, možemo riješiti jednadžbu (1.11) po z u okolini tačke $(0, 0, 1)$. Zapravo, imamo

$$z = +\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1. \quad (1.12)$$

U gornjem poluprostoru $z > 0$, jednadžbe (1.11) i (1.12) opisuju istu površ. Tačka $(0, 0, -1)$ također pripada površi zadanoj jednadžbom (1.11), a $\frac{\partial F}{\partial z}(0, 0, -1) = -2$. U okolini tačke $(0, 0, -1)$ imamo

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 < 1. \quad (1.13)$$

U donjem poluprostoru $z < 0$, jednadžbe (1.11) i (1.13) predstavljaju istu površ. S druge strane, u tački $(1, 0, 0)$ imamo $\frac{\partial F}{\partial x}(1, 0, 0) = 0$, i lako je vidjeti da nije moguće riješiti (1.11) za z u terminima x i y u okolini ove tačke. Međutim, moguće je riješiti po x u odnosu na y i z . Na primjer, u okolini tačke $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$, koja zadovoljava (1.11), moguće ju je riješiti po svakoj od varijabli u odnosu na preostale dvije.

Općenito, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 1.5.1 (Teorem o implicitno datim funkcijama). *Pretpostavimo da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

- 1) funkcija $F(x_1, \dots, x_n, y)$ je definirana i neprekidna u $(n+1)$ -dimenzionalnom kvadru

$$\mathcal{D} = [x_1^0 - \Delta_1, x_1^0 + \Delta_1] \times \dots \times [x_n^0 - \Delta_n, x_n^0 + \Delta_n] \times [y_0 - \Delta', y_0 + \Delta']$$

sa centrom u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$;

- 2) parcijalni izvodi $F'_{x_1}, \dots, F'_{x_n}, F'_y$ postoje i neprekidni su u $\mathcal{D}$;

- 3) funkcija F u tački $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$ iščezava, tj. $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) = 0$;

1.6 Diferencijabilnost vektorske funkcije. Divergencija i rotor vektorskog polja

4) parcijalni izvod F'_y u toj tački nije jednak nuli, tj. $F'_y(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0) \neq 0$.

Tada

a) u nekoj okolini tačke $(x_1^0, \dots, x_n^0, y_0)$, jednadžba

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

definira y kao jednoznačnu funkciju varijabli $x_1, \dots, x_n$, tj. $y = f(x_1, \dots, x_n)$;

b) za $x_1 = x_1^0, \dots, x_n = x_n^0$, ova funkcija poprima vrijednost y_0 , tj.

$$f(x_1^0, \dots, x_n^0) = y_0;$$

c) funkcija $f(x_1, \dots, x_n)$ je neprekidna;

d) funkcija f ima neprekidne parcijalne izvode $f'_{x_1}, \dots, f'_{x_n}$, i vrijedi

$$f'_{x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_y} \text{ za svaki } i = 1, \dots, n.$$

1.6 Diferencijabilnost vektorske funkcije. Divergencija i rotor vektorskog polja

Vratimo se sada vektorskim funkcijama. Diferencijabilnost vektorske funkcije može se definirati preko diferencijabilnosti njenih komponenti. Neka je S otvoren podskup iz $\mathbb{R}^n$. Posmatrajmo vektorsku funkciju

$$\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{F}(\mathbf{x}) = (f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in S,$$

gdje su $f_i : S \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$, komponente funkcije $\mathbf{F}$. Funkcija $\mathbf{F}$ je diferencijabilna u tački $\mathbf{x} \in S$ ako su sve njene komponente f_i diferencijabilne u toj tački.

Diferencijabilnost se može definirati i ekvivalentno na sljedeći način: funkcija $\mathbf{F}$ je diferencijabilna u tački $\mathbf{x}$ ako se može aproksimirati linearnim preslikavanjem $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ u blizini tačke $\mathbf{x}$, pri čemu su greške "manje od linearnih". To linearno preslikavanje opisano je *Jacobijevom matricom* funkcije $\mathbf{F}$ u tački $\mathbf{x}$:

$$J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}.$$

1.6 Diferencijabilnost vektorske funkcije. Divergencija i rotor vektorskog polja

Drugim riječima, Jacobijeva matrica funkcije $\mathbf{F}$ sadrži sve prve parcijalne izvode komponenti funkcije $\mathbf{F}$. Ona predstavlja matricu linearnog preslikavanja koje najbolje aproksimira promjenu $\mathbf{F}$ u okolini tačke $\mathbf{x}$.

Ako je $m = n$, tj. $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, tada se Jacobijan funkcije $\mathbf{F}$ u tački $\mathbf{x}$ definiše kao determinanta Jacobijeve matrice $\det(J_{\mathbf{F}}(\mathbf{x}))$ i često označava sa $\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}$. Dakle,

$$\frac{\partial(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}.$$

Jacobijan funkcije $\mathbf{F}$ mjeri lokalnu dilataciju ili kompresiju prostora koje $\mathbf{F}$ proizvodi u okolini tačke $\mathbf{x}$, kao i promjenu orijentacije. Specijalno, apsolutna vrijednost Jacobijana opisuje faktor promjene n -dimenzionalne zapremine pri preslikavanju. Zbog toga Jacobijan igra ključnu ulogu kod smjene varijabli u višestrukim integralima.

Sada ćemo se upoznati sa dva važna pojma *divergencije* i *rotora* vektorskog polja, a koje formalno definiramo kao skalarni i vektorski proizvod operatora nabla i vektorske funkcije $\mathbf{F} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$, pri čemu je S otvoren podskup od $\mathbb{R}^3$.

Neka su x, y, z Descartesove koordinate u prostoru i neka je

$$\mathbf{F}(x, y, z) = f_1(x, y, z)\mathbf{i} + f_2(x, y, z)\mathbf{j} + f_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

diferencijabilna vektorska funkcija. Divergenciju vektorske funkcije ili vektorskog polja $\mathbf{F}$ definiramo kao

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

Funkciju

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

zovemo rotor vektorske funkcije ili rotor vektorskog polja $\mathbf{F}$.

Iz definicije rotora vektorske funkcije i teorema o jednakosti mješovitih parcijalnih izvoda može se pokazati da za bilo koju C^2 funkciju $\phi(x, y, z)$ vrijedi:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

1.7 Krive i tangente u $\mathbb{R}^3$

Najčešći način opisivanja krive u $\mathbb{R}^3$ je pomoću parametarske reprezentacije. Ako $\mathbf{r}$ označava vektor položaja tačke na krivoj C , tada se C može opisati vektorskom jednačbom

$$\mathbf{r} = \mathbf{F}(t), \quad t \in I, \quad (1.14)$$

gdje je $I \subseteq \mathbb{R}$ neki interval, a $\mathbf{F}(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ vektorska funkcija parametra t . Ako pišemo $\mathbf{r} = (x, y, z)$, tada je vektorska jednačba (1.14) ekvivalentna sistemu od tri jednačbe

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t); \quad t \in I. \quad (1.15)$$

Pretpostavljamo da funkcije f_1 , f_2 i f_3 pripadaju $\mathcal{C}^1(I)$ i da njihovi izvodi ne iščezavaju istovremeno ni u jednoj tački iz I , tj.

$$\left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \frac{df_3}{dt} \right) \neq (0, 0, 0), \quad t \in I. \quad (1.16)$$

Tada za svaki $t \in I$, nenula vektor

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \left(\frac{df_1}{dt}, \frac{df_2}{dt}, \frac{df_3}{dt} \right)$$

je vektor tangente na krivu C u tački $(f_1(t), f_2(t), f_3(t))$ te krive.

Primjer 1.7.1. Kriva zadana jednačbama

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R},$$

poznata je pod imenom heliks (slika 1.3). Imamo

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) = (-\sin t, \cos t, 1).$$

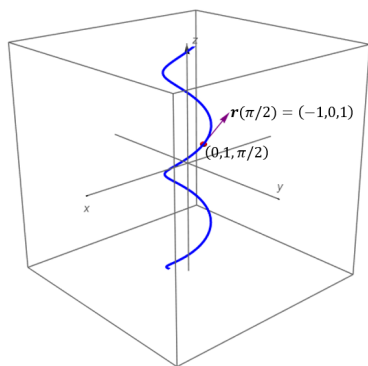
Za $t = \pi/2$ na heliksu odgovara tačka $(0, 1, \pi/2)$, a u toj tački vektor $(-1, 0, 1)$ je vektor tangente na heliks.

Drugi način opisivanja krive u $\mathbb{R}^3$ je korištenjem činjenice da je presjek dviju površi obično kriva. Neka su F_1 i F_2 realne funkcije klase $\mathcal{C}^1$ definirane na nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ i pretpostavimo da $\mathbf{grad} F_1$ i $\mathbf{grad} F_2$ ne iščezavaju u Ω . Tada, skup tačaka koji zadovoljava svaku od jednačbi

$$F_1(x, y, z) = c_1, \quad F_2(x, y, z) = c_2 \quad (1.17)$$

predstavlja površ, i stoga skup tačaka koji zadovoljava obje jednačbe mora ležati na presjeku ove dvije površi. Taj presjek, ako nije prazan, općenito je kriva.

U stvari, ako napravimo dodatnu pretpostavku da $\mathbf{grad} F_1$ i $\mathbf{grad} F_2$ nisu kolinearni ni u jednoj tački iz Ω , tada je presjek (ako nije prazan) ove dvije



Slika 1.3: Grafik krive $(\cos t, \sin t, t)$ iz Primjera 1.7.1.

površi zadane jednadžbama (1.17) kriva. Pretpostavka o nekolinearnosti vektora $\mathbf{grad} F_1$ i $\mathbf{grad} F_2$ može se izraziti u sljedećem obliku

$$\mathbf{grad} F_1(x, y, z) \times \mathbf{grad} F_2(x, y, z) \neq 0, \quad (x, y, z) \in \Omega. \quad (1.18)$$

Dokazat ćemo gore navedenu tvrdnju pokazujući da, pod pretpostavkom (1.18), ako je (x_0, y_0, z_0) neka tačka u Ω koja zadovoljava jednadžbe (1.17), tada se skup tačaka (x, y, z) koji zadovoljava (1.17) u okolini (x_0, y_0, z_0) može opisati parametarski jednadžbama oblika (1.15). Budući da je

$$\mathbf{grad} F_1 \times \mathbf{grad} F_2 = \left(\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(z, x)}, \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, y)} \right), \quad (1.19)$$

gdje je $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)}$ Jacobijan definiran kao

$$\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial y} \frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \frac{\partial F_2}{\partial y},$$

uvjet (1.18) znači da je u svakoj tački skupa Ω bar jedan od Jacobijana sa desne strane (1.19) različit od nule. Pretpostavimo, na primjer, da je

$$\left. \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, z)} \right|_{(x_0, y_0, z_0)} \neq 0.$$

Općenitiji oblik teorema o implicitno datim funkcijama tvrdi da je u okolini tačke (x_0, y_0, z_0) moguće riješiti sistem jednadžbi (1.17) po y i z u odnosu na x :

$$y = g(x), \quad z = h(x). \quad (1.20)$$

Ako postavimo $x = t$, jednadžbe (1.20) mogu se zapisati u parametarskom obliku

$$x = t, \quad y = g(t), \quad z = h(t). \quad (1.21)$$

1.7 Krive i tangente u $\mathbb{R}^3$

Ovo pokazuje da u okolini tačke (x_0, y_0, z_0) skup tačaka (x, y, z) koji zadovoljava (1.17) čini krivu sa parametarskom reprezentacijom zadanom pomoću (1.21). Primijetimo da se u (1.21) varijabla x zapravo koristi kao parametar krive. Općenito, pod pretpostavkom (1.18), jednačbe (1.17), sa odgovarajućim vrijednostima c_1 i c_2 , predstavljaju krivu. U okolini bilo koje tačke na toj krivoj, ona se može predstaviti parametarski, s jednom od varijabli koja se koristi kao parametar.

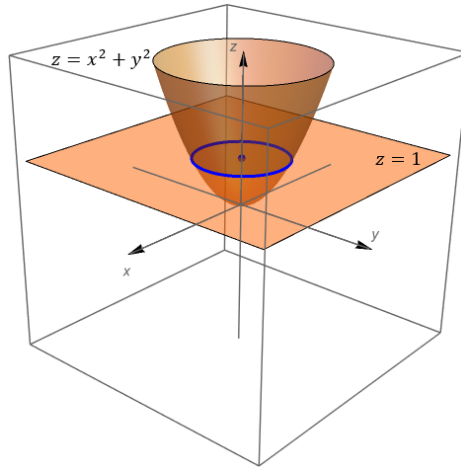
Primjer 1.7.2. Neka su

$$F_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z, \quad F_2(x, y, z) = z.$$

Imamo

$$\mathbf{grad} F_1 = (2x, 2y, -1), \quad \mathbf{grad} F_2 = (0, 0, 1),$$

i lako je vidjeti da, ako je $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, z) : x = 0 \text{ i } y = 0\}$, tada je u Ω uvjet (1.18) zadovoljen.



Slika 1.4: Grafici funkcija $z = x^2 + y^2$, $z = 1$ i krive $(t, \pm\sqrt{1-t^2}, 1)$ iz Primjera 1.7.2.

Jednačbe

$$x^2 + y^2 - z = 0, \quad z = 1$$

predstavljaju kružnicu koja je presjek paraboloida predstavljenog prvom jednačbom i ravni predstavljene drugom jednačbom. Tačka $(0, 1, 1)$ leži na kružnici, a u okolini ove tačke kružnica ima parametarsku reprezentaciju

$$x = t, \quad y = +\sqrt{1-t^2}, \quad z = 1; \quad t \in (-1, 1).$$

Pretpostavimo sada da je kriva C zadana parametarski jednačbama (1.15), gdje funkcije f_1, f_2, f_3 zadovoljavaju uvjet (1.16). Da li je moguće predstaviti

C jednadžbama oblika (1.17)? Ili, u geometrijskom smislu, da li je C presjek dvije površi? Odgovor na ovo pitanje je potvrđan. Zapravo, razmotrimo tačku (x_0, y_0, z_0) koja odgovara $t = t_0$ i pretpostavimo da $f'_1(t_0) \neq 0$. Tada, prema teoremu o implicitno datim funkcijama, jednadžba

$$x - f_1(t) = 0$$

može se riješiti po t u odnosu na x za (x, t) u okolini (x_0, t_0) , tj.

$$t = g(x). \quad (1.22)$$

Zamjenjujući (1.22) u jednadžbe iz relacije (1.15), dobivamo

$$y = f_2(g(x)), \quad z = f_3(g(x)). \quad (1.23)$$

Jednadžbe (1.23) predstavljaju krivu C u okolini (x_0, y_0, z_0) kao presjek dvije površi koje su zapravo cilindrične površi. Prva od jednadžbi (1.23) opisuje cilindričnu površ sa generatrisama paralelnim z -osi, dok druga jednadžba opisuje cilindričnu površ sa generatrisama paralelnim y -osi. Sada je jasno da su oba načina predstavljanja krive u $\mathbb{R}^3$ suštinski ekvivalentna. U nastavku ćemo koristiti onu reprezentaciju krive koja nam je prikladnija.

Razmotrimo ponovo jednadžbe (1.17). Svakom skupu odgovarajućih vrijednosti c_1 i c_2 odgovara kriva opisana jednadžbama (1.17). Za različite vrijednosti c_1 i c_2 , jednadžbe (1.17) opisuju različite krive. Skup svih ovih krivih naziva se *dvoparametarska familija krivih*, a c_1 i c_2 se nazivaju parametrima ove familije.

Primjer 1.7.3. Neka su F_1 , F_2 i Ω kao u Primjeru 1.7.2. Za odgovarajuće vrijednosti c_1 i c_2 , jednadžbe

$$x^2 + y^2 - z = c_1, \quad z = c_2$$

predstavljaju *dvoparametarsku familiju krivih* koje su kružnice u Ω . Odgovarajuće vrijednosti c_1 i c_2 su svi parovi realnih brojeva koji zadovoljavaju uvjet

$$c_1 + c_2 > 0.$$

U parametarskoj reprezentaciji (1.15) krive C , pretpostavljeno je da su koordinatne funkcije f_1, f_2, f_3 klase $\mathcal{C}^1(I)$, a njihovi izvodi da zadovoljavaju uvjet (1.16). Ove pretpostavke garantuju da je vektor tangente $(f'_1(t), f'_2(t), f'_3(t))$ uvijek različit od nule i da se neprekidno mijenja na C , što znači da C nema špičeve. Takva kriva C se ponekad naziva *glatkom krivom*. U ovoj knjizi bavit ćemo se samo glatkim krivama, iako nećemo uvijek koristiti riječ "glatka".

Kriva C može imati mnogo različitih parametarskih reprezentacija. Na primjer,

$$x = t, \quad y = t, \quad z = t; \quad t \in [0, \infty), \quad (1.24)$$

$$x = t^2 - 1, \quad y = t^2 - 1, \quad z = t^2 - 1; \quad t \in [1, \infty), \quad (1.25)$$

1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti

predstavljaju istu krivu, koja je prava linija koja počinje u koordinatnom početku i prolazi kroz tačku $(1, 1, 1)$. Često kažemo da su (1.24) i (1.25) dvije parametarske reprezentacije ove prave.

Općenito, pretpostavimo da je kriva C parametarski predstavljena jednadžbama (1.15). Neka je g funkcija klase $C^1(I)$ takva da $\frac{dg(t)}{dt} > 0$ za $t \in I$, i postavimo

$$t' = g(t), \quad t \in I.$$

Kako se t mijenja unutar intervala I , t' se mijenja unutar nekog intervala I' . Budući da je g strogo rastuća funkcija, g ima inverznu funkciju, označimo je sa h ,

$$t = h(t'), \quad t' \in I'.$$

Nova parametarska reprezentacija krive C data je jednadžbama

$$x = f_1(h(t')), \quad y = f_2(h(t')), \quad z = f_3(h(t')); \quad t' \in I'.$$

Predstavljanje krive kao presjeka površi također se može učiniti na mnogo različitih načina. Na primjer, kriva predstavljena parametarski jednadžbama (1.24) ili (1.25) može se predstaviti jednadžbama

$$y - x = 0, \quad z - x = 0; \quad x \geq 0,$$

ili jednadžbama

$$x + y - 2z = 0, \quad z - y = 0; \quad x \geq 0.$$

1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti

Na kraju ovog poglavlja definiramo pojmove *mногоstrukosti* i *podmногоstrukosti* u $\mathbb{R}^n$.

Najprije ćemo uvesti pojmove topološkog prostora i homeomorfizma.

Definicija 1.8.1 (Topološki prostor). *Neka je X skup. Familiju τ podskupova skupa X nazivamo topologijom na X ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. $\emptyset, X \in \tau$,
2. zatvorena je na konačne presjeke, tj. ako su $U, V \in \tau$, onda je $U \cap V \in \tau$,
3. zatvorena je na proizvoljne unije, tj. ako je $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A} \subseteq \tau$, onda je

$$\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \in \tau.$$

Par (X, τ) nazivamo topološkim prostorom, a elemente τ nazivamo otvorenim skupovima.

1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti

Često umjesto topološki prostor (X, τ) kažemo samo topološki prostor X kada je iz konteksta jasno o kojoj topologiji je riječ.

Primjer 1.8.1. Skup $\mathbb{R}$ sa familijom svih otvorenih interвала oblika (a, b) , pri čemu je $-\infty < a < b < +\infty$, je topološki prostor.

Definicija 1.8.2 (Homeomorfizam). *Neka su (X, τ_1) i (Y, τ_2) topološki prostori i $f : X \rightarrow Y$ neko preslikavanje. Kažemo da je f homeomorfizam ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

- $f : X \rightarrow Y$ je bijekcija,
- za svaki $U \in \tau_1$ je $f(U) \in \tau_2$,
- za svaki $V \in \tau_2$ je $f^{-1}(V) \in \tau_1$.

U slučaju da postoji homeomorfizam između topoloških prostora (X, τ_1) i (Y, τ_2) , kažemo da su oni topološki ekvivalentni.

Sada ćemo definirati pojam topološke mnogostrukosti.

Definicija 1.8.3 (Topološka mnogostrukost). *Neka je M topološki prostor. Kažemo da je M topološka mnogostrukost dimenzije n ako su zadovoljena sljedeća tri uslova:*

1. *M je lokalno euklidski prostor dimenzije n , tj. za svaku tačku iz M postoji njena okolina koja je homeomorfna sa nekim otvorenim podskupom od $\mathbb{R}^n$;*
2. *M je Hausdorffov prostor, tj. za svaki par tačaka $x, y \in M$ postoje disjunktni otvoreni podskupovi $U, V \subseteq M$ takvi da je $x \in U, y \in V$;*
3. *M zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, tj. postoji prebrojiva baza otvorenih skupova za topologiju od M .*

Prije nego definiramo diferencijabilnu mnogostrukost, definirajmo pojam difeomorfizma.

Definicija 1.8.4 (Difeomorfizam). *Neka su $U \subseteq \mathbb{R}^n$ i $V \subseteq \mathbb{R}^m$ otvoreni skupovi. Funkcija $f : U \rightarrow V$ je C^r -difeomorfizam, $1 \leq r$, ako je:*

- bijektivna,
- klase C^r ,
- i inverzna funkcija $f^{-1} : V \rightarrow U$ također klase C^r .

U tom slučaju kažemo da su skupovi U i V C^r -difeomorfni.

Ako je $r = \infty$, govorimo o glatkom difeomorfizmu, a U i V su tada glatko difeomorfni.

Iz definicija homeomorfizma i difeomorfizma, jasno je da je svaki difeomorfizam ujedno i homeomorfizam.

1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti

Definicija 1.8.5 (Karta). *Neka je M topološki prostor, $U \subseteq M$ neki otvoren skup, a $\varphi : U \rightarrow \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ homeomorfizam. Par (U, φ) se zove karta na prostoru M .*

Za dvije karte (U, φ) i (V, ψ) kažemo da su C^r -saglasne ako vrijedi:

- $U \cap V \neq \emptyset$,
- $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ je C^r -difeomorfizam.

Definicija 1.8.6 (Atlas). *Neka je M topološki prostor. Skup $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ karata na M zove se atlas klase C^r (ili C^r -atlas) na M ako:*

1. *otvoreni skupovi $U_\alpha \subseteq M$ pokrivaju M , tj. $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha = M$,*
2. *sve karte $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ i (U_β, φ_β) iz $\mathcal{A}$ su međusobno C^r -saglasne.*

Sada ćemo definirati pojam diferencijabilne mnogostrukosti.

Definicija 1.8.7 (C^r -mnogostrukost). *Neka je M topološki prostor dimenzije n . Kažemo da je M C^r -mnogostrukost dimenzije n ako na M postoji atlas klase C^r , tj. familija karata $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ koja pokriva M i za koju su preslikavanja prijelaza*

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

C^r -difeomorfizmi, $r \geq 1$.

C^r -mnogostrukosti ($r \geq 1$) zovu se još i diferencijabilne mnogostrukosti, a u slučaju $r = \infty$ koristimo i naziv glatke mnogostrukosti.

Definicija 1.8.8 (Podmnogostrukost). *Neka je M n -dimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost, a $N \subseteq M$ neprazan podskup. Kažemo da je N k -dimenzionalna podmnogostrukost mnogostrukosti M ako za svaku tačku $p \in N$ postoji karta (U, φ) na M , gdje je $U \subseteq M$ otvoren skup koji sadrži tačku p , takva da vrijedi:*

$$\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n, \quad \varphi(U \cap N) = \{(x_1, \dots, x_n) \in \varphi(U) : x_{k+1} = \dots = x_n = 0\}.$$

Drugim riječima, u svakoj tački $p \in N$, skup N je lokalno difeomorfan sa $\mathbb{R}^k \times \{0\} \subset \mathbb{R}^n$.

Takva podmnogostrukost se naziva regularna (ili uložena) k -podmnogostrukost.

Slijede neki od jednostavnijih primjera mnogostrukosti i podmnogostrukosti.

Primjer 1.8.2. Euklidski prostor $\mathbb{R}^n$ je osnovni primjer n -dimenzionalne diferencijabilne mnogostrukosti. Lokalno, svaki njegov otvoreni podskup je trivijalno difeomorfan samom $\mathbb{R}^n$.

Primjer 1.8.3. Sfera $S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ je dvodimenzionalna diferencijabilna mnogostrukost, jer lokalno izgleda kao otvoreni podskup $\mathbb{R}^2$. Na primjer, pomoću stereografske projekcije možemo postaviti atlas koordinata.

Osim toga, S^2 je i *podmnogostrukost* u $\mathbb{R}^3$, jer se može definirati kao nivo-površ glatke funkcije

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2,$$

1.8 Diferencijabilne mnogostrukosti

odnosno $S^2 = F^{-1}(1)$. Gradijent $\mathbf{grad} F = (2x, 2y, 2z)$ je nenula na S^2 , pa iz teorema o implicitnoj funkciji slijedi da je S^2 regularna dvodimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^3$.

Primjer 1.8.4. Kriva u $\mathbb{R}^3$, na primjer, kružnica

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, \quad z = 0\},$$

je jednodimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^3$. Ona je difeomorfna sa jediničnom kružnicom

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Primjedba 1.8.1. Skupovi C i S^1 iz prethodnog primjera nisu doslovno isti objekti jer su *usadeni* u različite prostore: S^1 je jedinična kružnica u ravni $\mathbb{R}^2$, dok je C jedinična kružnica u $\mathbb{R}^3$, koja leži u ravni $z = 0$. Međutim, između njih postoji prirodan difeomorfizam (na primjer, preslikavanje $(x, y) \mapsto (x, y, 0)$), pa se u literaturi često ne pravi razlika i oba skupa se označavaju istim simbolom.

Primjer 1.8.5. Ravan u $\mathbb{R}^3$, na primjer

$$P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0\},$$

je dvodimenzionalna podmnogostrukost od $\mathbb{R}^3$. Lokalno izgleda kao $\mathbb{R}^2$, pa je trivijalan primjer podmnogostrukosti.

Svi prethodni primjeri su *glatke mnogostrukosti* (odnosno glatke podmnogostrukosti kada su posmatrani u $\mathbb{R}^n$). Konkretno:

- $\mathbb{R}^n$ je trivijalna glatka n -dimenzionalna mnogostrukost;
- S^2 je glatka 2-dimenzionalna mnogostrukost i glatka podmnogostrukost u $\mathbb{R}^3$;
- S^1 i kružnica $C \subset \mathbb{R}^3$ su glatke 1-dimenzionalne mnogostrukosti;
- ravan $P \subset \mathbb{R}^3$ je glatka 2-dimenzionalna podmnogostrukost.

O rješenjima, klasifikaciji i početno-rubnim problemima

U ovom poglavlju definirat ćemo pojam parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (u daljnjem tekstu često ćemo koristiti skraćenicu PDJ, nezavisno o padežu, jednini ili množini), klasificirati ih prema linearnosti te definirati pojam rješenja. Također, razmotrit ćemo različite vrste početno-rubnih problema i ukratko objasniti šta znači korektno postavljen problem.

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Jednadžba koja pored nepoznate funkcije od dvije ili više nezavisnih varijabli sadrži i njene parcijalne izvode naziva se *parcijalna diferencijalna jednadžba*. U općem slučaju parcijalnu diferencijalnu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$F\left(x_1, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}, \dots, \frac{\partial^k u}{\partial x_n^k}\right) = 0, \quad (2.1)$$

gdje je F data funkcija nezavisnih varijabli $x_1, \dots, x_n$, nepoznate funkcije $u = u(x_1, \dots, x_n)$ i konačnog broja njenih parcijalnih izvoda.

Red parcijalne diferencijalne jednadžbe (2.1) je red najvišeg parcijalnog izvoda koji se pojavljuje u jednadžbi (2.1).

S obzirom na to kako smo napisali opći oblik, PDJ (2.1) je k -tog reda, $k > 0$.

Primjer 2.1.1. Odrediti red svake od sljedećih jednadžbi, gdje je $u = u(x, y)$:

- (i) $\frac{\partial u}{\partial x} + x^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- (ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} = 5e^{x-2y};$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

$$(iii) \quad \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Rješenje. Jednadžba (i) je prvog reda, (ii) je drugog reda, dok je (iii) četvrtog reda.



Definicija 2.1.1. Funkcija $u = u(x_1, \dots, x_n) \in C^k(\Omega)$ je rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe (2.1) ako zadovoljava jednadžbu (2.1) identički u svakoj tački oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.

Rješenja iz prethodne definicije zovemo *klasična* ili *jaka*. Ova matematička formulacija je previše rigidna za praktičnu primjenu, jer mnogi fizikalni problemi od interesa nemaju jaka rješenja. Umjesto toga, postoje *slaba* i *distribucijska* rješenja kojima se ovdje nećemo baviti.

Budući da smo pretpostavili da je funkcija $u \in C^k(\Omega)$, iz Clairaut–Schwarzovog teorema slijedi da su mješoviti izvodi jednaki te redoslijed računanja parcijalnih izvoda nije relevantan.

S obzirom na to da ne postoji opća teorija koja obuhvata rješavanje svih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a imajući u vidu raznolikost fenomena koje one modeliraju, istraživanje se usmjerava na specifične parcijalne diferencijalne jednadžbe koje su ključne za teorijski razvoj ili praktičnu primjenu.

Sljedećih nekoliko primjera ilustriraju rješavanje jednostavnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Primjer 2.1.2. Neka je data jednadžba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Naći funkciju $u(x, y) \in C^2(\mathbb{R}^2)$ koja zadovoljava tu jednadžbu.

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Iz ovog oblika vidimo da izraz u zagradi nije funkcija varijable x . Integrirajući po x datu jednadžbu dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \psi(y) \quad (\text{pri čemu funkcija } \psi \text{ ne zavisi od } x).$$

Integrirajući dobivenu jednadžbu po y dobivamo opće rješenje

$$u(x, y) = \int \psi(y) dy + f(x) \quad (\text{pri čemu funkcija } f \text{ ne zavisi od } y),$$

ili

$$u(x, y) = f(x) + g(y).$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne funkcije iz $C^2(\mathbb{R})$.



2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Iz oblika rješenja u prethodnom primjeru, možemo zaključiti da nismo dobili samo jednu funkciju u , već beskonačno mnogo funkcija oblika $u(x, y) = f(x) + g(y)$, pri čemu su $f, g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ proizvoljne funkcije, tj., dobili smo *opće* rješenje. Za razliku od općeg rješenja obične diferencijalne jednačbe, koje sadrži onoliko proizvoljnih konstanti koliki je red jednačbe, opće rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe uključuje proizvoljne funkcije, i to onoliko njih koliki je red te jednačbe.

Primjer 2.1.3. Riješiti jednačbu

$$4 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0.$$

Rješenje. Uvedimo smjenu

$$v(y) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y).$$

Tada se data jednačba može zapisati u obliku

$$4v + v'(y) = 0.$$

Ovo je obična diferencijalna jednačba prvog reda kod koje se promjenljive mogu razdvojiti. Lako se dobije da je njeno rješenje dato sa

$$v(y) = Ce^{-4y},$$

pri čemu je C proizvoljna konstanta (koja može ovisiti od x). Stoga, možemo pisati

$$v(y) = f(x)e^{-4y},$$

pri čemu je f proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija. Odavde imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = f(x)e^{-4y}.$$

Da bismo odredili funkciju u , integriramo po x :

$$u(x, y) = \int e^{-4y} f(x) dx + g(y) = e^{-4y} \int f(x) dx + g(y).$$

Ako označimo

$$F(x) = \int f(x) dx,$$

dobijamo opće rješenje u obliku

$$\boxed{u(x, y) = e^{-4y} F(x) + g(y).}$$

U ovom rješenju su F i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije svojih argumenata. ♦

Primjer 2.1.4. Riješiti sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačbu trećeg reda

$$\frac{\partial^3 u}{\partial z \partial y \partial x} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) = 0.$$

Ako x i y posmatramo kao konstante, onda integracijom po z dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = f(x, y),$$

gdje je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ proizvoljna funkcija od x i y . Posljednju jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, y).$$

Sada, posmatrajući x kao konstantu, integracijom po y , dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int f(x, y) dy + g(x, z),$$

gdje je $g \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ proizvoljna funkcija od x i z . Stavimo $h(x, y) = \int f(x, y) dy$. Imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = h(x, y) + g(x, z).$$

Integrirajući ovu jednadžbu po x , pri čemu smatramo y i z konstantama, dobivamo opće rješenje

$$u(x, y, z) = \int h(x, y) dx + \int g(x, z) dx + H(y, z).$$

Stavljajući $F(x, y) = \int h(x, y) dx$ i $G(x, z) = \int g(x, z) dx$, vidimo da je opće rješenje dato sa

$$\boxed{u(x, y, z) = F(x, y) + G(x, z) + H(y, z)}.$$

U ovom rješenju $F, G, H \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ su proizvoljne funkcije odgovarajućih varijabli. ♦

Primjer 2.1.5. Odrediti rješenje $u = u(x, y)$ jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x^2 + 2y,$$

koje zadovoljava uvjet $u(x, x^2) = 1$.

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Rješenje. Ako x smatramo konstantom, integracijom po y dobivamo opće rješenje

$$u(x, y) = x^2 y + y^2 + f(x),$$

gdje je $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ proizvoljna funkcija od x . Iz uvjeta $u(x, x^2) = 1$, dobivamo $f(x) = 1 - 2x^4$. Dakle, konačno rješenje je

$$u(x, y) = x^2 y + y^2 + 1 - 2x^4.$$

◆

Primjer 2.1.6. Odrediti rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$$

koje zadovoljava uvjete $u(x, 0) = 1$, $u_y(0, y) = x$.

Rješenje. Jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = 2.$$

Integracijom po y dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2y + \varphi(x),$$

gdje je $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ proizvoljna funkcija od x . Ponovnom integracijom po y dobivamo opće rješenje

$$u(x, y) = y^2 + \varphi(x)y + \psi(x),$$

gdje je $\psi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ proizvoljna funkcija od x . Iz uvjeta $u(x, 0) = 1$ dobivamo $\psi(x) = 1$. Uvjet $u_y(x, 0) = x$ daje $\varphi(x) = x$. Konačno rješenje je

$$u(x, y) = y^2 + xy + 1.$$

◆

Primjer 2.1.7. Iz općeg rješenja jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = x + y$$

izdvojiti ono koje zadovoljava sljedeće uvjete: $u(x, 0) = x$, $u(0, y) = y^2$.

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Rješenje. Najprije odredimo opće rješenje. U tom cilju, jednadžbu napišemo u obliku

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = x + y.$$

Integracijom po y , smatrajući x konstantom, dobivamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \int_0^y (x + y) dy + \varphi(x) = xy + \frac{y^2}{2} + \varphi(x),$$

gdje je $\varphi(x) \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ proizvoljna funkcija od x . Integracijom po x dobivamo opće rješenje

$$u(x, y) = \int_0^x xy dx + \int_0^x \frac{y^2}{2} dx + \int_0^x \varphi(x) dx + \psi(y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + \varphi_1(x) + \psi(y),$$

gdje je $\varphi_1(x) = \int_0^x \varphi(x) dx \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, $\psi(y) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Iz uvjeta dobivamo

$$\begin{aligned} \varphi_1(x) + \psi(0) &= x, \\ \varphi_1(0) + \psi(y) &= y^2, \end{aligned}$$

$\varphi_1(0) = 0$, $\psi(y) = y^2$, $\varphi_1(x) = x$. Dakle, rješenje koje zadovoljava date uvjete, glasi

$$u(x, y) = \frac{x^2 y}{2} + \frac{xy^2}{2} + x + y^2.$$

◆

Primjer 2.1.8. Odrediti opće rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe te izdvojiti ono koje zadovoljava date uvjete

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 4, \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial y} = 3y^2, \quad u(x, 0) = 0. \end{cases}$$

Rješenje. Data PDJ može se zapisati u obliku

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - u \right) = 4.$$

Odavde dobivamo da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} - u = 4y + f(x),$$

gdje je f proizvoljna diferencijabilna funkcija svoje varijable. Dobivenu jednadžbu možemo posmatrati kao običnu linearnu diferencijalnu jednadžbu po nepoznatoj

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

funkciji $u(x, y)$, varijabli x i parametru y . Rješenje ove diferencijalne jednadžbe je

$$\begin{aligned}u(x, y) &= e^{\int dx} \left(C(y) + \int (4y + f(x)) e^{-\int dx} dx \right) \\&= e^x \left(C(y) + \int 4ye^{-x} dx + \int f(x) e^{-x} dx \right) \\&= e^x C(y) - 4ye^{-x} + e^x \int f(x) e^{-x} dx.\end{aligned}$$

Odavde imamo da je

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = e^x C'(y) - 4e^{-x}.$$

Na osnovu prvog uvjeta, imamo

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial u(0, y)}{\partial y} &= C'(y) - 4 \\ \frac{\partial u(0, y)}{\partial y} &= 3y^2\end{aligned} \right\} \implies C'(y) - 4 = 3y^2,$$

odnosno

$$C'(y) = 3y^2 + 4 \implies C(y) = y^3 + 4y + A,$$

gdje je A proizvoljna konstanta. Sada, imamo

$$u(x, y) = e^x (y^3 + 4y + A) - 4ye^{-x} + e^x \int f(x) e^{-x} dx$$

Drugi uvjet $u(x, 0) = 0$ daje

$$\left. \begin{aligned}u(x, 0) &= e^x \cdot A + e^x \int f(x) e^{-x} dx \\ u(x, 0) &= 0\end{aligned} \right\} \implies A = - \int f(x) e^{-x} dx.$$

Sada izraz za $u(x, y)$ postaje

$$\boxed{u(x, y) = e^x (y^3 + 4y) - 4y.}$$



Primjer 2.1.9. Data je parcijalna diferencijalna jednadžba $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $u = u(x, t)$. Linearnom smjenom varijabli $\alpha = ax + bt$, $\beta = cx + dt$, datu jednadžbu svesti na običnu diferencijalnu jednadžbu, pa je riješiti.

Rješenje. Na osnovu smjene, vidimo da je $u = u(\alpha(x, t), \beta(x, t))$. Primijenom pravila za diferenciranje složene funkcije (lančano pravilo), imamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial u}{\partial \alpha} + c \frac{\partial u}{\partial \beta}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = b \frac{\partial u}{\partial \alpha} + d \frac{\partial u}{\partial \beta}.$$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Nakon zamjene u datu jednadžbu, imamo

$$(a + b) \frac{\partial u}{\partial \alpha} + (c + d) \frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Pogodnim izborom konstanti a, b, c i d , eliminiramo jedan od parcijalnih izvoda. Na primjer, ako izaberemo $a = 1, b = -1, c = 1, d = 0$, dobivamo jednadžbu

$$\frac{\partial u}{\partial \beta} = 0.$$

Rješenje ove jednadžbe je $u = f(\alpha)$, (što je konstantno u odnosu na β) gdje je f proizvoljna $\mathcal{C}^1$ funkcija. Dakle, opće rješenje je dato sa

$$u(x, t) = f(x - t).$$

Napomenimo da i drugačijim izborom konstanti možemo dobiti rješenje. ♦

Jednostavniji tip zadatka uključuje provjeru je li neka funkcija rješenje zadane parcijalne diferencijalne jednadžbe, što ilustriraju sljedeći primjeri.

Primjer 2.1.10. Pokazati da funkcija $u = u(x, y)$ definirana sistemom jednadžbi

$$\begin{aligned} x \cos \alpha + y \sin \alpha + \ln u &= f(\alpha), \\ -x \sin \alpha + y \cos \alpha &= f'(\alpha), \end{aligned} \quad (2.2)$$

gdje je $\alpha = \alpha(x, y)$ promijenjivi parametar i f je proizvoljna diferencijabilna funkcija, zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 = u^2.$$

Rješenje. Prvi diferencijal prve jednadžbe sistema (2.2) je

$$dx \cos \alpha + dy \sin \alpha + d\alpha(-x \sin \alpha + y \cos \alpha - f'(\alpha)) + \frac{du}{u} = 0.$$

Odavde korištenjem druge jednadžbe sistema (2.2), dobivamo u konačnici

$$du = -u \cos \alpha dx - u \sin \alpha dy.$$

S obzirom na oblik prvog diferencijala funkcije $u = u(x, y)$, imamo

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -u \cos \alpha, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -u \sin \alpha.$$

Kvadriranjem svakog od izraza i njihovim sabiranjem dobivamo identitet

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \equiv u^2. \quad \blacklozenge$$

Primjer 2.1.11. Pokazati da funkcija $u = u(x, y)$ zadana relacijom $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u.$$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Rješenje. Diferenciranjem po x i y izraza $u = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$, dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi\left(\frac{y}{x}\right) + x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\left(\frac{-y}{x^2}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= x\varphi'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x}.\end{aligned}$$

Množenjem prve relacije sa x , druge sa y i sabiranjem tako dobivenih relacija, dobivamo identitet

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} \equiv u.$$

◆

Postoje parcijalne diferencijalne jednačbe koje nemaju rješenja. Na primjer, parcijalna diferencijalna jednačba

$$e^{\frac{\partial u}{\partial x}} = 0, \quad u = u(x, y),$$

nema rješenje. Također, rješenje nema ni sljedeća PDJ

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 1 = 0, \quad u = u(x, y).$$

Dakle, nemamo garanciju da će PDJ kao što je (2.1) imati rješenje. Zato ne možemo očekivati da imao neki generalni teorem o egzistenciji rješenja za jednačbu (2.1).

Kako formirati parcijalne diferencijalne jednačbe? Jedan od načina, koji je vrlo zahtjevan i neće biti predmet ove knjige, jest praćenje određene pojave i modeliranje iste odgovarajućom parcijalnom diferencijalnom jednačbom. Drugi, znatno jednostavniji pristup, sastoji se u tome da, polazeći od rješenja, formiramo odgovarajuću parcijalnu diferencijalnu jednačbu čije je to rješenje. Sljedeći primjeri ilustrirat će ovaj drugi način dobivanja parcijalnih diferencijalnih jednačbi.

Primjer 2.1.12. Formirajmo parcijalnu diferencijalnu jednačbu čije je rješenje dato sa $u = f(x - y)$, gdje je f proizvoljna diferencijabilna funkcija.

Rješenje. Stavimo $z = x - y$. Onda je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{df}{dz} \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{df}{dz}.$$

Sabirajući ove dvije jednakosti dobivamo

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0.}$$

Ovo je parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda čije je rješenje funkcija $u = f(x - y)$. ◆

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Primjer 2.1.13. Formirati parcijalnu diferencijalnu jednađbu koju zadovoljava (čije je rješenje) dvoparametarska familija površi data sa

$$f(x, y, u, a, b) = 0,$$

gdje su a i b proizvoljni parametri i $u = u(x, y)$.

Rješenje. Diferenciranjem ove jednađbe po x i y dobivamo

$$\frac{\partial f}{\partial x} + p \frac{\partial f}{\partial u} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} + q \frac{\partial f}{\partial u} = 0,$$

gdje je $p = \frac{\partial u}{\partial x}$ i $q = \frac{\partial u}{\partial y}$. Eliminacijom parametara iz ove dvije jednađbe i jednađbe $f(x, y, u, a, b) = 0$, dobivamo parcijalnu diferencijalnu jednađbu prvog reda

$$F(x, y, u, p, q) = 0.$$

Rješenje ove PDJ je dvoparametarska familija površi. ◆

Primjedba 2.1.1. U proučavanju funkcija više varijabli često je potrebno parcijalne izvode zapisivati na pregledan način. Pored danas uobičajene Leibnizove notacije, u literaturi se često koristi i *Mongeova notacija*, posebno u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednađbi.

Neka je $u = u(x, y)$ funkcija dviju varijabli. Monge uvodi sljedeće oznake za parcijalne izvode prvog reda

$$p = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Parcijalni izvodi drugog reda označavaju se sa

$$r = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ova notacija omogućava kraći i pregledniji zapis mnogih parcijalnih diferencijalnih jednađbi drugog reda.

Primjer 2.1.14. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednađbu koju zadovoljava dvoparametarska familija sfera sa fiksnim poluprečnikom $r > 0$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 = r^2.$$

Rješenje. Stavimo $f(x, y, u, a, b) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 - r^2$. Diferenciranjem po x i y , dobivamo

$$(x - a) + up = 0, \quad (y - b) + uq = 0.$$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Oдавде slijedi $a = x + up$ i $b = y + uq$. Uvrštavanjem u $f = 0$ (tj. eliminacijom parametara a i b) dobivamo traženu parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u^2(p^2 + q^2 + 1) = r^2.$$

◆

Primjer 2.1.15. Neka je familija površi data sa

$$u = f(x, y, C), \quad \text{gdje je } C \text{ proizvoljna konstanta.} \quad (2.3)$$

Za površ $\mathcal{T}$ kažemo da je *trajektorija* familije površi (2.3) ako presijeca sve površi te familije pod stalnim uglom α . Ako je $\alpha = \frac{\pi}{2}$, kažemo da je trajektorija *ortogonalna*. Inače, kažemo da je ona *izogonalna*.

Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljavaju *trajektorije* familije površi (2.3).

Rješenje. Pretpostavimo da je površ $\mathcal{T}$ određena jednadžbom

$$u = g(x, y)$$

Neka je $\mathcal{P}$ površ iz familije (2.3) koja se siječe sa površi $\mathcal{T}$ u tački M . Vektori normala u tački M na te dvije površi su, redom

$$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1 \right), \quad \vec{N} = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, -1 \right).$$

Površ $\mathcal{T}$ ima osobinu da sve površi familije (2.3) siječe pod stalnim uglom α . Dakle, površ $\mathcal{P}$ siječe pod stalnim uglom α , što znači da je skalarni proizvod

$$\vec{n} \cdot \vec{N} = |\vec{n}| |\vec{N}| \cos \alpha.$$

Stavimo $\cos \alpha = k$, $k = \text{const.}$ Sada je

$$\vec{n} \cdot \vec{N} = |\vec{n}| |\vec{N}| \cdot k,$$

odnosno

$$\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial y} + 1 = k \sqrt{\left(1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right) \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right)}.$$

S obzirom da je $\mathcal{P}$ proizvoljna ali fiksna površ iz familije (2.3), to je

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x(x, y, h(x, y, u)) \equiv f_1(x, y, u),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = f'_y(x, y, h(x, y, u)) \equiv f_2(x, y, u),$$

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

gdje je $C = h(x, y, u)$ rješenje jednadžbe (2.3) po C . Dakle, diferenciramo jednadžbu (2.3) po x , zatim u tako dobivenom izrazu zamijenimo konstantu C iz familije (2.3). Uzimajući to u obzir, parcijalna diferencijalna jednadžba izogonalnih trajektorija $\mathcal{T}$ je

$$f_1 \frac{\partial g}{\partial x} + f_2 \frac{\partial g}{\partial y} + 1 = k \sqrt{(1 + f_1^2 + f_2^2) \left(1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right)}.$$

Za ortogonalne trajektorije, ugao $\alpha = \frac{\pi}{2}$, odnosno $k = 0$, pa parcijalna diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija glasi

$$f_1 \frac{\partial g}{\partial x} + f_2 \frac{\partial g}{\partial y} + 1 = 0.$$

◆

Primjer 2.1.16. Formirati parcijalnu diferencijalnu jednadžbu ortogonalnih trajektorija familije površi $u = x^2 + y^2 + Cxy$, gdje je C proizvoljna konstanta.

Rješenje. Iz $u = x^2 + y^2 + Cxy$, imamo $C = \frac{u - x^2 - y^2}{xy}$. Sada je

$$f_1 = \frac{\partial f}{\partial x} = 2x + Cy = 2x + \frac{u - x^2 - y^2}{x} = \frac{u + x^2 - y^2}{x}.$$

Slično dobivamo da je

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{u - x^2 + y^2}{y},$$

pa parcijalna diferencijalna jednadžba ortogonalnih trajektorija glasi

$$\frac{u + x^2 + y^2}{x} \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{u - x^2 + y^2}{y} \frac{\partial g}{\partial y} + 1 = 0.$$

◆

Sada ćemo dati klasifikaciju parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Obične diferencijalne jednadžbe klasificirali smo kao linearne i nelinearne. Kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi klasifikacija je nešto složenija. Naime, one se dijele na *linearne*, *semilinearne* (ili *polulinearne*), *kvazilinearne* i *nelinearne* parcijalne diferencijalne jednadžbe.

U nastavku ćemo definirati svaku od njih.

Definicija 2.1.2. *Parcijalna diferencijalna jednadžba (2.1) naziva se linearna, ako je linearna po nepoznatoj funkciji $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i svim njenim parcijalnim izvodima koji se pojavljuju u jednadžbi, pri čemu koeficijenti zavise isključivo od nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$.*

2.1 Definicija, rješenje i klasifikacija

Specijalno, opći oblik linearne parcijalne diferencijalne jednačbe prvog reda po nepoznatoj funkciji $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ glasi

$$\sum_{k=1}^n P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} + P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)u = R(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Za funkcije $P_k(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, n$, $P_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pretpostavljamo (obično) da su neprekidne. Ako je $R(x_1, x_2, \dots, x_n) \equiv 0$, kažemo da je posmatrana linearna PDJ *homogena*, a u suprotnom kažemo da je *nehomogena*.

Opći oblik linearne PDJ drugog reda glasi

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x)u = g(x),$$

gdje su $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$, i $a_{ij}(x)$, $b_i(x)$, $a(x)$ i $g(x)$ funkcije od nezavisne varijable $x = (x_1, \dots, x_n)$. Ako je funkcija $g(x)$ identički jednaka nuli, onda za posmatranu PDJ kažemo da je *homogena*, a u suprotnom kažemo da je *nehomogena*.

Definicija 2.1.3. *Parcijalna diferencijalna jednačba (2.1) naziva se polulinearna ili semilinearna ako je linearna po izvodima najvišeg reda (k -tog reda) sa koeficijentima koji zavise samo od nezavisnih varijabli $x_1, \dots, x_n$.*

Opći oblik semilinearne PDJ prvog reda glasi

$$\sum_{k=1}^n P_k(x_1, x_2, \dots, x_n) \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Osnovna razlika između linearnih i semilinearne PDJ je u tome što semilinearna može biti nelinearna po nepoznatoj funkciji, ali ne i po izvodima najvišeg reda koji se pojavljuju u jednačbi.

Definicija 2.1.4. *Parcijalna diferencijalna jednačba (2.1) naziva se kvazilinearna ako je linearna po najvišim parcijalnim izvodima nepoznate funkcije (k -tog reda) sa koeficijentima koji zavise od nezavisnih varijabli, nepoznate funkcije i parcijalnim izvodima reda strogo manjeg od k .*

Opći oblik kvazilinearne PDJ prvog reda glasi

$$\sum_{k=1}^n P_k(x_1, x_2, \dots, x_n, u) \frac{\partial u(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_k} = R(x_1, x_2, \dots, x_n, u).$$

Definicija 2.1.5. *Za parcijalnu diferencijalnu jednačbu koja nije linearna, polulinearna i kvazilinearna kažemo da je nelinearna.*

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

PDJ je nelinearna ako se barem jedan od njenih najviših parcijalnih izvoda pojavljuje nelinearno, tj. u stepenu, unutar nelinearne funkcije, kao proizvod s drugim parcijalnim izvodima, ili na neki drugi nelinearan način.

Na osnovu prethodnih definicija, možemo uočiti sljedeći odnos:

$$\text{Linearne PDJ} \subset \text{Semilinearne PDJ} \subset \text{Kvazilinearne PDJ} \subset \text{PDJ}.$$

Primjer 2.1.17. Klasificirati sljedeće parcijalne diferencijalne jednačbe:

$$(i) \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u = x + y;$$

$$(ii) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + u^2 = 0;$$

$$(iii) \quad x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0;$$

$$(iv) \quad x \frac{\partial u}{\partial y} + u \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 + 2xy \frac{\partial u}{\partial x} = \cos y.$$

Rješenje. Jednačba (i) je linearna nehomogena PDJ drugog reda, jer je linearna po nepoznatoj funkciji i njenim parcijalnim izvodima sa koeficijentima koji zavise isključivo od nezavisnih varijabli x, y . PDJ (ii) je semilinearna, jer je linearna po parcijalnom izvodu najvišeg reda, ali ne i po nepoznatoj funkciji. PDJ (iii) je kvazilinearna, jer je linearna po izvodima najvišeg reda (drugog), izraz $u \frac{\partial u}{\partial x}$ je nelinearan, ali se radi o izvodu nižeg reda (prvog). Jednačba (iv) je nelinearna, jer je nelinearna po najvišem (drugom) izvodu. ♦

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Mnoge parcijalne diferencijalne jednačbe nastaju u različitim oblastima fizike, poput akustike, optike, elastičnosti, hidrodinamike, aerodinamike, elektromagnetizma, kvantne mehanike, seizmologije i drugih. Također, neke PDJ potječu iz drugih prirodnih nauka, kao što su hemija i biologija, a pojavljuju se i u društvenim naukama, na primjer u ekonomiji. Osim toga, mnoge PDJ imaju svoje porijeklo u drugim granama matematike, gdje nastaju kao prirodan izraz geometrijskih, analitičkih ili topoloških problema.

U nastavku ćemo navesti neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi.

1. *Laplaceova parcijalna diferencijalna jednačba* jedna je od najvažnijih i najčešće proučavanih PDJ, s brojnim primjenama u fizici, inženjerstvu i

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

matematici. Njen opći oblik glasi:

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} = 0,$$

pri čemu je Δ Laplaceov operator.

Parcijalna diferencijalna jednačba oblika

$$\Delta u = f, \quad \text{gdje je } f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ poznata funkcija}$$

zove se *Poissonova parcijalna diferencijalna jednačba*.

Rješenje Laplaceove jednačbe zove se *potencijal funkcije* ili *harmonijska funkcija*.

U slučaju kada je $n = 2$, $x_1 = x$, $x_2 = y$, tj. kada imamo dvije varijable, harmonijskoj funkciji $u = u(x, y)$ možemo pridružiti tzv. *konjugiranu* funkciju $v(x, y)$, tako da par (u, v) zadovoljava Cauchy-Riemannov sistem jednačbi

$$\begin{aligned} u_x &= v_y, \\ u_y &= -v_x. \end{aligned}$$

Realna rješenja ovog sistema odgovaraju realnim i imaginarnim dijelovima analitičke funkcije kompleksne varijable

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

gdje je $z = x + iy$.

2. *Parcijalna diferencijalna jednačba provođenja toplote* (poznata i kao *jednačba difuzije*) glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u,$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ funkcija koja opisuje temperaturu (ili koncentraciju) u prostoru i vremenu, a Δ označava Laplaceov operator po prostornim varijablama.

3. *Talasna (valna) parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje širenje talasa u prostoru i vremenu, a u svojoj standardnoj formi glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ nepoznata funkcija koja predstavlja, na primjer, pomak čestice, pritisak ili električno polje, a Δ označava Laplaceov operator po prostornim varijablama.

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

4. *Helmholtzova parcijalna diferencijalna jednačba* (poznata i kao *jednačba svojstvenih vrijednosti*) ima oblik:

$$-\Delta u = \lambda u,$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nepoznata funkcija, Δ je Laplaceov operator, a $\lambda \in \mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$ je parametar — tzv. *svojstvena vrijednost*.

Helmholtzova jednačba često se pojavljuje u kontekstu razdvajanja varijabli pri rješavanju talasne jednačbe ili jednačbe difuzije u vremenski harmonijskim slučajevima.

5. *Linearna transportna parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje kretanje (transport) količine koja se prenosi u prostoru bez promjene oblika. Općenito ima oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

gdje su $b_i \in \mathbb{R}$ komponente konstantnog vektora brzine $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$, a $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ predstavlja, na primjer, gustoću neke količine koja se transportuje prostorom.

6. *Liouvilleova parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje zakon očuvanja gustoće neke količine (na primjer mase, naboja ili broja čestica) u prostoru koji se mijenja u vremenu i gdje je brzina $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ prostorno zavisna. Njen opći oblik glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) = 0,$$

gdje $u = u(x_1, \dots, x_n, t)$ označava gustoću, a $b_i = b_i(x)$ su komponente vektorskog polja brzine.

Ova jednačba izražava *očuvanje količine* koju transportira nelinearno (prostorno zavisno) vektorsko polje.

7. *Schrödingerova parcijalna diferencijalna jednačba* je osnovna jednačba kvantne mehanike koja opisuje evoluciju kvantnog stanja čestice u prostoru i vremenu. U jednostavnom, bezdimenzionalnom obliku glasi:

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u = 0,$$

gdje je $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ kompleksna talasna funkcija, i imaginarna jedinica, a Δ Laplaceov operator po prostornim koordinatama.

8. *Kolmogorovljeva parcijalna diferencijalna jednačba* pojavljuje se u teoriji vjerovatnoće i matematičkom modeliranju stohastičkih procesa, posebno

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednačbi

u opisu vremenske evolucije gustoće vjerovatnoće difuzionih procesa. U općem obliku glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

gdje su $a_{ij}(x)$ i $b_i(x)$ zadane glatke funkcije koje predstavljaju koeficijente difuzije i drift vektora u prostoru $\mathbb{R}^n$, dok $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ označava gustoću vjerovatnoće.

9. *Fokker-Planckova parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje evoluciju gustoće vjerovatnoće stohastičkog procesa i ima oblik:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} (a_{ij}u) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i u) = 0,$$

gdje su $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ gustoća vjerovatnoće u tački $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ u vremenu t , funkcije $a_{ij} = a_{ij}(x)$ predstavljaju koeficijente difuzije, a $b_i = b_i(x)$ komponente drift vektora.

Ova jednačba generalizira Kolmogorovljevu jednačbu i koristi se za opisivanje dinamičke evolucije sistema pod utjecajem slučajnih fluktuacija.

10. *Telegrafaska parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje širenje signala u električnim vodovima i ima oblik:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

gdje je $u = u(x, t)$ funkcija napona ili struje, a $d > 0$ koeficijent koji opisuje disipaciju (gubitak energije) u sistemu.

Ova jednačba spaja svojstva talasne jednačbe i difuzijske jednačbe, te modelira signale koji se šire s prigušenjem.

11. *Generalna talasna (valna) parcijalna diferencijalna jednačba* opisuje širenje talasa u sredinama koje mogu biti anizotropne i nehomogene. Opći oblik jednačbe glasi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial u}{\partial x_i} = 0,$$

gdje su $a_{ij}(x)$ koeficijenti povezani s karakteristikama sredine (na primjer gustoćom, elastičnošću), a $b_i(x)$ predstavljaju potencijalno prisutne advektivne ili disipativne učinke.

Funkcija $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$ označava vrijednost polja koje se propagira (na primjer pomak, pritisak, električno polje).

2.2 Neke od poznatijih parcijalnih diferencijalnih jednađbi

12. *Airyova parcijalna diferencijalna jednađba* opisuje određene vrste disperzivnih talasa i glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

gdje je $u = u(x, t)$ nepoznata funkcija koja može predstavljati amplitudu talasa ili sličnu fizikalnu veličinu. Ova jednađba je linearnog tipa i često se koristi u teoriji disperzivnih procesa.

13. *Parcijalna diferencijalna jednađba grede* opisuje deformacije i vibracije tanke elastične grede te glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = 0,$$

gdje je $u = u(x, t)$ pomak grede u tački x i vremenu t . Ova jednađba je linearna i četvrtog reda po prostornoj varijabli, a odražava utjecaj savijanja grede.

14. *Parcijalna diferencijalna jednađba minimalne površi* (površ koja ima najmanju moguću površinu među svim površima s istim rubom). Neka je $u = u(x, y)$ funkcija definirana na $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Graf funkcije u , tj. površ

$$S = \{(x, y, u(x, y)) : (x, y) \in \Omega\} \subset \mathbb{R}^3,$$

je minimalna površ ako i samo ako u zadovoljava jednađbu minimalne površi koja glasi:

$$\left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left[1 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right] \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

što je kvazilinearna parcijalna diferencijalna jednađba drugog reda. Ova jednađba opisuje površ $u = u(x, y)$ u $\mathbb{R}^3$ koja minimizira površinski integral. Jednađba je Euler–Lagrangeova jednađba funkcionala površi $A[u] = \int_{\Omega} \sqrt{1 + |\nabla u|^2} dx dy$.

15. *Navier-Stokesova parcijalna diferencijalna jednađba* opisuje kretanje viskozno nekompresibilnog fluida i povezuje komponente brzine u_i i pritisak p :

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^n u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \gamma \Delta u_i,$$

uz uvjet nekompresibilnosti:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0,$$

gdje je ρ gustoća fluida, a γ kinematička viskoznost.

2.3 Početni i rubni problemi

16. Nelinearna parcijalna diferencijalna jednačba trećeg reda koja se pojavila u proučavanju vodenih talasa naziva se *jednačba Korteweg–de Vriesa* i glasi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + cu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0,$$

gdje je $u = u(x, t)$ funkcija koja opisuje amplitudu talasa, a c je konstanta koja zavisi o svojstvima medija.

Pitanje rješivosti, posebno nekih od navedenih jednačbi, izuzetno je složeno. Ipak, moglo bi se očekivati da za linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačbu uvijek postoji rješenje. Zato je rezultat američkog matematičara H. Levija iz 1957. godine bio iznenađujući – on je konstruirao linearnu parcijalnu diferencijalnu jednačbu koja nema niti jedno rješenje.

Preciznije, postoji funkcija $f(x, y, z) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ takva da jednačba

$$-\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} + 2i(x + iy)\frac{\partial u}{\partial z} = f(x, y, z)$$

nema rješenje u niti u jednom otvorenom skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, gdje je $u \in C^1(\Omega)$, a parcijalni izvodi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ i $\frac{\partial u}{\partial z}$ su Hölder neprekidne funkcije. Za funkciju f kažemo da je *Hölder neprekidna* s eksponentom $\alpha \in (0, 1]$ ako postoji konstanta $C > 0$ takva da za sve $x, y \in \Omega$ vrijedi

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^\alpha.$$

Ako je $\alpha = 1$, tada dobivamo *Lipschitzovu neprekidnost*, a za funkciju f za koju je

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

kažemo da zadovoljava *Lipschitzov uvjet*. Daljnje razrađivanje ovog primjera izlazi iz okvira ove knjige.

2.3 Početni i rubni problemi

Kao što smo vidjeli, rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe zavisi o proizvoljnoj funkciji, zbog čega parcijalne diferencijalne jednačbe imaju beskonačno mnogo rješenja. Međutim, ako ta jednačba modelira neku pojavu, poželjno je da rješenje bude jedinstveno kako bismo precizno razumjeli ponašanje promatrane pojave. Zato se na traženu funkciju postavljaju dodatni uvjeti, čime nastaju specifični problemi povezani s egzistencijom i jedinstvenošću rješenja.

Ovi problemi se klasificiraju na sljedeći način:

1. *Cauchyjev problem ili problem početnih vrijednosti*. Za datu PDJ, koju posmatramo na oblasti Ω , zadaju se unaprijed početne vrijednosti za nepoznatu funkciju i njene parcijalne izvode na određenim podskupovima oblasti Ω .

2.3 Početni i rubni problemi

2. *Rubni (granični) problem.* Za datu PDJ, koju posmatramo na oblasti Ω , zadaju se unaprijed vrijednosti za nepoznatu funkciju i njene parcijalne izvode na rubu $\partial\Omega$ oblasti Ω .
3. *Početno-rubni (mješoviti) problem.* Za datu PDJ, koju posmatramo na oblasti Ω , zadaju se istovremeno početne i rubne vrijednosti za nepoznatu funkciju i njene parcijalne izvode.

Ako parcijalnim diferencijalnim jednačbama modeliramo neku pojavu (na primjer fizikalnu), tada se funkcije koje se pojavljuju u početnim i rubnim problemima najčešće dobivaju eksperimentalnim putem — na primjer, različitim mjerenjima. Zbog toga postoji velika vjerovatnoća pojave grešaka, odnosno da te funkcije nisu potpuno tačne.

Greške u početnim i rubnim uvjetima mogu uzrokovati značajne greške u rješenju problema, koje ne moraju biti zanemarive. Također, jedan od čestih pristupa rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi je korištenje numeričkih metoda, koje podrazumijevaju različite vrste diskretizacija, a te diskretizacije dodatno utječu na tačnost konačnog rješenja.

Zbog svega navedenog, veoma je važno pitanje da li je problem — sastavljen od parcijalne diferencijalne jednačbe, početnih i rubnih uvjeta — korektno (dobro) postavljen.

Prema Hadamardu, za problem zadan parcijalnom diferencijalnom jednačbom kažemo da je korektno postavljen u nekoj klasi funkcija $\mathcal{F}$ ako su zadovoljena sljedeća tri uvjeta:

1. **Egzistencija:** Rješenje postoji, tj. postoji barem jedna funkcija $u \in \mathcal{F}$ koja zadovoljava jednačbu i pripadajuće uvjete.
2. **Jedinstvenost:** Rješenje je jedinstveno, tj. ne postoji više od jednog rješenja u klasi $\mathcal{F}$.
3. **Stabilnost:** Rješenje zavisi neprekidno o početnim i rubnim uvjetima, tj. male promjene u uvjetima izazivaju samo male promjene u rješenju.

Ukoliko ijedan od navedenih uvjeta nije zadovoljen, problem se smatra neko-rektno postavljenim. U praksi, posebno pri numeričkom rješavanju, stabilnost (treći uvjet) ima ključnu ulogu, jer nestabilnost može dovesti do rješenja koja su potpuno neupotrebljiva — čak i kada teoretski postoji tačno rješenje.

Treći uvjet obezbjeđuje da rješenje problema nije osjetljivo bitno od grešaka koje se neizbježno javljaju prilikom eksperimentalnog određivanja podataka. U primjenama je izuzetno važno da se (jedinstveno) rješenje promijeni samo malo kada se uvjeti u postavljenom problemu blago promijene. Na taj način, numerički dobiveno rješenje predstavlja dobru aproksimaciju egzaktnog (tačnog) rješenja posmatranog problema.

Kod običnih diferencijalnih jednačbi, dovoljni uvjeti za korektnost Cauchyjevog problema

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

2.3 Početni i rubni problemi

obezbjeđuju se (uglavnom) neprekidnošću funkcije f i ispunjavanjem Lipschitzovog uvjeta s obzirom na varijablu y na nekoj oblasti koja sadrži tačku (x_0, y_0) .

Međutim, kod PDJ situacija je znatno složenija. Ispunjenje analitičkih uvjeta, poput neprekidnosti i Lipschitzovog uvjeta, nije dovoljno da se garantira korektno postavljanje problema. U tim slučajevima, oblik parcijalne diferencijalne jednadžbe, geometrija oblasti, kao i priroda početnih i rubnih uvjeta, igraju ključnu ulogu u određivanju da li je problem korektno postavljen u smislu Hadamarda.

Sljedeći primjer pripada Hadamardu i pokazuje da problem početnih vrijednosti za Laplaceovu jednadžbu nije korektno postavljen.

Primjer 2.3.1. (Hadamard) Pokazati da problem početnih vrijednosti (Cauchyjev problem) za Laplaceovu jednadžbu u jediničnom krugu

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & (x, y) \in D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = \frac{\sin(nx)}{n}, \end{cases}$$

nije korektno postavljen.

Može se pokazati da rješenje ovog problema (jedinstveno i analitičko, prema teoremu Cauchy-Kovalevsky, v. poglavlje 3.6) glasi:

$$u(x, y) = \frac{1}{n^2} \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \sin(nx).$$

Kada pustimo da $n \rightarrow +\infty$, početni uvjeti prethodnog problema teže nuli, te dobivamo problem

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = 0, \end{cases}$$

čije je jedino rješenje $u(x, y) \equiv 0$.

S druge strane, za svaku tačku $(x, y) \neq (0, 0)$ iz jediničnog kruga vrijedi

$$|u(x, y)| = \left| \frac{1}{n^2} \cdot \frac{e^{ny} - e^{-ny}}{2} \cdot \sin(nx) \right| = \left| \frac{\sinh(ny)}{n^2} \cdot \sin(nx) \right| \longrightarrow +\infty$$

kad $n \rightarrow +\infty$.

Ovo pokazuje da iako početni uvjeti teže nuli kada $n \rightarrow \infty$, rješenje u unutrašnjosti domene eksponencijalno raste. Drugim riječima, proizvoljno mala promjena u početnim uvjetima može uzrokovati proizvoljno veliku promjenu u rješenju. Time se narušava uvjet stabilnosti korektno postavljenog problema u Hadamardovom smislu. Dakle, iako rješenje postoji i jedinstveno je (po teoremu Cauchy-Kovalevsky), zbog nepostojanja stabilnosti, problem nije korektno postavljen.

2.3 Početni i rubni problemi

Međutim, u nekim slučajevima potrebno je razmotriti i probleme koji nisu korektno postavljeni. Na primjer, inverzni problemi parcijalnih diferencijalnih jednažbi gotovo uvijek predstavljaju probleme koji nisu korektno postavljeni. Inverzni problemi javljaju se u širokom spektru primjena, gdje je cilj iz dostupnih podataka izvesti nepoznate informacije, najčešće povezane sa fizikalnim svojstvima posmatranog sistema. Ponašanje takvih fizikalnih sistema obično je opisano parcijalnim diferencijalnim jednažbama, čije rješavanje omogućava numeričku simulaciju – odnosno izgradnju digitalnog blizanca sistema. Prirodno rješenje inverznih problema stoga podrazumijeva podešavanje nepoznatih parametara, kao što su koeficijenti PDJ, kako bi simulirani odziv sistema bio što usklađeniji sa stvarnim posmatranjima. Praktična rješenja inverznih problema koeficijenata u velikoj mjeri otežava njihova inherentna loša postavljenost, kao i nelinearna zavisnost između parametara i posmatranih podataka, što često dovodi do nestabilnosti i osjetljivosti na šum u podacima. Ova vrsta problema neće biti predmet ove knjige.

Na kraju ovog poglavlja, pogledajmo jedan primjer neviskozne *Burgersove* jednažbe čije je rješenje šok talas - nagli prijelaz gdje dolazi do diskontinuiteta u rješenju, tj. rješenje prestaje biti klasično.

Primjer 2.3.2. (Burgersova parcijalna diferencijalna jednažba) *Burgersova jednažba* je skalarna parcijalna diferencijalna jednažba:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u \frac{\partial u}{\partial x},$$

gdje je $x \in X \subseteq \mathbb{R}$, $t \geq 0$, a funkcija $u : X \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Parametar $\nu \geq 0$ obično se naziva *viskozitet*, zbog povezanosti ove jednažbe sa dinamikom fluida. Kada je $\nu > 0$, često se naziva *viskozna Burgersova jednažba*, a kada je $\nu = 0$, često se naziva *neviskozna Burgersova jednažba*. Konstanta -1 ispred člana uu_x je zbog konvencije – njena tačna vrijednost nije važna, sve dok je različita od nule, jer se može prilagoditi promjenom skale prostora i vremena. Dakle, kada je $\nu = 0$, Burgersova jednažba postaje nelinearni hiperbolički zakon očuvanja. Ključna osobina rješenja je ta da ona mogu imati prekide, te stoga izvodi koji se pojavljuju u ovoj jednažbi nisu dobro definirani u klasičnom smislu. Zbog toga je potrebna teorija slabih rješenja, što znači funkcije koje rješavaju integralni oblik Burgersove jednažbe. Za veliku klasu početnih podataka, ponašanje sistema određeno je pojavama koje se nazivaju *šok-talasi* (ili *udarni talasi*, engl. *shocks*), koji uzrokuju naglu promjenu stanja sistema, te *talasi razrjeđenja* (engl. *rarefaction waves*), koji uzrokuju postupnu promjenu kroz prostor i vrijeme.

Neka je data neviskozna jednažba

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{2.4}$$

po nepoznatoj funkciji $u = u(x, t)$ za $t > 0$. Odrediti rješenje koje zadovoljava sljedeći početni uvjet

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

2.3 Početni i rubni problemi

Rješenje. Za nalaženje rješenja u , jednadžbe (2.4), koristit ćemo metod karakteristika koji ćemo kasnije objasniti.

Definirajmo karakterističnu krivu jednadžbe (2.4) kao graf rješenja $x(t)$ obične diferencijalne jednadžbe

$$\frac{dx}{dt} = u(x, t). \quad (2.5)$$

Kao takve, karakteristike zavise od samog rješenja u , dok se istovremeno rješenje u određuje pomoću svojih karakteristika. Na prvi pogled to djeluje kao kružna argumentacija, ali iz toga se možemo izvući ako primijetimo da rješenje $u(x, t)$ ostaje konstantno duž svojih karakteristika. Da bismo dokazali ovu tvrdnju, pretpostavimo da je $x = x(t)$ parametrizacija karakteristične krive povezane s datim rješenjem $u(x, t)$. Naš zadatak je pokazati da je $h(t) = u(t, x(t))$, koje dobivamo evaluiranjem rješenja duž krive, konstantno, što, kao i obično, dokazujemo provjerom da je njegov izvod identički jednak nuli. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{dh}{dt} &= \frac{d}{dt} u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) + u(x(t), t) \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t) = 0, \end{aligned}$$

budući da se pretpostavlja da u zadovoljava jednadžbu (2.4) za sve vrijednosti (x, t) , uključujući i one na karakterističnoj krivoj. Zaključujemo da je $h(t)$ konstantno, a stoga je $u(x, t)$ zaista konstantno na karakterističnoj krivoj.

Sada dolazimo do ključnog trenutka. Znamo da je desna strana karakteristične obične diferencijalne jednadžbe (2.5) konstantna kad god $x = x(t)$ definira karakterističnu krivu. To znači da je izvod $\frac{dx}{dt}$ konstanta, koja je jednaka upravo fiksnoj vrijednosti $u(x, t)$ na krivoj. Stoga karakteristična kriva mora biti prava linija,

$$x = ut + k,$$

čiji koeficijent pravca odgovara vrijednosti koju rješenje $u(x, t)$ uzima na njoj.

Budući da je rješenje konstantno duž svake karakteristične prave, ono mora biti funkcija karakteristične varijable

$$\xi = x - tu,$$

te je stoga

$$u(x, t) = f(x - tu),$$

gdje je f proizvoljna funkcija klase $\mathcal{C}^1$. Dobiveni izraz za rješenje treba posmatrati kao algebarsku jednadžbu koja implicitno definira rješenje $u(x, t)$ kao funkciju prostora x i vremena t .

Da bismo riješili dati početni problem, primijetimo da u početnom trenutku $t = 0$, iz općeg rješenja imamo $u(x, 0) = f(x)$, tj. funkcija f se poklapa sa početnom funkcijom g .

Međutim, budući da je dobivena formula rješenja implicitna jednadžba po u , nije odmah jasno:

2.3 Početni i rubni problemi

- (i) može li se ona riješiti tako da se dobije dobro definirana funkcija $u(x, t)$, i
- (ii) čak i ako je to moguće, kako opisati kvalitativne osobine i dinamičko ponašanje dobivenog rješenja.

Znatno korisniji pristup zasniva se na sljedećoj geometrijskoj konstrukciji. Kroz svaku tačku $(0, y)$ na x -osi povucimo karakterističnu pravu

$$x = tf(y) + y,$$

čiji koeficijent pravca, naime $f(y) = u(y, 0)$, odgovara početnoj vrijednosti u u toj tački.

Prema prethodnom, rješenje će imati istu vrijednost na cijeloj karakterističnoj pravoj, te je stoga

$$u(tf(y) + y, t) = f(y) \quad \text{za svaki } t.$$

Na primjer, ako je $f(y) = y$, tada je $u(x, t) = y$ kad god vrijedi $x = ty + y$; eliminirajući y , dobijemo

$$u(x, t) = \frac{x}{t+1},$$

što se slaže s jednim od naših rješenja u obliku prave linije.

Uzmimo sada jedan specijalan slučaj za početnu funkciju, tj.

$$g(x) = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 1 - x, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Prema prethodnom, rješenje treba da ima oblik

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & x < t, \\ \frac{1-x}{1-t}, & t < x < 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Objašnjenje: Početni uvjet $g(x)$ određuje vrijednost rješenja na osi $t = 0$. Karakteristične linije su date formulom

$$x = tg(y) + y.$$

Za $x < 0$, $g(x) = 1$, pa su karakteristične linije $x = t + y$, a rješenje je konstantno: $u = 1$.

Za $0 \leq x \leq 1$, gdje je $g(x) = 1 - x$, karakteristične linije su

$$x = y + t(1 - y),$$

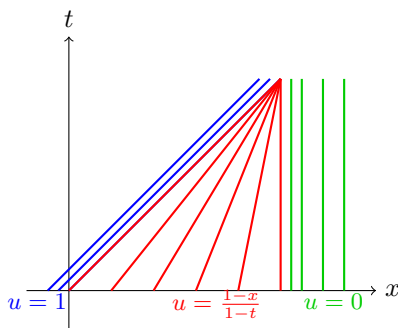
i rješenje je:

$$u(x, t) = \frac{1-x}{1-t}.$$

2.4 Zadaci za samostalan rad

Za $x > 1$, $g(x) = 0$, pa su karakteristične linije $x = y$, a rješenje je $u = 0$.

Ovo rješenje vrijedi dok se karakteristične linije ne presijeku, odnosno dok je $t < 1$. Za $t = 1$ pojavljuje se šok (diskontinuitet), pa tada rješenje prestaje biti klasično.



Slika 2.1: Karakteristične linije: za $x < 0$ ($u = 1$) su plave boje; za $0 \leq x \leq 1$ ($u = \frac{1-x}{1-t}$) su crvene boje; za $x > 1$ ($u = 0$) su zelene boje.

◆

2.4 Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti red i klasificirati svaku od sljedećih parcijalnih diferencijalnih jednažbi:

(i) $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} = 1$;

(ii) $\cos\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + u^4 = \cos x$;

(iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \Delta u = \cos u$;

(iv) $e^{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} = 1$;

(v) $\Delta u = 0$;

(vi) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = e^x u$;

(vii) $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial z} = 1$.

2. Za zadanu jednažbu $u_x + u_y = -u$ provjerite da svaka funkcija oblika $u = f(y - x)e^{-x}$, $u = f(y - x)e^{-y}$, gdje je f proizvoljna glatka funkcija, zadovoljava ovu jednažbu.

3. Data je kvazilinearna parcijalna diferencijalna jednažba $u_x + uu_y = 0$.

2.4 Zadaci za samostalan rad

- (i) Provjerite da je svaka funkcija data u implicitnom obliku $u = f(y - ux)$ rješenje ove jednačbe.
 - (ii) Koje je eksplicitno rješenje ako znamo da funkcija u zadovoljava uvjet $u = 2y + 1$ duž y -ose?
4. Provjerite da je funkcija $u = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$ rješenje (potpuno) nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe $|u_x|^2 + |u_y|^2 = 1$. Koji je domen funkcije u ako je posmatrana kao klasično rješenje? Rješenje zadovoljava pomoćni uvjet

$$u = 0 \quad \text{na jediničnoj kružnici} \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Primijetimo da je funkcija $u = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ također rješenje PDJ koje zadovoljava i pomoćni uvjet.

5. Koristeći odgovarajuću smjenu varijabli, kao što smo pokazali u primjeru 2.1.9, odrediti opće rješenje sljedećih PDJ:

- (i) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0$;
- (ii) $\frac{\partial u}{\partial t} - 3\frac{\partial u}{\partial x} = 3$;
- (iii) $2\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0$;
- (iv) $a\frac{\partial u}{\partial t} + b\frac{\partial u}{\partial x} = u$, gdje je $a, b \neq 0$.

6. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačbu čije je rješenje dato sa $u(x, y) = f(x)g(y)$, gdje su f, g proizvoljne, dovoljan broj puta diferencijabilne funkcije.

7. Neka su $u = f(x, y, z)$, $v = g(x, y, z)$ date diferencijabilne funkcije svojih nezavisnih varijabli x, y, z . Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednačbu najnižeg reda, čije je rješenje klasa svih funkcija definiranih implicitno relacijom $F(u, v) = 0$, pri čemu parcijalni izvodi F_u, F_v nisu oba nula.

8. Pokažite da svaka od sljedećih jednačbi ima rješenje oblika $u(x, y) = e^{\alpha x + \beta y}$. Odredite konstante α i β za svaki od primjera:

- (i) $\frac{\partial u}{\partial x} + 3\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$;
- (ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 5e^{x-2y}$;
- (iii) $\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} + 2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} = 0$.

9. Neka je $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferencijabilna funkcija. Dokažite da parcijalna diferencijalna jednačba zadovoljava funkcionalnu relaciju $u = f(x + p(u)t)$, gdje je f proizvoljna diferencijabilna funkcija. Odredite takva rješenja posebno za sljedeće jednačbe:

- (i) $\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial u}{\partial x}$;

2.4 Zadaci za samostalan rad

- (ii) $\frac{\partial u}{\partial t} = u \frac{\partial u}{\partial x}$;
- (iii) $\frac{\partial u}{\partial t} = u \sin(u) \frac{\partial u}{\partial x}$.
10. Neka je funkcija $u(x, y) = h\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$ rješenje jednadžbe minimalne površi.
11. (i) Pokažite da funkcija $h(r)$ zadovoljava običnu diferencijalnu jednadžbu $rh'' + h'(1 + (h')^2) = 0$.
- (ii) Koje je opće rješenje jednadžbe iz dijela (i)?
12. (i) Posmatrajmo jednadžbu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$. Napisati jednadžbu u novim koordinatama $s = x$, $t = x - y$, pa odrediti opće rješenje tako dobivene jednadžbe.
- (ii) Jednadžbu $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 5\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ napisati u novim koordinatama $s = x + y$, $t = 2x$.
13. Odrediti opće rješenje za svaku od sljedećih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi:
- (i) $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$;
- (ii) $u \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$;
- (iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$.
14. Odrediti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu svih tangentnih ravni elipsoida $x^2 + 4y^2 + 4z^2 = 4$, koje nisu ortogonalne na xy -ravan.
15. Odredi parcijalnu diferencijalnu jednadžbu sljedećih dvoparametarskih familija površi, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$:
- (i) $u = ax + by + ab$;
- (ii) $(x - a)^2 + (y - b)^2 + u^2 - r^2 = 0$, gdje je $r \in \mathbb{R}$ fiksni broj;
- (iii) $u = 2\sqrt{\frac{a}{x} + \frac{ay + b}{x}}$;
- (iv) $u = \left(-\frac{1}{a}(ax^2 + y + b)\right)^{-1}$.

Parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda

U ovom poglavlju razmatrat ćemo linearne i kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Poseban fokus će biti na Cauchyjevom problemu i njegovoj generalizaciji. Nakon toga, bavit ćemo se nelinearnim parcijalnim diferencijalnim jednadžbama prvog reda i metodama za njihovo rješavanje.

U daljem tekstu, prilikom zapisivanja rješenja integrala u kojima se pojavljuju logaritamske funkcije, često ćemo izostavljati apsolutne vrijednosti u izrazima tipa $\ln |g(x_1, \dots, x_n)|$ i pisaćemo jednostavno $\ln g(x_1, \dots, x_n)$. Pri tome se podrazumijeva da su rješenja data lokalno, odnosno na svakoj povezanoj komponenti domene na kojoj su argumenti logaritma nenulti i imaju stalan predznak. Također, konstanta integracije C može imati različite vrijednosti na različitim povezanim komponentama domene, te se pod istom oznakom C podrazumijeva odgovarajuća konstanta na svakoj takvoj komponenti.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe

3.1.1 Određivanje općeg rješenja

Izlaganje u ovom poglavlju započet ćemo primjerom rješavanja linearne nehomogene parcijalne diferencijalne jednadžbe prvog reda, u kojoj nepoznata funkcija zavisi od dvije nezavisne varijable.

Primjer 3.1.1. Riješiti linearnu PDJ prvog reda

$$4\frac{\partial u}{\partial x} - 3\frac{\partial u}{\partial y} + u = x, \quad u = u(x, y).$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Rješenje. Posmatrajmo općenito linearnu nehomogenu parcijalnu diferencijalnu jednačbu prvog reda u obliku

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} + cu = f(x, y),$$

gdje su a, b i c realne konstante i $a^2 + b^2 > 0$. Kako možemo riješiti datu jednačbu, a da prethodno ne razvijamo opću teoriju za njeno rješavanje?

Razmotrit ćemo sljedeća dva slučaja: $b = 0$ i $b \neq 0$.

1. slučaj $b = 0$.

U ovom slučaju data PDJ postaje

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + cu = f(x, y).$$

Dobivena PDJ može se posmatrati kao linearna obična diferencijalna jednačba nepoznate funkcije u , nezavisne varijable x i parametra y . Ovu jednačbu možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c}{a}u = \frac{1}{a}f(x, y),$$

čije je opće rješenje dato sa

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{a}x} \left(C(y) + \frac{1}{a} \int f(x, y) e^{\frac{c}{a}x} dx \right),$$

odnosno

$$u(x, y) = e^{-\frac{c}{a}x} \left(C(y) + \frac{1}{a} \int f(x, y) e^{\frac{c}{a}x} dx \right).$$

U ovom rješenju $C(y)$ je proizvoljna funkcija od y .

2. slučaj $b \neq 0$.

U ovom slučaju ideja je da se pronađe transformacija pomoću koje se može eliminirati jedan od parcijalnih izvoda svodeći datu PDJ na taj način na prethodni slučaj. U tom cilju lijevu stranu jednačbe napišimo na sljedeći način

$$\begin{aligned} a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} &= (a \mathbf{i} + b \mathbf{j}) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \mathbf{j} \right) \\ &= (a \mathbf{i} + b \mathbf{j}) \mathbf{grad} u. \end{aligned}$$

Primijetimo da je izraz na desnoj strani zapravo izvod funkcije $u(x, y)$ u pravcu vektora $a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$. (Zapravo, proporcionalan je izvodu u pravcu, ako vektor $a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$ nije jedinični.)

Dakle, želimo da napišemo polaznu PDJ na način da uključuje izvod u pravcu $a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$, ali ne u pravcu ortogonalnom na $a \mathbf{i} + b \mathbf{j}$.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Posmatrajmo transformaciju T :

$$T : \begin{cases} w_1 = bx - ay, \\ w_2 = y. \end{cases}$$

Stavimo

$$v(w_1, w_2) = u[x(w_1, w_2), y(w_1, w_2)].$$

Sada je

$$u(x, y) = v(w_1, w_2), \quad w_1 = w_1(x, y), \quad w_2 = w_2(x, y).$$

Vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial w_1} \cdot b + \frac{\partial u}{\partial w_2} \cdot 0 = b \frac{\partial u}{\partial w_1}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial w_1} \cdot (-a) + \frac{\partial u}{\partial w_2} \cdot 1 = -a \frac{\partial u}{\partial w_1} + \frac{\partial u}{\partial w_2}. \end{aligned}$$

Dalje je

$$a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = b \frac{\partial u}{\partial w_2}.$$

Sada polazna PDJ postaje

$$b \frac{\partial u}{\partial w_2} + cu = f(w_1, w_2), \quad u = u(w_1, w_2).$$

Dobivenu jednačbu možemo posmatrati kao običnu linearnu diferencijalnu jednačbu po varijabli w_2 i parametru w_1 i postupiti kao u prvom slučaju.

Sada ćemo riješiti polaznu PDJ. Uvedimo smjenu

$$\begin{cases} w_1 = -3x - 4y \\ w_2 = y \end{cases} \implies \begin{cases} x = -\frac{1}{3}(w_1 + 4w_2) \\ y = w_2 \end{cases}.$$

PDJ postaje

$$-3 \frac{\partial u}{\partial w_2} + u = -\frac{1}{3}(w_1 + 4w_2), \quad u = u(w_1, w_2),$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial w_2} - \frac{1}{3}u = \frac{1}{9}(w_1 + 4w_2), \quad u = u(w_1, w_2),$$

čije je rješenje

$$\begin{aligned} u(w_1, w_2) &= e^{\frac{1}{3}w_2} \left(C(w_1) + \frac{1}{9} \int (w_1 + 4w_2) e^{-\frac{1}{3}w_2} dw_2 \right) \\ &= e^{\frac{1}{3}w_2} C(w_1) + \frac{1}{9} e^{\frac{1}{3}w_2} \left(-3w_1 e^{-\frac{1}{3}w_2} + 4 \int w_2 e^{-\frac{1}{3}w_2} dw_2 \right) \\ &= e^{\frac{1}{3}w_2} C(w_1) + \frac{1}{9} e^{\frac{1}{3}w_2} \left(-3w_1 e^{-\frac{1}{3}w_2} + 4 \left(-3w_2 e^{-\frac{1}{3}w_2} - 9e^{-\frac{1}{3}w_2} \right) \right) \\ &= e^{\frac{1}{3}w_2} C(w_1) - \frac{1}{3}w_1 - \frac{4}{3}w_2 - 4, \end{aligned}$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe

odnosno

$$u(x, y) = x - 4 + e^{\frac{1}{3}y} C(-3x - 4y).$$



U primjeru 3.1.1 nepoznata funkcija zavisi samo od dvije nezavisne varijable. Zbog toga smo, uz odgovarajuće smjene varijabli, mogli zadatu parcijalnu diferencijalnu jednađžbu svesti na običnu linearnu nehomogenu diferencijalnu jednađžbu. Međutim, ako nepoznata funkcija zavisi od tri ili više nezavisnih varijabli, tj. ako imamo višedimenzionalni problem, situacija postaje znatno složenija. Pristup koji smo koristili u ovom primjeru tada više nije pogodan, prije svega zato što ne postoji opća sistematska procedura za transformaciju parcijalne diferencijalne jednađžbe u običnu; zatim, zato što transformacija koordinata u višedimenzionalnom prostoru postaje znatno složenija; i na kraju, zato što je u takvim slučajevima veoma teško "pogoditi" smjenu varijabli koja bi značajno pojednostavila jednađžbu. Drugim riječima, metoda koju smo ovdje pokazali efikasna je za dvodimenzionalne slučajeve, ali ju je teško generalizirati na probleme s tri ili više nezavisnih varijabli.

U nastavku ćemo pokazati kako se rješavanje linearnih (kvazilinearnih) parcijalnih diferencijalnih jednađžbi zapravo svodi na pronalaženje prvih integrala odgovarajućeg sistema običnih diferencijalnih jednađžbi. Ovakav pristup omogućava rješavanje linearnih parcijalnih diferencijalnih jednađžbi prvog reda, bez obzira na to od koliko (konačno mnogo) nezavisnih varijabli zavisi nepoznata funkcija.

Najprije ćemo izložiti teoriju za linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe prvog reda.

Definicija 3.1.1. *Linearnom homogenom parcijalnom diferencijalnom jednađžbom prvog reda nazivamo jednađžbu oblika*

$$P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad (3.1)$$

gdje je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, $u = u(\mathbf{x}) = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ je nepoznata funkcija, Ω je oblast u $\mathbb{R}^n$, a funkcije $P_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ za $i = 1, 2, \dots, n$ su zadate (poznate) funkcije. Funkcije $P_i(\mathbf{x}) = P_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazivamo koeficijentima jednađžbe.

Pretpostavit ćemo da su sve funkcije $P_i(\mathbf{x})$ neprekidne u oblasti Ω te da posjeduju neprekidne parcijalne izvode prvog reda, tj. $P_i \in C^1(\Omega)$ za svaki $i = 1, 2, \dots, n$.

Dodatno, pretpostavit ćemo da je svaka tačka $\mathbf{x} \in \Omega$ obična tačka jednađžbe (3.1), što znači da je barem jedna od funkcija $P_i(\mathbf{x})$ različita od nule u toj tački. Ako u daljnjem razmatranju bude važno znati koja je funkcija različita od nule, bez gubitka općenitosti možemo pretpostaviti da je to funkcija $P_n(\mathbf{x})$. Ovo se

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađbe

uvijek može postići odgovarajućom prenumeracijom funkcija $P_i(\mathbf{x})$ i nezavisnih varijabli.

Zajedno s jednađbom (3.1) posmatramo i sljedeći sistem diferencijalnih jednađbi, zapisan u simetričnom obliku:

$$\frac{dx_1}{P_1(\mathbf{x})} = \frac{dx_2}{P_2(\mathbf{x})} = \cdots = \frac{dx_n}{P_n(\mathbf{x})}. \quad (3.2)$$

Napomenimo da je sistem (3.2) reda $n - 1$. On se može zapisati i u sljedećem normalnom obliku:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dx_n} = \frac{P_1(\mathbf{x})}{P_n(\mathbf{x})}, \\ \frac{dx_2}{dx_n} = \frac{P_2(\mathbf{x})}{P_n(\mathbf{x})}, \\ \vdots \\ \frac{dx_{n-1}}{dx_n} = \frac{P_{n-1}(\mathbf{x})}{P_n(\mathbf{x})}, \end{cases} \quad (3.3)$$

gdje smo varijablu x_n uzeli kao nezavisnu, dok preostale varijable $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ posmatramo kao funkcije od x_n , pri čemu je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Na osnovu pretpostavki o funkciji $P_n(\mathbf{x})$, slijedi da su desne strane sistema (3.3) neprekidno diferencijabilne u oblasti Ω . Dakle, zadovoljen je (lokalno) Lipschitzov uvjet u Ω , pa prema Cauchy-Picardovom teoremu o egzistenciji i jedinstvenosti rješenja obične diferencijalne jednađbe, svakom tačkom $\mathbf{x} \in \Omega$ prolazi tačno jedna integralna kriva sistema (3.3), odnosno sistema (3.2).

To znači da Cauchyjev početni problem za sistem (3.3) (ili ekvivalentno, za (3.2)) ima, za zadate početne vrijednosti, tačno jedno rješenje.

Prisjetimo se da za sistem običnih diferencijalnih jednađbi

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n,$$

funkcije $I(x_1, \dots, x_n)$ zovemo *prvi integrali* datog sistema ako su one konstantne duž svake njegove integralne krive, tj. ako za svako rješenje $\mathbf{x}(t)$ vrijedi

$$\frac{d}{dt} I(\mathbf{x}(t)) = 0,$$

tj., I je prvi integral sistema običnih diferencijalnih jednađbi ako i samo ako vrijedi

$$\nabla I(\mathbf{x}) \cdot f(\mathbf{x}) = 0.$$

Na osnovu osobina prvih integrala, slijedi da sistem (3.2) ima tačno $n-1$ međusobno nezavisnih prvih integrala.

Sljedeći teorem uspostavlja vezu između prvih integrala sistema (3.2) i rješenja parcijalne diferencijalne jednađbe (3.1).

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Teorem 3.1.1. *Neka je $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ proizvoljna diferencijabilna funkcija svojih argumenata. Tada funkcija $u = F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ predstavlja rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1) ako i samo ako je $F(\mathbf{x}) = C$, gdje je $C \in \mathbb{R}$ konstanta, prvi integral sistema (3.2), pri čemu je $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.*

Dokaz. Pretpostavimo najprije da je $F(\mathbf{x}) = C$ prvi integral sistema (3.2). Tada vrijedi

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0.$$

Korištenjem relacije (3.2), prethodni izraz postaje:

$$P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_2} + \dots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,$$

što znači da funkcija $u = F(\mathbf{x})$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačbu (3.1).

Obrnuto, pretpostavimo da je $u = F(\mathbf{x})$ rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1), tj.

$$P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_2} + \dots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0.$$

Opet koristeći relaciju (3.2), imamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} dx_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad dF = 0,$$

pa slijedi da je $F(\mathbf{x}) = \text{const}$, odnosno $F(\mathbf{x}) = C$, što znači da je F prvi integral sistema (3.2). $\square$

Teorem 3.1.1 pokazuje da je svako rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1) ujedno i prvi integral sistema običnih diferencijalnih jednačbi (3.2), i obrnuto. Drugim riječima, parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi (3.1) može se pridružiti odgovarajući sistem običnih diferencijalnih jednačbi, čija rješenja odražavaju strukturu rješenja same parcijalne jednačbe.

Sljedeći teoremi odnose se na rješenje i opće rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1).

Teorem 3.1.2. *Neka su $\varphi_1 = \varphi_1(\mathbf{x}), \dots, \varphi_k = \varphi_k(\mathbf{x})$ rješenja parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1), a Φ neka proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija koja zavisi od k varijabli. Tada je funkcija*

$$u = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$$

također rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe (3.1).

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe

Dokaz. Pretpostavimo da su funkcije $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ rješenja jednađžbe (3.1), tj. da identički vrijedi:

$$P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \dots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, k.$$

Pomnožimo j -tu jednađžbu s $\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j}$ i sumirajmo preko svih j :

$$\sum_{j=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \left(P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + \dots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} \right) = 0.$$

Odnosno

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^k \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_j} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i},$$

pa prethodni izraz možemo napisati kao

$$P_1(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_1} + P_2(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_2} + \dots + P_n(\mathbf{x}) \frac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0.$$

Dakle, $u = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_k)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednađžbu (3.1), čime je dokaz završen. $\square$

Teorem 3.1.3. *Neka su*

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \quad \varphi_2(x_1, \dots, x_n) = C_2, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1}$$

prvi integrali sistema (3.2). Tada je opće rješenje parcijalne diferencijalne jednađžbe (3.1) dato izrazom

$$u = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \quad (3.4)$$

gdje je Φ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Dokaz. Na osnovu Teorema 3.1.1 i Teorema 3.1.2 slijedi da je funkcija

$$u = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})$$

rješenje parcijalne diferencijalne jednađžbe (3.1). Iz teorije prvih integrala sistema poznato je da je opći oblik prvih integrala sistema (3.3) upravo

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)).$$

Ako je u_1 proizvoljno rješenje jednađžbe (3.1), tada je, prema Teoremu 3.1.1, u_1 prvi integral sistema (3.3), te je nužno sadržano u rješenju oblika (3.4).

Time smo pokazali da je svako proizvoljno rješenje φ parcijalne diferencijalne jednađžbe (3.1) sadržano u općem rješenju (3.4). $\square$

U nastavku ćemo primjenu dokazanih teorema ilustrirati na nekoliko primjera linearnih homogenih parcijalnih diferencijalnih jednađžbi prvog reda.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Primjedba 3.1.1. Napomenimo da prvi integrali nisu jednoznačno određeni; različitim metodama može se dobiti različit skup prvih integrala. Da bi se konstruisalo opće rješenje date parcijalne diferencijalne jednačbe, potrebno je da integrali koji ulaze u njegovu konstrukciju budu funkcionalno nezavisni.

Primjer 3.1.2. Odrediti opće rješenje¹ jednačbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = u(x, y).$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku pridružen datoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-1}.$$

Očigledno je

$$\frac{dy}{dx} = -1$$

pa je

$$\phi_1(x, y) \equiv x + y = C_1$$

prvi integral ovog sistema. Na osnovu Teorema 3.1.3, opće rješenje date jednačbe je

$$\boxed{u(x, y) = \Phi(x + y)}.$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svog argumenta. ◆

Primjer 3.1.3. Odrediti opći integral jednačbe

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy(z^2 + 1) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridružen datoj PDJ, glasi:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy(z^2 + 1)}.$$

Iz

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

imamo jedan prvi integral

$$\phi_1(x, y, z) \equiv \frac{x}{y} = C_1.$$

Primijetimo da je $P_1(x, y, z) \cdot y + P_2(x, y, z) \cdot x = 2xy$. Sada imamo

$$\frac{ydx + xdy}{2xy} = \frac{dz}{xy(z^2 + 1)}.$$

¹Umjesto opće rješenje, koristi se i termin *opći integral*.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Odavde dobivamo

$$ydx + xdy = 2 \frac{dz}{z^2 + 1},$$

odnosno

$$d(xy) = 2 \frac{dz}{z^2 + 1}.$$

Nakon integriranja, imamo da je drugi prvi integral dat sa

$$\phi_2(x, y, z) \equiv xy - 2 \arctan z = C_2.$$

Jednostavno se uvjeravamo da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje dato sa:

$$u(x, y, z) = \Phi \left(\frac{x}{y}, xy - 2 \arctan z \right).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata.

◆

Primjer 3.1.4. Odrediti opće rješenje jednačbe

$$(y^2 + z^2 - x^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2xy \frac{\partial u}{\partial y} - 2xz \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku pridružen datoj PDJ glasi

$$\frac{dx}{y^2 + z^2 - x^2} = \frac{dy}{-2xy} = \frac{dz}{-2xz}.$$

Prvi integral lako dobivamo iz

$$\frac{dy}{y} = \frac{dz}{z},$$

tj. on je dat sa

$$\phi_1(x, y, z) \equiv \frac{y}{z} = C_1.$$

Pored toga, iz gornjeg sistema imamo da je²

$$\frac{xdx + ydy + zdz}{-x(x^2 + y^2 + z^2)} = \frac{dz}{-2xz},$$

²Pri određivanju prvih integrala sistema običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku, često je korisna sljedeća osobina proporcija:

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \dots = \frac{a_n}{b_n} = \frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \dots + k_n b_n},$$

gdje su $k_1, k_2, \dots, k_n$ proizvoljne konstante.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

odakle slijedi

$$\frac{d(x^2 + y^2 + z^2)}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{dz}{z},$$

pa je drugi prvi integral dat sa

$$\phi_2(x, y, z) \equiv \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z} = C_2.$$

Jednostavno se provjeri da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje date jednačbe dato sa

$$u(x, y, z) = \Phi\left(\frac{y}{z}, \frac{x^2 + y^2 + z^2}{z}\right).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

Primjer 3.1.5. Odrediti opće rješenje sljedeće PDJ

$$x(1 - 2y^2)\frac{\partial u}{\partial x} - y(1 + 2x^2)\frac{\partial u}{\partial y} + 2z(x^2 + y^2)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z)$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku pridružen datoj PDJ glasi

$$\frac{dx}{x(1 - 2y^2)} = \frac{dy}{-y(1 + 2x^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}.$$

Koristeći osobine proporcija, imamo

$$\frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{1 - 2y^2 - 1 - 2x^2 + 2x^2 + 2y^2} = \frac{\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz}{0}.$$

Odavde slijedi

$$\frac{1}{x}dx + \frac{1}{y}dy + \frac{1}{z}dz = 0 \Leftrightarrow d(\ln x + \ln y + \ln z) = 0 \Leftrightarrow xyz = C_1,$$

gdje je C_1 proizvoljna realna konstanta. Također, izrazi pod diferencijalom se posmatraju tamo gdje su definirani. Dakle, prvi integral je

$$\phi_1(x, y, z) \equiv xyz = C_1.$$

Da bismo našli drugi prvi integral, primijetimo sljedeće:

$$xdx - ydy - \frac{1}{z}dz = -(x^2 + y^2) \Leftrightarrow \frac{1}{2}d(x^2 - y^2 - 2\ln z) = -(x^2 + y^2),$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

posmatrajući funkciju $\ln z$ tamo gdje je definirana. Sada imamo

$$\frac{\frac{1}{2}d(x^2 - y^2 - 2\ln z)}{-(x^2 + y^2)} = \frac{dz}{2z(x^2 + y^2)}.$$

Oдавде, dobivamo

$$d(x^2 - y^2 - \ln z) = -d(\ln z).$$

Integriranjem, imamo

$$x^2 - y^2 - \ln z = C_2,$$

gdje je C_2 proizvoljna realna konstanta. Dakle, drugi prvi integral sistema glasi

$$\phi_2(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 - \ln z = C_2.$$

Lako se provjeri da su $\phi_1(x, y, z) = C_1$ i $\phi_2(x, y, z) = C_2$ zaista funkcionalno nezavisni prvi integrali posmatranog sistema običnih diferencijalnih jednačbi, pa su $\phi_1(x, y, z)$ i $\phi_2(x, y, z)$ rješenja polazne PDJ. Sada je opće rješenje polazne PDJ dato sa

$$u(x, y, z) = \Phi(\phi_1(x, y, z), \phi_2(x, y, z)) = \Phi(xyz, x^2 - y^2 - \ln z).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ◆

Primjer 3.1.6. Riješiti sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$\frac{1}{y}(y^2 + z^2)\frac{\partial u}{\partial x} + xz\frac{\partial u}{\partial y} - xy\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku glasi:

$$\frac{ydx}{y^2 + z^2} = \frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-xy}.$$

Iz

$$\frac{dy}{xz} = \frac{dz}{-xy},$$

imamo prvi integral

$$\phi_1(x, y, z) \equiv y^2 + z^2 = C_1, \quad C_1 > 0.$$

Jedan od načina nalaženja drugog prvog integrala je da koristimo dobiveni prvi integral, kao što ćemo i učiniti u nastavku. Iz prvog i trećeg izraza sistema običnih diferencijalnih jednačbi, imamo

$$\frac{y^2 dx}{y^2 + z^2} = \frac{dz}{-x}.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađbe

Iz prvog prvog integrala dobivamo

$$y^2 = C_1 - z^2.$$

Zamijenom u posljednjoj jednađbi, i razdavašnjem varijabli, imamo

$$-xdx = \frac{C_1 dz}{C_1 - z^2}.$$

Integriranjem ove jednađbe, dobivamo

$$\frac{-x^2}{2} = \frac{1}{2\sqrt{C_1}} \ln \left| \frac{\sqrt{C_1} + z}{\sqrt{C_1} - z} \right|.$$

Odnosno, nakon algebarskih manipulacija i zamijene konstante C_1 , dobivamo drugi prvi integral

$$\phi_2(x, y, z) = \frac{x^2}{2} + \sqrt{y^2 + z^2} \ln \left| \frac{z + \sqrt{y^2 + z^2}}{y} \right|.$$

Jednostavno se uvjeravamo da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje zadate jednađbe dato sa

$$u(x, y, z) = \Phi(\phi_1, \phi_2) = \Phi \left(y^2 + z^2, \frac{x^2}{2} + \sqrt{y^2 + z^2} \ln \left| \frac{z + \sqrt{y^2 + z^2}}{y} \right| \right).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ◆

Primjer 3.1.7. Odrediti opće rješenje sljedeće PDJ

$$(y + z) \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + (x - y) \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednađbi u simetričnom obliku pridružen datoj PDJ glasi:

$$\frac{dx}{y + z} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{x - y}.$$

Jedan prvi integral dobivamo iz

$$\frac{dx + dz}{x + z} = \frac{dy}{y},$$

tj.

$$\frac{d(x + z)}{x + z} = \frac{dy}{y}.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Nakon integracije i sređivanja dobivenih izraza, imamo da je prvi integral

$$\phi_1(x, y, z) \equiv \frac{x+z}{y} = C_1.$$

Da bismo našli drugi prvi integral, uočimo sljedeće:

$$\frac{dx - dy}{z} = \frac{dz}{x - y},$$

tj.

$$(x - y)d(x - y) = z dz.$$

Integriranjem, dobivamo drugi prvi integral

$$\phi_2(x, y, z) \equiv (x - y)^2 - z^2 = C_2.$$

Jednostavno se provjeri da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje dato sa

$$u(x, y, z) = \Phi \left(\frac{x+z}{y}, (x-y)^2 - z^2 \right).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ◆

Primjer 3.1.8. Odrediti opći integral parcijalne diferencijalne jednačbe

$$x(y-z)\frac{\partial u}{\partial x} + y(z-x)\frac{\partial u}{\partial y} + z(x-y)\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u = u(x, y, z).$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku glasi:

$$\frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}.$$

Iz

$$x(y-z) + y(z-x) + z(x-y) = 0,$$

slijedi da je

$$dx + dy + dz = 0,$$

pa je jedan prvi integral dat sa

$$\phi_1(x, y, z) \equiv x + y + z = C_1.$$

Iz

$$y - z + z - x + x - y = 0,$$

slijedi da je

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe

Odavde dobivamo drugi prvi integral

$$\phi_2(x, y, z) \equiv xyz = C_2.$$

Jednostavno se provjeri da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje dato sa

$$u(x, y, z) = \Phi(x + y + z, xyz).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ◆

Primjer 3.1.9. Odrediti opći integral parcijalne diferencijalne jednađžbe:

$$x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = 0, \quad u = u(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednađžbi u simetričnom obliku glasi:

$$\frac{dx_1}{x_1} = \frac{dx_2}{x_2} = \cdots = \frac{dx_n}{x_n}.$$

Jednostavno se uočava da su funkcionalno nezavisni prvi integrali ovog sistema:

$$\begin{aligned} \phi_1(x_1, \dots, x_n) &\equiv \frac{x_1}{x_n} = C_1, \\ \phi_2(x_1, \dots, x_n) &\equiv \frac{x_2}{x_n} = C_2, \\ &\vdots \\ \phi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) &\equiv \frac{x_{n-1}}{x_n} = C_{n-1}, \end{aligned}$$

pri čemu pretpostavljamo $x_n \neq 0$.

Opće rješenje zadate parcijalne diferencijalne jednađžbe glasi:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n) = \Phi\left(\frac{x_1}{x_n}, \frac{x_2}{x_n}, \dots, \frac{x_{n-1}}{x_n}\right).$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ◆

3.1.2 Cauchyjev problem početnih vrijednosti

Kao što je slučaj u teoriji običnih diferencijalnih jednađžbi, i u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednađžbi jedan od osnovnih problema jeste tzv. *Cauchyjev problem početnih vrijednosti*. Cauchyjev problem za jednađžbu (3.1) definiran je sljedećom definicijom.

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Definicija 3.1.2. Neka je $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) \in \Omega$ fiksna tačka. Označimo sa $\hat{\Omega}$ skup svih tačaka $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ takvih da $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) \in \Omega$. Skup $\hat{\Omega}$ predstavlja neku oblast u $\mathbb{R}^{n-1}$, pri čemu vrijedi $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \in \hat{\Omega}$.

Pretpostavimo da je u nekoj okolini tačke $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)})$, koja je sadržana u $\hat{\Omega}$, definirana neprekidno diferencijabilna funkcija $g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$.

Cauchyjev problem za jednačbu (3.1) sastoji se u sljedećem: Traži se rješenje $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jednačbe (3.1) koje zadovoljava uvjet

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}), \quad (3.5)$$

što se kraće može zapisati kao

$$u = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \quad \text{za } x_n = x_n^{(0)}. \quad (3.6)$$

Uvjet (3.5) naziva se **početnim uvjetom**, a funkcija g **početnom funkcijom**.

Sada ćemo opisati postupak nalaženja rješenja koje zadovoljava početni uvjet (3.6).

(i) Uvrstimo vrijednost $x_n = x_n^{(0)}$ u sistem prvih integrala:

$$\varphi_k(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \bar{\varphi}_k, \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

(ii) Iz sistema (3.7) izrazimo varijable $x_1, \dots, x_{n-1}$ u zavisnosti od $\bar{\varphi}_k$, tj. neka vrijedi:

$$x_k = \psi_k(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(iii) Zamjenom u izraz (3.6), pri čemu $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$ zamjenjujemo s funkcijama $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$, dobivamo:

$$u = g(\psi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}), \dots, \psi_{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})),$$

što predstavlja rješenje Cauchyjevog problema (3.6).

Teorem 3.1.4. Cauchyjev problem definiran u Definiciji 3.1.2 ima jedinstveno rješenje u nekoj okolini tačke

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \in \hat{\Omega}.$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \in \hat{\Omega}$ proizvoljna, ali fiksirana tačka. Prema teoriji sistema običnih diferencijalnih jednačbi, u nekoj okolini te tačke postoji $n-1$ međusobno nezavisnih prvih integrala

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

sistema (3.3). Dakle, u toj okolini vrijedi uvjet

$$\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} \neq 0. \quad (3.8)$$

Napomenimo da je prethodni uvjet (3.8) zapisan kao determinanta matrice formata $(n-1) \times n$, koja nije kvadratna, pa taj zapis može izazvati sumnju u njegovu ispravnost. Međutim, ovdje se radi o simboličkom zapisu koji zapravo znači da rang Jacobieve matrice funkcija $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ po varijablama $x_1, x_2, \dots, x_n$ mora biti $n-1$.

Stavimo

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_2, \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_{n-1}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Osim toga, stavimo

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_1^{(0)}, \\ \varphi_2(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_2^{(0)}, \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}) &= \overline{\varphi}_{n-1}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Na osnovu izraza (3.8) i primjenom teorema o implicitno zadatim funkcijama, slijedi da se sistem jednačbi (3.9) jednoznačno može riješiti po varijablama $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. Neka je

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \\ x_2 &= \psi_2(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \psi_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \end{aligned} \quad (3.11)$$

jedinstveno rješenje sistema (3.9) po varijablama $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

Osim toga, na osnovu teorema o implicitno zadatim funkcijama, slijedi da su funkcije

$$\psi_i(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

definirane u nekoj okolini tačke

$$(\overline{\varphi}_1^{(0)}, \overline{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}^{(0)})$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

i da u toj okolini imaju neprekidne izvode. Također, napominjemo da su sistemi (3.9) i (3.11) ekvivalentni, barem u okolini tačke

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, \bar{\varphi}_1^{(0)}, \bar{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}^{(0)}).$$

To znači da, ako u (3.11) uvrstimo vrijednosti $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$ iz (3.9), dobivamo identitete

$$\begin{aligned} x_1 &= \psi_1(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})), \\ x_2 &= \psi_2(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \psi_{n-1}(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})). \end{aligned}$$

Pokažimo sada da možemo formirati složene funkcije

$$\psi_i(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Primijetimo da su funkcije $\psi_i(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1})$ definirane u nekoj okolini tačke

$$(\bar{\varphi}_1^{(0)}, \bar{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}^{(0)}).$$

S druge strane, tačka

$$(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})) \quad (3.12)$$

se za $x_1 = x_1^{(0)}, x_2 = x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1} = x_{n-1}^{(0)}, x_n = x_n^{(0)}$, prema (3.10), poklapa sa tačkom

$$(\bar{\varphi}_1^{(0)}, \bar{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}^{(0)}).$$

Ako se $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ "malo" udaljavaju od $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)}$, onda će se zbog neprekidnosti funkcija $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ i tačka (3.12) "malo" udaljavati od tačke $(\bar{\varphi}_1^{(0)}, \bar{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}^{(0)})$ u kojoj su definirane funkcije $\psi_i(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1})$. Znači, ako se tačka $(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n)$ nalazi u dovoljno maloj okolini tačke $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}, x_n^{(0)})$, onda će se tačka (3.12) nalaziti u nekoj okolini tačke $(\bar{\varphi}_1^{(0)}, \bar{\varphi}_2^{(0)}, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}^{(0)})$ u kojoj su definirane funkcije $\psi_i(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1})$. Ovo upravo znači da za takve $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ možemo formirati složenu funkciju

$$\psi_i(\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Pomoću ovih funkcija formiramo složenu funkciju

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &= g(\psi_1(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n)), \dots, \\ &\quad \psi_{n-1}(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))) \end{aligned} \quad (3.13)$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe

Da se ova složena funkcija u može formirati, pokazujemo slično kao i mogućnost formiranja funkcija $\psi_i(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n))$.

Funkcija $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ data sa (3.13) je rješenje jednađžbe (3.1), jer je izražena preko prvih integrala $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$. Ako u (3.13) stavimo da je $x_n = x_n^{(0)}$ imat ćemo

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) &= \\ &g(\psi_1(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})), \dots, \\ &\psi_{n-1}(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}))) \\ &= g(\psi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \dots, \psi_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1})) \\ &= g(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Znači, funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$ zadovoljava i početni uvjet (3.6), pa je ona rješenje Cauchyjevog problema.

Ostaje da pokažemo da je to jedino rješenje Cauchyjevog problema. Neka je $u_1(x_1, \dots, x_n)$ bilo koje drugo rješenje Cauchyjevog problema. Kako $u_1(x_1, \dots, x_n)$ zadovoljava jednađžbu (3.1) to mora postojati funkcija Φ_1 tako da je

$$u_1(x_1, \dots, x_n) = \Phi_1(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \varphi_2(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)). \quad (3.14)$$

Ako stavimo da je $x_n = x_n^{(0)}$ i ako uzmemo u obzir da u_1 zadovoljava početni uvjet (3.6) imat ćemo

$$\begin{aligned} \Phi_1(\varphi_1(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \varphi_2(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)})) \\ = g(x_1, \dots, x_{n-1}). \end{aligned}$$

Ako, kao i prije, u (3.9) stavimo da je $\varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \overline{\varphi}_i$, $i = 1, 2, \dots, n-1$, prethodna jednađžba postaje

$$\Phi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}) = g(x_1, \dots, x_{n-1}). \quad (3.15)$$

Vidjeli smo da se iz jednađžbi

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = \overline{\varphi}_i, \quad i = 1, 2, \dots, n-1,$$

rješavajući ih po x_i , dobiva

$$x_i = \psi_i(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Uvrstimo li ovo u desnu stranu od (3.15) imat ćemo

$$\Phi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}) = g(\psi_1(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1}), \dots, \psi_{n-1}(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_{n-1})). \quad (3.16)$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Iz ovog i (3.14) vidimo da ćemo funkciju $u_1(x_1, \dots, x_n)$ dobiti ako u desnu stranu (3.16) umjesto $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}$ stavimo redom $\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n)$. Ako ovo učinimo i dobiveni rezultat uporedimo sa (3.13) dobit ćemo da je

$$u(x_1, \dots, x_n) \equiv u_1(x_1, \dots, x_n).$$

Ovim smo dokazali jedinstvenost rješenja Cauchyjevog problema u nekoj okolini tačke $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_{n-1}^{(0)}) \in \hat{\Omega}$. $\square$

Primijetimo da dokaz Teorema 3.1.4 zapravo ilustrira metodologiju rješavanja Cauchyjevog problema početnih vrijednosti za linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe, što ćemo u nastavku demonstrirati na nekoliko primjera.

Primjer 3.1.10. Riješiti Cauchyjev problem

$$y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = \varphi(y),$$

odnosno, odrediti integralnu površ koja sadrži zadatu krivu.

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku je:

$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{-x}.$$

Iz ovoga dobivamo prvi integral

$$\phi(x, y) \equiv x^2 + y^2 = C, \quad C = \text{const.}$$

Dakle, opće rješenje je oblika

$$u(x, y) = \Phi(x^2 + y^2),$$

gdje je Φ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svog argumenta. Sada iz općeg rješenja izdvajamo ono koje zadovoljava početni uvjet.

Stavimo

$$\bar{\phi} := \phi(0, y) = y^2.$$

Tada je $\Phi(y^2) = \varphi(y)$, odakle vidimo da je funkcija φ parna, pa je

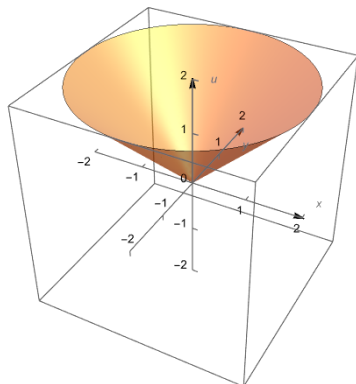
$$\Phi(\bar{\phi}) = \varphi(\sqrt{\bar{\phi}}).$$

Zamjenom $\bar{\phi}$ sa ϕ , zaključujemo da tražena integralna površ ima oblik:

$$\boxed{u(x, y) = \varphi(\sqrt{x^2 + y^2}).}$$

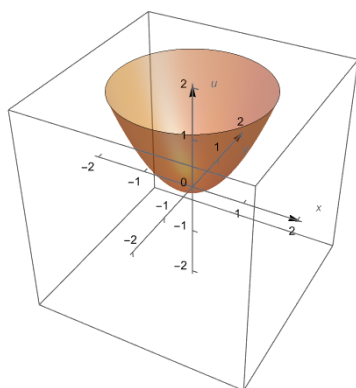
Specijalno, ako bi bilo $\varphi(y) = y$, onda je $u = \sqrt{x^2 + y^2}$, tj. $u^2 = x^2 + y^2$. Ovo je konus dobiven rotacijom prave $u = y$ oko u -ose (slika 3.1).

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe



Slika 3.1: Konus $u^2 = x^2 + y^2$, $u \geq 0$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

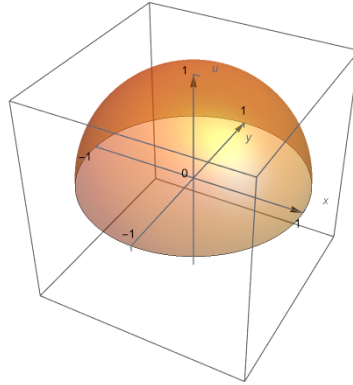
Ako bismo uzeli da je $\varphi(y) = y^2$, dobili bismo $u = x^2 + y^2$. Ovo je paraboloid dobiven rotacijom parabole $u = y^2$ oko u -ose (slika 3.2).



Slika 3.2: Paraboloid $u = x^2 + y^2$, $-2 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 2$.

Ako bi bilo $\varphi(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$, onda bismo imali $u = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, tj. $x^2 + y^2 + u^2 = r^2$, $u \geq 0$. Ovo je polusfera koja sadrži polukružnicu $u = \sqrt{r^2 - y^2}$ (slika 3.3).

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe



Slika 3.3: Polusfera $x^2 + y^2 + u^2 = 1$, $u \geq 0$, $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$.



Primjer 3.1.11. Riješiti Cauchyjev problem za parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$(z - y) \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(1, y, z) = y + z.$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi je

$$\frac{dx}{z - y} = \frac{dy}{z} = \frac{dz}{y}.$$

Lako se utvrđuje da su nezavisni prvi integrali

$$\varphi_1 = z^2 - y^2 = C_1, \quad \varphi_2 = x - y + z = C_2.$$

Opće rješenje jednačbe je oblika

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(z^2 - y^2, x - y + z).$$

Za zadati početni uvjet rješenje tražimo tako da uvrstimo početne vrijednosti:

$$\bar{\varphi}_1 = \varphi_1(1, y, z) = z^2 - y^2, \quad \bar{\varphi}_2 = \varphi_2(1, y, z) = 1 - y + z.$$

Iz sistema

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1 = z^2 - y^2, \\ \bar{\varphi}_2 = 1 - y + z, \end{cases}$$

dobivamo

$$y = \frac{\bar{\varphi}_1 - (\bar{\varphi}_2 - 1)^2}{2(\bar{\varphi}_2 - 1)}, \quad z = \frac{\bar{\varphi}_1 + (\bar{\varphi}_2 - 1)^2}{2(\bar{\varphi}_2 - 1)}.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Uvrštavanjem u početni uvjet $u = y + z$ dobivamo

$$u = \frac{\bar{\varphi}_1}{\bar{\varphi}_2 - 1}.$$

Zamjenom $\bar{\varphi}_1 = z^2 - y^2$ i $\bar{\varphi}_2 = x - y + z$ dolazimo do rješenja Cauchyjevoga problema:

$$u(x, y, z) = \frac{z^2 - y^2}{x - y + z - 1}.$$

◆

Primjer 3.1.12. Odrediti rješenje Cauchyjevog problema

$$\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} + \sqrt{y} \frac{\partial u}{\partial y} + \sqrt{z} \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(x, y, 1) = x - y.$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi glasi

$$\frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dz}{\sqrt{z}}.$$

Jednostavnom analizom dolazimo do prvih integrala sistema:

$$\varphi_1 = \sqrt{x} - \sqrt{z} = C_1, \quad \varphi_2 = \sqrt{y} - \sqrt{z} = C_2.$$

Opće rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe ima oblik

$$u = \Phi(\varphi_1, \varphi_2) = \Phi(\sqrt{x} - \sqrt{z}, \sqrt{y} - \sqrt{z}).$$

Posmatrajmo sada sistem jednakosti definiranih početnim uvjetom:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1 = \varphi_1(x, y, 1) = \sqrt{x} - 1, \\ \bar{\varphi}_2 = \varphi_2(x, y, 1) = \sqrt{y} - 1. \end{cases}$$

Rješavajući ovaj sistem po nepoznatim varijablama x i y , dobivamo

$$x = (\bar{\varphi}_1 + 1)^2, \quad y = (\bar{\varphi}_2 + 1)^2.$$

Uvrštavanjem u početni uvjet $u = x - y$ i zamjenom $\bar{\varphi}_1 = \sqrt{x} - \sqrt{z}$ i $\bar{\varphi}_2 = \sqrt{y} - \sqrt{z}$ dobivamo konačno rješenje Cauchyjevog problema:

$$u(x, y, z) = (\sqrt{x} - \sqrt{z} + 1)^2 - (\sqrt{y} - \sqrt{z} + 1)^2.$$

◆

Primjer 3.1.13. Odrediti rješenje Cauchyjevoga problema

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + xy \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(x, y, 0) = x^2 + y^2.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{xy}.$$

Jednostavno nalazimo prve integrale:

$$\varphi_1 = \frac{x}{y} = C_1, \quad \varphi_2 = \frac{xy}{2} - z = C_2.$$

Opće rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe može se zapisati kao

$$u = \Phi\left(\frac{x}{y}, \frac{xy}{2} - z\right).$$

Posmatrajmo sistem jednakosti definiranih početnim uvjetom:

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1 = \varphi_1(x, y, 0) = \frac{x}{y}, \\ \bar{\varphi}_2 = \varphi_2(x, y, 0) = \frac{xy}{2}. \end{cases}$$

Rješavajući ovaj sistem po varijablama x i y , dobivamo

$$x = \sqrt{2\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2}, \quad y = \sqrt{\frac{2\bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1}}.$$

Uvrštavanjem ovih izraza u početni uvjet $u = x^2 + y^2$ dobivamo

$$u = 2\bar{\varphi}_1\bar{\varphi}_2 + \frac{2\bar{\varphi}_2}{\bar{\varphi}_1}.$$

Zamjenom $\bar{\varphi}_1$ i $\bar{\varphi}_2$ sa originalnim funkcijama φ_1 i φ_2 , konačno dobivamo rješenje Cauchyjevoga problema:

$$u(x, y, z) = (xy - 2z)\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right).$$

◆

3.1.3 Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti

Primijetimo da se u definiciji 3.1.2 klasičnog Cauchyjevog problema za parcijalnu diferencijalnu jednačbu (3.1) početni uvjet postavlja na hiperravan koja je paralelna s koordinatnim ravnima. Tipično, za funkciju

$$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

početni uvjeti zadati su na hiperravni oblika $x_n = x_n^{(0)}$, a rješenje se traži u njenoj okolini.

U praksi i teoriji, takav pristup često nije dovoljan. Naime:

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

- Početne informacije nisu poznate na jednostavnoj ravni, već na zakrivljenim ili proizvoljnim podmnogostrukostima u prostoru varijabli;
- Geometrijska ili fizikalna priroda problema zahtijeva da se početni uvjeti zadaju *parametarski*, tj. kao funkcije jednog ili više parametara;
- Primjena karakterističnih metoda ili metoda integrala često vodi do formulacija u kojima je prirodnije zadati početne uvjete na karakterističnim krivim ili površima, koje općenito nisu koordinatne.

Zbog svega navedenog, uvodi se tzv. *generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti*, kao prirodno proširenje klasične formulacije koje omogućuje širu primjenu u teorijskim i primijenjenim kontekstima.

U nastavku definiramo generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti.

Definicija 3.1.3. *Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti sastoji se u nalaženju funkcije $u = u(x_1, \dots, x_n)$ koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačbu (3.1) te početne uvjete zadate u parametarskom obliku:*

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ x_2 &= \phi_2(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_n &= \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ u &= \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.17}$$

gdje su $t_1, \dots, t_{n-1}$ realni parametri, a funkcije $\phi_1, \dots, \phi_{n+1}$ su zadate glatke (barem jednom neprekidno diferencijabilne) funkcije.

Ovaj problem predstavlja općenitiju verziju klasičnog Cauchyjevog problema jer dopušta da početni uvjeti budu zadati na proizvoljnoj (regularnoj) podmnogostrukosti u prostoru varijabli.

Cauchyjev problem (3.6), formuliran u prethodnoj sekciji, može se izraziti kao poseban slučaj generaliziranog Cauchyjevog problema ako stavimo:

$$x_1 = t_1, \dots, x_{n-1} = t_{n-1}, \quad x_n = x_n^{(0)}, \quad u = g(t_1, \dots, t_{n-1}).$$

U nastavku opisujemo postupak nalaženja rješenja generaliziranog Cauchyjevog problema:

(i) U sistem prvih integrala

$$\varphi_1(x_1, \dots, x_n) = C_1, \quad \dots, \quad \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) = C_{n-1},$$

umjesto varijabli x_i uvrstimo izraze $\phi_i(t_1, \dots, t_{n-1})$ za $i = 1, \dots, n$, čime dobivamo konstante C_k :

$$\varphi_k(\phi_1, \dots, \phi_n) = C_k, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednačbe

(ii) Eliminacijom konstanti $C_1, \dots, C_{n-1}$ dobivamo sistem:

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = \varphi_k(\phi_1, \dots, \phi_n), \quad k = 1, \dots, n-1,$$

gdje su $\phi_k = \phi_k(t_1, \dots, t_{n-1})$.

(iii) Tako dobivamo parametarsko rješenje u obliku:

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_1(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_2(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n) &= \varphi_{n-1}(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \\ u &= \phi_{n+1}(t), \end{aligned}$$

gdje skraćeno pišemo $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$.

(iv) Za dobivanje eksplicitnog rješenja, iz sistema:

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \varphi_1(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \\ \bar{\varphi}_2 &= \varphi_2(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \\ &\vdots \\ \bar{\varphi}_{n-1} &= \varphi_{n-1}(\phi_1(t), \dots, \phi_n(t)), \end{aligned}$$

izrazimo parametre $t_1, \dots, t_{n-1}$ u obliku:

$$t_k = \psi_k(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_{n-1}), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

(v) Uvrštavanjem izraza za t_k u jednačbu:

$$u = \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$$

dobivamo rješenje u eksplicitnom obliku:

$$\begin{aligned} u(x_1, \dots, x_n) &= \phi_{n+1}(\psi_1(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x)), \\ &\dots, \psi_{n-1}(\varphi_1(x), \dots, \varphi_{n-1}(x))), \end{aligned} \quad (3.18)$$

gdje je $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$ definirana s (3.18) rješenje je jednačbe (3.1), jer je izražena pomoću prvih integrala $\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}$. Također, analogno kao kod klasičnog Cauchyjevog problema, može se pokazati da su zadovoljeni i početni uvjeti (3.17).

Primjer 3.1.14. Naći integralnu površ jednačbe

$$ay \frac{\partial u}{\partial x} + bx \frac{\partial u}{\partial y} = 0,$$

koja sadrži krivu zadatu sa

$$x = t, \quad y = t, \quad u = t^2.$$

3.1 Linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednađžbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednađžbi glasi

$$\frac{dx}{ay} = \frac{dy}{bx}.$$

Jednostavno vidi se da je prvi integral ovog sistema

$$\varphi = bx^2 - ay^2 = C.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta u prvi integral dobivamo

$$\bar{\varphi} = bt^2 - at^2 = (b - a)t^2.$$

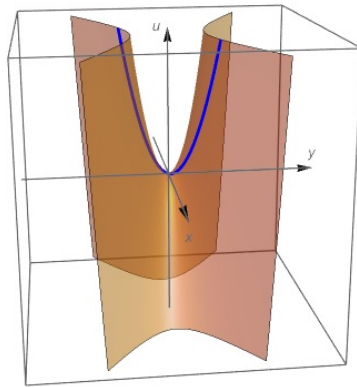
Rješavanjem ove jednađžbe po t , za $a \neq b$, dobivamo:

$$t = \pm \sqrt{\frac{\bar{\varphi}}{b - a}}.$$

Uvrštavanjem izraza za t u jednađžbu $u = t^2$, te zamjenom $\bar{\varphi} = bx^2 - ay^2$, dobivamo rješenje Cauchyjevog problema:

$$u(x, y) = \frac{bx^2 - ay^2}{b - a}.$$

Ako je $a = b$, jednostavno se vidi da ne postoji integralna površ koja sadrži zadatu krivu.



Slika 3.4: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ za $a = 1$, $b = 3$ i krive (t, t^2) iz Primjera 3.1.14.

◆

Primjer 3.1.15. Naći rješenje generaliziranog Cauchyjevog problema

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + bx \frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

koje sadrži krivu zadatu sa

$$x = 1, \quad y = t_1, \quad z = t_2, \quad u = At_1^n t_2^m.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednađžbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednađžbi glasi:

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{dz}{bx}.$$

Jednostavno se vidi da su prvi integrali ovog sistema:

$$\varphi_1 = y - ax = C_1, \quad \varphi_2 = z - \frac{1}{2}bx^2 = C_2.$$

Opće rješenje parcijalne jednađžbe je dato u implicitnom obliku:

$$u = \Phi \left(y - ax, z - \frac{1}{2}bx^2 \right).$$

Zamjenom početnih uvjeta u izraze za prve integrale, dobivamo:

$$\overline{\varphi}_1 = t_1 - a, \quad \overline{\varphi}_2 = t_2 - \frac{1}{2}b.$$

Rješavanjem po t_1 i t_2 , dobivamo:

$$t_1 = a + \overline{\varphi}_1 = a + (y - ax), \quad t_2 = \frac{1}{2}b + \overline{\varphi}_2 = \frac{1}{2}b + \left(z - \frac{1}{2}bx^2 \right).$$

Uvrštavanjem u jednađžbu $u = At_1^n t_2^m$ i zamjenom izraza za $\overline{\varphi}_1$ i $\overline{\varphi}_2$, dobivamo rješenje Cauchyjevog problema:

$$u(x, y, z) = A(y - ax + a)^n \left(z - \frac{1}{2}bx^2 + \frac{1}{2}b \right)^m.$$

◆

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

U ovom poglavlju ćemo se baviti načinom rješavanja kvazilinearnih PDJ. Zatim ćemo formulirati Cauchyjev problem početnih vrijednosti, kao i generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti. Različiti primjeri će poslužiti za ilustraciju metoda koje se koriste pri rješavanju ovakvih jednađžbi.

3.2.1 Određivanje općeg rješenja

Parcijalna diferencijalna jednađžba oblika

$$P_1(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \dots + P_n(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial u}{\partial x_n} = R(x_1, \dots, x_n, u), \quad (3.19)$$

gdje je $u = u(x_1, \dots, x_n)$ nepoznata funkcija, $P_i = P_i(x_1, \dots, x_n, u)$ su koeficijenti, a $R = R(x_1, \dots, x_n, u)$ poznata funkcija, naziva se *kvazilinearna* parcijalna diferencijalna jednađžba.

Ono što ovu jednađžbu čini kvazilinearnom jeste činjenica da funkcije R i P_i mogu zavisiti i od funkcije u .

Pretpostavit ćemo da su funkcije $P_i(x_1, \dots, x_n, u)$, za $i = 1, 2, \dots, n$, neprekidno diferencijabilne u nekoj $(n + 1)$ -dimenzionalnoj oblasti Ω .

Također ćemo pretpostaviti da u svakoj tački $(x_1, \dots, x_n, u) \in \Omega$ bar jedna od funkcija P_i nije jednaka nuli. Bez gubitka općenitosti, pretpostavit ćemo da je to funkcija P_n .

Definicija 3.2.1. *Pod rješenjem jednađžbe (3.19) podrazumijevamo funkciju $u(x_1, \dots, x_n)$ koja je neprekidno diferencijabilna (u oblasti u kojoj je definirana) i koja zadovoljava jednađžbu (3.19).*

Rješavanje parcijalne diferencijalne jednađžbe (3.19) može se svesti na rješavanje linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađžbe, što ćemo detaljno pokazati u nastavku.

Pretpostavimo da je neko rješenje $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jednađžbe (3.19) dato implicitno pomoću jednađžbe

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = 0, \quad (3.20)$$

gdje je $v(x_1, \dots, x_n, u)$ neka neprekidno diferencijabilna funkcija definirana u oblasti Ω .

Dakle, smatramo da se jednađžba (3.20) može na jedinstven način riješiti po u , te da funkcija $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dobivena rješavanjem te jednađžbe zadovoljava i originalnu jednađžbu (3.19).

Pretpostavit ćemo da vrijedi uvjet:

$$\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u} \neq 0.$$

Ova pretpostavka ne predstavlja nikakvo suštinsko ograničenje. Naime, ako bi identički vrijedilo

$$\frac{\partial v}{\partial u} \equiv 0,$$

to bi značilo da funkcija v uopće ne zavisi od u , pa jednađžba (3.20) ne bi mogla definirati u kao funkciju od varijabli $x_1, \dots, x_n$.

Prema tome, mora postojati tačka $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, u^{(0)})$ u kojoj je

$$\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Zbog neprekidnosti funkcije $\frac{\partial v}{\partial u}$, postoji i neka okolina te tačke u kojoj također vrijedi $\frac{\partial v}{\partial u} \neq 0$. Na tu okolinu ćemo ograničiti sva naredna razmatranja.

Funkcija $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ dobivena je iz jednačbe (3.20), te identički zadovoljava tu jednačbu u svim tačkama po varijablama $x_1, \dots, x_n$.

Uvrstimo sada ovu funkciju u (3.20), a zatim diferencirajmo po x_i , za $i = 1, 2, \dots, n$. Dobivamo:

$$\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_i} + \frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial u} \cdot \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0.$$

Oдавde slijedi:

$$\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_i}}{\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial u}}.$$

Pošto su tačke $(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))$ upravo one koje zadovoljavaju (3.20), možemo zapisati:

$$\frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = - \frac{\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_i}}{\frac{\partial v(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u}}, \quad (3.21)$$

gdje $x_1, x_2, \dots, x_n$ i u zadovoljavaju jednačbu (3.20).

Po pretpostavci, funkcija $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ zadovoljava jednačbu (3.19). Ako sada izraz (3.21) uvrstimo u (3.19), te nakon sređivanja, dobivamo:

$$P_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + P_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + \dots + P_n \frac{\partial v}{\partial x_n} + R \frac{\partial v}{\partial u} = 0, \quad (3.22)$$

gdje su $P_i = P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))$ za $i = 1, 2, \dots, n$, a $u = u(x_1, \dots, x_n)$ — što važi za sve one tačke $(x_1, \dots, x_n, u)$ koje zadovoljavaju (3.20).

Ako prethodno razmatranje provedemo obrnutim redoslijedom, uvjerit ćemo se da funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$, definirana pomoću (3.20), predstavlja rješenje jednačbe (3.19) ako funkcija v zadovoljava jednačbu (3.22).

Iz svega navedenog zaključujemo sljedeće: funkcija $u(x_1, \dots, x_n)$ definirana implicitno pomoću jednačbe (3.20) jeste rješenje jednačbe (3.19) ako i samo ako funkcija $v(x_1, \dots, x_n, u)$ zadovoljava jednačbu (3.22).

Prema tome, dobivamo važan zaključak: da bismo našli sva rješenja jednačbe (3.19), dovoljno je da nađemo sve funkcije $v(x_1, \dots, x_n, u)$ koje zadovoljavaju jednačbu (3.22), za sve one $(x_1, \dots, x_n, u)$ koji zadovoljavaju (3.20).

Sada ćemo funkciju $v(x_1, \dots, x_n, u)$ tražiti pod strožijim uvjetima od onih prethodno razmatranih. Naime, zahtijevat ćemo da funkcija $v(x_1, \dots, x_n, u)$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

identički zadovoljava jednađžbu (3.22) po svim varijablama $x_1, \dots, x_n$ i u , a ne samo za one vrijednosti koje su povezane uslovom (3.20).

Ako tražimo $v(x_1, \dots, x_n, u)$ pod ovim strožijim uvjetima, tada jednađžba (3.22) postaje homogena linearna parcijalna diferencijalna jednađžba prvog reda sa nepoznatom funkcijom v .

U prethodnoj sekciji vidjeli smo da se takvoj jednađžbi pridružuje sistem karakterističnih jednađžbi:

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \dots = \frac{dx_n}{P_n} = \frac{du}{R}, \quad (3.23)$$

koji predstavlja sistem običnih diferencijalnih jednađžbi reda n .

Neka su $\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)$ međusobno funkcionalno nezavisni prvi integrali sistema (3.23). Tada, kao što smo ranije pokazali, opće rješenje jednađžbe (3.22) ima oblik:

$$v(x_1, \dots, x_n, u) = \Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)), \quad (3.24)$$

gdje je Φ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Podsjetimo da se rješenja jednađžbe (3.19) dobiju (implicitno) iz jednađžbe (3.20). Uvrštavanjem izraza (3.24) u (3.20), dobivamo:

$$\Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (3.25)$$

Za svaku funkciju Φ iz jednađžbe (3.25) dobivamo neko rješenje jednađžbe (3.19). Kako je Φ proizvoljna funkcija, izraz (3.25) predstavlja familiju rješenja jednađžbe (3.19), koja zavisi od proizvoljne funkcije Φ .

Familiju rješenja datu jednađžbom (3.25) dobili smo pod strožijim uvjetima nego što je to nužno. Zbog toga se postavlja pitanje: da li su sa (3.25) zaista obuhvaćena sva rješenja jednađžbe (3.19)?

Pokažimo da su, ipak, sa (3.25) obuhvaćena sva rješenja jednađžbe (3.19).

Neka je $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ neko fiksno rješenje jednađžbe (3.19). Tada za sve tačke u domenu identički vrijedi:

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = R(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)). \quad (3.26)$$

Nadalje, neka su $\varphi_j(x_1, \dots, x_n, u)$, za $j = 1, \dots, n$, prvi integrali sistema (3.23), odnosno rješenja jednađžbe (3.22). Tada, za svako $j = 1, \dots, n$, identički po svim varijablama $x_1, \dots, x_n$ i u vrijedi:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial x_i} \\ + R(x_1, \dots, x_n, u) \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u)}{\partial u} = 0. \end{aligned} \quad (3.27)$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačnje

Kako jednačnja (3.27) identički vrijedi po varijablama $x_1, \dots, x_n$ i u , ista vrijedi i ako u nju uvrstimo $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Na taj način dobivamo:

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_i} + R(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial u} = 0. \quad (3.28)$$

Sada, za svako $j = 1, 2, \dots, n$ pomnožimo jednačnju (3.26) sa $\frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial u}$, a zatim saberemo sa jednačnjom (3.28). Time za svaki $j = 1, 2, \dots, n$ dobivamo:

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \left[\frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))}{\partial u} \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} \right] = 0.$$

Uvedimo sada funkcije

$$\Psi_j(x_1, \dots, x_n) = \varphi_j(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Tada prethodnu jednakost možemo napisati u obliku

$$\sum_{i=1}^n P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)) \frac{\partial \Psi_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (3.29)$$

Jednačnju (3.29) možemo protumačiti na sljedeći način: linearni homogeni sistem algebarskih jednačnji

$$\sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial \Psi_j(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

ima rješenje $z_i = P_i(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Ovo rješenje je netrivialno jer je, po pretpostavci, $P_n(x_1, \dots, x_n, u) \neq 0$. Zbog toga determinanta sistema mora biti jednaka nuli za sve $x_1, x_2, \dots, x_n$, tj.

$$\frac{\partial(\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_n)}{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)} = 0.$$

Iz ove jednakosti, kao što je poznato, slijedi da su funkcije $\Psi_j = \Psi_j(x_1, \dots, x_n)$ funkcionalno zavisne. To znači da postoji neprekidno diferencijabilna funkcija

$$\Phi(\Psi_1, \dots, \Psi_n),$$

takva da za sve $x_1, \dots, x_n$ vrijedi

$$\Phi(\Psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \Psi_n(x_1, \dots, x_n)) = 0.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Kombinacijom sa definicijom funkcija Ψ_j dobivamo

$$\Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n)), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u(x_1, \dots, x_n))) = 0.$$

Prethodnim razmatranjem dokazali smo sljedeći teorem.

Teorem 3.2.1. *Neka su*

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u) = C_i, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

nezavisni prvi integrali sistema (3.23). Tada je opće rješenje kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe (3.19) zadato implicitnom relacijom

$$\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) = 0,$$

gdje je Φ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Primjedba 3.2.1. Ako se nepoznata funkcija u pojavljuje samo u jednom od prvih integrala, na primjer u posljednjem, tada se opće rješenje može zapisati u obliku

$$\varphi_n(x_1, \dots, x_n, u) = \Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1}),$$

gdje je Φ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

U sljedećih nekoliko primjera prikazat ćemo primjenu prethodnih razmatranja. Također, napomenimo da ćemo često za nepoznatu funkciju koristiti oznaku z umjesto uobičajene oznake u , budući da se obje oznake susreću u literaturi. Iz samog zadatka će uvijek biti jasno kada z označava nepoznatu funkciju, a kada nezavisnu varijablu.

Primjer 3.2.1. Odrediti opći integral jednačbe

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = (x + y)u.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridruženoj datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{dy}{y^2} = \frac{du}{(x + y)u}.$$

Iz prve dvije jednačbe dobivamo prvi integral

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y - x}{xy} = C_1.$$

Iz sistema također slijedi

$$\frac{dx - dy}{x^2 - y^2} = \frac{du}{(x + y)u},$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

što se može zapisati kao

$$\frac{d(x-y)}{x-y} = \frac{du}{u},$$

pa je drugi prvi integral

$$\frac{x-y}{u} = C_2.$$

Opće rješenje datog sistema glasi

$$\Phi\left(\frac{y-x}{xy}, \frac{x-y}{u}\right) = 0.$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^2$. ♦

Primjer 3.2.2. Odrediti opće rješenje jednačbe

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = x - y.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridruženoj datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{du}{x-y}.$$

Iz sistema slijedi

$$\frac{dx-dy}{x-y} = \frac{du}{x-y}.$$

Odavde dobivamo

$$d(x-y) = du,$$

pa je prvi integral

$$x-y-u = C_1.$$

Pored toga, direktno iz sistema imamo

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

što daje drugi prvi integral

$$\frac{x}{y} = C_2.$$

Opće rješenje datog sistema glasi

$$\Phi\left(x-y-u, \frac{x}{y}\right) = 0.$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija na $\mathbb{R}^2$. ♦

Primjer 3.2.3. Odrediti opći integral jednačbe

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + (z+u) \frac{\partial u}{\partial y} + (y+u) \frac{\partial u}{\partial z} = y+z.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

Rješenje. Parcijalnoj diferencijalnoj jednađžbi pridružujemo sistem običnih diferencijalnih jednađžbi:

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{z+u} = \frac{dz}{y+u} = \frac{du}{y+z}.$$

Iz posljednje dvije jednađžbe dobivamo:

$$\frac{dz - du}{u - z} = \frac{dy - dz}{z - y},$$

što daje prvi integral:

$$\frac{z - u}{y - z} = C_1.$$

Dalje, posmatrajmo:

$$\frac{dx}{x} = \frac{d(y + z + u)}{2(y + z + u)},$$

što vodi do drugog prvog integrala:

$$\frac{x^2}{y + z + u} = C_2.$$

Također, iz

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz - du}{u - z},$$

dobivamo treći prvi integral:

$$x(u - z) = C_3.$$

Opće rješenje datog sistema, odnosno zadate parcijalne diferencijalne jednađžbe, glasi:

$$\Phi\left(\frac{z - u}{y - z}, \frac{x^2}{y + z + u}, x(u - z)\right) = 0.$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija definirana na $\mathbb{R}^3$. ◆

Primjer 3.2.4. Riješiti sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednađžbu

$$(y - x)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + x)\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x^2 + y^2}{z}, \quad z = z(x, y).$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednađžbi u simetričnom obliku glasi:

$$\frac{dx}{y - x} = \frac{dy}{x + y} = \frac{z dz}{x^2 + y^2}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Kako bismo pronašli prvi integral, primijetimo sljedeće:

$$\frac{dx + dy}{2y} = \frac{dy}{x + y}.$$

Odavde slijedi

$$(x + y) d(x + y) = 2y dy,$$

što integriranjem daje prvi integral

$$\phi_1(x, y, z) \equiv x^2 + 2xy - y^2 = C_1.$$

Za pronalaženje drugog prvog integrala, primijetimo:

$$x(y - x) - y(x + y) + x^2 + y^2 = 0.$$

Dakle, imamo

$$x dx - y dy + z dz = 0,$$

što integriranjem daje drugi prvi integral

$$\phi_2(x, y, z) \equiv x^2 - y^2 + z^2 = C_2.$$

Lako se provjerava da su dobiveni prvi integrali funkcionalno nezavisni, pa je opće rješenje početne parcijalne diferencijalne jednačbe dato sa:

$$\boxed{\Phi(x^2 + xy - y^2, x^2 - y^2 + z^2) = 0.}$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. ♦

Primjer 3.2.5. Riješiti sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$(z^2 - 2yz - y^2) \frac{\partial z}{\partial x} + (xy + xz) \frac{\partial z}{\partial y} = xy - xz, \quad z = z(x, y).$$

Rješenje. Pridruženi sistem običnih diferencijalnih jednačbi u simetričnom obliku glasi:

$$\frac{dx}{z^2 - 2yz - y^2} = \frac{dy}{xy + xz} = \frac{dz}{xy - xz}.$$

Primijetimo da vrijedi

$$\frac{dy}{y + z} = \frac{dz}{y - z},$$

odnosno

$$y dy - z dz = z dy + y dz.$$

Primijetimo da je desna strana totalni diferencijal proizvoda yz . Integriranjem obje strane dobivamo prvi integral

$$\phi_1(x, y, z) \equiv z^2 - y^2 + 2yz = C_1.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

Za određivanje drugog prvog integrala, uočimo da sljedeća linearna kombinacija koeficijenata sistema zadovoljava

$$x(z^2 - 2yz - y^2) + y(xy + xz) + z(xy - xz) = 0.$$

Iz ovoga slijedi

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

pa se integriranjem dobiva drugi prvi integral

$$\phi_2(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = C_2.$$

Lako je provjeriti da su funkcije ϕ_1 i ϕ_2 funkcionalno nezavisne u nekoj otvorenoj oblasti, pa je opće rješenje zadate parcijalne diferencijalne jednađžbe dato implicitno sa:

$$\boxed{\Phi(z^2 - y^2 + 2yz, x^2 + y^2 + z^2) = 0.}$$

U ovom rješenju Φ je proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija dvije varijable. ♦

3.2.2 Cauchyjev problem početnih vrijednosti

Cauchyjev problem za kvazilinearnu jednađžbu (3.19) sastoji se u sljedećem: Treba naći ono rješenje $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ jednađžbe (3.19) koje zadovoljava sljedeći uvjet

$$u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}),$$

što kraće možemo pisati sa

$$u = g(x_1, \dots, x_{n-1}) \text{ za } x_n = x_n^{(0)}, \quad (3.30)$$

gdje je g zadata neprekidno diferencijabilna funkcija. Sada ćemo opisati način nalaženje rješenja koje zadovoljava uvjet (3.30) ako se zna opće rješenje

$$\Phi(\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u), \varphi_2(x_1, \dots, x_n, u), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u)) = 0. \quad (3.31)$$

Napišemo uvjet (3.30) u obliku

$$u - g(x_1, \dots, x_{n-1}) = 0 \text{ za } x_n = x_n^{(0)}. \quad (3.32)$$

Izjednačavajući (3.31) i (3.32) vidimo da za funkciju Φ mora da vrijedi

$$\Phi(\overline{\varphi}_1, \overline{\varphi}_2, \dots, \overline{\varphi}_n) = u - g(x_1, \dots, x_{n-1}), \quad (3.33)$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

ako pod $\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n$ smatramo funkcije dobivene iz prvih integrala sistema (3.23), zamjenjujući x_n sa $x_n^{(0)}$, imamo

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \bar{\varphi}_1, \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \bar{\varphi}_2, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n^{(0)}, u) &= \bar{\varphi}_n.\end{aligned}\tag{3.34}$$

Koristeći teorem o implicitno zadatim funkcijama, slijedi da se sistem (3.34) jednoznačno može riješiti po $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, u$. Neka je

$$\begin{aligned}x_1 &= \psi_1(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n), \\ x_2 &= \psi_2(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n), \\ &\vdots \\ x_{n-1} &= \psi_{n-1}(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n), \\ u &= \psi(\bar{\varphi}_1, \bar{\varphi}_2, \dots, \bar{\varphi}_n).\end{aligned}$$

Ako sada, specijalno za funkciju Φ uzmemo funkciju

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) &= \psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \\ &\quad - g(\psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \dots, \psi_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)),\end{aligned}$$

onda je uvjet (3.33) očito ispunjen. Slijedi da je

$$\psi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) - g(\psi_1(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n), \dots, \psi_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)) = 0 \tag{3.35}$$

traženo rješenje Cauchyjevog problema (3.35) u implicitnom obliku. Rješavajući jednačbu po u , ako je to moguće, dobivamo Cauchyjevo rješenje u eksplicitnom obliku.

Primjer 3.2.6. Naći onu integralnu površ $z = z(x, y)$ jednačbe

$$x \frac{\partial z}{\partial x} - 2y \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2$$

za koju je $z(x, 1) = x^2$.

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2}.$$

Iz sistema imamo da je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{-2y}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Odavde dobivamo da je prvi integral dat sa

$$\varphi_1 = x^2 y = C_1.$$

Na osnovu ovoga imamo da je $x^2 = \frac{C_1}{y}$. Uvrštavajući ovo u jednačbu

$$\frac{dy}{-2y} = \frac{dz}{x^2 + y^2},$$

dobivamo

$$\frac{dy}{-2y} = \frac{ydz}{C_1 + y^2} \Rightarrow \frac{(C_1 + y^2)dy}{-2y^2} = dz.$$

Odavde slijedi da je

$$\frac{C_1}{2y} - \frac{y^2}{4} = z + C_2.$$

Sada je drugi prvi integral dat sa

$$\varphi_2 = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - z = C_2.$$

U φ_1 i φ_2 uvrstimo $y = 1$, dobivamo sistem

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1 &= x^2 \\ \bar{\varphi}_2 &= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{4} - z.\end{aligned}$$

Rješenja ovog sistema su $x = \pm\sqrt{\bar{\varphi}_1}$ i $z = \frac{\bar{\varphi}_1}{2} - \frac{1}{4} - \bar{\varphi}_2$. Uvrštavanjem u $z = x^2$ dobivamo

$$\frac{\bar{\varphi}_1}{2} - \frac{1}{4} - \bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1.$$

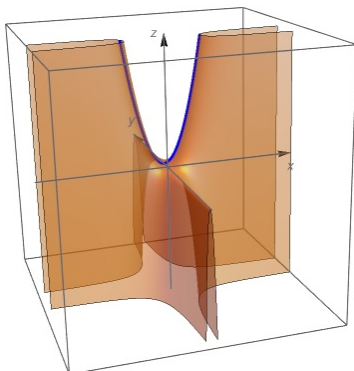
Ako sada zamijenimo $\bar{\varphi}_1$ sa $x^2 y$, a $\bar{\varphi}_2$ sa $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{4} - z$, dobivamo

$$2x^2(y+1) = 4z + y^2 - 1.$$

Integralna površ polazne jednačbe za koju je $z(x, 1) = x^2$ glasi

$$z(x, y) = \frac{2x^2(y+1) - y^2 + 1}{4}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe



Slika 3.5: Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive $(t, 1, t^2)$ iz Primjera 3.2.6.



Primjer 3.2.7. Riješiti Cauchyjev problem početnih vrijednosti

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z - xy, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 1.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z - xy}.$$

Iz sistema imamo da je

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y},$$

odakle dobivamo da je prvi integral dat sa

$$\varphi_1 = \frac{y}{x} = C_1.$$

Na osnovu ovoga, imamo da je $y = xC_1$. Uvrštavajući to u

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{z - xy},$$

dobivamo linearnu diferencijalnu jednačbu

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z - x^2 C_1}{x} = \frac{z}{x} - x C_1,$$

čije je rješenje dato sa

$$z = \frac{x^2 C_1}{3} + \frac{C_2}{x}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

Zamjenom C_1 sa $\frac{y}{x}$, dobivamo da je

$$\varphi_2 = 3zx + x^2y = C_2$$

drugi prvi integral sistema. Opće rješenje polazne jednađžbe je dato sa

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, 3zx + x^2y\right) = 0.$$

U φ_1 i φ_2 uvrstimo $x = 2$, dobivamo sistem

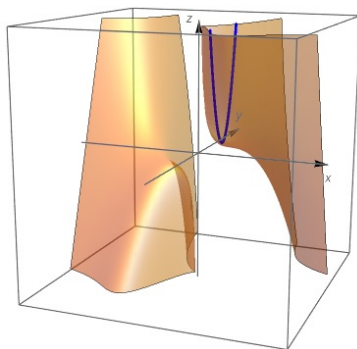
$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1 &= \frac{y}{2} \\ \bar{\varphi}_2 &= 6z + 4y.\end{aligned}$$

Iz ovog sistema imamo da je $y = 2\bar{\varphi}_1$ i $z = \frac{\bar{\varphi}_2 - 8\bar{\varphi}_1}{6}$. Uvrštavanjem u $z = y^2 + 1$ dobivamo

$$\frac{\bar{\varphi}_2 - 8\bar{\varphi}_1}{6} = 4\bar{\varphi}_1^2 + 1.$$

Ako sada zamijenimo $\bar{\varphi}_1$ sa $\frac{y}{x}$ a $\bar{\varphi}_2$ sa $3zx + x^2y$, dobivamo da je integralna površ polazne jednađžbe za koju je $z(2, y) = y^2 + 1$ data sa

$$3zx + x^2y - 8\frac{y}{x} = 24\frac{y^2}{x^2} + 6.$$



Slika 3.6: Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive $(2, t, t^2 + 1)$ iz Primjera 3.2.7.



3.2.3 Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti

Ovdje ćemo posmatrati generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti za kvazilineranu parcijalnu diferencijalnu jednađžbu.

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Definicija 3.2.2. *Generalizirani Cauchyjev problem početnih vrijednosti za jednačbu (3.19) sastoji se u nalaženju funkcije $u = u(x_1, \dots, x_n)$ koja zadovoljava jednačbu (3.19) i početne uvjete*

$$\begin{aligned} x_1 &= \phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ x_2 &= \phi_2(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_n &= \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ u &= \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.36}$$

gdje su $t_1, \dots, t_{n-1}$ parametri, a $\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$ date funkcije.

Cauchyjev problem (3.30) kojeg smo formulirali u prethodnoj sekciji može se izraziti kao generalizirani Cauchyjev problem stavljajući

$$x_1 = t_1, \dots, x_{n-1} = t_{n-1}, x_n = x_n^{(0)}, u = g(t_1, \dots, t_{n-1}).$$

Sada ćemo opisati postupak za nalaženje rješenja generaliziranog Cauchyjevog problema.

(i) U prvim integralima

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, u) &= C_1, \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n, u) &= C_2, \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u) &= C_n, \end{aligned}$$

sistema (3.23) zamijenimo x_i za $\phi_i(t_1, \dots, t_{n-1})$ za $i = 1, 2, \dots, n$, pa dobivamo da su konstante $C_1, \dots, C_n$, date sa

$$\begin{aligned} \varphi_1(\phi_1, \dots, \phi_n, u) &= C_1, \\ \varphi_2(\phi_1, \dots, \phi_n, u) &= C_2, \\ &\vdots \\ \varphi_n(\phi_1, \dots, \phi_n, u) &= C_n, \end{aligned}$$

gdje je $\phi_k = \phi_k(t_1, \dots, t_{n-1})$, $k = 1, \dots, n$.

(ii) Eliminacijom konstanti $C_1, \dots, C_n$, dobivamo sistem

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_1, \dots, x_n, u) &= \varphi_1(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u), \\ \varphi_2(x_1, \dots, x_n, u) &= \varphi_2(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u), \\ &\vdots \\ \varphi_n(x_1, \dots, x_n, u) &= \varphi_n(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u), \end{aligned}$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe

kojim je zajedno sa jednađžbom

$$u = \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$$

dato rješenje generaliziranog Cauchyjevog problema u parametarskom obliku.

- (iii) Za dobivanje rješenja u implicitnom obliku postupimo na sljedeći način: Formirajmo sistem

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1 &= \varphi_1(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u) \\ \bar{\varphi}_2 &= \varphi_2(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u) \\ &\vdots \\ \bar{\varphi}_n &= \varphi_n(\phi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \phi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), u)\end{aligned}\tag{3.37}$$

- (iv) Iz sistema (3.37) izrazimo parametre $t_1, \dots, t_{n-1}, u$ preko $\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n$, tj.

$$\begin{aligned}t_1 &= \psi_1(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n) \\ t_2 &= \psi_2(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n) \\ &\vdots \\ t_{n-1} &= \psi_{n-1}(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n) \\ u &= \psi_n(\bar{\varphi}_1, \dots, \bar{\varphi}_n)\end{aligned}$$

- (v) Uvrstimo li prethodno izračunate t_i u jednađžbu $u = \phi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$, dobivamo rješenje u implicitnom obliku

$$\begin{aligned}\Phi(\varphi_1, \dots, \varphi_n) &:= \phi_n(\varphi_1, \dots, \varphi_n) - \\ &\phi_{n+1}(\psi_1(\varphi_1, \dots, \varphi_n), \dots, \psi_{n-1}(\varphi_1, \dots, \varphi_{n-1})) = 0,\end{aligned}\tag{3.38}$$

gdje je $\varphi_k = \varphi_k(x_1, \dots, x_n, u)$ $k = 1, 2, \dots, n$.

Na osnovu Teorema 3.2.1, vidimo da je sa (3.38) dato rješenje jednađžbe (3.19) u implicitnom obliku. Osim toga, direktnim uvrštavanjem se uvjeravamo da je (3.38) rješenje Cauchyjevog problema (3.36).

Primjer 3.2.8. Riješiti Cauchyjev problem početnih vrijednosti

$$xz \frac{\partial z}{\partial x} + yz \frac{\partial z}{\partial y} = -xy, \quad x = t, \quad y = t^2, \quad z = t^2.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednađžbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednađžbi glasi

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Iz sistema imamo da je

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz},$$

odakle dobivamo da je prvi integral dat sa

$$\varphi_1 = \frac{y}{x} = C_1.$$

Odavde imamo da je $y = xC_1$. Uvrštavajući $y = xC_1$ u

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dz}{-xy},$$

dobivamo jednačbu

$$\frac{dx}{z} = \frac{dz}{-C_1x},$$

čije je rješenje dato sa

$$-C_1 \frac{x^2}{2} = \frac{z^2}{2} + C_2.$$

Zamjenom C_1 sa $\frac{y}{x}$, dobivamo da je

$$\varphi_2 = z^2 + yx = C_2$$

drugi prvi integral sistema. Opće rješenje polazne jednačbe je dato sa

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, z^2 + yx\right) = 0.$$

U φ_1 i φ_2 uvrstimo $x = t$ i $y = t^2$, pa dobivamo sistem

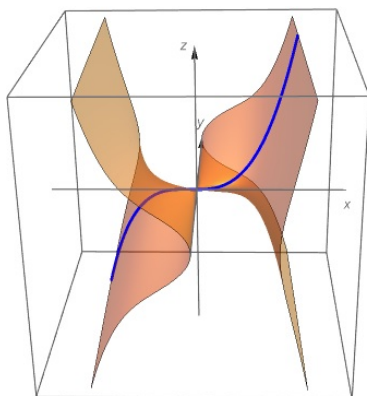
$$\begin{aligned}\bar{\varphi}_1 &= \frac{t^2}{t} = t, \\ \bar{\varphi}_2 &= z^2 + t^3.\end{aligned}$$

Iz ovog sistema imamo da je $t = \bar{\varphi}_1$. Pošto je $z = t^2$, onda je $z^2 = t^4$, pa iz druge relacije sistema imamo $\bar{\varphi}_2 = \bar{\varphi}_1^4 + \bar{\varphi}_1^3$.

Ako sada zamijenimo $\bar{\varphi}_1$ sa $\frac{y}{x}$ a $\bar{\varphi}_2$ sa $z^2 + yx$, dobivamo da je integralna površ polazne jednačbe koja prolazi krivom $x = t$, $y = t^2$, $z = t^2$ data sa

$$x^4(z^2 + yx) = y^3(x + y).$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe



Slika 3.7: Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i krive (t, t^2, t^3) iz Primjera 3.2.8.



Primjer 3.2.9. Naći ono rješenje parcijalne diferencijalne jednačbe

$$2xz \frac{\partial z}{\partial x} + 2yz \frac{\partial z}{\partial y} = z^2 - x^2 - y^2$$

koje prolazi kružnicom

$$x + y + z = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2}.$$

Iz sistema imamo da je

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dy}{2yz},$$

odakle dobivamo da je prvi integral dat sa

$$\varphi_1 = \frac{y}{x} = C_1.$$

Na osnovu toga, imamo da je $y = xC_1$. Uvrštavajući $y = xC_1$ u

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - y^2},$$

dobivamo diferencijalnu jednačbu

$$\frac{dx}{2xz} = \frac{dz}{z^2 - x^2 - x^2 C_1^2}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Primijetimo da dobivenu jednačbu možemo napisati u obliku

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - x^2(1 + C_1^2)}{2xz},$$

što je homogena diferencijalna jednačba nepoznate funkcije z po nezavisnoj varijabli x . Uvodeći novu nepoznatu funkciju $w = zx$, $w = w(x)$, dobivamo rješenje $x(1 + C_1^2 + w^2) = C_2$.

Zamjenom C_1 sa $\frac{y}{x}$, dobivamo da je

$$\varphi_2 = \frac{z^2 + x^2 + y^2}{x} = C_2$$

drugi prvi integral sistema. Opće rješenje polazne jednačbe je dato sa

$$\Phi\left(\frac{y}{x}, \frac{z^2 + x^2 + y^2}{x}\right) = 0.$$

Napišemo jednačbu kružnice u parametarskom obliku. Stavimo da je $x = t$. Rješavajući sistem

$$\begin{aligned} t + y + z &= 0, \\ t^2 + y^2 + z^2 &= a^2, \end{aligned}$$

po y i z , dobivamo da je $y = \frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2}$ i $z = -\frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2} - t$, pa je parametarska jednačba kružnice data sa

$$\begin{cases} x = t, \\ y = \frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2}, \\ z = -\frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2} - t, \end{cases} \quad \text{za } 2a^2 - 3t^2 \geq 0.$$

U φ_1 i φ_2 uvrstimo $x = t$, $y = \frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2}$ i $z = -\frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2} - t$, dobivamo da je

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= \frac{-t \pm \sqrt{2a^2 - 3t^2}}{2t}, \\ \bar{\varphi}_2 &= \frac{a^2}{t}. \end{aligned}$$

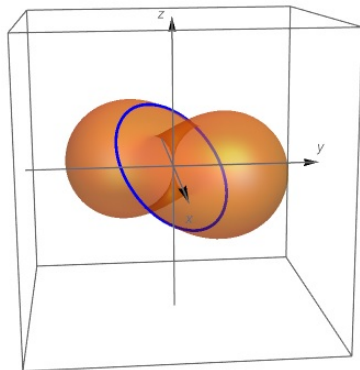
Eliminacijom parametra t iz prethodnog sistema, dobivamo

$$\bar{\varphi}_1 = \frac{-\frac{a^2}{\bar{\varphi}_2} \pm \sqrt{2a^2 - 3\left(\frac{a^2}{\bar{\varphi}_2}\right)^2}}{2\frac{a^2}{\bar{\varphi}_2}}.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Ako sada zamjenimo $\bar{\varphi}_1$ sa $\frac{y}{x}$, a $\bar{\varphi}_2$ sa $\frac{z^2 + x^2 + y^2}{x}$, dobivamo da je integralna površ koja prolazi zadatom kružnicom data sa

$$\frac{(x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2a^2(x^2 + xy + y^2)}{x} = 0.$$



Slika 3.8: Grafik funkcije $z = z(x, y)$ i kružnice $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 4 \end{cases}$ iz Primjera 3.2.9.



Primjer 3.2.10. Naći ono rješenje $u = u(x, y, z)$ parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial u}{\partial x} + a \frac{\partial u}{\partial y} + bxa \frac{\partial u}{\partial z} = cxz, \quad a \neq 1, b \neq 1, c \neq 1.$$

koje prolazi hiperpovršinom

$$u = Ay^n + Bz^m, \quad x = y.$$

Rješenje. Sistem običnih diferencijalnih jednačbi pridružen datoj parcijalnoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{a} = \frac{dz}{abx} = \frac{du}{cxz}.$$

Jednostavno se vidi da su prvi integrali ovog sistema dati sa

$$\varphi_1 = y - ax = C_1, \quad \varphi_2 = z - \frac{1}{2}abx^2 = C_2, \quad \varphi_3 = u - \frac{c}{2ab}z^2 = C_3.$$

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Opće rješenje je dato sa

$$\Phi \left(y - ax, z - \frac{1}{2}abx^2, u - \frac{c}{2ab}z^2 \right) = 0.$$

Hiperpovš ćemo napisati u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = t_1 \\ y = t_1, \\ z = t_2, \\ u = At_1^n + Bt_2^m, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Zamjenom početnih uvjeta u prvim integralima, dobivamo sistem

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1 &= (1-a)t_1, \\ \bar{\varphi}_2 &= t_2 - \frac{1}{2}abt_1^2, \\ \bar{\varphi}_3 &= u - \frac{c}{2ab}bt_2^2. \end{aligned}$$

Rješavajući ga po t_1 , t_2 i u , dobivamo da je

$$\begin{aligned} t_1 &= \frac{\bar{\varphi}_1}{1-a}, \\ t_2 &= \frac{ab\bar{\varphi}_1^2}{2(1-a)^2} + \bar{\varphi}_2, \\ u &= \frac{c(ab\bar{\varphi}_1^2 + 2(1-a)^2\bar{\varphi}_2)^2}{8(1-a)^4ab} + \bar{\varphi}_3. \end{aligned}$$

Uvrštavanjem u jednačbu $u = At_1^n + Bt_2^m$, dobivamo

$$\frac{c(ab\bar{\varphi}_1^2 + 2(1-a)^2\bar{\varphi}_2)^2}{8(1-a)^4ab} + \bar{\varphi}_3 = \left(\frac{\bar{\varphi}_1}{1-a} \right)^n + B \left(\frac{b\bar{\varphi}_1^2}{2(1-a)^2} + \bar{\varphi}_2 \right)^m.$$

Zamjenom $\bar{\varphi}_1$ sa $y - ax$, $\bar{\varphi}_2$ sa $z - \frac{1}{2}abx^2$ i $\bar{\varphi}_3$ sa $u - \frac{c}{2ab}z^2$, dobivamo rješenje Cauchyjevog problema

$$\boxed{u(x, y, z) = \frac{cz^2}{2b} - \frac{c \left(2(a-1)^2 \left(z - \frac{bx^2}{2} \right) + b(y-ax)^2 \right)^2}{8(a-1)^4ab} + A \left(\frac{y-ax}{1-a} \right)^n + B \left(\frac{ab(y-ax)^2}{2(a-1)^2} - \frac{abx^2}{2} + z \right)^m.}$$

◆

3.2 Kvazilinearne parcijalne diferencijalne jednačbe

Primjer 3.2.11. Naći rješenje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačbi

$$\begin{aligned}y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial v}{\partial y} &= 4xy, \\x \frac{\partial u}{\partial y} + y \frac{\partial v}{\partial x} &= 8xy,\end{aligned}$$

i odrediti ono rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$u(x, 2x) = 9x^2, \quad v(x, 2x) = 6x^2.$$

Rješenje. Sabiranjem jednačbi sistema, dobivamo

$$y \frac{\partial(u+v)}{\partial x} + x \frac{\partial(u+v)}{\partial y} = 12xy,$$

dok oduzimanjem dobivamo

$$y \frac{\partial(u-v)}{\partial x} - x \frac{\partial(u-v)}{\partial y} = -4xy.$$

Opća rješenja ove dvije kvazilinearne jednačbe su data, redom, sa

$$\begin{aligned}u+v &= 6x^2 + \Phi(x^2 - y^2), \\u-v &= -2x^2 + \Psi(x^2 + y^2),\end{aligned}$$

gdje su Φ i Ψ proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije na $\mathbb{R}$. Odavde imamo

$$\begin{aligned}u(x, y) &= 2x^2 + \frac{1}{2}\Phi(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}\Psi(x^2 + y^2), \\v(x, y) &= 4x^2 + \frac{1}{2}\Phi(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}\Psi(x^2 + y^2).\end{aligned}$$

Na osnovu početnih uvjeta je

$$\begin{aligned}u(x, 2x) &= 9x^2 = 2x^2 + \frac{1}{2}\Phi(-3x^2) + \frac{1}{2}\Psi(5x^2), \\v(x, 2x) &= 6x^2 = 4x^2 + \frac{1}{2}\Phi(-3x^2) - \frac{1}{2}\Psi(5x^2),\end{aligned}$$

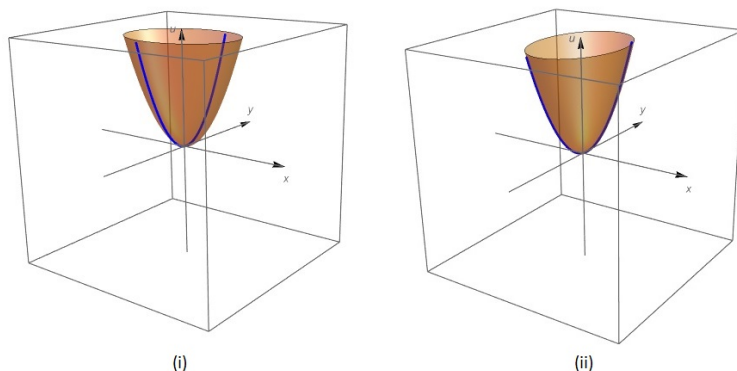
pa je

$$\Phi(x) = -3x, \quad \Psi(x) = x.$$

Konačno, rješenje početnog problema je dato sa

$u(x, y) = x^2 + 2y^2, \quad v(x, y) = 2x^2 + y^2.$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable



Slika 3.9: (i) Grafik preslikavanja $u = u(x, y)$ i krive $(t, 2t, 9t^2)$, (ii) grafik preslikavanja $v = v(x, y)$ i krive $(t, 2t, 6t^2)$ iz Primjera 3.2.11.



3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

3.3.1 Sistem od dvije jednađbe sa jednom nepoznatom funkcijom

U ovoj sekciji posmatrat ćemo nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe prvog reda u slučaju kada nepoznata funkcija zavisi od dvije nezavisne varijable. Nezavisne varijable označit ćemo sa x i y , a nepoznatu funkciju sa $u = u(x, y)$. Osim toga, koristit ćemo i sljedeće oznake

$$p = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Sada nelinearnu jednađbu prvog reda možemo napisati u sljedećem obliku

$$F(x, y, u, p, q) = 0,$$

gdje je F poznata funkcija varijabli x, y, u, p i q . Neka je $u = u(x, y)$ rješenje ove jednađbe. Tada $u = u(x, y)$ geometrijski predstavlja neku površ. Ova površ se naziva *integralnom površi* posmatrane jednađbe.

Prije nego pokažemo kako se rješava jednađba $F(x, y, u, p, q) = 0$, prvo ćemo posmatrati sljedeći sistem od dvije parcijalne diferencijalne jednađbe prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom

$$F_1(x, y, u, p, q) = 0,$$

$$F_2(x, y, u, p, q) = 0.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Pretpostavit ćemo da se iz ovog sistema mogu izračunati p i q pomoću x, y i u , tj. da se sistem može napisati u sljedećem obliku

$$\begin{aligned} p &= A(x, y, u), \\ q &= B(x, y, u), \end{aligned} \quad (3.39)$$

a za funkcije A i B ćemo pretpostaviti da su definirane u nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$, da su u Ω neprekidne i da u Ω postoje neprekidni izvodi

$$\frac{\partial A}{\partial y}, \quad \frac{\partial A}{\partial u}, \quad \frac{\partial B}{\partial x}, \quad \frac{\partial B}{\partial u}.$$

Pod rješenjem sistema (3.39) podrazumijevamo funkciju $u(x, y)$ definiranu i neprekidnu u nekoj oblasti iz $\mathbb{R}^2$, koja u toj oblasti ima prve izvode $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ i koji u toj oblasti zadovoljavaju sistem (3.39).

Sistem (3.39) je sistem sa dvije jednačbe a jednom nepoznatom funkcijom. Zato taj sistem, u općem slučaju, nema rješenje. Sada ćemo ispitati pod kojim uvjetima će sistem (3.39) imati rješenje. U tom cilju pretpostavimo da sistem (3.39) ima rješenje $u(x, y)$. Uvrštavanjem u (3.39) dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= A(x, y, u(x, y)), \\ \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} &= B(x, y, u(x, y)). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Iz (3.40) i iz pretpostavki o funkcijama A i B slijedi da su izvodi $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ neprekidni.

Štaviše, vidi se da $\frac{\partial u}{\partial x}$ ima izvod po y , a $\frac{\partial u}{\partial y}$ ima izvod po x . Diferenciranjem u prvoj jednačbi (3.40) po y , a u drugoj po x , dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial u} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial u} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}. \end{aligned}$$

Koristeći (3.40), imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial u} B(x, y, u(x, y)), \\ \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial u} A(x, y, u(x, y)). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Pošto su izvodi $\frac{\partial A}{\partial y}$, $\frac{\partial A}{\partial u}$, $\frac{\partial B}{\partial x}$, $\frac{\partial B}{\partial u}$ neprekidne funkcije kao i funkcije A , B i $u(x, y)$, onda iz (3.41) slijedi da su

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

neprekidne funkcije. Kao što je poznato, tada su i mješoviti izvodi jednaki, tj.

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y \partial x}.$$

Ovo i (3.41) daje

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial y} + \frac{\partial A(x, y, u(x, y))}{\partial u} B(x, y, u(x, y)) = \\ \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, u(x, y))}{\partial u} A(x, y, u(x, y)). \end{aligned}$$

Prema tome, ako sistem (3.39) ima rješenje $u(x, y)$ onda vrijedi

$$\frac{\partial A(x, y, u)}{\partial y} + \frac{\partial A(x, y, u)}{\partial u} B(x, y, u) = \frac{\partial B(x, y, u)}{\partial x} + \frac{\partial B(x, y, u)}{\partial u} A(x, y, u), \quad (3.42)$$

gdje je $u = u(x, y)$, tj. (3.42) vrijedi u svakoj tački integralne površi $u = u(x, y)$. Dakle, da bi funkcija $u = u(x, y)$ bila rješenje sistema (3.39) potrebno je da (3.42) vrijedi u svakoj tački površi $u = u(x, y)$. Može se desiti da (3.42) definira u kao funkciju od x i y , tj. da postoji tačno jedna funkcija $u = u(x, y)$ koja zadovoljava (3.42). Tada samo ta funkcija može biti rješenje sistema (3.39). Da li je $u(x, y)$ zaista rješenje sistema (3.39) ustanovljava se uvrštavanjem u u (3.39). Slično, ako ima (samo konačno) mnogo funkcija koje zadovoljavaju (3.42) i ako su to (na primjer) funkcije $u_1(x, y), u_2(x, y), \dots, u_n(x, y)$, onda samo te funkcije mogu biti rješenja sistema (3.39). Da li su ove funkcije zaista i rješenje ustanovljavamo uvrštavanjem u u (3.39).

Opisani slučajevi nisu od interesa za posmatranje, jer se postavlja pitanje pod kojim uvjetima svakom tačkom oblasti, u kojoj su funkcije $A = A(x, y, u)$ i $B = B(x, y, u)$ definirane, prolazi integralna površ jednađbe (3.39)? Označimo tu oblast sa $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Neka je ovo posljedenje zadovoljeno. Pošto svakom tačkom pomenute oblasti definiranosti Ω prolazi integralna površ i pošto u svakoj tački integralne površi vrijedi (3.42), slijedi da (3.42) vrijedi u svakoj tački oblasti Ω , tj. (3.42) vrijedi u oblasti Ω identički. Dakle, da bi svakom tačkom u oblasti Ω prolazila integralna površ sistema (3.39) potrebno je da (3.42) u Ω vrijedi identički. Pokažimo da je ovo i dovoljno. Pretpostavimo da (3.42) u oblasti Ω vrijedi identički i dokažimo da tada svakom tačkom oblasti Ω prolazi tačno jedna integralna površ sistema (3.39). Uzmimo proizvoljnu tačku $(x_0, y_0, u_0) \in \Omega$. Posmatrajmo najprije prvu jednađbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A(x, y, u) \quad (3.43)$$

gdje y smatramo parametrom, a u nepoznatom funkcijom od x . Tada je (3.43) obična diferencijalna jednađba (kod koje desna strana zavisi od parametra y). Označimo sa $u = \varphi(x, y, \zeta)$ ono rješenje jednađbe (3.43) koje za $x = x_0$ prima vrijednost ζ . Znači

$$\varphi(x_0, y, \zeta) = \zeta. \quad (3.44)$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Iz (3.44) slijedi da funkcija $\varphi(x, y, \zeta)$ efektivno zavisi od ζ . Iz teorema o diferenciranju po parametru i početnim vrijednostima slijedi da funkcija $u = \varphi(x, y, \zeta)$ ima izvode po y i ζ i da vrijedi

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi(x, y, \zeta)}{\partial y} \right) = \frac{\partial A(x, y, \varphi(x, y, \zeta))}{\partial u} \frac{\partial \varphi(x, y, \zeta)}{\partial y} + \frac{\partial A(x, y, \varphi(x, y, \zeta))}{\partial y} \quad (3.45)$$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi(x, y, \zeta)}{\partial \zeta} \right) = \frac{\partial A(x, y, \varphi(x, y, \zeta))}{\partial u} \frac{\partial \varphi(x, y, \zeta)}{\partial \zeta}$$

ili kraće

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) &= \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial y}, \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) &= \frac{\partial A}{\partial u} \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}. \end{aligned} \quad (3.46)$$

Iz (3.45), odnosno (3.46) se prvo vidi da postoje i da su neprekidni izvodi $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}$ i $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta \partial x}$ (ili što je zbog neprekidnosti tih izvoda isto kao $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ i $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial \zeta}$). Drugo, iz druge jednađbe u (3.45) se vidi da je $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta}$ rješenje homogene linearne jednađbe

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = C e^{\psi},$$

gdje je C konstanta, a ψ neka funkcija od x . Ako bi bilo $C = 0$ imali bismo da je $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0$, pa bi to značilo da φ ne zavisi od ζ , što je suprotno (3.44). Dakle, $C \neq 0$ i dakle $\varphi'_\zeta \neq 0$. Do sada smo početnu vrijednost ζ uzimali nezavisno od y . Sada ćemo smatrati da je ζ neprekidno diferencijabilna funkcija od y , tj. $\zeta = \zeta(y)$. Cilj je odrediti ovu funkciju, tako da $u = \varphi(x, y, \zeta(y))$ zadovoljava i drugu jednađbu (3.39). Prvo primijetimo da uvrštavanjem $\zeta = \zeta(y)$ u (3.44) i diferencirajući po y , dobivamo

$$\varphi'_y(x_0, y, \zeta(y)) + \varphi'_\zeta(x_0, y, \zeta(y))\zeta'(y) = \zeta'(y). \quad (3.47)$$

U nastavku ćemo sa $\varphi'_y(x, y, \zeta(y))$ označavati diferenciranje po y za fiksno ζ , a izvod složene funkcije $\varphi(x, y, \zeta(y))$ po y označavat ćemo sa $\frac{\partial \varphi(x, y, \zeta(y))}{\partial y}$.

Funkcija $\varphi(x, y, \zeta(y))$ zadovoljava i drugu jednađbu (3.39) ako i samo ako je

$$\frac{\partial \varphi(x, y, \zeta(y))}{\partial y} = B(x, y, \varphi(x, y, \zeta(y))),$$

tj. ako i samo ako vrijedi

$$\varphi'_y(x, y, \zeta(y)) + \varphi'_\zeta(x, y, \zeta(y))\zeta'(y) = B(x, y, \varphi(x, y, \zeta(y))), \quad (3.48)$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

ili kraće

$$\varphi'_y + \varphi'_\zeta \zeta'_y(y) = B(x, y, \varphi).$$

Što, zbog φ'_ζ , možemo pisati u obliku

$$\zeta'_y(y) = \frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta}. \quad (3.49)$$

Lijeva strana u (3.49) zavisi samo od y . Prema tome, desna strana u (3.49) mora zavisiti samo od y . Provjerimo da li je ovaj uvjet zadovoljen. Imamo

$$\left(\frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta} \right)'_x = \frac{\varphi'_\zeta (B'_x + B'_u \varphi'_x - \varphi''_{yx}) - (B - \varphi'_y) \varphi''_{\zeta x}}{(\varphi'_\zeta)^2}. \quad (3.50)$$

Kako je, prema (3.43), $\varphi'_x = u_x = A$, a prema (3.46) $\varphi''_{yx} = A'_u \varphi'_y + A'_y$, $\varphi''_{\zeta x} = A'_u \varphi'_\zeta$, to jednakost (3.50) možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned} \left(\frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta} \right)'_x &= \frac{\varphi'_\zeta (B'_x + B'_u A - A'_u \varphi'_y - A'_y) - (B - \varphi'_y) A'_u \varphi'_\zeta}{(\varphi'_\zeta)^2} \\ &= \frac{\varphi'_\zeta (B'_x + B'_u A - A'_y - A'_u B)}{(\varphi'_\zeta)^2}. \end{aligned}$$

Izraz u posljednjoj zagradi je identički jednak nuli. Otuda dobivamo

$$\left(\frac{B(x, y, \varphi) - \varphi'_y}{\varphi'_\zeta} \right)'_x = 0.$$

Vidimo da ni desna strana jednađbe (3.49) ne zavisi od x . Prema tome, jednađba (3.49) se ne mijenja ako u njoj uzmemo za x bilo koju fiksnu vrijednost. Stavimo $x = x_0$. Tada (3.48) zbog $\varphi(x_0, y, \zeta(y)) = \zeta(y)$ i zbog (3.47) prima oblik

$$\zeta'(y) = B(x_0, y, \zeta(y)). \quad (3.51)$$

Znači jednađba iz koje treba odrediti $\zeta(y)$ je data sa (3.51). Pošto je $B(x, y, u)$ neprekidna po x , y i u i neprekidno diferencijabilna po x i u , onda jednađba (3.51) pri proizvoljnim početnim uvjetima ima tačno jedno rješenje. Neka je $\zeta(y)$ ono rješenje jednađbe (3.51) koje zadovoljava uvjet $\zeta(y_0) = u_0$. Sada ćemo posmatrati funkciju $u(x, y) = \varphi(x, y, \zeta(y))$ sa tako odabranom funkcijom $\zeta(y)$. Ova funkcija je određena tako da budu zadovoljene obje jednađbe sistema (3.39). Znači, funkcija je rješenje tog sistema. Osim toga $u(x_0, y_0) = \varphi(x_0, y_0, \zeta(y_0)) = \zeta(y_0) = u_0$. Znači integralna površ prolazi unaprijed datom tačkom (x_0, y_0, u_0) oblasti Ω . Ostaje da se dokaže da druge takve integralne površi nema. U tom cilju, pretpostavimo je $u_1(x, y)$ također rješenje sistema za koji vrijedi $u_1(x_0, y_0) =$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

u_0 . Funkcija $u_1(x, y)$ zadovoljava sistem (3.39). Specijalno zadovoljava drugu jednađbu sistema (3.39)

$$\frac{\partial u_1(x, y)}{\partial y} = B(x, y, u_1(x, y)).$$

Odavde za $x = x_0$ imamo

$$\frac{\partial u_1(x_0, y)}{\partial y} = B(x_0, y, u_1(x_0, y)). \quad (3.52)$$

Funkcija $u_1(x_0, y)$ je funkcija od y . Ova funkcija prema (3.52) zadovoljava jednađbu (3.51). Osim toga, za $y = y_0$ prima vrijednost u_0 . Jedino rješenje jednađbe (3.51) koje prima vrijednost u_0 za $y = y_0$ je, kao što smo vidjeli, funkcija $\zeta(y)$. Znači,

$$u_1(x_0, y) = \zeta(y). \quad (3.53)$$

Neka je sad y proizvoljno, ali fiksno. Tada je $u_1(x, y)$ funkcija od x . Ona zadovoljava prvu jednađbu u (3.39), tj. jednađbu (3.43). Pored toga za $x = x_0$ ona prima vrijednost $u_1(x_0, y)$. Međutim, jedino rješenje jednađbe (3.43) koje prima za $x = x_0$ vrijednost $u_1(x_0, y)$ je $\varphi(x, y, u_1(x_0, y))$, odnosno, prema (3.53), $\varphi(x, y, \zeta(y))$. Znači, za svako y vrijedi identički po x

$$u_1(x, y) = \varphi(x, y, \zeta(y)). \quad (3.54)$$

Ovo znači da (3.54) vrijedi identički po x i y . Kako je $\varphi(x, y, \zeta(y)) = u(x, y)$ imamo

$$u(x, y) \equiv u_1(x, y).$$

Ovim je jedinstvenost dokazana. Na osnovu ovoga vidimo da vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 3.3.1. *Neka su funkcije $A(x, y, u)$ i $B(x, y, u)$ definirane i neprekidne u nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ i neka u toj oblasti postoje neprekidni parcijalni izvodi*

$$\frac{\partial A}{\partial y}, \frac{\partial A}{\partial u}, \frac{\partial B}{\partial x}, \frac{\partial B}{\partial u}.$$

Da bi svakom tačkom oblasti Ω prolazila jedna integralna površ sistema (3.39), potrebno je i dovoljno da u toj oblasti uvjet (3.42) bude identički zadovoljen.

Definicija 3.3.1. *Za sistem (3.39) kod kojeg je uvjet (3.42) identički zadovoljen u nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ kažemo da je saglasan ili potpuno rješiv u Ω .*

Neka je sistem (3.39) saglasan u $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$. Jedino rješenje tog sistema, koje za $x = x_0$ i $y = y_0$ prima vrijednost u_0 označavamo sa $u = u(x, y; x_0, y_0, u_0)$. Ovdje je (x_0, y_0, u_0) tačka iz Ω . Fiksiramo x_0 i y_0 i mijenjajmo u_0 tako da tačka (x_0, y_0, u_0) ostaje u Ω . Dobivamo, na ovaj način, jednu familiju integralnih površi

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

sistema (3.39) koja zavisi od jednog parametra (tj. od u_0), ili kako se često kaže od jedne proizvoljne konstante. Ove integralne površi ispunjavaju neku podoblast Ω_1 oblasti Ω . U Ω_1 drugih integralnih površi sistema (3.39) nema. Zbog toga, odgovarajuću familiju rješenja sistema (3.39) nazivamo *općim rješenjem* sistema (3.39) (u oblasti Ω_1). Prema tome, opće rješenje saglasnog sistema (3.39) zavisi od jedne proizvoljne konstante.

Primjer 3.3.1. Ispitati da li je sistem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) u, \end{cases}$$

saglasan i, ako jeste, riješiti ga. Odrediti onu integralnu površ koja prolazi kroz tačku $T(0, 1, 1)$.

Rješenje. Provjerimo da li je uvjet (3.42) identički zadovoljen u nekoj oblasti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} B &= \left(1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) u + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) u, \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} A &= \left(1 - \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) u + \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) u. \end{aligned}$$

Vidimo da je ovo identički zadovoljeno u svakoj tački $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ za koju je $x^2 + y^2 \neq 0$. Posmatrajmo sada prvu jednačbu sistema kao diferencijalnu jednačbu po x gdje ćemo uzeti da je y parametar. Dobivamo da je

$$\frac{du}{u} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \left(\frac{x}{x^2 + y^2} + y \right) dx,$$

odakle slijedi

$$u = C(y)e^{yx}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

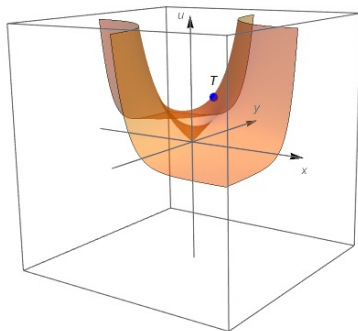
Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem u po y i koristeći drugu jednačbu sistema dobivamo

$$\begin{aligned} C'(y)e^{yx}\sqrt{x^2 + y^2} + C(y)xe^{yx}\sqrt{x^2 + y^2} + C(y)e^{yx}\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \\ = \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + x \right) C(y)e^{yx}\sqrt{x^2 + y^2}, \end{aligned}$$

pa je $C'(y) = 0$ odakle dobivamo da je $C(y) = C = \text{const.}$ Dakle funkcija u je $u = Ce^{yx}\sqrt{x^2 + y^2}$. Odredimo sada integralnu površ koja prolazi kroz tačku $(0, 1, 1)$. Iz $u(0, 1) = 1$ dobivamo da je $u(0, 1) = C = 1$. Tražena površ je

$$\boxed{u(x, y) = e^{yx}\sqrt{x^2 + y^2}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable



Slika 3.10: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i tačka T iz Primjera 3.3.1.



Primjer 3.3.2. Ispitati da li je sistem

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = u + yu, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = u^2 + 2xu, \end{cases}$$

saglasan i, ako jeste, riješiti ga.

Rješenje. Provjerimo da li je uvjet (3.42) identički zadovoljen u nekoj oblasti:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A}{\partial y} + \frac{\partial A}{\partial u} B &= u + (1 + y)(u^2 + 2xu), \\ \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial u} A &= 2u + 2(u + x)(u + yu). \end{aligned}$$

Oдавde vidimo da mora biti

$$u(1 + u(1 + y)) = 0.$$

Jedine funkcije koje zadovoljavaju ovaj uvjet su $u = 0$ i $u = -\frac{1}{1 + y}$. Direktom provjerom vidimo da je jedino rješenje ovog sistema funkcija

$u(x, y) = 0.$



3.3.2 Potpuni integral

Ovdje ćemo posmatrati parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \tag{3.55}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

gdje je $u = u(x, y)$ nepoznata funkcija nezavisnih varijabli x i y , a

$$p = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Data funkcija F je definirana u nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$. Pretpostavit ćemo da je funkcija F dva puta neprekidno diferencijabilna u Ω . Ako bi u Ω vrijedilo $\frac{\partial F}{\partial p} \equiv 0$ i $\frac{\partial F}{\partial q} \equiv 0$ to bi značilo da F ne bi zavisilo od p i q pa (3.55) nije diferencijalna jednađba. Zbog toga, bar u jednoj tački iz Ω mora vrijediti $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$ ili $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$. Pretpostavimo da je $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $\frac{\partial F}{\partial p}$ i u nekoj okolini te tačke vrijedi $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. Smanjujući Ω , ako je potrebno, možemo smatrati da u Ω vrijedi $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$. Neka, osim toga, postoji tačka $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \in \Omega$ za koju je $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$. Zbog ovoga i zbog $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$, može se jednađba (3.55) na jednoznačan način riješiti po p (bar u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$). Znači, jednađbu (3.55) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$p = f(x, y, u, q). \quad (3.56)$$

Funkcija f je definirana i dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini tačke (x_0, y_0, u_0, q_0) . Ovdje ćemo jednađbu posmatrati uglavnom u obliku (3.56).

Definicija 3.3.2. *Za funkciju $\varphi(x, y, a, b)$ koja zavisi od x i y i dva parametra a i b kažemo da je potpuni integral od (3.56) ako za sve dopustive vrijednosti parametara a i b funkcija $\varphi(x, y, a, b)$ (kao funkcija od x i y) je rješenje jednađbe (3.56).*

Dakle, potpuni integral jednađbe (3.56) je dvoparametarska familija rješenja jednađbe (3.56). Za funkciju f pretpostavljamo da postoje izvodi koji se u daljnjem razmatranju pojavljuju i da su neprekidni.

Sada ćemo navesti drugu definiciju potpunog integrala.

Definicija 3.3.3. *Za funkciju $u = \varphi(x, y, a, b)$ koja zavisi od x i y i dva parametra a i b kažemo da je potpuni integral od (3.56) ako se eliminacijom parametara a i b iz jednađbi*

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, a, b), \\ p &= \varphi'_x(x, y, a, b), \\ q &= \varphi'_y(x, y, a, b), \end{aligned} \quad (3.57)$$

dobiva jednađba (3.56).

Dokazat ćemo da su ove dvije definicije ekvivalentne. Vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.3.2. *Definicije 3.3.2 i 3.3.3 su ekvivalentne.*

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Dokaz. Neka je funkcija $u = \varphi(x, y, a, b)$ potpuni integral jednađbe (3.56) u smislu prve definicije. Tada za svako a i b vrijedi identički po x i y

$$\varphi'_x(x, y, a, b) = f(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi_y(x, y, a, b)). \quad (3.58)$$

Ovo znači da (3.58) vrijedi identički po x, y, a i b . Sada eliminiramo a i b iz jednađbi (3.57). Izračunamo a i b iz prve i treće jednađbe, ako je moguće, a zatim ih uvrstimo u drugu jednađbu. Prvo, primjetimo da ne može biti $\frac{\partial \varphi}{\partial a} \equiv 0$, jer bi to značilo da familija rješenja ne zavisi od a , tj. ona ne bi bila dvoparametarska familija rješenja jednađbe (3.56). Znači, bar u nekoj tački, pa zbog neprekidnosti $\frac{\partial \varphi}{\partial a}$, i u nekoj okolini te tačke, mora biti $\frac{\partial \varphi}{\partial a} \neq 0$. Daljnja razmatranja ograničavamo na ovu okolinu. Ispitajmo da li može biti $\frac{\partial(\varphi, \varphi'_y)}{\partial(a, b)} \equiv 0$. Pretpostavimo da ovo vrijedi. Tada bi iz ovog slijedilo da su funkcije φ i φ'_y zavisne (kao funkcije od a i b za proizvoljno i fiksno x i y). Zbog $\frac{\partial \varphi}{\partial a} \neq 0$ može se funkcija φ'_y izraziti pomoću funkcije φ . Dakle, postoji funkcija $\Phi(x, y, \varphi)$ takva da vrijedi identički po a i b (pri proizvoljnom x i y) $\varphi'_y(x, y, a, b) = \Phi(x, y, \varphi(a, y, a, b))$, tj. da ovo vrijedi po $x, y, a, i b$. Kraće ovo možemo zapisati $\varphi'_y = \Phi(x, y, \varphi)$. Odavde i iz (3.58), vidimo da funkcija φ zadovoljava sistem

$$\begin{aligned} \varphi'_x &= f(x, y, \varphi, \varphi'_y), \\ \varphi'_y &= \Phi(x, y, \varphi). \end{aligned} \quad (3.59)$$

Sistem (3.59) nije riješen po φ'_x i φ'_y . Međutim, ovaj sistem se lako može riješiti po φ'_x i φ'_y . Dovoljno je φ'_y iz druge jednađbe (3.59) uvrstiti u desnu stranu prve jednađbe od tih jednađbi. Vidimo da sistem (3.59) kao sistem od dvije jednađbe sa jednom nepoznatom ima dvoparametarsku familiju rješenja. Međutim, u prethodnoj sekciji smo vidjeli da takav sistem može imati najviše jednoparametarsku familiju rješenja. Znači pretpostavka $\frac{\partial(\varphi, \varphi'_y)}{\partial(a, b)} \equiv 0$ vodi u kontradikciju. Zbog toga u nekoj podoblasti ove oblasti mora da vrijedi $\frac{\partial(\varphi, \varphi'_y)}{\partial(a, b)} \neq 0$. Iz toga slijedi da u toj podoblasti možemo iz prve i teće jednađbe (3.57) izračunati a i b , pa na taj način dobivamo

$$\begin{aligned} a &= \psi_1(x, y, u, q), \\ b &= \psi_2(x, y, u, q). \end{aligned} \quad (3.60)$$

Prva i treća jednađba u (3.57) su ekvivalentne sa (3.60), pa uvrštavanjem a i b iz (3.60) u prvu i treću jednađbu (3.57), dobivamo

$$\begin{aligned} u &= \varphi(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)), \\ q &= \varphi'_y(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)). \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađžbe sa dvije nezavisne varijable

Isto tako, uvrštavanjem u i q iz (3.57) u (3.60), dobivamo

$$\begin{aligned} a &= \psi_1(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)), \\ b &= \psi_2(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)). \end{aligned} \quad (3.62)$$

Uvrstimo a i b iz (3.60) u drugu jednađžbu (3.57). Desna strana te jednađžbe će poslije uvrštavanja poprimiti oblik

$$\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)).$$

S druge strane (3.58) vrijedi identički po x, y, a , i b . Znači vrijedi ako umjesto a i b uvrstimo funkcije ψ_1 i ψ_2 iz (3.60). Tada dobivamo da vrijedi

$$\begin{aligned} &\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)) = \\ &f(x, y, \varphi(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)), \varphi_y(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q))). \end{aligned}$$

Na osnovu (3.61) dobivamo da je

$$\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, u, q), \psi_2(x, y, u, q)) = f(x, y, u, q). \quad (3.63)$$

Vidimo da se poslije opisanog uvrštavanja desna strana jednađžbe (3.57) svodi na $f(x, y, u, q)$. Znači da druga jednađžba postaje $p = f(x, y, u, q)$. Na ovaj način smo se uvjerali da eliminacijom parametara a i b iz (3.57) dobivamo jednađžbu (3.56). Ovo znači da je $u = \varphi(x, y, a, b)$ potpuni integral jednađžbe (3.56) u smislu druge definicije.

Neka je sada $u = \varphi(x, y, a, b)$ potpuni integral u smislu druge definicije. Znači da izračunavanjem a i b iz prve i treće jednađžbe (3.57) i uvrštavanjem u drugu jednađžbu dobivamo (3.56). Ovo znači da (3.63) vrijedi identički po x, y, a i b . Prema tome to će da vrijedi ako stavimo $u = \varphi(x, y, a, b)$ i $q = \varphi'_y(x, y, a, b)$. Na taj način dobivamo

$$\begin{aligned} &\varphi'_x(x, y, \psi_1(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)), \psi_2(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b))) \\ &= f(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)). \end{aligned}$$

Na osnovu (3.62), lijeva strana ove jednađžbe je jednaka $\varphi'_x(x, y, a, b)$. Znači, identički po x, y, a i b vrijedi

$$\varphi'_x(x, y, a, b) = f(x, y, \varphi(x, y, a, b), \varphi'_y(x, y, a, b)),$$

što pokazuje da je $\varphi(x, y, a, b)$ dvoparametarska familija rješenja jednađžbe (3.56). Ovim je dokazana ekvivalentnost navedenih definicija. $\square$

3.3.3 Opće i singularno rješenje

Sada pretpostavimo da znamo potpuni integral $u = \varphi(x, y; a, b)$ jednađžbe (3.56). Tada znamo jednu familiju rješenja te jednađžbe koja zavisi od dva parametra a

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

i b . Međutim, nije opravdano očekivati da će ta familija sadržavati sva rješenja jednađbe (3.56). Naime, već u jednostavnijem slučaju linearnih i kvazilinearnih jednađbi smo vidjeli da opće rješenje zavisi od jedne proizvoljne funkcije, a ne samo od dva parametra. Znači, dajući konstantama a i b sve moguće vrijednosti, u općem slučaju, ne dobivamo sva rješenja jednađbe (3.56). Pokazat ćemo, koristeći se potpunim integralom, kako na drugi način možemo dobiti sva ova rješenja. Upotrijebit ćemo Lagrangeovu metodu varijacije konstanti. U potpunom integralu $u = \varphi(x, y, a, b)$ su a i b proizvoljne konstante. U Lagrangeovoj metodi pretpostavljamo da su sada a i b neke neprekidno diferencijabilne funkcije od x i y , tj. $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$. Tada dobivamo složenu funkciju

$$u = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y)). \quad (3.64)$$

Ako funkcije $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$ uzmemo proizvoljno, tada složena funkcija neće zadovoljavati jednađbu (3.56). Pokažimo da funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ možemo odrediti tako da složena funkcija (3.64) bude rješenje jednađbe (3.56). Izvode složene funkcije (3.64) po x i y označavamo sa $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, a izvode funkcije $\varphi(x, y; a, b)$ po x i y pri fiksnoj a i b označavamo sa φ'_x i φ'_y . Imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial x} &= \varphi'_x(x, y, a(x, y), b(x, y)) \\ &+ \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial y} &= \varphi'_y(x, y, a(x, y), b(x, y)) \\ &+ \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y}, \end{aligned}$$

ili kraće

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= \varphi'_x + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= \varphi'_y + \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Funkcija $u = \varphi(x, y, a, b)$ je potpuni integral jednađbe (3.56), pa će (3.58) identički da vrijedi po x, y, a i b . Ovo će vrijediti i ako stavimo $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$. Otuda imamo sljedeći identitet

$$\varphi'_x(x, y, a(x, y), b(x, y)) = f(x, y, \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y)), \varphi_y(x, y, a(x, y), b(x, y))). \quad (3.66)$$

Treba napomenuti da relacija (3.66) još ne znači da je složena funkcija $u = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))$ rješenje jednađbe (3.56). Naime, φ'_x i φ'_y koji figurišu u

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

(3.66) nisu izvodi po x i y složene funkcije $\varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))$. Ali, ako funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ odaberemo tako da bude

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{3.67}$$

na osnovu (3.65) imamo $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = p$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial y} = q$, pa će (3.66) izgledati

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = f\left(x, y, \varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right), \quad \varphi = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y)),$$

a ovo će značiti da je $u = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))$ rješenje jednađbe (3.56). Možemo očekivati da ćemo na ovaj način dobiti nova rješenja jednađbe (3.56). Zbog ovoga, prirodno je ispitati na koje sve načine može zadovoljiti sistem (3.67). Sistem (3.67) će biti zadovoljen u sljedeća tri slučaja:

1° Ako je $\frac{\partial a}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{\partial b}{\partial y} = 0$, onda će biti zadovoljen sistem (3.67) i to povlači da su a i b konstante, pa sa takvim a i b dobivamo **potpuni integral**.

2° Jasno je da je sistem (3.67) zadovoljen ako su funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ takve da je

$$\frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial a} = \frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial b} = 0.\tag{3.68}$$

Ako postoje funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ kao funkcije od x i y koje zadovoljavaju (3.68), onda uvrštavajući te funkcije u $u = \varphi(x, y; a, b)$ dobivamo rješenje od (3.56). To rješenje ne zavisi od proizvoljnih konstanti niti od proizvoljne funkcije i naziva se **singularnim rješenjem**, odnosno singularnim integralom jednađbe (3.56). Ako funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ izračunate iz (3.68) nisu konstantne, onda je singularno rješenje integral novo rješenje jednađbe (3.56). Ovo rješenje predstavlja obvojnici familije površi $u = \varphi(x, y, a, b)$.

3° Ako hoćemo da sistem (3.67) bude zadovoljen na drugi način, tj. na način koji je različit i od načina 1° i od načina 2°, onda bar jedna od funkcija $\frac{\partial a}{\partial x}$, $\frac{\partial a}{\partial y}$, $\frac{\partial b}{\partial x}$ i $\frac{\partial b}{\partial y}$ mora biti različita od nule. Neka je $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$. Isto tako mora biti $\frac{\partial \varphi}{\partial x} \neq 0$ ili $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0$. Ako funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ zadovoljavaju sistem (3.67), onda homogeni sistem algebarskih jednađbi

$$\begin{aligned}U \frac{\partial a}{\partial x} + V \frac{\partial b}{\partial x} &= 0, \\ U \frac{\partial a}{\partial y} + V \frac{\partial b}{\partial y} &= 0,\end{aligned}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

ima netrivialno rješenje $U = \frac{\partial \varphi}{\partial a}$ i $V = \frac{\partial \varphi}{\partial b}$. Zbog toga je $\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} \equiv 0$. Iz ovoga slijedi da su funkcije $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$ zavisne. Zbog $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$ možemo smatrati da je b funkcija od a , tj. $b = \omega(a)$. Znači da postoji takva funkcija $\omega(a)$ da identički po x i y vrijedi $b(x, y) = \omega(a(x, y))$. Kako je $\frac{\partial b}{\partial x} = \omega'(a) \frac{\partial a}{\partial x}$ i $\frac{\partial b}{\partial y} = \omega'(a) \frac{\partial a}{\partial y}$, sistem (3.67) svodi se na

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega'(a) \frac{\partial a}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega'(a) \frac{\partial a}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Poslije dijeljenja sa $\frac{\partial a}{\partial x} \neq 0$, u prvoj jednačbi imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega'(a) &= 0, \\ \left[\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega'(a) \right] \frac{\partial a}{\partial y} &= 0. \end{aligned} \tag{3.69}$$

Na osnovu (3.69) vidimo da se sistem svodi na

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} + \frac{\partial \varphi}{\partial b} \omega'(a) = 0, \quad b = \omega(a). \tag{3.70}$$

Sistem (3.67) može biti zadovoljen na beskonačno mnogo načina. Uzmemo po volji neprekidno diferencijabilnu funkciju $\omega(a)$. Iz (3.70) izračunamo funkciju $a = a(x, y)$. Zatim uzmimo da je $b(x, y) = \omega(a(x, y))$. Ovako dobivene funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ uvrstimo u $u = \varphi(x, y, a, b)$. Dobit ćemo rješenje jednačbe (3.56)

$$u = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y)).$$

Na ovaj način možemo dobiti familiju rješenja koja zavisi od proizvoljne funkcije $\omega(a)$. Ta familija rješenja se naziva **općim integralom** jednačbe (3.56). Ovaj opći integral se zapisuje u obliku

$$\begin{cases} u = \varphi(x, y, a, \omega(a)), \\ \frac{\partial \varphi(x, y, a, \omega(a))}{\partial a} + \frac{\partial \varphi(x, y, a, \omega(a))}{\partial b} \omega'(a) = 0. \end{cases}$$

Da li su na ovaj način nađena sva rješenja jednačbe (3.56)? Sljedeći teorem dokazuje da je odgovor na ovo pitanje potvrđan.

Teorem 3.3.3. *Bilo koje rješenje jednačbe (3.56) može se dobiti iz potpunog ili općeg ili singularnog integrala.*

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Dokaz. Odredimo funkcije $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$ tako da je zadovoljen sistem

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \varphi(x, y, a, b), \\ u_x(x, y) &= \varphi'_x(x, y, a, b), \\ u_y(x, y) &= \varphi'_y(x, y, a, b). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Ovo je sistem od tri jednađbe sa dvije nepoznate. Ovakvi sistemi obično nemaju rješenja. Ipak, (3.71) je specijalan sistem od tri jednađbe sa dvije nepoznate. Naime, $\varphi(x, y, a, b)$ je potpuni integral, a ne bilo kakva funkcija. Pokazat ćemo da se iz (3.71) mogu odrediti funkcije $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$, tj. da se on može riješiti. Prvo, kad smo dokazivali ekvivalentnost dvije definicije potpunog integrala, dokazali smo da se iz prve i treće jednađbe sistema (3.71) mogu izračunati a i b preko x, y, u i u_y (tamo je umjesto u_y pisalo q). Kako su u i u_y funkcije od x i y , to su a i b u krajnjem slučaju funkcije od x i y . Pored toga, tamo je pokazano da će desna strana druge jednađbe sistema (3.71) postati $f(x, y, u(x, y), u_y(x, y))$ ako ovako izračunate funkcije $a(x, y)$ i $b(x, y)$ uvrstimo u desnu stranu. Znači, ako $a(x, y)$ i $b(x, y)$ izračunamo iz prve i treće jednađbe i uvrstimo u drugu jednađbu, dobivamo

$$\varphi'_x(x, y, a(x, y), b(x, y)) = f(x, y, u(x, y), u_y(x, y)).$$

Kako je u rješenje jednađbe (3.56), to je $u_x(x, y) = f(x, y, u(x, y), u_y(x, y))$. Odavde i iz prethodne jednađbe, dobivamo $u_x(x, y) = \varphi'_x(x, y, a(x, y), b(x, y))$. Iz $u(x, y) = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y))$ diferenciranjem po x dobivamo

$$u_x(x, y) = \varphi'_x(x, y, a, b) + \frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x}.$$

Kako je $u_x(x, y) = \varphi'_x(x, y, a(x, y), b(x, y))$, dobivamo da je zadovoljena jednađba

$$\frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial x} = 0.$$

Slično, diferenciranjem po y , dobivamo

$$\frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial a} \frac{\partial a}{\partial y} + \frac{\partial \varphi(x, y, a, b)}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial y} = 0.$$

Dakle, funkcije $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$ određene iz sistema (3.71) zadovoljavaju sistem (3.67). Osim toga, pošto je zadovoljena prva jednađba sistema vrijedi

$$u(x, y) = \varphi(x, y, a(x, y), b(x, y)). \quad (3.72)$$

U analizi (3.67), vidjeli smo da ako $a = a(x, y)$ i $b = b(x, y)$ zadovoljavaju sistem (3.67) i ako ih uvrstimo u potpuni integral, tada dobivamo potpuni ili opći ili singularni integral. Prema (3.72) taj slučaj imamo kod rješenja $u(x, y)$. $\square$

Na osnovu ovog teorema, vidimo da znamo riješiti jednađbu (3.56) ako znamo naći jedan potpuni integral. Zato je od interesa znati kako odrediti potpuni integral. Metodama određivanja potpunog integrala bavit ćemo se u narednim sekcijama.

3.3.4 Posebni slučajevi nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi prvog reda

Prije nego što uvedemo opću Lagrange-Charpitovu metodu za rješavanje nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi prvog reda, izdvojiti ćemo nekoliko posebnih oblika jednačbi kod kojih se potpuni integral može konstruisati neposredno. Kod takvih jednačbi njihova posebna struktura omogućava redukciju problema ili direktno određivanje rješenja bez primjene opće metode karakteristika. U nastavku navodimo neke od najvažnijih slučajeva.

1. Ako parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda ima oblik

$$F(p, q) = 0 \quad \text{ili} \quad q = h(p),$$

tj. ako ne zavisi od varijabli x, y, u , nego samo od prvih parcijalnih izvoda nepoznate funkcije, tada možemo staviti

$$p = a,$$

gdje je a proizvoljna konstanta. Iz jednačbe tada slijedi

$$q = h(a).$$

Koristeći Mongeove oznake vrijedi

$$du = p dx + q dy,$$

pa dobivamo

$$du = a dx + h(a) dy.$$

Integracijom slijedi

$$u(x, y) = ax + h(a)y + b,$$

gdje je b proizvoljna konstanta. Ovo predstavlja potpuni integral date jednačbe.

Primjer 3.3.3. Odrediti potpuni integral jednačbe

$$p = q^2.$$

Rješenje. Jednačba ima oblik

$$p = h(q),$$

pa zavisi samo od parcijalnih izvoda p i q . Zato možemo staviti

$$q = a,$$

gdje je a proizvoljna konstanta. Iz jednačbe tada slijedi

$$p = a^2.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Prema Mongeovim oznakama vrijedi

$$du = p \, dx + q \, dy,$$

pa dobivamo

$$du = a^2 \, dx + a \, dy.$$

Integracijom slijedi

$$u(x, y) = a^2 x + a y + b,$$

gdje je b proizvoljna konstanta.

Dakle, potpuni integral date parcijalne diferencijalne jednačbe je

$$\boxed{u(x, y) = a^2 x + a y + b.}$$

U ovom rješenju a i b su proizvoljne konstante. ♦

2. Ako parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda ima oblik

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

tada stavljamo

$$f_1(x, p) = f_2(y, q) = a,$$

gdje je a proizvoljna konstanta. Ako je moguće riješiti posljednje dvije jednačbe po p i q , redom, dobivamo

$$p = h_1(x, a), \quad q = h_2(y, a).$$

Tada totalni diferencijal funkcije u

$$du = p \, dx + q \, dy$$

postaje

$$du = h_1(x, a) \, dx + h_2(y, a) \, dy.$$

Integracijom slijedi

$$u(x, y) = \int h_1(x, a) \, dx + \int h_2(y, a) \, dy + b,$$

gdje je b proizvoljna konstanta.

Primjer 3.3.4. Odrediti potpuni integral jednačbe

$$\frac{x}{2} p^3 = y^2 + q.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje. Zadana jednačba je oblika

$$f_1(x, p) = f_2(y, q),$$

gdje je

$$f_1(x, p) = \frac{x}{2}p^3, \quad f_2(y, q) = y^2 + q.$$

Stavimo

$$\frac{x}{2}p^3 = y^2 + q = a,$$

gdje je a proizvoljna konstanta. Tada dobijamo

$$\frac{x}{2}p^3 = a \quad \Rightarrow \quad p = \sqrt[3]{\frac{2a}{x}},$$

i

$$y^2 + q = a \quad \Rightarrow \quad q = a - y^2.$$

Prema tome je

$$du = p dx + q dy = \sqrt[3]{\frac{2a}{x}} dx + (a - y^2) dy.$$

Integracijom dobivamo

$$u(x, y) = \int \sqrt[3]{\frac{2a}{x}} dx + \int (a - y^2) dy + b,$$

odakle slijedi

$$u(x, y) = \frac{3\sqrt[3]{2a}}{2} \sqrt[3]{x^2} + ay - \frac{y^3}{3} + b,$$

gdje je b proizvoljna konstanta.

Dakle, potpuni integral zadane parcijalne diferencijalne jednačbe je

$$\boxed{u(x, y) = \frac{3\sqrt[3]{2a}}{2} \sqrt[3]{x^2} + ay - \frac{y^3}{3} + b.}$$

◆

3. Ako parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda ima oblik

$$F(u, p, q) = 0,$$

onda tražimo rješenje u obliku

$$u = u(v), \quad \text{gdje je} \quad v = ax + y,$$

pri čemu je a proizvoljna konstanta. Tada vrijedi

$$p = u_x = a \frac{du}{dv}, \quad q = u_y = \frac{du}{dv}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Prema tome, data jednačba prelazi u običnu diferencijalnu jednačbu

$$F(u, au', u') = 0, \quad u' = \frac{du}{dv}.$$

Rješavanjem ove jednačbe dobivamo

$$u = \Phi(v, a, b),$$

gdje je b proizvoljna konstanta.

Prema tome, potpuni integral ima oblik

$$u(x, y) = \Phi(ax + y, a, b).$$

Primjer 3.3.5. Odrediti potpuni integral jednačbe

$$u + p^2q = 0.$$

Rješenje. Zadana jednačba je oblika

$$F(u, p, q) = 0.$$

Tražimo rješenje u obliku

$$u = u(v), \quad \text{gdje je} \quad v = ax + y,$$

pri čemu je a proizvoljna konstanta.

Tada je

$$p = u_x = a \frac{du}{dv} = au', \quad q = u_y = \frac{du}{dv} = u',$$

gdje je

$$u' = \frac{du}{dv}.$$

Uvrštavanjem u jednačbu

$$u + p^2q = 0$$

dobivamo

$$u + (au')^2u' = 0,$$

odnosno

$$u + a^2(u')^3 = 0.$$

Odavde slijedi

$$(u')^3 = -\frac{u}{a^2},$$

pa je

$$u' = -\frac{\sqrt[3]{u}}{\sqrt[3]{a^2}}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Dakle, treba riješiti običnu diferencijalnu jednačbu

$$\frac{du}{dv} = -\frac{u^{1/3}}{a^{2/3}}.$$

Jednačba je s razdvojenim varijablama, pa imamo

$$u^{-1/3} du = -\frac{1}{a^{2/3}} dv.$$

Integracijom dobivamo

$$\int u^{-1/3} du = \int -\frac{1}{a^{2/3}} dv,$$

odnosno

$$\frac{3}{2}u^{2/3} = -\frac{v}{a^{2/3}} + b,$$

gdje je b proizvoljna konstanta.

Odavde slijedi

$$u^{2/3} = \frac{2}{3} \left(b - \frac{v}{a^{2/3}} \right),$$

pa je

$$u = \left[\frac{2}{3} \left(b - \frac{v}{a^{2/3}} \right) \right]^{3/2}.$$

Kako je $v = ax + y$, dobijamo

$$u(x, y) = \left[\frac{2}{3} \left(b - \frac{ax + y}{a^{2/3}} \right) \right]^{3/2}.$$

Dakle, potpuni integral zadane parcijalne diferencijalne jednačbe je

$$\boxed{u(x, y) = \left[\frac{2}{3} \left(b - \frac{ax + y}{a^{2/3}} \right) \right]^{3/2}}.$$

U ovom rješenju a i b su proizvoljne konstante.



4. Ako parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda ima oblik

$$u = xp + yq + \varphi(p, q),$$

tada je potpuni integral date jednačbe

$$u(x, y) = ax + by + \varphi(a, b),$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

Zaista, neka je

$$u(x, y) = ax + by + \varphi(a, b).$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Tada je

$$p = u_x = a, \quad q = u_y = b.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednađbu dobivamo

$$xp + yq + \varphi(p, q) = xa + yb + \varphi(a, b) = u(x, y),$$

što pokazuje da funkcija $u(x, y) = ax + by + \varphi(a, b)$ zadovoljava zadanu jednađbu. Prema tome, ona predstavlja potpuni integral date parcijalne diferencijalne jednađbe.

Primjer 3.3.6. Odrediti potpuni integral jednađbe

$$u = xp + yq + pq.$$

Rješenje. Zadata jednađba je oblika

$$u = xp + yq + \varphi(p, q),$$

gdje je

$$\varphi(p, q) = pq.$$

Prema odgovarajućoj formuli, potpuni integral date jednađbe glasi

$$u(x, y) = ax + by + \varphi(a, b) = ax + bx + ab,$$

gdje su a i b proizvoljne konstante.

Zaista, ako uzmemo

$$u(x, y) = ax + by + ab,$$

tada je

$$p = u_x = a, \quad q = u_y = b.$$

Uvrštavanjem u zadanu jednađbu dobivamo

$$xp + yq + pq = xa + yb + ab = u(x, y).$$

Dakle, potpuni integral zadane parcijalne diferencijalne jednađbe je

$$\boxed{u(x, y) = ax + by + ab.}$$

U ovom rješenju a i b su proizvoljne konstante. ◆

Primjedba 3.3.1. Parcijalna diferencijalna jednađba oblika

$$u = xp + yq + \varphi(p, q)$$

naziva se Clairautova parcijalna diferencijalna jednađba. Njen potpuni integral je

$$u = ax + by + \varphi(a, b),$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

gdje su a i b proizvoljne konstante.

Osim toga, ova jednađba može imati i singularno rješenje. Ono se dobiva kao obvojnica dvoparametarske familije ravni

$$u = ax + by + \varphi(a, b).$$

Obvojnica se određuje iz sistema

$$\frac{\partial u}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial b} = 0,$$

odnosno

$$x + \varphi_a(a, b) = 0, \quad y + \varphi_b(a, b) = 0.$$

Eliminacijom parametara a i b iz ovih relacija dobiva se singularno rješenje.

3.3.5 Metoda Lagrange-Charpita za nalaženje potpunog integrala

U ovoj sekciji bavit ćemo se Lagrange-Charpitemetodom za određivanje potpunog integrala. U tom cilju posmatrajmo parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$F(x, y, u, p, q) = 0. \quad (3.73)$$

Sada ćemo opisati metodu za nalaženje potpunog integrala ove jednađbe, a onda, kao što smo i rekli, možemo naći i ostala rješenja. Postupak se sastoji u tome da se odredi funkcija $\Phi(x, y, u, p, q)$ koja je dva puta neprekidno diferencijabilna i da je sistem

$$\begin{aligned} F(x, y, u, p, q) &= 0, \\ \Phi(x, y, u, p, q) &= a, \end{aligned} \quad (3.74)$$

saglasan za svaku vrijednost parametra a . Sada ćemo vidjeti kako naći funkciju $\Phi(x, y, u, p, q)$ tako da sistem (3.74) bude saglasan. U tom cilju pretpostavimo da smo našli funkciju Φ i da je sistem (3.74) saglasan za sve vrijednosti parametra a . Prvo, ovo znači da sistem (3.74) možemo riješiti po p i q , tj. iz (3.74) možemo izračunati p i q kao funkcije od x, y i u , tj.

$$\begin{cases} p = p(x, y, u), \\ q = q(x, y, u). \end{cases} \quad (3.75)$$

(Kao što se vidi, zavisnost od parametra a ovdje nije istaknuta.) Kada smo posmatrali sisteme sa jednom nepoznatom, pokazali smo da je sistem (3.75) saglasan ako i samo ako identički po x, y i u vrijedi

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x},$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

odnosno

$$\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial u} q = \frac{\partial q}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial u} p. \quad (3.76)$$

Da bismo sistem (3.74) mogli riješiti po p i q prirodno je pretpostaviti da je $\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(p, q)} \neq 0$ u oblasti posmatranja. Ako je taj sistem zadovoljen za još jednu tačku $(x_0, y_0, p_0, q_0, a_0)$, onda ćemo, kao što se zna, iz (3.74) zaista moći izračunati p i q . Pretpostavimo zato da su ova dva uvjeta zadovoljena. Sada treba naći izraze: $\frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial u}, \frac{\partial q}{\partial x}, \frac{\partial q}{\partial u}$. Ove izraze nalazimo iz relacija sistema (3.74) diferencirajući ih po x, y i u . Na primjer, ako diferenciramo po x , imamo

$$\begin{aligned} F'_x + F'_p \frac{\partial p}{\partial x} + F'_q \frac{\partial q}{\partial x} &= 0, \\ \Phi'_x + \Phi'_p \frac{\partial p}{\partial x} + \Phi'_q \frac{\partial q}{\partial x} &= 0. \end{aligned}$$

Iz ovog sistema dobivamo

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\begin{vmatrix} F'_p & -F'_x \\ \Phi'_p & -\Phi'_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}.$$

Diferenciranjem u (3.74) po y dobivamo sistem

$$\begin{aligned} F'_y + F'_p \frac{\partial p}{\partial y} + F'_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0, \\ \Phi'_y + \Phi'_p \frac{\partial p}{\partial y} + \Phi'_q \frac{\partial q}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Iz ovog sistema dobivamo

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} F'_q & -F'_y \\ \Phi'_q & -\Phi'_y \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}.$$

Na kraju diferenciranjem u (3.74) po u , dobivamo

$$\begin{aligned} F'_u + F'_p \frac{\partial p}{\partial u} + F'_q \frac{\partial q}{\partial u} &= 0, \\ \Phi'_u + \Phi'_p \frac{\partial p}{\partial u} + \Phi'_q \frac{\partial q}{\partial u} &= 0. \end{aligned}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Iz ovog sistema dobivamo

$$\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} F'_q & -F'_u \\ \Phi'_q & -\Phi'_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}, \quad \frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\begin{vmatrix} F'_p & -F'_u \\ \Phi'_p & -\Phi'_u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F'_p & F'_q \\ \Phi'_p & \Phi'_q \end{vmatrix}}.$$

Ako sada $\frac{\partial p}{\partial y}$, $\frac{\partial p}{\partial u}$, $\frac{\partial q}{\partial x}$ i $\frac{\partial q}{\partial u}$ uvrstimo u (3.76) dobivamo, poslije sređivanja, jednađbu

$$P \frac{\partial \Phi}{\partial x} + Q \frac{\partial \Phi}{\partial y} + (Pp + Qq) \frac{\partial \Phi}{\partial u} - (X + pU) \frac{\partial \Phi}{\partial p} - (Y + qU) \frac{\partial \Phi}{\partial q} = 0, \quad (3.77)$$

gdje je

$$\frac{\partial F}{\partial x} = X, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Y, \quad \frac{\partial F}{\partial u} = U, \quad \frac{\partial F}{\partial p} = P, \quad \frac{\partial F}{\partial q} = Q.$$

Znači, ako funkcije Φ i F čine saglasan sistem (3.74), onda one zadovoljavaju jednađbu (3.77). Kao što smo ranije pretpostavili, neka je

$$\frac{\partial(F, \Phi)}{\partial(p, q)} \neq 0. \quad (3.78)$$

Razmišljajući u obrnutom smjeru, može se pokazati da funkcija Φ koja zadovoljava jednađbu (3.77) i uvjet (3.78) zajedno sa (3.73) čini saglasan sistem (3.74). Prema tome, da bi sistem (3.74) bio saglasan potrebno je i dovoljno da Φ zadovoljava jednađbu (3.77) i uvjet (3.78). Jednađba (3.77) je homogena linearna parcijalna diferencijalna jednađba prvog reda. Od ranije znamo da će Φ biti rješenje jednađbe (3.77) ako i samo ako je $\Phi(x, y, u, p, q) = a$ prvi integral sistema običnih diferencijalnih jednađbi

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{Pp + Qq} = \frac{dp}{-(X + pU)} = \frac{dq}{-(Y + qU)}. \quad (3.79)$$

Jedan od prvih integrala sistema (3.79) je $F(x, y, u, p, q) = 0$. Ako nađemo još jedan prvi integral $\Phi(x, y, u, p, q) = a$ on će nam poslužiti kao tražena funkcija Φ u navedenom smislu.

U sljedećim primjerima ćemo pokazati kako se određuju potpuni, opći i singularni integral.

Primjer 3.3.7. Odrediti potpuni, opći i singularni integral jednađbe

$$p^2 = xp + q.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje. Stavimo da je $F(x, y, u, p, q) = xp + q - p^2$. Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{x-2p} = \frac{dy}{1} = \frac{du}{q+xp-2p^2} = \frac{-dp}{p} = \frac{-dq}{0}.$$

Iz $\frac{dy}{1} = \frac{dp}{-p}$ imamo da je $p = ae^{-y}$. Kako je $F(x, y, u, p, q) = xp + q - p^2 = 0$ dobivamo $q = -axe^{-y} + a^2e^{-2y}$. Da bismo našli potpuni integral riješimo sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = ae^{-y}, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = -axe^{-y} + a^2e^{-2y}. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe sistema, smatrajući da je y parametar, imamo da je $u(x, y) = axe^{-y} + C(y)$. Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem prethodne jednačbe po y dobivamo da je $u_y = -axe^{-y} + C'(y)$. Koristeći drugu jednačbu sistema imamo da je

$$-axe^{-y} + C'(y) = \frac{\partial u}{\partial y} = -axe^{-y} + a^2e^{-2y} \Rightarrow C'(y) = a^2e^{-2y}.$$

Rješenje ove jednačbe je dato sa

$$C(y) = -\frac{1}{2}a^2e^{-2y} + b.$$

Na osnovu ovoga imamo da je $u = axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2e^{-2y} + b$ potpuni integral polazne jednačbe.

Stavimo sada da je $\varphi(x, y, u, a, b) = axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2e^{-2y} + b - u$. Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2e^{-2y} + b - u = 0, \\ xe^{-y} - ae^{-2y} = 0, \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Pošto posljednja jednačba nije moguća, to ne postoji singularno rješenje. Opće rješenje je dato sa

$$\begin{cases} axe^{-y} - \frac{1}{2}a^2e^{-2y} + \omega(a) - u = 0, \\ xe^{-y} - ae^{-2y} + \omega'(a) = 0. \end{cases}$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

Primjer 3.3.8. Odrediti potpun, opći i singularni integral jednačbe

$$(px + qy)^2 - u(px + qy) + p^2 + q^2 = 0.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = (px + qy)^2 - u(px + qy) + p^2 + q^2.$$

Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\begin{aligned} \frac{dx}{2x(px + qy) - ux + 2p} &= \frac{dy}{2y(px + qy) - uy + 2q} \\ &= \frac{du}{p(2x(px + qy) - ux + 2p) + q(2y(px + qy) - uy + 2q)} \\ &= \frac{-dp}{2p(px + qy) - up - p(px + qy)} = \frac{-dq}{2q(px + qy) - uq - q(px + qy)}. \end{aligned}$$

Iz posljednje jednačbe imamo

$$\frac{-dp}{p(px + qy) - up} = \frac{-dq}{q(px + qy) - uq},$$

odakle dobivamo da je $\frac{dp}{p} = \frac{dq}{q} \Rightarrow p = aq$. Kako je

$$F(x, y, u, p, q) = (px + qy)^2 - u(px + qy) + p^2 + q^2 = 0,$$

dobivamo

$$(aqx + qy)^2 - u(aqx + qy) + a^2q^2 + q^2 = 0.$$

Rješavajući ovu jednačbu po q , dobivamo

$$q = \frac{u(ax + y)}{a^2(x^2 + 1) + 2axy + y^2 + 1}.$$

Da bismo našli potpuni integral potrebno je da riješimo sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{au(ax + y)}{(ax + y)^2 + a^2 + 1}, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(ax + y)}{(ax + y)^2 + a^2 + 1}. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe sistema, smatrajući da je y parametar, imamo da je

$$\frac{du}{u} = \frac{a(ax + y)dx}{(ax + y)^2 + a^2 + 1}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\ln |u| = \frac{1}{2} \ln |(ax + y)^2 + a^2 + 1| + \ln |C(y)|.$$

Odavde je

$$u^2 = [(ax + y)^2 + a^2 + 1] C(y).$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem prethodne jednađbe po y dobivamo da je

$$2uu_y = [(ax + y)^2 + a^2 + 1] C'(y) + 2C(y)(ax + y).$$

Kako je

$$uu_y = u \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^2(ax + y)}{(ax + y)^2 + a^2 + 1} = (ax + y)C(y),$$

to je

$$[(ax + y)^2 + a^2 + 1] C'(y) = 0,$$

pa je $C(y) = b$.

Prema tome,

$$u^2 = [(ax + y)^2 + a^2 + 1] b$$

je potpuni integral polazne jednađbe.

Stavimo sada da je

$$\varphi(x, y, u, a, b) = [(ax + y)^2 + a^2 + 1] b - u^2.$$

Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [(ax + y)^2 + a^2 + 1] b - u^2 = 0, \\ 2b(ax^2 + a + xy) = 0, \\ a^2(x^2 + 1) + 2axy + y^2 + 1 = 0. \end{cases}$$

Rješavajući sistem od posljednje dvije jednađbe po a i b , dobivamo da je

$$b = 0, \quad a = -\frac{xy}{1 + x^2}.$$

Uvrštavajući to u prvu jednađbu imamo $u^2 = 0$, pa je $u = 0$ singularno rješenje polazne jednađbe.

Opće rješenje je dato sa

$$\boxed{\begin{cases} [(ax + y)^2 + a^2 + 1] \omega(a) - u^2 = 0, \\ 2\omega(a)(ax^2 + a + xy) + [(ax + y)^2 + a^2 + 1] \omega'(a) = 0. \end{cases}}$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

Primjer 3.3.9. Odrediti potpuni, opći i singularni integral jednađbe

$$p^2 + q^2 + p + q + x + y + 2u - 1 = 0.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 + p + q + x + y + 2u - 1.$$

Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{2p+1} = \frac{dy}{2q+1} = \frac{du}{2(p^2+q^2)+p+q} = \frac{-dp}{1+2p} = \frac{-dq}{1+2q}.$$

Lako se vidi da su $p+x = a$ i $q+y = b$ dva nezavisna prva integrala ovog sistema.

Da bismo našli potpuni integral potrebno je riješiti sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = a - x, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = b - y. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe sistema, smatrajući da je y parametar, imamo da je

$$u = ax - \frac{x^2}{2} + C(y).$$

Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem prethodne jednačbe po y dobivamo da je $u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$. Kako je s druge strane $u_y = b - y$, to je

$$C'(y) = b - y,$$

pa je $C(y) = by - \frac{y^2}{2} + C$. Dakle

$$u = ax - \frac{x^2}{2} + by - \frac{y^2}{2} + C,$$

gdje je C konstanta koju trebamo odrediti.

Kako je

$$F(x, y, u, p, q) = p^2 + q^2 + p + q + x + y + 2u - 1 = 0,$$

uvrštanjem funkcije u dobivamo da je

$$C = \frac{1}{2}(1 - a^2 - b^2 - a - b).$$

Dakle, potpuni integral je dat sa

$$u = ax - \frac{x^2}{2} + by - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - a^2 - b^2 - a - b).$$

Stavimo sada da je

$$\varphi(x, y, u, a, b) = ax - \frac{x^2}{2} + by - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - a^2 - b^2 - a - b) - u.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax - \frac{x^2}{2} + by - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - a^2 - b^2 - a - b) - u = 0, \\ x - a - \frac{1}{2} = 0, \\ y - b - \frac{1}{2} = 0. \end{cases}$$

Rješavajući sistem od posljednje dvije jednađbe po a i b , dobivamo da je

$$a = x - \frac{1}{2}, \quad b = y - \frac{1}{2}.$$

Uvrštavajući to u prvu jednađbu imamo $4u + 2x + 2y - 3 = 0$, pa je to singularno rješenje polazne jednađbe.

Opće rješenje je dato sa

$$\begin{cases} ax - \frac{x^2}{2} + \omega(a)y - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}(1 - a^2 - \omega(a)^2 - a - \omega(a)) - u = 0, \\ x + \frac{1}{2}(2a + 1) + \left[y + \frac{1}{2}(2\omega(a) + 1) \right] \omega'(a) = 0. \end{cases}$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

Primjer 3.3.10. Odrediti potpuni, opći i singularni integral jednađbe

$$u = p^2x + q^2y.$$

Rješenje. Stavimo da je $F(x, y, u, p, q) = p^2x + q^2y - u$. Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{2px} = \frac{dy}{2qy} = \frac{du}{2p^2x + 2q^2y} = \frac{dp}{-(p^2 - p)} = \frac{dq}{-(q^2 - q)}.$$

Iz $\frac{dx}{2px} = \frac{dp}{-(p^2 - p)}$ imamo da je $\frac{dp}{p-1} = -\frac{1}{2} \frac{dx}{x}$. Pretpostavimo da je $x > 0$. Odavde je

$$\ln |p - 1| = -\frac{1}{2} \ln x + \frac{1}{2} \ln A,$$

gdje je $A > 0$. Iz posljednje jednakosti dobivamo da je

$$p = \pm A^{1/2} x^{-1/2} + 1.$$

Slično, iz $\frac{dy}{2qy} = \frac{dq}{-(q^2 - q)}$, pod pretpostavkom da je $y > 0$ dobivamo da je

$$q = \pm B^{1/2} y^{-1/2} + 1,$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

gdje je $B > 0$.

Uvrštavanjem p i q u $F(x, y, u, p, q) = p^2x + q^2y - u = 0$ dobivamo da je

$$u(x, y) = (\sqrt{x} \pm \sqrt{A})^2 + (\sqrt{y} \pm \sqrt{B})^2$$

potpuni integral polazne jednačbe. Ako stavimo $a = \pm\sqrt{A}$ i $b = \pm\sqrt{B}$, onda potpuni integral glasi

$$u(x, y) = (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + b)^2,$$

pri čemu su $a, b \in \mathbb{R}$.

Stavimo sada da je $\varphi(x, y, u, a, b) = (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + b)^2 - u$. Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + b)^2 - u = 0, \\ 2(\sqrt{x} + a) = 0, \\ 2(\sqrt{y} + b) = 0. \end{cases}.$$

Eliminacijom parametara a i b , tj. uvrštavanjem posljednje dvije jednačbe sistema u prvu jednačbu, imamo da je $u = 0$ singularno rješenje.

Opće rješenje je dato sa

$$\begin{cases} (\sqrt{x} + a)^2 + (\sqrt{y} + \omega(a))^2 - u = 0, \\ \sqrt{x} + a + (\sqrt{y} + \omega(a))\omega'(a) = 0. \end{cases}$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

Primjer 3.3.11. Odrediti potpuni, opći i singularni integral jednačbe

$$pxy + pq + qy = yu.$$

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = xyp + pq + qy - yu = 0.$$

Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{xy + q} = \frac{dy}{p + y} = \frac{du}{yu + pq} = \frac{dp}{0} = \frac{dq}{-xp - q + u + yq}.$$

Iz $\frac{dp}{0}$ slijedi da je

$$p = a = \text{const.}$$

Pošto je $p = \frac{\partial u}{\partial x} = a$, integracijom po x dobivamo

$$u(x, y) = ax + f(y),$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

pa je

$$q = \frac{\partial u}{\partial y} = f'(y).$$

Uvrštavanjem u polaznu jednačbu dobivamo

$$axy + (a + y)f'(y) = y(ax + f(y)),$$

odakle slijedi da je

$$(a + y)f'(y) = yf(y),$$

što nam daje običnu diferencijalnu jednačbu za f . Separiranjem varijabli

$$\frac{f'(y)}{f(y)} = \frac{y}{a + y} = 1 - \frac{a}{a + y},$$

i integracijom dobivamo

$$\ln f = y - a \ln(a + y) + \ln c,$$

odakle slijedi da je

$$f(y) = ce^y(a + y)^{-a}.$$

Potpuni integral sada glasi

$$u(x, y) = ax + b \frac{e^y}{(a + y)^a}, \quad a \in \mathbb{R}, c \in \mathbb{R}^+.$$

Stavljajući $\ln c = b$, potpuni integral možemo napisati u obliku

$$\boxed{\ln(u - ax) = y - a \ln(a + y) + b, \quad a, b \in \mathbb{R}.}$$

Stavimo sada da je $\varphi(x, y, u, a, b) = y - a \ln(a + y) + b - \ln(u - ax)$. Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y - a \ln(a + y) - \ln(u - ax) + b = 0, \\ \ln(a + y) + \frac{a}{a + y} - \frac{x}{u - ax} = 0, \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Pošto posljednja jednačba nije moguća to ne postoji singularno rješenje. Opće rješenje je dato sa

$$\boxed{\begin{cases} y - a \ln(a + y) - \ln(u - ax) + \omega(a) = 0, \\ \ln(a + y) + \frac{a}{a + y} - \frac{x}{u - ax} + \omega'(a) = 0. \end{cases}}$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija. ◆

3.3.6 Cauchyjev problem

Sada ćemo definirati Cauchyjev problem za jednačbu (3.73) i pokazati kako se rješava.

Definicija 3.3.4. *Neka je data kriva*

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \\ u = \lambda(t), \end{cases} \quad t \in J, \quad (3.80)$$

gdje je J neki interval na kojem su funkcije $\varphi(t)$, $\psi(t)$, i $\lambda(t)$ neprekidno diferencijabilne funkcije. Cauchyjev problem se sastoji u nalaženju integralne površi jednačbe (3.73) na kojoj leži kriva (3.80).

Cauchyjev problem ćemo riješiti koristeći opći integral. U tom cilju neka je $u = \Phi(x, y, a, b)$ potpuni integral jednačbe (3.73). Opći integral zapisujemo u obliku

$$\begin{cases} u = \Phi(x, y, a, \omega(a)), \\ \Phi'_a(x, y, a, b) + \Phi'_b(x, y, a, b)\omega'(a) = 0, \end{cases} \quad (3.81)$$

gdje je $b = \omega(a)$. Pretpostavimo da smo iz općeg integrala (3.81) našli integralnu površ na kojoj leži kriva (3.80). To znači da smo našli takvu funkciju $b = \omega(a)$, da funkcija $a(x, y)$ izračunata iz druge jednačbe (3.81) zajedno sa funkcijom $b(x, y) = \omega(a(x, y))$ daje, poslije uvrštavanja u prvu jednačbu (3.81), traženu integralnu krivu. Znači, tražena površ je data sa

$$u = \Phi(x, y, a(x, y), b(x, y)), \quad (3.82)$$

gdje je $b(x, y) = \omega(a(x, y))$ i gdje identički po x i y vrijedi

$$\Phi'_a(x, y, a(x, y), b(x, y)) + \Phi'_b(x, y, a(x, y), b(x, y))\omega'(a(x, y)) \equiv 0, \quad (3.83)$$

pri čemu je $\omega'(a(x, y))$ izvod funkcije ω po a izračunat u tački $a(x, y)$.

Uvedimo funkciju

$$U(t, a, b) = \Phi(\varphi(t), \psi(t), a, b) - \lambda(t). \quad (3.84)$$

Kako kriva (3.80) leži na površi (3.82), to za svako $t \in J$ vrijedi

$$\lambda(t) = \Phi(\varphi(t), \psi(t), a(t), b(t)), \quad (3.85)$$

gdje je $a(t) = a(\varphi(t), \psi(t))$ i $b(t) = b(\varphi(t), \psi(t)) = \omega(a(\varphi(t), \psi(t))) = \omega(a(t))$. Pošto (3.83) vrijedi identički po x i y , to će vrijediti ako stavimo $x = \varphi(t)$ i $y = \psi(t)$ za svako $t \in J$, tj.

$$\Phi'_a(\varphi(t), \psi(t), a(t), b(t)) + \Phi'_b(\varphi(t), \psi(t), a(t), b(t))\omega'(a(t)) \equiv 0. \quad (3.86)$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Jasno je da (3.85) možemo pisati u obliku

$$U(t, a(t), b(t)) = 0, \quad t \in J. \quad (3.87)$$

Diferenciranjem po t u (3.87) dobivamo

$$U_t(t, a(t), b(t)) + U_a(t, a(t), b(t))a'(t) + U_b(t, a(t), b(t))b'(t) = 0, \quad t \in J. \quad (3.88)$$

Kako je $b(t) = \omega(a(t))$, imamo da je $b'(t) = \omega'(a(t))a'(t)$, pa (3.88) postaje

$$U_t(t, a(t), b(t)) + [U_a(t, a(t), b(t)) + U_b(t, a(t), b(t))\omega'(a(t))]a'(t) = 0. \quad (3.89)$$

Na osnovu (3.84) je

$$U_a(t, a, b) = \Phi'_a(\varphi(t), \psi(t), a, b) \text{ i } U_b(t, a, b) = \Phi'_b(\varphi(t), \psi(t), a, b).$$

Koristeći relaciju (3.86) imamo da je

$$U_a(t, a(t), b(t)) + U_b(t, a(t), b(t))\omega'(a(t)) = 0.$$

Dakle, (3.89) postaje

$$U_t(t, a(t), b(t)) = 0.$$

Možemo sada zaključiti da ako funkcija $\omega(a)$ daje rješenje Cauchyjevog problema na opisani način, onda funkcije $a(t)$ i $b(t)$ zadovoljavaju sistem

$$\begin{cases} U(t, a, b) = 0, \\ u_t(t, a, b) = 0. \end{cases} \quad (3.90)$$

Funkciju $b = \omega(a)$ možemo odrediti eliminacijom parametra t iz sistema

$$\begin{cases} a = a(t), \\ b = b(t) = \omega(a(t)), \end{cases}$$

pa se uvrštavanjem $a(t) = a$ u drugu jednačbu dobiva $b = \omega(a)$. Dakle, postupak za nalaženje rješenja Cauchyjevog problema glasi: formirajmo najprije funkciju $U(t, a, b)$ i napišimo sistem (3.90). Iz tog sistema se odrede a i b kao funkcije od t : $a = a(t)$ i $b = b(t)$. Eliminacijom parametra t iz funkcija $a = a(t)$ i $b = b(t)$ dobivamo funkciju $b = \omega(a)$. Ovu funkciju uvrstimo u drugu jednačbu od (3.81). Iz tako dobivene jednačbe se odredi $a(x, y)$, a zatim i funkcija $b(x, y) = \omega(a(x, y))$. Ove dvije funkcije se zatim uvrste u prvu jednačbu od (3.81). Može se pokazati da je ovako dobivena površ $u(x, y) = \Phi(x, y, a(x, y), b(x, y))$ zaista rješenje našeg Cauchyjevog problema.

U nastavku ćemo kroz nekoliko primjera demonstrirati kako se rješava Cauchyev problem.

Primjer 3.3.12. Neka je data jednačba

$$\left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 = \frac{2}{u^2}.$$

- 1) Odrediti potpuni, opći i singularni integral ove jednačbe.
- 2) Naći ono rješenje koje zadovoljava uvjete $u = x - 1, y = 0$.

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje.

- 1) Stavimo da je $F(x, y, u, p, q) = \left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 - \frac{2}{u^2}$. Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{\frac{2p}{x^2}} = \frac{dy}{\frac{2q}{y^2}} = \frac{du}{2\left(\frac{p}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{q}{y}\right)^2} = \frac{dp}{\frac{2p^2}{x^3} - \frac{4p}{u^3}} = \frac{dq}{\frac{2q^2}{y^3} - \frac{4q}{u^3}}.$$

Jedan potpuni integral ovog sistema je $F(x, y, u, p, q) = 0$, pa je

$$\left(\frac{p}{x}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 = \frac{2}{u^2}.$$

Koristeći ovo, imamo

$$\frac{du}{2\left(\frac{p}{x}\right)^2 + 2\left(\frac{q}{y}\right)^2} = \frac{du}{\frac{4}{u^2}}.$$

S druge strane,

$$\frac{pdx - xdp}{2\left(\frac{p}{x}\right)^2 - 2\left(\frac{p}{x}\right)^2 + \frac{4px}{u^3}} = \frac{pdx - xdp}{\frac{4px}{u^3}}.$$

Odavde, imamo

$$\frac{pdx - xdp}{\frac{4px}{u^3}} = \frac{du}{\frac{4}{u^2}} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{x}{p}\right)}{\frac{x}{p}} = \frac{du}{u}.$$

Rješenje ove jednačbe je $p = \frac{ax}{u}$. Uvrstimo sada to u $F(x, y, u, p, q) = 0$. Dobivamo da je

$$\left(\frac{a}{u}\right)^2 + \left(\frac{q}{y}\right)^2 - \frac{2}{u^2} = 0 \Rightarrow q = \pm \frac{y\sqrt{2-a^2}}{u}.$$

Da bismo našli potpuni integral rješimo sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{ax}{u}, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = \pm \frac{y\sqrt{2-a^2}}{u}. \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Iz prve jednačbe sistema imamo da je $u^2 = ax^2 + C(y)$. Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem prethodne jednačbe po y dobivamo da je $2uu_y + C'(y) = 0$, pa je

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-C'(y)}{2u}.$$

Koristeći drugu jednačbu sistema, imamo da je

$$\frac{-C'(y)}{2u} = \pm \frac{y\sqrt{2-a^2}}{u} \Rightarrow C'(y) = \pm 2y\sqrt{2-a^2}.$$

Rješenje ove jednačbe je dato sa

$$C(y) = \pm y^2\sqrt{2-a^2} + b.$$

Na osnovu ovoga, imamo da je $u^2 = ax^2 \pm y^2\sqrt{2-a^2} + b$ potpuni integral polazne jednačbe.

Stavimo sada da je $\varphi(x, y, u, a, b) = ax^2 \pm y^2\sqrt{2-a^2} + b - u^2$. Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

koji u našem slučaju postaje

$$\begin{cases} ax^2 \pm y^2\sqrt{2-a^2} + b - u^2 = 0, \\ x^2 \pm \frac{ay^2}{\sqrt{2-a^2}} = 0, \\ 1 = 0. \end{cases}$$

Pošto posljednja jednačba nije moguća, onda ne postoji singularno rješenje.

Opće rješenje je dato sa

$$\begin{cases} ax^2 \pm y^2\sqrt{2-a^2} + \omega(a) - u^2 = 0 \\ x^2 \pm \frac{ay^2}{\sqrt{2-a^2}} + \omega'(a) = 0 \end{cases}.$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija.

2) Odredimo sada ono rješenje koje prolazi krivom

$$\begin{cases} x = t, \\ y = 0, \\ u = t - 1. \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Kako je $u = \pm \sqrt{ax^2 \pm y^2 \sqrt{2 - a^2} + b}$, to sistem (3.90) postaje

$$\begin{cases} U(t; a, b) = \pm \sqrt{at^2 + b} - t + 1 = 0, \\ u_t(t; a, b) = \frac{at}{\pm \sqrt{at^2 + b}} - 1 = 0. \end{cases}$$

Odavde imamo da je $b(t) = 1 - t$ i $a(t) = \frac{t-1}{t}$. Eliminacijom parametra t iz ove dvije jednađbe, dobivamo $b(t) = \frac{a(t)}{a(t)-1}$. Kako je $b(t) = \omega(a(t))$, to je $\omega(a) = \frac{a}{a-1}$. Ako ovo uvrstimo u opći integral, dobivamo rješenje datog Cauchyjevog problema u parametarskom obliku

$$\begin{cases} ax^2 \pm y^2 \sqrt{2 - a^2} + \frac{a}{a-1} - u^2 = 0 \\ x^2 \pm \frac{ay^2}{\sqrt{2 - a^2}} - \frac{1}{(a-1)^2} = 0 \end{cases}.$$

U ovom rješenju a je parametar.



Primjer 3.3.13. Neka je data jednađba

$$pq = u^n xy.$$

- 1) Odrediti potpuni i opći integral ove jednađbe.
- 2) Naći ono rješenje koje za $n = 0$ zadovoljava uvjete za $x = 1$, $u = \sqrt{1 + y^2}$.

Rješenje.

- 1) Stavimo da je $F(x, y, u, p, q) = pq - u^n xy$. Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{q} = \frac{dy}{p} = \frac{du}{2pq} = \frac{dp}{u^n y + nu^{n-1} xyp} = \frac{dq}{u^n x + nu^{n-1} xyy}.$$

Jedan potpuni integral ovog sistema je $F(x, y, u, p, q) = 0$ pa je $pq = u^n xy$.

Koristeći ovo, imamo $\frac{du}{2pq} = \frac{du}{u^n xy}$. S druge strane,

$$\frac{pdx - xdp}{u^n xy - u^n xy - nu^{n-1} x^2 yp} = \frac{pdx - xdp}{-nu^{n-1} x^2 yp}.$$

Odavde, imamo da je

$$\frac{pdx - xdp}{-nu^{n-1} x^2 yp} = \frac{du}{u^n xy} \Rightarrow \frac{d\left(\frac{x}{p}\right)}{-n\frac{x}{p}} = \frac{du}{2u}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje ove jednačbe je $p = axu^{\frac{n}{2}}$. Uvrštavanjem u $F(x, y, u, p, q) = 0$ dobivamo da je $q = \frac{yu^{\frac{n}{2}}}{a}$. Da bismo našli potpuni integral riješimo sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = axu^{\frac{n}{2}}, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{yu^{\frac{n}{2}}}{a}. \end{cases}$$

Ako prvu jednačbu posmatramo kao diferencijalnu jednačbu po x , a y smatramo parametrom, tada dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{2}{2-n} u^{1-\frac{n}{2}} &= \frac{ax^2}{2} + C(y), \quad n \neq 2, \\ \ln u &= \frac{ax^2}{2} + C(y), \quad n = 2. \end{aligned}$$

Odredimo sada funkciju $C(y)$. Za $n \neq 2$ diferenciranjem prve jednačbe po y , dobivamo

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)u^{\frac{n}{2}}.$$

Koristeći činjenicu

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{yu^{\frac{n}{2}}}{a},$$

imamo

$$C'(y)u^{\frac{n}{2}} = \frac{yu^{\frac{n}{2}}}{a} \Rightarrow C'(y) = \frac{y}{a}.$$

Rješenje ove jednačbe je dato sa

$$C(y) = \frac{y^2}{2a} + b.$$

Na osnovu ovoga, imamo da je za $n \neq 2$ potpuni integral dat sa

$$\frac{2}{2-n} u^{1-\frac{n}{2}} = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b.$$

Na isti način, lako je vidjeti da je potpuni integral za $n = 2$ dat sa

$$\ln |u| = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b.$$

Opće rješenje za $n \neq 2$ je dato sa

$$\begin{cases} \frac{2}{2-n} u^{1-\frac{n}{2}} = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + \omega(a), \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2a^2} + \omega'(a) = 0, \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

a za $n = 2$ je dato sa

$$\begin{cases} \ln |u| = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b \\ \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2a^2} + \omega'(a) = 0 \end{cases}.$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija.

- 2) Odredimo sada ono rješenje za $n = 0$ koje prolazi traženom krivom koju možemo napisati u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = t, \\ u = \sqrt{1+t^2}. \end{cases}$$

Kako je $u = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + b$, to sistem (3.90) postaje

$$\begin{cases} U(t, a, b) = \frac{a}{2} + \frac{t^2}{2a} + b - \sqrt{1+t^2} = 0, \\ u_t(t, a, b) = \frac{t}{a} - \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} = 0. \end{cases}$$

Odavde imamo da je $b(t) = \frac{1}{2\sqrt{1+t^2}}$ i $a(t) = \sqrt{1+t^2}$. Eliminacijom parametra t iz ove dvije jednađbe dobivamo $b = \frac{1}{2a}$. Kako je $b(t) = \omega(a(t))$, onda je $\omega(a) = \frac{1}{2a}$. Ako ovo uvrstimo u opći integral, dobivamo

$$\begin{cases} u = \frac{ax^2}{2} + \frac{y^2}{2a} + \frac{1}{2a} = 0, \\ x^2 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 0. \end{cases}$$

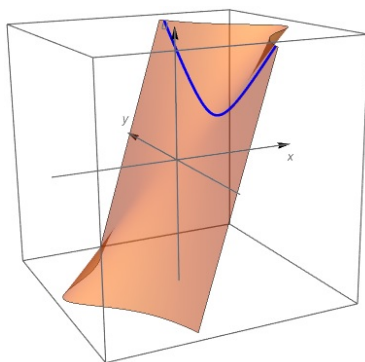
Iz druge jednađbe imamo da je

$$a = \frac{\sqrt{1+y^2}}{x}.$$

Uvrštavajući to u prvu jednađbu, dobivamo rješenje Cauchyjevog problema

$$u(x, y) = x\sqrt{1+y^2}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable



Slika 3.11: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ za i krive $(1, t, \sqrt{1+t^2})$ iz Primjera 3.3.13.



Primjer 3.3.14. Neka je data jednačba

$$2xp + 2yq + 4up^2 - u = 0.$$

- 1) Odrediti potpuni, opći i singularni integral.
- 2) Naći ono rješenje koje zadovoljava uvjete $u^2 = x$, $y = x$.

Rješenje.

- 1) Stavimo da je $F(x, y, u, p, q) = 2xp + 2yq + 4up^2 - u$. Tada se sistem (3.79) svodi na

$$\frac{dx}{2x + 8pu} = \frac{dy}{2y} = \frac{du}{p(2x + 8up) + 2qy} = \frac{-dp}{2p + p(4p^2 - 1)} = \frac{dq}{2q + q(4p^2 - 1)}.$$

Jedan potpuni integral ovog sistema je $F(x, y, u, p, q) = 0$ pa je $2xp + 2yq = u - 4up^2$. Koristeći ovo, imamo

$$\frac{-dp}{2p + p(4p^2 - 1)} = \frac{du}{p(2x + 8up) + 2qy} = \frac{du}{u + 4up^2},$$

odnosno

$$\frac{-dp}{p(4p^2 + 1)} = \frac{du}{u(4p^2 + 1)}.$$

Odavde je

$$\frac{-dp}{p} = \frac{du}{u} \Rightarrow \ln u = -\ln p + \ln a \Rightarrow pu = a,$$

pa imamo da je drugi prvi integral ovog sistema dat sa $\Phi(x, y, u, p, q) = pu = a$. Odavde imamo da je $p = \frac{a}{u}$. Uvrstimo sada ovo u $F(x, y, u, p, q) = 0$.

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Dobivamo da je

$$2yq = u - 4up^2 - 2xp = u - 4up^2 - 2x\frac{a}{u} \Rightarrow q = \frac{u^2 - 4u^2p^2 - 2ax}{2yu}.$$

Da bismo našli potpuni integral riješimo sistem

$$\begin{cases} p = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{a}{u}, \\ q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u^2 - 4u^2p^2 - 2ax}{2yu}. \end{cases}$$

Iz prve jednađbe sistema imamo da je $ax = \frac{u^2}{2} + C(y)$. Odredimo sada funkciju $C(y)$. Diferenciranjem prethodne jednađbe po y dobivamo da je $uu_y + C'(y) = 0$, pa je

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-C'(y)}{u}.$$

Koristeći drugu jednađbu sistema, imamo da je

$$\frac{-C'(y)}{u} = \frac{u^2 - 4u^2p^2 - 2ax}{2yu} \Rightarrow C'(y) - \frac{1}{2y}C(y) = \frac{2a^2}{y}.$$

Ovo je linerana diferencijalna jednađba prvog reda čije je opće rješenje dato sa

$$C(y) = -2a^2 + by.$$

Na osnovu ovoga imamo da je $ax = \frac{u^2}{2} - 2a^2 + by$ potpuni integral polazne jednađbe.

Stavimo sada da je $\varphi(x, y, u, a, b) = 2ax + 4a^2 + by - u^2$. Singularna rješenja, ako postoje, određujemo eliminacijom parametara a i b iz sistema

$$\begin{cases} \varphi(x, y, u, a, b) = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial a} = 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial b} = 0, \end{cases}$$

koji u našem slučaju postaje

$$\begin{cases} 2ax + 4a^2 + by - u^2 = 0, \\ 2x + 8a = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

odakle slijedi da je $u^2 = -\frac{x^2}{4}$, pa vidimo da ne postoji singularno rješenje.

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Opće rješenje je dato sa

$$\begin{cases} 2ax + 4a^2 + \omega(a)y = u^2 \\ 2x + 8a + y\omega'(a) = 0 \end{cases}.$$

U ovom rješenju $\omega(a)$ je neprekidno diferencijabilna funkcija.

2) Odredimo sada ono rješenje koje prolazi krivom

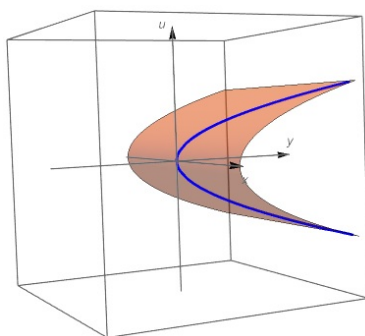
$$\begin{cases} x = t, \\ y = t, \\ u^2 = t. \end{cases}$$

Sistem (3.90) postaje

$$\begin{cases} U(t; a, b) = 2at + 4a^2 + bt - t = 0, \\ u_t(t; a, b) = 2a + b - 1 = 0. \end{cases}$$

Oдавde imamo da je $b(t) = 1$ i $a(t) = 0$. Kako su a i b konstante, rješenje Cauchyjevog problema dobivamo direktnim uvrštavanjem u potpuni integral, pa je rješenje Cauchyjevog problema dato sa je

$$u^2 = y.$$



Slika 3.12: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(t, t, \pm\sqrt{t})$ iz Primjera 3.3.14.

◆

3.3.7 Cauchyjeva metoda karakteristika

Cauchyjeva metoda rješavanja nelinearnih parcijalnih diferencijalnih jednačbi prvog reda zasniva se pretežno na geometrijskim idejama. Dakle, ponovo posmatramo parcijalnu diferencijalnu jednačbu

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

$$F(x, y, u, p, q) = 0, \quad (3.91)$$

gdje je $u = u(x, y)$ nepoznata funkcija nezavisnih varijabli x i y , a

$$p = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

Data funkcija F je definirana u nekoj oblasti $\Omega \subseteq \mathbb{R}^5$. Pretpostavićemo da je funkcija F dva puta neprekidno diferencijabilna u Ω . Ako bi u Ω vrijedilo $\frac{\partial F}{\partial p} \equiv 0$ i $\frac{\partial F}{\partial q} \equiv 0$, to bi značilo da funkcija F ne bi zavisila od p i q pa (3.91) nije diferencijalna jednađba. Zbog toga bar u jednoj tački iz Ω mora vrijediti $\frac{\partial F}{\partial p} \neq 0$ ili $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$. Pretpostavimo da je $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$, tada zbog neprekidnosti funkcije $\frac{\partial F}{\partial q}$ i u nekoj okolini te tačke vrijedi $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$. Smanjujući Ω ako je potrebno možemo smatrati da u Ω vrijedi $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$. Neka, pored toga, postoji tačka $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) \in \Omega$ za koju je $F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0$. Zbog ovoga i zbog $\frac{\partial F}{\partial q} \neq 0$ može se jednađba (3.91) na jednoznačan način riješiti po q (bar u nekoj okolini tačke $(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)$). Znači, jednađbu (3.91) možemo pisati u ekvivalentnom obliku

$$q = f(x, y, u, p), \quad (3.92)$$

Funkcija f je definirana i dva puta neprekidno diferencijabilna u nekoj okolini Ω_1 tačke (x_0, y_0, u_0, p_0) . Jednađbu ćemo posmatrati uglavnom u obliku (3.92). U daljnjem izlaganju smatramo da se (x, y, u, p) nalazi uvijek u toj okolini. Osim toga, ako budemo govorili o tački (x, y, u) smatraćemo, ne spominjući to posebno, da je ta tačka takva da postoji neki interval J sa osobinom da ako $p \in J$ tada (x, y, u, p) leži u pomenutoj okolini iz $\mathbb{R}^4$. Smatramo da tačka (x, y, u) leži u projekciji oblasti Ω na prostor $\mathbb{R}^3$ duž ose na kojoj se nanose vrijednosti varijable p . Uzmimo sada proizvoljnu fiksnu tačku (x, y, u) i mijenjajmo p po volji tako da (x, y, u, p) ostane u oblasti Ω_1 . Tada je q dato sa (3.92) funkcija od p . Za svako takvo p i odgovarajuće q dato sa (3.92), možemo tačkom (x, y, u) položiti ravan sa vektorom normale $(p, q, -1)$. Jednađba ove ravni je

$$U - u = p(X - x) + q(Y - y)$$

odnosno

$$U - u = p(X - x) + f(x, y, u, p)(Y - y). \quad (3.93)$$

Mijenjajući p dobivamo familiju ravni koje prolaze tačkom (x, y, u) . Ove familije zavise od jednog parametra p . Obvojnica (envelopa) ove familije ravni je neki konus sa vrhom u tački (x, y, u) . Označimo ga sa $\mathcal{K}(x, y, u)$. Napomenimo da se svaka ravan iz familije (3.93) dodiruje sa konusom $\mathcal{K}(x, y, u)$ duž neke izvodnice tog konusa. Konus $\mathcal{K}(x, y, u)$ se naziva **Mongeov (Manžov)** konus jednađbe (3.92) u tački (x, y, u) . Tačka (x, y, u) je u ovom razmatranju bila fiksna, ali proizvoljno odabrana. Znači svakom tačkom (x, y, u) možemo položiti Mongeov konus $\mathcal{K}(x, y, u)$ (sa vrhom u toj tački). Pogledajmo sada kakva je veza između Mongeovih konusa i integralnih površi jednađbe (3.92). Vrijedi sljedeći teorem.

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Teorem 3.3.4. *Riješiti jednađbu (3.92) je isto što i naći sve one površi $u = u(x, y)$ koje u svakoj svojoj tački dodiruju Mongeov konus čiji je vrh u toj tački.*

Dokaz. Neka je $u = u(x, y)$ bilo koja (fiksna) integralna površ jednađbe (3.92) i neka tačka (x_0, y_0, u_0) leži na toj površi. Tangencijalna ravan površi $u = u(x, y)$ u tački (x_0, y_0, u_0) je data sa

$$U - u = p_0(X - x) + q_0(Y - y), \quad (3.94)$$

gdje je $p_0 = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}$ i $q_0 = \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y}$. Pošto $u = u(x, y)$ zadovoljava jednađbu (3.92) u svakoj tački pa i u tački (x_0, y_0, u_0) , to je $q_0 = f(x_0, y_0, u_0, p_0)$. Međutim, ovo znači da je tangencijalna ravan (3.94) jedna od ravni iz familije ravni (3.93) (kada se u (3.93) stavi $x = x_0, y = y_0$ i $u = u_0$). Kao što smo već konstatovali, ova se ravan dodiruje sa Mongeovim konusom $\mathcal{K}(x_0, y_0, u_0)$ (duž neke njegove izvodnice). Znači, ravan (3.94) je ujedno i tangencijalna ravan konusa $\mathcal{K}(x_0, y_0, u_0)$. Tačka (x_0, y_0, u_0) je proizvoljna tačka integralne površi, pa možemo zaključiti da ako je $u = u(x, y)$ integralna površ jednađbe (3.92), onda se ona u svakoj tački dodiruje sa Mongeovim konusom jednađbe (3.92) čiji je vrh u toj tački. Obrnuto, neka se površ $u = u(x, y)$ u svakoj svojoj tački dodiruje sa Mongeovim konusom (čiji je vrh u toj tački) i neka je (x_0, y_0, u_0) proizvoljna (fiksna) tačka te površi. Tada je tangencijalna ravan te površi u tački (x_0, y_0, u_0) data sa (3.94). Po pretpostavci, ova ravan je i tangencijalna ravan konusa $\mathcal{K}(x_0, y_0, u_0)$. Dakle, ona je jedna od ravni iz familije (3.93) kada se u (3.93) uvrsti $x = x_0, y = y_0$ i $u = u_0$. Ovo posljednje znači da su p_0 i q_0 povezani sa $q_0 = f(x_0, y_0, u_0, p_0)$, tj.

$$\frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial y} = f\left(x_0, y_0, u(x_0, y_0), \frac{\partial u(x_0, y_0)}{\partial x}\right).$$

Vidimo da je u tački (x_0, y_0) zadovoljena jednađba (3.92), pa možemo reći da je jednađba (3.92) zadovoljena u svakoj tački površi. $\square$

U nastavku ćemo pod rješenjem jednađbe (3.91) podrazumijevati funkciju $u = u(x, y)$ koja tu jednađbu zadovoljava i koja je dva puta neprekidno diferencijabilna. Iz prethodnog izlaganja se vidi da je svrsishodno izračunati Mongeov konus jednađbe (3.92), odnosno jednađbe (3.91). Mongeov konus $\mathcal{K}(x, y, u)$ je obvojnica familije ravni. Jednađbu obvojnice (konusa $\mathcal{K}(x, y, u)$) ćemo dobiti na sljedeći način: diferenciranjem u (3.93) po p dobivamo

$$0 = X - x + \frac{\partial q}{\partial p}(Y - y). \quad (3.95)$$

Diferenciranjem jednađbe (3.91) po p smatrajući da je $q = f(x, y, u, p)$ dobivamo da je

$$F_p(x, y, u, p, q) + F_q(x, y, u, p, q) \frac{\partial q}{\partial p} = 0.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Stavimo da je $P(x, y, u, p, q) = F_p(x, y, u, p, q)$ i $Q(x, y, u, p, q) = F_q(x, y, u, p, q)$.

Imamo da je $P + Q \frac{\partial q}{\partial p} = 0$. Ako ovo uvrstimo u (3.95), dobivamo

$$Q(X - x) = P(Y - y). \quad (3.96)$$

Jednađbe (3.93) i (3.96) predstavljaju parametarsku jednađbu konusa $\mathcal{K}(x, y, u)$.

Iz (3.96), imamo

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q}.$$

Ako uvedemo koeficijent proporcionalnosti λ imamo $X - x = \lambda P$ i $Y - y = \lambda Q$, pa iz (3.93) dobivamo $\lambda = \frac{U - u}{pP + qQ}$. Odavde imamo da je

$$\frac{X - x}{P} = \frac{Y - y}{Q} = \frac{U - u}{pP + qQ}. \quad (3.97)$$

Jednađba (3.97) je jednađba konusa $\mathcal{K}(x, y, u)$ u parametarskom obliku. Pri fiksnoj p jednađba (3.97) daje izvodnicu konusa $\mathcal{K}(x, y, u)$. Kada se p mijenja ta izvodnica opisuje cijeli konus $\mathcal{K}(x, y, u)$.

Uvedimo sada pojam karakterističnih krivih jednađbe (3.91).

Definicija 3.3.5. *Kriva data jednađbom*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t), & (t \in J), \\ u = u(t) \end{cases} \quad (3.98)$$

gdje je J neki interval, nazivamo karakterističnom krivom jednađbe (3.91) ako ta kriva u svakoj svojoj tački $(x(t), y(t), u(t))$ dira Mongeov konus $\mathcal{K}(x(t), y(t), u(t))$, tj. ako je u svakoj tački $(x(t), y(t), u(t))$ te krive tangenta te krive istovremeno i izvodnica konusa $\mathcal{K}(x(t), y(t), u(t))$ i ako ta kriva leži na nekoj integralnoj površi $u = u(x, y)$ jednađbe (3.91).

Pretpostavit ćemo da su funkcije $x(t)$, $y(t)$ i $u(t)$ neprekidno diferencijabilne na J . Potrebno je naći sve karakteristične krive jednađbe (3.91). Zatim, treba odabrati takvu jednoparametarsku familiju tih krivih da površ koju čine krive iz te familije bude integralna površ jednađbe (3.91). Neka je kriva (3.98) karakteristična kriva jednađbe (3.91) i neka ona leži na integralnoj površi $u = u(x, y)$ te jednađbe. Funkcije

$$p(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \text{ i } q(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$$

pokazuju kako se mijenjaju komponente vektora normale tangencijalne ravni naše integralne površi u tački $(x, y, u) = (x, y, u(x, y))$ kada se ta tačka kreće po toj površi. Ako stavimo da je $x = x(t)$, $y = y(t)$, dobivamo funkcije $p(t) = p(x(t), y(t))$ i $q(t) = q(x(t), y(t))$ koje pokazuju kako se mijenjaju komponente vektora normale tangencijalne ravni kada se dodirna tačka kreće po karakterističnoj krivoj (3.98).

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Definicija 3.3.6. *Za pet jednađbi*

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ u = u(t), \quad (t \in J), \\ p = p(t) \\ q = q(t) \end{cases} \quad (3.99)$$

se kaže da određuju (na površi $u = u(x, y)$) karakteristiku prvog reda jednađbe (3.91).

Napomenimo da prve tri jednađbe (3.99) daju karakterističnu krivu, a druge dvije pokazuju kako se mijenjaju komponente vektora normale tangencijalne ravni duž te krive. Nađimo diferencijalne jednađbe karakteristike prvog reda. Uzmimo po volji $t \in J$. Tada je jednađba tangente karakteristične krive u tački $(x(t), y(t), u(t))$ data sa

$$\frac{X - x(t)}{x'(t)} = \frac{Y - y(t)}{y'(t)} = \frac{U - u(t)}{u'(t)}. \quad (3.100)$$

Ova tangenta je istovremeno i izvodnica konusa $\mathcal{K}(x(t), y(t), u(t))$. Jednađba te izvodnice je data sa (3.97) kada se uvrsti $x = x(t)$, $y = y(t)$ i $u = u(t)$. Kako (3.97) i (3.100) daju istu pravu, mora biti

$$\frac{x'(t)}{P} = \frac{y'(t)}{Q} = \frac{u'(t)}{pP + qQ} = \lambda(t), \quad (3.101)$$

gdje sa $\lambda(t)$ označavamo koeficijent proporcionalnosti. Iz (3.101) množeći sa dt , dobivamo

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = \lambda(t)dt. \quad (3.102)$$

Umjesto parametra t uvedimo parametar s . Uzmimo po volji $t_0 \in J$ i stavimo

$$s = \int_{t_0}^t \lambda(r)dr.$$

Kako se t mijenja kada prolazi intervalom J , onda s prolazi nekom okolinom tačke 0. Osim toga je $d\lambda = \lambda(t)dt$. Sada (3.102) postaje

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = ds. \quad (3.103)$$

Dobili smo tri diferencijalne jednađbe (3.103), a imamo pet nepoznatih funkcija. Da bismo našli još dvije jednađbe postupimo na sljedeći način. Funkcija $u(x, y)$ je rješenje jednađbe (3.91). Ako $u = u(x, y)$, $p(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$ i $q(x, y) =$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

$\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}$ uvrstimo u (3.91) biće ta jednakost zadovoljena identički po x i y . Diferenciranjem ovog identiteta po x , dobivamo

$$F_x + F_u p + P \frac{\partial p}{\partial x} + Q \frac{\partial q}{\partial x} = 0. \quad (3.104)$$

Jednakost (3.104) vrijedi u svakoj tački površi $u = u(x, y)$, pa vrijedi i duž karakteristične krive. Međutim, duž karakteristične krive je prema (3.103)

$$\frac{dx}{ds} = P \text{ i } \frac{dy}{ds} = Q.$$

Pored toga, imamo

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial p}{\partial y}.$$

Sada (3.104) možemo pisati u obliku

$$F_x + F_u p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial s} = 0 \Leftrightarrow F'_x + F'_u p + \frac{dp}{ds} = 0.$$

Odavde dobivamo

$$\frac{-dp}{F_x + pF_u} = ds.$$

Slično, diferenciranjem po y , dobivamo

$$\frac{-dq}{F_y + qF_u} = ds.$$

Ako stavimo da je $X = F_x$, $Y = F_y$ i $U = F_u$, tada dobivamo traženi sistem diferencijalnih jednačbi

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{pP + qQ} = \frac{-dp}{X + pU} = \frac{-dq}{Y + qU} = ds \quad (3.105)$$

koje zadovoljavaju karakteristike prvog reda jednačbe (3.91). Iz pretpostavke o funkciji $F(x, y, u, p, q)$ slijedi da su izrazi u (3.105) koji stoje u nazivnicima neprekidno diferencijabilne funkcije.

Lema 3.3.1. *Funkcija $F(x, y, u, p, q)$ je prvi integral sistema (3.105).*

Dokaz. Neka je $x(s), y(s), u(s), p(s)$ i $q(s)$ bilo koje rješenje sistema (3.105). Tada je

$$\begin{aligned} \frac{dF(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s))}{ds} &= \frac{\partial F}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{du}{ds} + \frac{\partial F}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial F}{\partial q} \frac{dq}{ds} \\ &= X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + U \frac{du}{ds} + P \frac{dp}{ds} + Q \frac{dq}{ds} = \\ &= XP + YQ + U(pP + qQ) - P(X + pU) \\ &\quad - Q(Y + qU) = 0. \end{aligned}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Odavde je $F(x(s), y(s), u(s), p(s), q(s)) = \text{const.}$ Znači, funkcija $F(x, y, u, p, q)$ prima konstantnu vrijednost duž neke integralne krive sistema (3.105), odakle slijedi da je integral tog sistema. $\square$

Cauchyjev problem sa datim početnim uvjetima za sistem (3.105) ima jedinstveno rješenje. Označimo sa

$$\begin{cases} x = x(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ y = y(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ u = u(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ p = p(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \\ q = q(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \end{cases} \quad (3.106)$$

ono rješenje sistema (3.105) koje zadovoljava sljedeće početne uvjete

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \\ u(0) = u_0, \\ p(0) = p_0, \\ q(0) = q_0. \end{cases} \quad (3.107)$$

Dokazali smo da karakteristike prvog reda jednađbe (3.91) zadovoljavaju sistem (3.105). Međutim, otuda ne slijedi da je svako rješenje sistema (3.105) karakteristika prvog reda jednađbe (3.91). Sada ćemo ovo ispitati detaljnije. Posmatrajmo rješenje (3.106) sistema (3.105). To znači da je kriva data sa prve tri jednađbe karakteristična kriva jednađbe (3.91). Osim toga, druge dvije jednađbe pokazuju kako se mijanjaju komponente vektora normale tangencijalne ravni integralne površi $u = u(x, y)$ duž pomenute karakteristične krive. S druge strane, u svakoj tački površi $u = u(x, y)$ jednađba (3.91) je zadovoljena, slijedi da je zadovoljena i duž karakteristične krive. Znači, identički, po s vrijedi

$$F(x(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0), \dots, g(s, x_0, y_0, u_0, p_0, q_0)) \equiv 0.$$

Ako stavimo da je $s = 0$ na osnovu (3.107), dobivamo

$$F(x_0, y_0, u_0, p_0, q_0) = 0. \quad (3.108)$$

Da bi rješenje (3.106) sistema (3.105) davalo karakteristiku prvog reda potrebno je da početne vrijednosti x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 zadovoljavaju uvjet (3.108). Kasnije ćemo vidjeti da je to i dovoljan uvjet. Uzmimo sada da su početne vrijednosti x_0, y_0, u_0, p_0, q_0 funkcije nekog parametra v , tj. $x_0 = x_0(v), y_0 = y_0(v), u_0 = u_0(v), p_0 = p_0(v)$ i $q_0 = q_0(v)$, pri čemu su $x_0(v), y_0(v), \dots, q_0(v)$ neprekidno diferencijabilne funkcije u nekom intervalu oko neke fiksne tačke v_0 . Uvrštavajući

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

ovu u (3.106) dobivamo

$$\begin{cases} x = x(s, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)), \\ y = y(s, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)), \\ u = u(s, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)), \\ p = p(s, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)), \\ q = q(s, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)). \end{cases} \quad (3.109)$$

Iz ranijih pretpostavki, imamo

$$\begin{cases} x(0, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = x_0(v), \\ y(0, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = y_0(v), \\ u(0, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = u_0(v), \\ p(0, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = p_0(v), \\ q(0, x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = q_0(v). \end{cases} \quad (3.110)$$

Relacije (3.109) i (3.110) ćemo pisati kraće u obliku

$$\begin{cases} x = x(s, v), \\ y = y(s, v), \\ u = u(s, v), \\ p = p(s, v), \\ q = q(s, v), \end{cases} \quad (3.111)$$

i

$$\begin{cases} x(0, v) = x_0(v), \\ y(0, v) = y_0(v), \\ u(0, v) = u_0(v), \\ p(0, v) = p_0(v), \\ q(0, v) = q_0(v). \end{cases} \quad (3.112)$$

Od funkcija $x_0(v), y_0(v), \dots, q_0(v)$ još zahtijevamo da zadovoljavaju uvjet (3.108), tj. da identički po v vrijedi

$$F(x_0(v), y_0(v), u_0(v), p_0(v), q_0(v)) = 0.$$

Pored toga, pretpostavimo da je

$$\begin{vmatrix} P(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)) & Q(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)) \\ x'_0(v_0) & y'_0(v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Iz pretpostavke o funkcijama $x_0(v), y_0(v), \dots, q_0(v)$ i iz teorema o diferenciranju rješenja po početnim vrijednostima zaključujemo da su funkcije $x(s, v), \dots, q(s, v)$ neprekidno diferencijabilne (i po s i po v). Napomenimo da te funkcije kao funkcije od s pri svakoj fiksnoj vrijednosti v zadovoljavaju sistem (3.105). Prve tri

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

jednačbe od (3.111) predstavljaju parametarske jednačbe neke površi. Pokažimo da tu površ možemo prikazati i eksplicitno. U tom cilju posmatrajmo Jacobian $\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,v)}$ izračunat u tački $s = 0$ i $v = v_0$. Na osnovu (3.105) imamo

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,v)} = \begin{vmatrix} x'_s(s,v) & y'_s(s,v) \\ x'_v(s,v) & y'_v(s,v) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P & Q \\ x'_v(s,v) & y'_v(s,v) \end{vmatrix},$$

gdje je $P = P(x(s,v), \dots, q(s,v))$ i $Q = Q(x(s,v), \dots, q(s,v))$. Stavimo da je $s = 0$ i $v = v_0$. Tada prema (3.112) imamo

$$\begin{aligned} P &= P(x(0, v_0), \dots, q(0, v_0)) &= P(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)), \\ Q &= Q(x(0, v_0), \dots, q(0, v_0)) &= Q(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)). \end{aligned}$$

Diferenciranjem u (3.112) po v a zatim stavljanjem $v = v_0$ dobivamo $x'_v(0, v_0) = x'_0(v_0)$ i $y'_v(0, v_0) = y'_0(v_0)$. Na taj način u tački $s = 0$ i $v = v_0$ imamo

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(s,v)} = \begin{vmatrix} P(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)) & Q(x_0(v_0), \dots, q_0(v_0)) \\ x'_0(v_0) & y'_0(v_0) \end{vmatrix} \neq 0.$$

Zbog neprekidnosti ove determinante, slijedi da je ova determinanta različita od nule u nekoj okolini tačke $s = 0$ i $v = v_0$. Zbog toga, iz prve dvije jednačbe (3.111) možemo izračunati s i v preko x i y i uvrstiti u treću. Time će površ zadata sa prve tri jednačbe (3.111) biti zadata eksplicitno. Pri svakom fiksnom v funkcije $x(s, v), \dots, q(s, v)$ zadovoljava (3.105). Kako je $F(x, y, u, p, q)$ prvi integral sistema (3.105), onda je za svako v

$$F(x(s, v), y(s, v), u(s, v), p(s, v), q(s, v)) = C,$$

gdje je C konstanta. Odavde za $s = 0$, prema (3.112), imamo

$$F(x(s, v), \dots, q(s, v)) = F(x(0, v), \dots, q(0, v)) = 0. \quad (3.113)$$

To znači da (3.113) vrijedi identički po u i v . Odavde još ne možemo zaključiti da je površ data sa prve tri jednačbe (3.111) integralna površ jednačbe (3.91). Naime, ne znamo da li funkcije $p(s, v)$ i $q(s, v)$ predstavljaju komponente vektora normale tangencijalne ravni te površi (u tački $(x(s, v), y(s, v), u(s, v))$). Funkcije $p(s, v)$ i $q(s, v)$ će biti komponente vektora normale tangencijalne ravni ako i samo ako je

$$du = p dx + q dy, \quad x = x(s, v), y = y(s, v), u = u(s, v), p = p(s, v), q = q(s, v). \quad (3.114)$$

Uvjet (3.114) možemo pisati u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial v} dv = p \left(\frac{\partial x}{\partial s} ds + \frac{\partial x}{\partial v} dv \right) + q \left(\frac{\partial y}{\partial s} ds + \frac{\partial y}{\partial v} dv \right),$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

odnosno u obliku

$$\frac{\partial u}{\partial s} ds + \frac{\partial u}{\partial v} dv = \left(p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s} \right) ds + \left(p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v} \right) dv.$$

Pošto su s i v nezavisno varijable, ovaj uvjet je zadovoljen ako i samo ako je

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial s} = p \frac{\partial x}{\partial s} + q \frac{\partial y}{\partial s}, \\ \frac{\partial u}{\partial v} = p \frac{\partial x}{\partial v} + q \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases} \quad (3.115)$$

Prema (3.105) je $\frac{\partial u}{\partial s} = pP + qQ$, gdje je $\frac{\partial x}{\partial s} = P$ i $\frac{\partial y}{\partial s} = Q$, pa je prvi uvjet (3.115) zadovoljen. Sada, vidimo da će površ data sa prve tri jednačbe (3.111) biti integralna površ jednačbe (3.91) ako i samo ako vrijedi

$$\frac{\partial u(s, v)}{\partial v} = p(s, v) \frac{\partial x(s, v)}{\partial v} + q(s, v) \frac{\partial y(s, v)}{\partial v}.$$

Ispitajmo kada je ovaj uvjet zadovoljen. U tom cilju stavimo

$$V(s, v) = \frac{\partial u(s, v)}{\partial v} - p(s, v) \frac{\partial x(s, v)}{\partial v} - q(s, v) \frac{\partial y(s, v)}{\partial v}. \quad (3.116)$$

Želimo $V(s, v)$ diferencirati po s . Prvo se trebamo uvjeriti da postoje mješoviti parcijalni izvodi drugog reda funkcija $x(s, v)$, $y(s, v)$ i $u(s, v)$. Prema (3.105) imamo

$$\frac{\partial x(s, v)}{\partial s} = P(x(s, v), \dots, q(s, v)). \quad (3.117)$$

Funkcija $P = F_p$ je neprekidno diferencijabilna, jer je funkcija F dva puta neprekidno diferencijabilna. Kako su $x(s, v), \dots, q(s, v)$ neprekidne funkcije po v , onda je desna strana u (3.117) neprekidno diferencijabilna po v . Prema tome, iz (3.117) slijedi da postoji izvod $x''_{sv}(s, v)$ i da je neprekidan. Slično, koristeći najprije teorem o diferenciranju po početnim vrijednostima uvjeravamo se da postoji $x''_{vs}(s, v)$ i da je neprekidan. Zbog toga je $x''_{sv}(s, v) = x''_{vs}(s, v)$. Slično se dobiva i za $y(s, v)$ i $u(s, v)$. Diferenciranjem u (3.116) po s dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial s} &= \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial s} - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial v} - p \frac{\partial^2 x}{\partial v \partial s} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial v} - q \frac{\partial^2 y}{\partial v \partial s} \\ &= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - p \frac{\partial x}{\partial s} - q \frac{\partial y}{\partial s} \right) - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial v} \\ &\quad - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= - \frac{\partial p}{\partial s} \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial q}{\partial s} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial p}{\partial v} \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial q}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial s} \\ &= P \frac{\partial p}{\partial v} + Q \frac{\partial q}{\partial v} + (X + pU) \frac{\partial x}{\partial v} + (Y + qU) \frac{\partial y}{\partial v}, \end{aligned}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

jer je prema (3.105)

$$\frac{\partial u}{\partial s} - p \frac{\partial x}{\partial s} - q \frac{\partial y}{\partial s} = 0.$$

Znači imamo da je

$$\frac{\partial V}{\partial s} = P \frac{\partial p}{\partial v} + Q \frac{\partial q}{\partial v} + (X + pU) \frac{\partial x}{\partial v} + (Y + qU) \frac{\partial y}{\partial v}. \quad (3.118)$$

Ako u (3.113) diferenciramo po v , dobivamo

$$0 = X \frac{\partial x}{\partial v} + Y \frac{\partial y}{\partial v} + U \frac{\partial u}{\partial v} + P \frac{\partial p}{\partial v} + Q \frac{\partial q}{\partial v}.$$

Iz ovoga i (3.118) oduzimanjem dobivamo

$$\frac{\partial V}{\partial s} = -U \left(\frac{\partial u}{\partial v} - p \frac{\partial x}{\partial v} - q \frac{\partial y}{\partial v} \right) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial s} = -UV.$$

Ovo je homogena linearna diferencijalna jednačba po s , a pri fiksnom v , slijedi da njeno rješenje možemo pisati u obliku

$$V(s, v) = V(0, v) e^{\int_0^s U(r) dr}.$$

Vidimo da će vrijediti $V(s, v) = 0$, ako i samo ako $V(0, v) = 0$. To je ekvivalentno

$$\frac{\partial u(0, v)}{\partial v} = p(0, v) \frac{\partial x(0, v)}{\partial v} + q(0, v) \frac{\partial y(0, v)}{\partial v}. \quad (3.119)$$

Na osnovu (3.112), uvjet (3.119) dobiva oblik

$$\frac{du_0(v)}{dv} = p_0(v) \frac{dx_0(v)}{dv} + q_0(v) \frac{dy_0(v)}{dv}. \quad (3.120)$$

Konačno, imamo da je površ data sa prve tri jednačbe (3.111) integralna površ zadata parametarski ako i samo ako funkcije $x_0(v), \dots, q_0(v)$ zadovoljavaju identički po v uvjet (3.120).

Pokažimo sada kako ovim metodom riješiti Cauchyjev problem za jednačbu (3.91). U tom cilju, pretpostavimo da smo sistem (3.105) riješili, tj. da smo našli funkcije (3.109) odnosno (3.111). Neka je zadata neka početna kriva

$$\begin{cases} x = \varphi(v), \\ y = \psi(v), \\ u = \lambda(v), \end{cases} \quad (3.121)$$

gdje su $\varphi(v), \psi(v), \lambda(v)$ neprekidno diferencijabilne funkcije. Treba naći onu integralnu površ jednačbe (3.91) na kojoj leži kriva (3.121). Funkcije $x_0(v), y_0(v)$ i $u_0(v)$ biramo na sljedeći način.

$$\begin{cases} x_0(v) = \varphi(v), \\ y_0(v) = \psi(v), \\ u_0(v) = \lambda(v). \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Funkcije $p_0(v)$ i $q_0(v)$ određujemo iz uvjeta

$$\begin{cases} F(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = 0, \\ \frac{d\lambda(v)}{dv} = p_0(v) \frac{d\varphi(v)}{dv} + q_0(v) \frac{d\psi(v)}{dv}. \end{cases} \quad (3.122)$$

Iz sistema (3.122) se $p_0(v)$ i $q_0(v)$ mogu odrediti ako je taj sistem zadovoljen bar u jednoj tački (v, p_0, q_0) i ako je determinanta Jacobiana po $p_0(v)$ i $q_0(v)$ različita od nule u toj tački. Pomenuta determinanta je

$$\begin{vmatrix} P_0 & Q_0 \\ \frac{d\varphi(v)}{dv} & \frac{d\psi(v)}{dv} \end{vmatrix},$$

gdje je

$$P_0 = F'_p(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = P(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v))$$

i

$$Q_0 = F'_q(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = Q(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)).$$

Znači, možemo naći $p_0(v)$ i $q_0(v)$ ako je pomenuta determinanta različita od nule. Ako je, s druge strane, determinanta Jacobiana identički jednaka nuli, onda kao što se može pokazati, kriva (3.121) je karakteristična kriva jednačbe (3.91) i postoji beskonačno mnogo integralnih površi na kojima leži kriva (3.121). Tada Cauchyjev problem ima beskonačno mnogo rješenja.

Primjer 3.3.15. Metodom karakteristika naći rješenje Cauchyjevog problema

$$px + qy = pq, \quad x = 0, y = u.$$

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = px + qy - pq.$$

Karakteristični sistem je dat sa

$$\frac{dx}{x - q} = \frac{dy}{y - p} = -\frac{du}{pq} = -\frac{dp}{p} = -\frac{dq}{q} = ds. \quad (3.123)$$

Odredimo ono rješenje ovog sistema koje zadovoljava početne uvjete

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \\ u(0) = u_0, \\ p(0) = p_0, \\ q(0) = q_0. \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Iz posljednje dvije jednačbe sistema (3.123) imamo da je

$$p(s) = C_1 e^{-s}, \quad q(s) = C_2 e^{-s}.$$

Iz $p(s) = p_0$ i $q(s) = q_0$ dobivamo da je $C_1 = p_0$ i $C_2 = q_0$, pa je

$$p = p_0 e^{-s}, \quad q = q_0 e^{-s}.$$

Preostale tri jednačbe sistema (3.123) možemo napisati u obliku

$$\frac{dx}{ds} = x - q_0 e^{-s}, \quad \frac{dy}{ds} = y - p_0 e^{-s}, \quad \frac{dx}{ds} = p_0 q_0 e^{-2s},$$

odakle, koristeći uvjete $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ i $u(0) = u_0$ dobivamo da je

$$\begin{aligned} x &= \left(x_0 - \frac{q_0}{2}\right) e^s + \frac{q_0}{2} e^{-s}, \\ y &= \left(y_0 - \frac{p_0}{2}\right) e^s + \frac{p_0}{2} e^{-s}, \\ u &= u_0 - \frac{p_0 q_0}{2} + \frac{p_0 q_0}{2} e^{-2s}. \end{aligned} \tag{3.124}$$

Da bismo riješili traženi Cauchyjev problem, prvo početni uvjet napišimo u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = \varphi(v) = 0, \\ y = \psi(v) = v, \\ u = \lambda(v) = v. \end{cases}$$

Uzmimo da se x_0, y_0 i u_0 poklapaju sa početnim uvjetima, tj. neka je

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(v) = 0, \\ y_0 = \varphi(v) = v, \\ u_0 = \varphi(v) = v. \end{cases}$$

Funkcije p_0 i q_0 odredimo iz uvjeta

$$\begin{cases} F(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = 0, \\ \frac{d\lambda(v)}{dv} = p_0(v) \frac{d\varphi(v)}{dv} + q_0(v) \frac{d\psi(v)}{dv}, \end{cases}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{cases} q_0 v - q_0 p_0 = 0, \\ 1 = q_0. \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je $p_0 = v$ i $q_0 = 1$. Uvrštavajući ovo u (3.124), dobivamo da je rješenje traženog Cauchyjevog problema dato u parametarskom obliku sa

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{2}(e^s - e^{-s}), \\ y &= \frac{v}{2}(e^s + e^{-s}), \\ u &= \frac{v}{2}(1 + e^{-2s}) = \frac{v}{2} \frac{e^s + e^{-s}}{e^s}. \end{aligned}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Da bismo dobili rješenje u implicitnoj formi eliminirajmo parametre s i v . Dobivamo da je

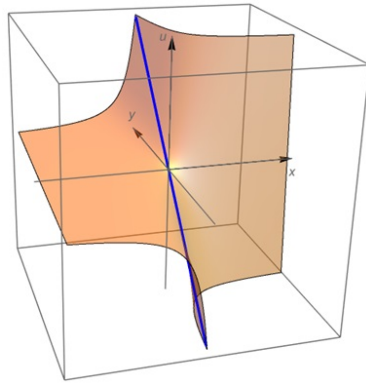
$$u = ye^{-s}, \quad e^{2s} + 2xe^s - 1 = 0,$$

pa je

$$e^s = -x + \sqrt{x^2 + 1}, \quad e^{-s} = x + \sqrt{x^2 + 1},$$

i konačno

$$u(x, y) = xy + y\sqrt{x^2 + 1}.$$



Slika 3.13: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(0, t, t)$ iz Primjera 3.3.15.



Primjer 3.3.16. Metodom karakteristika naći onu integralnu površ $u = u(x, y)$ jednačbe $u = px + qy + pq$ koja prolazi krivom $x = 1, u = y^3$.

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = px + qy + pq - u.$$

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{x+q} = \frac{dy}{y+p} = \frac{du}{px+2pq+qy} = -\frac{dp}{0} = -\frac{dq}{0} = ds. \quad (3.125)$$

Odredimo ono rješenje sistema (3.125) koje zadovoljava početne uvjete

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \\ u(0) = u_0, \\ p(0) = p_0, \\ q(0) = q_0. \end{cases} \quad (3.126)$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Iz posljednje dvije jednačbe sistema (3.123), imamo da je

$$p(s) = C_1, \quad q = C_2.$$

Iz $p(s) = p_0$ i $q(s) = q_0$ dobivamo da je $C_1 = p_0$ i $C_2 = q_0$, pa je

$$p = p_0, \quad q = q_0.$$

Iz

$$\frac{dx}{x+q} = ds \Leftrightarrow \frac{dx}{x+q_0} = ds$$

dobivamo da je $\ln|x+q_0| = s + C_3$. Kako je $x = x_0$ za $s = 0$, dobivamo da je $\ln|x_0+q_0| = C_3$, odakle je

$$\ln|x+q_0| = s + \ln|x_0+q_0| \Rightarrow x+q_0 = (x_0+q_0)e^s.$$

Analogno se dobiva da je

$$y+p_0 = (y_0+p_0)e^s.$$

Kako je $px+qy+pq-u=0$ prvi integral sistema (3.125), to je $pq+qy = u-px$. Na osnovu toga, imamo

$$\frac{du}{px+2pq+qy} = ds \Rightarrow \frac{du}{u+pq} = ds \Rightarrow \frac{du}{u+p_0q_0} = ds,$$

pa je

$$\ln|u+p_0q_0| = s + C_4.$$

Kako je $u = u_0$ za $s = 0$ to je $C_4 = \ln|u_0+p_0q_0|$ pa je

$$u+p_0q_0 = (u_0+p_0q_0)e^s.$$

Dakle, rješenje koje zadovoljava početne uvjete (3.126) je

$$\begin{aligned} x &= (x_0+q_0)e^s - q_0, \\ y &= (y_0+p_0)e^s - p_0, \\ u &= (u_0+p_0q_0)e^s - p_0q_0, \\ p &= p_0, \\ q &= q_0. \end{aligned} \tag{3.127}$$

Da bismo riješili traženi Cauchyjev problem, prvo početni uvjet napišimo u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = \varphi(v) = 1, \\ y = \psi(v) = v, \\ u = \lambda(v) = v^3. \end{cases}$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable

Uzmimo da se x_0, y_0 i u_0 poklapaju sa početnim uvjetima, tj. neka je

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(v) = 1, \\ y_0 = \psi(v) = v, \\ u_0 = \lambda(v) = v^3. \end{cases}$$

Funkcije p_0 i q_0 odredimo iz uvjeta

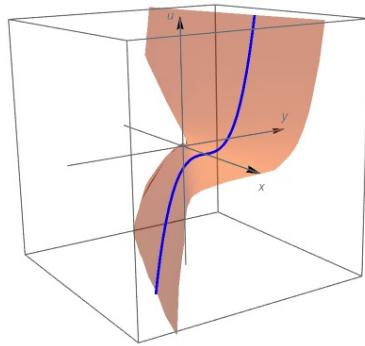
$$\begin{cases} F(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = 0, \\ \frac{d\lambda(v)}{dv} = p_0(v) \frac{d\varphi(v)}{dv} + q_0(v) \frac{d\psi(v)}{dv}, \end{cases}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{cases} p_0 + q_0 v + q_0 p_0 - v^3 = 0, \\ 3v^2 = q_0. \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je $p_0 = -\frac{2v^3}{1+3v^2}$ i $q_0 = 3v^2$. Uvrštavajući ovo u (3.127), dobivamo da je rješenje traženog Cauchyjevog problema dato u parametarskom obliku sa

$$\begin{aligned} x &= (1 + 3v^2)e^s - 3v^2, \\ y &= \left(v - \frac{2v^3}{1 + 3v^2}\right)e^s + \frac{2v^3}{1 + 3v^2}, \\ u &= \left(v^3 - \frac{6v^5}{1 + 3v^2}\right)e^s + \frac{6v^5}{1 + 3v^2}. \end{aligned}$$



Slika 3.14: Grafik funkcije $u = u(x, y)$ i krive $(1, t, t^3)$ iz Primjera 3.3.16.



Primjer 3.3.17. Metodom karakteristika naći onu integralnu površ $u = u(x, y)$ jednađbe $u = p^2 x^2 + q^2 y^2$ koja prolazi krivom $x = y = u$.

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Rješenje. Stavimo da je

$$F(x, y, u, p, q) = u - p^2 x^2 - q^2 y^2.$$

Sistem karakteristika je

$$\frac{dx}{-2x^2 p} = \frac{dy}{-2y^2 q} = \frac{du}{-2u} = -\frac{dp}{p - 2xp^2} = -\frac{dq}{q - 2yq^2} = ds. \quad (3.128)$$

Odredimo ono rješenje sistema (3.128) koje zadovoljava početne uvjete

$$\begin{cases} x(0) = x_0, \\ y(0) = y_0, \\ u(0) = u_0, \\ p(0) = p_0, \\ q(0) = q_0. \end{cases}$$

Iz

$$\frac{dx}{-2x^2 p} = -\frac{dp}{p - 2xp^2} \Rightarrow \frac{dp}{dx} + \frac{1}{x}p = \frac{1}{2x^2}$$

imamo da je

$$p = \frac{1}{x} \left(C_1 + \frac{1}{2} \ln x \right).$$

Iz $p = p_0$ i $x = x_0$, za $s = 0$ dobivamo da je $C_1 = p_0 x_0 - \frac{1}{2} \ln x_0$ pa je

$$p = \frac{1}{x} \left(p_0 x_0 - \frac{1}{2} \ln x_0 + \frac{1}{2} \ln x \right) = \frac{1}{x} \left(p_0 x_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{x}{x_0} \right).$$

Analogno se dobiva da je

$$q = \frac{1}{y} \left(q_0 y_0 + \frac{1}{2} \ln \frac{y}{y_0} \right).$$

Iz ove dvije jednačbe dobivamo da je

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{2(px - p_0 x_0)}, \\ y &= y_0 e^{2(qy - q_0 y_0)}. \end{aligned}$$

Pored toga, iz

$$\frac{pdx + xdp}{px} = -ds \Rightarrow \frac{d(px)}{-px} = ds \Rightarrow \ln |px| = -s + C_3.$$

a kako je $x = x_0$ i $p = p_0$ za $s = 0$, imamo da je $C_3 = \ln |p_0 x_0|$. Sada imamo

$$px = p_0 x_0 e^{-s}.$$

3.3 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa dvije nezavisne varijable

Na sličan način dobivamo

$$qy = q_0 y_0 e^{-s}.$$

Iz $\frac{du}{-2u} = ds$ imamo $u = u_0 e^{-2s}$. Dakle,

$$\begin{aligned} x &= x_0 e^{2(p_0 x_0 e^{-s} - p_0 x_0)}, \\ y &= y_0 e^{2(q_0 y_0 e^{-s} - q_0 y_0)}, \\ u &= u_0 e^{-2s}. \end{aligned} \tag{3.129}$$

Da bismo riješili traženi Cauchyjev problem, prvo početni uvjet napišimo u parametarskom obliku

$$\begin{cases} x = \varphi(v) = v, \\ y = \psi(v) = v, \\ u = \lambda(v) = v. \end{cases}$$

Uzmimo da se x_0, y_0 i u_0 poklapaju sa početnim uvjetima, tj. neka je

$$\begin{cases} x_0 = \varphi(v) = v, \\ y_0 = \psi(v) = v, \\ u_0 = \lambda(v) = v. \end{cases}$$

Funkcije p_0 i q_0 odredimo iz uvjeta

$$\begin{cases} F(\varphi(v), \psi(v), \lambda(v), p_0(v), q_0(v)) = 0, \\ \frac{d\lambda(v)}{dv} = p_0(v) \frac{d\varphi(v)}{dv} + q_0(v) \frac{d\psi(v)}{dv}, \end{cases}$$

što je ekvivalentno sa

$$\begin{cases} v - v^2 p_0^2 - v^2 q_0^2 = 0, \\ 1 = p_0 + q_0. \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je

$$p_0 = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{v} - 1} \right) \quad \text{i} \quad q_0 = \frac{1}{2} \left(1 \mp \sqrt{\frac{2}{v} - 1} \right).$$

Uvrštavajući to u (3.129) dobivamo da je rješenje traženog Cauchyjevog problema dato u parametarskom obliku sa

$$\begin{aligned} x &= v e^{v \left(1 \pm \sqrt{\frac{2}{v} - 1} \right) (e^{-s} - 1)}, \\ y &= v e^{v \left(1 \mp \sqrt{\frac{2}{v} - 1} \right) (e^{-s} - 1)}, \\ u &= v e^{-2s}. \end{aligned}$$

◆

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa više od dvije nezavisne varijable

U ovoj sekciji ćemo posmatrati opću parcijalnu diferencijalnu jednađbu oblika

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (3.130)$$

gdje $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, Ω je otvoren skup, a

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

je poznata funkcija i $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija, tj. $u = u(x_1, \dots, x_n)$.

3.4.1 Potpuni, opći i singularni integral

Kao i kod parcijalne diferencijalne jednađbe sa dvije nezavisne varijable sada ćemo definirati neke klase rješenja i pokazat ćemo kako na osnovu tih rješenja možemo formirati složenija rješenja. Pretpostavimo da je $A \in \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Pored toga neka je za svako $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ funkcija $u = u(x, a) = u(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{C}^2$ rješenje parcijalne diferencijalne jednađbe (3.130).

Definicija 3.4.1. Za $\mathcal{C}^2$ funkciju $u = u(x, a)$ kažemo da je *potpuni integral* u $\Omega \times A$ jednađbe (3.130) ako je

- (i) $u = u(x, a)$ je rješenje jednađbe (3.130) za svako $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$,
- (ii) Za svako $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ i $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ je

$$\text{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial a_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial a_1} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial a_1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial u}{\partial a_n} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial a_n} & \cdots & \frac{\partial^2 u}{\partial x_n \partial a_n} \end{pmatrix} = n.$$

Napomenimo da uvjet (ii) u Definiciji 3.4.1 osigurava da funkcija $u = u(x, a)$ zavisi od svih n nezavisnih parametara $a_1, a_2, \dots, a_n$.

Sada ćemo vidjeti kako možemo formirati složenija rješenja, odnosno rješenja koja zavise od proizvoljne funkcije od $n - 1$ nezavisno varijabli, a ne od n parametara. Ova rješenja ćemo dobiti kao obvojnice (envelope) familije potpunih integrala, odnosno neke m -parametarske familije rješenja.

Definicija 3.4.2. Neka je $u = u(x, a)$ $\mathcal{C}^1$ funkcija za $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ i $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$ gdje su $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i $A \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoreni skupovi. Posmatrajmo sistem jednađbi

$$\frac{\partial u(x, a)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.131)$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa više od dvije nezavisne varijable

Pretpostavimo da se sistem (3.131) može riješiti po $(a_1, \dots, a_n)$, tj. neka postoje C^1 funkcije

$$a_i = \phi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

takve da je

$$\frac{\partial u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.132)$$

zadovoljeno identički po $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$.

Tada funkciju

$$v(x) := u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x)), \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \quad (3.133)$$

zovemo obvojnicom familije funkcija $\{u(x, a)\}_{a \in A}$.

Koristeći obvojnicu, možemo konstruisati novo rješenje nelinearne diferencijalne jednađbe slično kao i kod parcijalnih jednađbi sa dvije nezavisne varijable.

Teorem 3.4.1. Pretpostavimo da je $u = u(x, a)$ rješenje jednađbe (3.130) za svako $a = (a_1, \dots, a_n) \in A$. Pretpostavimo da obvojnica v definirana sa (3.132) i (3.133) postoji i da je C^1 funkcija. Tada je v , također, rješenje jednađbe (3.130).

Dokaz. Diferenciranjem funkcije

$$v(x_1, \dots, x_n) = u(x_1, \dots, x_n, \phi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \phi_n(x_1, \dots, x_n))$$

po x_i dobivamo da je za $i = 1, 2, \dots, n$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} &= \frac{\partial u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))}{\partial a_j} \frac{\partial \phi_j(x)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))}{\partial x_i}, \text{ na osnovu (3.132).} \end{aligned}$$

Dakle, za svako $x = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ je

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial u(x, \phi_1(x), \dots, \phi_n(x))}{\partial x_i}$$

pa je

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n}\right) = 0.$$

□

Rješenje v koje se spominje u prethodnom teoremu nazivamo *singularnim integralom* jednađbe (3.130).

Neka je $A' \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ i odaberimo neku C^1 funkciju $h : A' \rightarrow \mathbb{R}$ takvu da joj grafik leži u A .

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

Definicija 3.4.3. Opći integral jednačbe (3.130) je obvojnica $v' = v'(x_1, \dots, x_n)$ familije funkcija

$$u'(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}) = u(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_{n-1}, h(a_1, \dots, a_{n-1})),$$

gdje $(x_1, \dots, x_n) \in \Omega$ i $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in A'$, pod pretpostavkom da obvojnica postoji i da je C^1 funkcija.

Drugim riječima, prilikom nalaženja obvojnice smatramo da je parametar a_n funkcija od nezavisnih parametara $a_1, \dots, a_{n-1}$, tj. $a_n = h(a_1, \dots, a_{n-1})$. Dakle, od potpunog integrala koji zavisi od n parametara $a_1, \dots, a_n$ pravimo rješenje koje zavisi od proizvoljne funkcije h od $n - 1$ nezavisno varijabli.

3.4.2 Metoda Lagrange-Charpita za nalaženje potpunog integrala

Sada ćemo opisati metodu za nalaženje potpunog integrala jednačbe (3.130), a onda, kao što smo vidjeli, možemo naći i ostala rješenja.

Pretpostavimo da rješenje $u = u(x_1, \dots, x_n)$ zadovoljava i parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$G\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0. \quad (3.134)$$

U nastavku ćemo vidjeti da neće biti potrebe određivati funkciju G . Stavimo da je

$$p_k = \frac{\partial u}{\partial x_k}, p_{kl} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}, F_{x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k}, F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, F_{p_k} = \frac{\partial F}{\partial p_k},$$

$$G_{x_k} = \frac{\partial G}{\partial x_k}, G_u = \frac{\partial G}{\partial u}, G_{p_k} = \frac{\partial G}{\partial p_k}.$$

Uzimajući izvod jednačbe (3.130) po x_i za $i = 1, 2, \dots, n$ dobivamo

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u} p_i + \frac{\partial F}{\partial u_i} u_{i1} + \dots + \frac{\partial F}{\partial u_i} u_{in} = 0$$

Slično, za (3.134) imamo

$$\frac{\partial G}{\partial x_i} + \frac{\partial G}{\partial u} p_i + \frac{\partial G}{\partial u_i} u_{i1} + \dots + \frac{\partial G}{\partial u_i} u_{in} = 0$$

Skup ovih jednakosti možemo napisati u matričnom obliku

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{x_1} \\ \vdots \\ F_{x_n} \end{pmatrix} + F_u \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{u_1} \\ \vdots \\ F_{u_n} \end{pmatrix} \quad (3.135)$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{x_1} \\ \vdots \\ G_{x_n} \end{pmatrix} + G_u \begin{pmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G_{u_1} \\ \vdots \\ G_{u_n} \end{pmatrix}$$

Pomnožimo matričnu jednačbu (3.135) sa vektorom $(G_{p_1}, \dots, G_{p_n})$ a matričnu jednačbu (3.135) sa vektorom $(F_{p_1}, \dots, F_{p_n})$ i oduzmimo tako dobivene dvije skalarne jednačbe, dobivamo

$$\sum_{k=1}^n (F_{p_k} G_{x_k} + F_{p_k} p_k G_u - G_{p_k} F_{x_k} + G_{p_k} p_k F_u) = 0$$

ili

$$F_{p_1} G_{x_1} + \cdots + F_{p_n} G_{x_n} + \left(\sum_{k=1}^n F_{p_k} p_k \right) G_u - (F_{x_1} + p_1 F_u) G_{p_1} - \cdots - (F_{x_n} + p_n F_u) G_{p_n} = 0,$$

što je kvazilinearna parcijalna diferencijalna jednačba za G . Ova jednačba je ekvivalentna sa sistemom

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \cdots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{\sum_{k=1}^n F_{p_k} p_k} = \frac{-dp_1}{(F_{x_1} + p_1 F_u)} = \cdots = \frac{-du_n}{(F_{x_n} + p_n F_u)}. \quad (3.136)$$

Nije teško vidjeti da je $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = C$ prvi integral sistema (3.136). Pored toga, neka su

$$\varphi_i(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) = C_i, \quad i = 1, \dots, n-1 \quad (3.137)$$

nezavisni prvi integrali sistema (3.136) takvi da je F različito od φ_i za $i = 1, \dots, n-1$. Neka $[f, g]$ označava *Jacobi-Mayerove* zgrade koje su definirane sa

$$[f, g] = \sum_{k=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial x_k} \right) + \sum_{k=1}^n p_k \left(\frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial g}{\partial p_k} - \frac{\partial f}{\partial p_k} \frac{\partial g}{\partial u} \right),$$

odnosno

$$[f, g] = \sum_{k=1}^n \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial x_k} & \frac{\partial f}{\partial u_k} \\ \frac{\partial g}{\partial x_k} & \frac{\partial g}{\partial u_k} \end{array} \right| + \sum_{k=1}^n p_k \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial u_k} \\ \frac{\partial g}{\partial u} & \frac{\partial g}{\partial u_k} \end{array} \right|.$$

Neka su integrali (3.137) u involuciji jedan s drugim, tj. neka je

$$[\varphi_i, \varphi_j] = 0, \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad i \neq j.$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednađbe sa više od dvije nezavisne varijable

Pretpostavimo da se sistem

$$\begin{aligned}\varphi_1(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) &= C_1, \\ &\vdots \\ \varphi_{n-1}(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) &= C_{n-1}, \\ F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n) &= 0,\end{aligned}$$

može riješiti po $p_1, \dots, p_n$ tako da je

$$\begin{aligned}p_1 &= \psi_1(x_1, \dots, x_n, u, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ p_2 &= \psi_2(x_1, \dots, x_n, u, C_1, \dots, C_{n-1}), \\ &\vdots \\ p_n &= \psi_n(x_1, \dots, x_n, u, C_1, \dots, C_{n-1}).\end{aligned}\tag{3.138}$$

Tada je (3.138) potpuno integrabilni sistem koji se rješava na sličan način kao potpuno integrabilan sistem od dvije jednađbe. Rješenje tog sistema će da zavisi od n konstanti i predstavljaće potpuni integral jednađbe (3.130).

Primjer 3.4.1. Naći potpuni integral jednađbe

$$p_2(1 - p_1) = x_1 - u.$$

Rješenje. Kako je $F = p_2(1 - p_1) - x_1 + u$ to je $F_{x_1} = -1, F_{x_2} = 0, F_u = 1, F_{p_1} = -p_2, F_{p_2} = 1 - p_1$. Uvrštavajući to u (3.136) dobivamo sistem

$$-\frac{dx_1}{p_2} = \frac{dx_2}{1 - p_1} = \frac{du}{p_2 - 2p_1p_2} = \frac{dp_1}{1 - p_1} = -\frac{dp_2}{p_2}.\tag{3.139}$$

Koristeći prvu i petu, te drugu i četvrtu jednađbu sistema (3.139), imamo

$$dx_1 = dp_2, \quad dx_2 = dp_1$$

ili

$$p_2 = \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 + C_1, \quad p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_2 + C_2,$$

gdje su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Rješavajući ovaj sistem dobivamo

$$u = x_1x_2 + C_1x_2 + C_2x_1 + C_3.$$

Poslije uvrštavanja u polaznu jednađbu imamo $C_3 = C_1C_2 - C_1$ pa je

$u(x_1, x_2) = x_1x_2 + C_1x_2 + C_2x_1 + C_1C_2 - C_1.$

◆

Primjer 3.4.2. Naći potpuni integral jednađbe

$$F(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0.$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

Rješenje. Pretpostavimo da se $F(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0$ može riješiti po p_n , tj. neka je $p_n = F(p_1, \dots, p_{n-1})$. Kako je $F_{x_1} = \dots = F_{x_n} = 0$, to sistem (3.136) postaje

$$\frac{dp_1}{0} = \dots = \frac{dp_n}{0},$$

odakle slijedi da je

$$p_k = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ proizvoljne konstante takve da je $a_n = f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1})$. Potpuni integral je dat sa

$$u = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k + f(a_1, a_2, \dots, a_{n-1}) x_n + b.$$

U ovom rješenju b je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.4.3. Naći potpuni integral jednačbe

$$p_n = f(u, p_1, p_2, \dots, p_{n-1}).$$

Rješenje. Kako je $F_{x_1} = \dots = F_{x_n} = 0$, sistem (3.136) postaje

$$\frac{dp_1}{p_1} = \dots = \frac{dp_n}{p_n},$$

odakle slijedi da je

$$p_j = a_j p_n, \quad j = 1, 2, \dots, n-1$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ proizvoljne konstante. Pretpostavimo da iz

$$F(u, p_1, \dots, p_n) = F(u, a_1 p_n, \dots, a_n p_n) = 0$$

možemo dobiti $p_n = f(u, a_1, \dots, a_{n-1})$. Tada ovo možemo posmatrati kao diferencijalnu jednačbu u kojoj je u funkcija a x_n nezavisno varijabla, a $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ i $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}$ parametri. Tada iz $\frac{du}{dx_n} = f(u, a_1, \dots, a_{n-1})$ dobivamo razdvajanjem varijabli

$$\frac{du}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} = dx_n \Rightarrow \int \frac{du}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} = \int dx_n = x_n + C_1(x_1, \dots, x_{n-1}),$$

gdje je $C_1(x_1, \dots, x_{n-1})$ nepoznata funkcija koju treba odrediti. Diferenciranjem izraza

$$\int \frac{du}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} = x_n + C_1(x_1, \dots, x_{n-1})$$

po x_1 , smatrajući da je $u = u(x_1, \dots, x_n)$, dobivamo

$$\frac{1}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} \frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{\partial C_1}{\partial x_1}.$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

Kako je

$$p_1 = \frac{\partial u}{\partial x_1} = a_1 p_n = a_1 f(u, a_1, \dots, a_{n-1}),$$

iz prethodne jednakosti dobivamo

$$a_1 = \frac{\partial C_1}{\partial x_1} \Rightarrow C_1(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + C_2(x_2, \dots, x_{n-1}).$$

Dakle, imamo

$$\int \frac{du}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} = x_n + a_1 x_1 + C_2(x_2, \dots, x_{n-1}). \quad (3.140)$$

Diferenciranjem jednačbe (3.140) po x_2 , koristeći činjenicu da je $p_2 = a_2 u_n$ dobivamo da je

$$\int \frac{du}{f(u, a_1, \dots, a_{n-1})} = x_n + a_1 x_1 + a_2 x_2 + C_3(x_3, \dots, x_{n-1}),$$

gdje je $C_3(x_3, \dots, x_{n-1})$ nepoznata funkcija koju treba odrediti. Nastavljajući na ovaj način dobivamo da je potpuni integral dat sa

$$\boxed{\int \frac{du}{f(u, a_1, a_2, \dots, a_{n-1})} = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k + x_n + b.}$$

U ovom rješenju b je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.4.4. Naći potpuni integral jednačbe

$$\sum_{k=1}^n f_k(x_k, p_k) = 0.$$

Rješenje. Kako je $F_u = 0$, izjednačavajući jednačbu k ($k \leq n$) i jednačbu $(k + n + 1)$ u (3.136) dobivamo

$$\frac{dx_k}{\partial f_k / \partial u_k} = - \frac{du_k}{\partial f_k / \partial x_k},$$

odakle slijedi da je

$$\frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial f_k}{\partial u_k} dp_k = 0 \Rightarrow f_k(x_k, p_k) = a_k,$$

gdje su $a_1, \dots, a_{n-1}$ proizvoljne konstante. Iz

$$\sum_{k=1}^n f_k(x_k, p_k) = \sum_{k=1}^n a_k = 0,$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

dobivamo da je $a_n = -\sum_{k=1}^{n-1} a_k$. Pretpostavimo da se iz $f_k(x_k, p_k) = a_k$ može izračunati p_k , tj. pretpostavimo da postoje funkcije g_k takve da je $p_k = g_k(x_k, a_k)$ i $f_k(x_k, g_k(x_k, a_k)) \equiv a_k$. Tada se slično kao u prethodnom primjeru može vidjeti da je potpuni integral dat sa

$$u = \sum_{k=1}^n \left(\int g_k(x_k, a_k) dx_k \right) + b.$$

U ovom rješenju b je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.4.5. Naći potpuni integral Clairautove parcijalne diferencijalne jednačbe

$$u = \sum_{k=1}^n x_k p_k + f(p_1, \dots, p_n).$$

Rješenje. Stavimo da je

$$F = u - \sum_{k=1}^n x_k p_k + f(p_1, \dots, p_n).$$

Kako je $F_{x_k} + F_u p_k = 0$, to zadnjih n izraza u (3.136) postaje

$$\frac{dp_1}{0} = \dots = \frac{dp_n}{0},$$

odakle slijedi da je

$$p_k = a_k, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n$ proizvoljne konstante. Jednostavno se može vidjeti da je potpuni integral dat sa

$$u = \sum_{k=1}^{n-1} a_k x_k + f(a_1, a_2, \dots, a_n).$$

U ovom rješenju b je proizvoljna konstanta. ◆

3.4.3 Cauchyjeva metoda karakteristika

U ovom dijelu ćemo ponovo posmatrati opću parcijalnu diferencijalnu jednačbu oblika

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \quad (3.141)$$

gdje $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ i Ω je otvoren skup,

$$F : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

je poznata funkcija, a $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je nepoznata funkcija, tj. $u = u(x_1, \dots, x_n)$. Stavimo da za $i = 1, 2, \dots, n$, vrijedi

$$p_i = p_i(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial u(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i}.$$

Sada ćemo formulisati Cauchyjev problem početnih vrijednosti za opću parcijalnu diferencijalnu jednačbu prvog reda:

Definicija 3.4.4. *Cauchyjev problem početnih vrijednosti za jednačbu (3.141) sastoji se u nalaženju funkcije $u = u(x)$ koja zadovoljava identički jednačbu (3.141) i početne uvjete*

$$\begin{aligned} x_1 &= \varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ x_2 &= \varphi_2(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ &\vdots \\ x_n &= \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}) \\ u &= \varphi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1}) \end{aligned} \tag{3.142}$$

gdje su $(t_1, \dots, t_{n-1}) \in \Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ parametri, a $\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \varphi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$ date funkcije.

Za funkcije $\varphi_i(t_1, \dots, t_{n-1})$ ($i = 1, 2, \dots, n+1$) i $F(x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ pretpostavljamo da su dovoljno puta neprekidno diferencijabilne.

Cauchyjeva metoda za rješavanje Cauchyjevog problema (3.141)-(3.142) svodi se na nalaženje rješenja Cauchyjevog problema sistema običnih diferencijalnih jednačbi, kojeg zovemo *karakterističnim sistemom*,

$$\frac{dx_1}{F_{p_1}} = \dots = \frac{dx_n}{F_{p_n}} = \frac{du}{\sum_{k=1}^n F_{p_k} p_k} = \frac{-dp_1}{(F_{x_1} + p_1 F_u)} = \dots = \frac{-dp_n}{(F_{x_n} + p_n F_u)} = ds.$$

Ovo se može napisati u obliku

$$\begin{aligned} \frac{dx_i}{ds} &= F_{p_i}, \\ \frac{du}{ds} &= \sum_{k=1}^n F_{p_k} p_k, \quad i = 1, \dots, n, \\ \frac{dp_i}{ds} &= F_{x_i} + p_i F_u, \end{aligned} \tag{3.143}$$

gdje je

$$F_{x_k} = \frac{\partial F}{\partial x_k}, F_u = \frac{\partial F}{\partial u}, F_{p_k} = \frac{\partial F}{\partial p_k},$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

sa početnim uvjetima za $s = 0$:

$$\begin{aligned}
 x_1(0) &= \varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \\
 &\vdots \\
 x_n(0) &= \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \\
 u(0) &= \varphi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1}), \\
 p_1(0) &= p_1^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \\
 &\vdots \\
 p_n(0) &= p_n^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}),
 \end{aligned} \tag{3.144}$$

gdje su funkcije $\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_n(t_1, \dots, t_{n-1}), \varphi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1})$ definirane sa (3.142) a $p_1^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, p_n^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1})$ su rješenje sistema

$$\begin{cases} F(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t), p_1^{(0)}(t), \dots, p_n^{(0)}(t)) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}(t)}{\partial t_1} = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t_1}, \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{n+1}(t)}{\partial t_{n-1}} = \sum_{i=1}^n p_i^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_i(t)}{\partial t_{n-1}}. \end{cases}$$

Kao rezultat rješavanja Cauchyjevog problema za karakteristični sistem dobivamo funkcije $u = u(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, $x_i = x_i(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$).

Definicija 3.4.5. *Krivu*

$$\begin{aligned}
 x_1 &= x_1(t_1, \dots, t_{n-1}, s), \\
 x_2 &= x_2(t_1, \dots, t_{n-1}, s), \\
 &\vdots \\
 x_n &= x_n(t_1, \dots, t_{n-1}, s),
 \end{aligned}$$

za fiksno $t = (t_1, \dots, t_{n-1})$ zovemo *karakteristikom*.

Rješenje $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Cauchyjevog problema (3.141)-(3.142) ćemo dobiti eliminacijom parametara iz funkcija $u = u(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, $x_i = x_i(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$). Na osnovu teorema o implicitno zadatoj funkciji za to je dovoljno da je

$$J(t_1, \dots, t_{n-1}, s) \equiv \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(t_1, t_2, \dots, t_n)} = \begin{vmatrix} F_{p_1} & F_{p_2} & \dots & F_{p_n} \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \frac{\partial x_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

Lako je vidjeti da je

$$J(t_1, \dots, t_{n-1}, 0) = \begin{vmatrix} F_{p_1}^{(0)} & F_{p_2}^{(0)} & \dots & F_{p_n}^{(0)} \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_1} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \frac{\partial \varphi_1}{\partial t_{n-1}} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial t_{n-1}} & \dots & \frac{\partial \varphi_n}{\partial t_{n-1}} \end{vmatrix},$$

gdje je

$$F_{p_i}^{(0)} = F_{p_i}(\varphi_1(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, \varphi_{n+1}(t_1, \dots, t_{n-1}), p_1^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1}), \dots, p_n^{(0)}(t_1, \dots, t_{n-1})),$$

za $i = 1, 2, \dots, n$.

Teorem 3.4.2. *Pretpostavimo da je za neku tačku $(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}) \in \mathbb{R}^{n-1}$ zadovoljen uvjet*

$$J(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}, 0) \neq 0.$$

Tada rješenje $u = u(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, $x_i = x_i(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, ($i = 1, 2, \dots, n$) karakterističnog sistema sa početnim uvjetima (3.144) daje rješenje $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Cauchyjevog problema (3.141)-(3.142) u nekoj okolini tačke

$$(\varphi_1(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}), \dots, \varphi_n(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)})).$$

Dokaz. Na osnovu sistema (3.143), imamo

$$\begin{aligned} \frac{dF}{ds} &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{dx_i}{ds} + F_u \frac{du}{ds} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{dp_i}{ds} \\ &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} F_{p_i} + F_u \sum_{i=1}^n p_i F_{p_i} - \sum_{i=1}^n F_{p_i} (F_u p_i + F_{x_i}) \equiv 0 \end{aligned}$$

Ovo znači da je funkcija $F(x_1(t, s), \dots, x_n(t, s), u(t, s), p_1(t, s), \dots, p_n(t, s))$ integral sistema (3.143). Na osnovu početnih uvjeta, imamo

$$\begin{aligned} F(x_1(t, 0), \dots, x_n(t, 0), u(t, 0), p_1(t, 0), \dots, p_n(t, 0)) \\ = F(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t), \varphi_{n+1}(t), p_1^{(0)}(t), \dots, p_n^{(0)}(t)) = 0 \end{aligned}$$

pa je

$$F(x_1(t, s), \dots, x_n(t, s), u(t, s), p_1(t, s), \dots, p_n(t, s)) = 0.$$

Da bismo dokazali teorem dovoljno je dokazati da se p_i identično podudaraju sa parcijalnim izvodima $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ za ($i = 1, 2, \dots, n$) funkcije $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

Napomenimo da je determinanta sistema

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} y_i &= \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t_1} y_i &= \frac{\partial u}{\partial t_1}, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} y_i &= \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}, \end{aligned}$$

gdje su $y_1, y_2, \dots, y_n$ nepoznate, data sa $J(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$. Kako je $J(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}, 0) \neq 0$, to postoji neka okolina tačke $(t_1^{(0)}, \dots, t_{n-1}^{(0)}, 0)$ u kojoj je determinanta ovog sistema različita od nule, pa u toj okolini ovaj sistem ima jedinstveno rješenje po $y_1, y_2, \dots, y_n$. Primjenom lančanog pravila, zamijenom varijabli $(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$ sa varijablama $(x_1, \dots, x_n)$ u funkciji $u(t_1, \dots, t_{n-1}, s)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial s} &= \frac{\partial u}{\partial s}, \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_1} &= \frac{\partial u}{\partial t_1}, \\ &\vdots \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} &= \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}, \end{aligned}$$

pa na osnovu rečenog imamo da je $y_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ za $i = 1, 2, \dots, n$. Da bismo kompletirali dokaz teorema potrebno je da dokažemo da su izrazi

$$\begin{aligned} U_0 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial s} p_i - \frac{\partial u}{\partial s}, \\ U_1 &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t_1} p_i - \frac{\partial u}{\partial t_1}, \\ &\vdots \\ U_n &\equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} p_i - \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}}, \end{aligned}$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednadžbe sa više od dvije nezavisne varijable

identički jednaki nuli u posmatranoj okolini. Zaista, na osnovu (3.143) imamo da je $U_0 \equiv 0$ i

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial s} - \frac{\partial U_0}{\partial t_1} &= \sum_{i=1}^n (F_u p_i + F_{x_i}) \frac{\partial x_i}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial U_2}{\partial s} - \frac{\partial U_0}{\partial t_2} &= \sum_{i=1}^n (F_u p_i + F_{x_i}) \frac{\partial x_i}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_2}, \\ &\vdots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial s} - \frac{\partial U_0}{\partial t_{n-1}} &= \sum_{i=1}^n (F_u p_i + F_{x_i}) \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_{n-1}}.\end{aligned}\tag{3.145}$$

Kako je

$$\begin{aligned}F(x_1(t_1, \dots, t_{n-1}, s), \dots, x_n(t_1, \dots, t_{n-1}, s), u(t_1, \dots, t_{n-1}, s), \\ p_1(t_1, \dots, t_{n-1}, s), \dots, p_n(t_1, \dots, t_{n-1}, s)) = 0,\end{aligned}$$

diferenciranjem po $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}$ dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial t_1} &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_1} + F_u \frac{\partial u}{\partial t_1} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_1} = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial t_2} &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_2} + F_u \frac{\partial u}{\partial t_2} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_2} = 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial F}{\partial t_{n-1}} &= \sum_{i=1}^n F_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} + F_u \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}} + \sum_{i=1}^n F_{p_i} \frac{\partial p_i}{\partial t_{n-1}} = 0.\end{aligned}$$

Koristeći prethodno, jednadžbe (3.145) se mogu napisati u obliku

$$\begin{aligned}\frac{\partial U_1}{\partial s} &= F_u \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_1} - F_u \frac{\partial u}{\partial t_1} = -F_u U_1, \\ \frac{\partial U_2}{\partial s} &= F_u \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_2} - F_u \frac{\partial u}{\partial t_2} = -F_u U_2, \\ &\vdots \\ \frac{\partial U_{n-1}}{\partial s} &= F_u \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial x_i}{\partial t_{n-1}} - F_u \frac{\partial u}{\partial t_{n-1}} = -F_u U_{n-1}.\end{aligned}$$

Oдавde imamo da je

$$U_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, s) = U_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0) e^{\int_0^s F'_u dr},$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

za $i = 1, 2, \dots, n-1$. Kako je $U_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, 0) = 0$ ako i samo ako je

$$\frac{\partial \varphi_{n+1}(t)}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^n p_k^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_k(t)}{\partial t_i},$$

to dobivamo da je $U_i(t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, s) \equiv 0$ u posmatranoj okolini. Ovim smo dokazali da je $p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$ za $i = 1, 2, \dots, n$. $\square$

Na sljedećem primjeru ćemo demonstrirati prethodno izloženo.

Primjer 3.4.6. Naći rješenje Cauchyjevog problema

$$\begin{cases} x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2 + u = 0, \\ x_1 + x_2 = u, \\ x_3 = x_1 x_2. \end{cases}$$

Rješenje. Stavimo

$$F(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3) = x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2 + u.$$

Tada je karakteristični sistem dat sa

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{2x_1 p_1} = \frac{dx_2}{2x_2 p_2} = \frac{dx_3}{2x_3 p_3} &= \frac{du}{2(x_1 p_1^2 + x_2 p_2^2 + x_3 p_3^2)} \\ &= \frac{-dp_1}{p_1(p_1 + 1)} = \frac{-dp_2}{p_2(p_2 + 1)} = \frac{-dp_3}{p_3(p_3 + 1)} = ds. \end{aligned}$$

Iz sistema imamo da je

$$\frac{-dp_i}{p_i(p_i + 1)} = ds, \quad (i = 1, 2, 3).$$

Integriranjem dobivamo da je

$$\left| \frac{C_i p_i}{P_i + 1} \right| = e^{-s} \Rightarrow p_i(s) = \frac{1}{C_i e^s - 1}, \quad C_i \neq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Odredimo konstante C_i tako da je $p_i(0) = p_i^{(0)}$. Iz $p_i(0) = \frac{1}{C_i - 1} = p_i^{(0)}$ imamo

da je $C_i = 1 + \frac{1}{p_i^{(0)}}$, pa je

$$p_i(s) = \frac{p_i^{(0)}}{(p_i^{(0)} + 1)e^s - p_i^{(0)}}.$$

Pored toga, iz sistema imamo da je

$$\frac{dx_i}{2x_i p_i} = ds \Rightarrow \frac{dx_i}{x_i} = 2 \frac{p_i^{(0)}}{(p_i^{(0)} + 1)e^s - p_i^{(0)}} ds,$$

3.4 Nelinearne parcijalne diferencijalne jednačbe sa više od dvije nezavisne varijable

pa integriranjem dobivamo

$$\ln \left| \frac{x_i}{D_i} \right| = 2 \int \frac{p_i^{(0)}}{(p_i^{(0)} + 1)e^s - p_i^{(0)}} ds = -2s + 2 \ln |p_i^{(0)} - (1 + p_i^{(0)})e^s|,$$

odakle slijedi

$$x_i(s) = D_i e^{-2s + 2 \ln |p_i^{(0)} - (1 + p_i^{(0)})e^s|}, \quad i = 1, 2, 3,$$

gdje su $D_i \neq 0$ ($i = 1, 2, 3$) konstante. Odredimo konstante D_i tako da je $x_i(0) = x_i^{(0)}$. Kako je $x_i(0) = D_i$, to je $D_i = x_i^{(0)}$, pa je

$$x_i(s) = x_i^{(0)} e^{-2s + 2 \ln |p_i^{(0)} - (1 + p_i^{(0)})e^s|} = x_i^{(0)} e^{-2s} \left(p_i^{(0)} - (1 + p_i^{(0)})e^s \right)^2, \quad i = 1, 2, 3.$$

Kako je $F(x_1, x_2, x_3, u, p_1, p_2, p_3) = 0$ prvi integral karakterističnog sistema, to je

$$u(s) = -x_1(s)p_1^2(s) - x_2(s)p_2^2(s) - x_3(s)p_3^2(s).$$

Stavimo da je $x_1 = \varphi_1(t_1, t_2) = t_1$ i $x_2 = \varphi_2(t_1, t_2) = t_2$. Tada iz početnih uvjeta imamo $x_3 = \varphi_3(t_1, t_2) = t_1 t_2$ i $u = \varphi_4(t_1, t_2) = t_1 + t_2$. Odredimo funkcije $p_1^{(0)}(t_1, t_2)$, $p_2^{(0)}(t_1, t_2)$ i $p_3^{(0)}(t_1, t_2)$ iz sistema

$$\begin{cases} F(\varphi_1(t), \varphi_3(t), \varphi_3(t), \varphi_4(t), p_1^{(0)}(t), p_2^{(0)}(t), p_3^{(0)}(t)) = 0, \\ \frac{\partial \varphi_4(t)}{\partial t_1} = p_1^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_1} + p_2^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_1} + p_3^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial t_1}, \\ \frac{\partial \varphi_4(t)}{\partial t_2} = p_1^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_1(t)}{\partial t_2} + p_2^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_2(t)}{\partial t_2} + p_3^{(0)}(t) \frac{\partial \varphi_3(t)}{\partial t_2}, \end{cases}$$

koji je ekvivalentan sa sistemom

$$\begin{cases} t_1(p_1^{(0)}(t_1, t_2))^2 + t_2(p_2^{(0)}(t_1, t_2))^2 + t_1 t_2 (p_3^{(0)}(t_1, t_2))^2 + t_1 + t_2 = 0, \\ 1 = p_1^{(0)}(t_1, t_2) + t_2 p_3^{(0)}(t_1, t_2), \\ 1 = p_2^{(0)}(t_1, t_2) + t_1 p_3^{(0)}(t_1, t_2), \end{cases}$$

Rješenje ovog sistema je

$$\begin{aligned} p_1^{(0)}(t_1, t_2) &= \frac{t_1(t_1 - t_2 + 2) \mp \sqrt{2} \sqrt{-t_1 t_2 (t_1(t_1 + 2) + t_2(t_2 + 2))}}{t_1(t_1 + t_2 + 2)}, \\ p_2^{(0)}(t_1, t_2) &= \frac{t_2(t_2 - t_1 + 2) \mp \sqrt{2} \sqrt{-t_1 t_2 (t_1(t_1 + 2) + t_2(t_2 + 2))}}{t_2(t_1 + t_2 + 2)}, \\ p_3^{(0)}(t_1, t_2) &= \frac{2t_1 t_2 \pm \sqrt{2} \sqrt{-t_1 t_2 (t_1(t_1 + 2) + t_2(t_2 + 2))}}{t_1 t_2 (t_1 + t_2 + 2)}. \end{aligned}$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Rješenje Cauchyjevog problema dobivamo zamjenom $x_i^{(0)}$ sa $\varphi_i(t_1, t_2)$ i $p_i^{(0)}$ sa $p_i^{(0)}(t_1, t_2)$ u jednačbama

$$\begin{aligned} x_1(s) &= x_1^{(0)} e^{-2s} \left(p_1^{(0)} - (1 + p_1^{(0)}) e^s \right)^2, \\ x_2(s) &= x_2^{(0)} e^{-2s} \left(p_2^{(0)} - (1 + p_2^{(0)}) e^s \right)^2, \\ x_3(s) &= x_3^{(0)} e^{-2s} \left(p_3^{(0)} - (1 + p_3^{(0)}) e^s \right)^2, \\ u(s) &= -x_1(s) \left(\frac{p_1^{(0)}}{(p_1^{(0)} + 1) e^s - p_1^{(0)}} \right)^2 - x_2(s) \left(\frac{p_2^{(0)}}{(p_2^{(0)} + 1) e^s - p_2^{(0)}} \right)^2 \\ &\quad - x_3(s) \left(\frac{p_3^{(0)}}{(p_3^{(0)} + 1) e^s - p_3^{(0)}} \right)^2, \end{aligned}$$

pa dobivamo rješenje Cauchyjevog problema u parametarskom obliku

$$\begin{aligned} x_1(t_1, t_2, s) &= t_1 e^{-2s} \left(p_1^{(0)}(t_1, t_2) - (1 + p_1^{(0)}(t_1, t_2)) e^s \right)^2, \\ x_2(t_1, t_2, s) &= t_2 e^{-2s} \left(p_2^{(0)}(t_1, t_2) - (1 + p_2^{(0)}(t_1, t_2)) e^s \right)^2, \\ x_3(t_1, t_2, s) &= t_1 t_2 e^{-2s} \left(p_3^{(0)}(t_1, t_2) - (1 + p_3^{(0)}(t_1, t_2)) e^s \right)^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(t_1, t_2, s) &= -x_1(t_1, t_2, s) \left(\frac{p_1^{(0)}(t_1, t_2)}{(p_1^{(0)}(t_1, t_2) + 1) e^s - p_1^{(0)}(t_1, t_2)} \right)^2 \\ &\quad - x_2(t_1, t_2, s) \left(\frac{p_2^{(0)}(t_1, t_2)}{(p_2^{(0)}(t_1, t_2) + 1) e^s - p_2^{(0)}(t_1, t_2)} \right)^2 \\ &\quad - x_3(t_1, t_2, s) \left(\frac{p_3^{(0)}(t_1, t_2)}{(p_3^{(0)}(t_1, t_2) + 1) e^s - p_3^{(0)}(t_1, t_2)} \right)^2. \end{aligned}$$

◆

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Njemački matematičar J. F. Pfaff je proučavao specifičnu vrstu diferencijalnih formi oblika

$$P(x, y, z, \dots) dx + Q(x, y, z, \dots) dy + R(x, y, z, \dots) dz + \dots,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednađžba

gdje su $P, Q, R, \dots$ funkcije više varijabli. Ovi izrazi predstavljaju osnovu onoga što danas nazivamo Pfaffovim diferencijalnim jednađžbama. Pfaff je dao važne doprinose u klasifikaciji takvih jednađžbi i proučavanju njihovih rješenja. Pfaffova diferencijalna jednađžba ima značajnu ulogu u matematici jer je povezana s teorijom diferencijalnih formi, koja je kasnije formalizovana kroz rad matematičara poput É. Cartana. Cartan je proširio i generalizovao Pfaffove ideje, povezujući ih s modernom geometrijom i teorijom integrabilnosti. Pfaffove diferencijalne forme i jednađžbe predstavljaju važan alat u primjenama matematike u različitim naučnim disciplinama. Povezuju se sa linijskim integralima, poput određivanja rada u fizici, i omogućavaju aksiomatsku formulaciju temelja termodinamike, koju je razvio Carathéodory. Osim toga, Pfaffove diferencijalne jednađžbe nalaze primjenu u problemima određivanja ortogonalnih trajektorija. U brojnim granama inženjerstva i prirodnih nauka često se koriste u rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednađžbi.

Izraz oblika

$$\sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i$$

naziva se Pfaffova diferencijalna forma, a jednađžba

$$\sum_{i=1}^n F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_i = 0$$

je poznata pod imenom Pfaffova diferencijalna jednađžba, pri čemu su F_i , $i = 1, 2, \dots, n$, funkcije n nezavisnih varijabli $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Važno je napomenuti da postoji temeljna razlika između Pfaffovih diferencijalnih jednađžbi sa dvije varijable i onih sa većim brojem varijabli. U ovom poglavlju ćemo se detaljno baviti rješavanjem Pfaffovih diferencijalnih jednađžbi sa tri varijable za koje ćemo pokazati da se problem njihovog rješavanja svodi na problem rješavanja sistema parcijalnih diferencijalnih jednađžbi.

Međutim, prije toga ćemo se kratko osvrnuti na Pfaffove diferencijalne jednađžbe sa dvije varijable.

3.5.1 Pfaffova diferencijalna jednađžba sa dvije varijable

U slučaju dvije varijable x i y , Pfaffova diferencijalna jednađžba glasi

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \quad (3.146)$$

gdje su P i Q funkcije koje zavise od x i y . Cilj je pronaći rješenje oblika

$$\phi(x, y) = C, \quad (3.147)$$

pri čemu smo sa C označili proizvoljnu konstantu, što nam predstavlja jednađžbu jednoparametarske familije krivih u ravni, čija je tangenta u svakoj tački određena Pfaffovom diferencijalnom jednađžbom.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Ako su P i Q takvi da je diferencijalna forma $Pdx + Qdy$ egzaktna ili integrabilna, tj. ako se može napisati u obliku $d\phi$, tada se jednačba (3.146) može napisati kao

$$d\phi(x, y) = \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y)dy = 0.$$

Iz teorije običnih diferencijalnih jednačbi znamo da je tada funkcija ϕ data sa

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x, t)dt.$$

U suprotnom, tj. ako $Pdx + Qdy$ nije egzaktna forma, diferenciranjem rješenja (3.147) dobivamo

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y)dy = 0.$$

Oдавде i iz (3.146) slijedi da je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{P}{Q} = -\frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial y}}$$

tj.

$$\frac{P}{Q} = \frac{\frac{\partial\phi}{\partial x}}{\frac{\partial\phi}{\partial y}},$$

odakle slijedi da je

$$\frac{1}{P} \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{1}{Q} \frac{\partial\phi}{\partial y}. \quad (3.148)$$

Označimo zajednički omjer u (3.148) sa $\mu(x, y)$. Tada je

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y) &= \mu(x, y)P(x, y), \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y) &= \mu(x, y)Q(x, y). \end{aligned}$$

Množenjem obje strane jednačbe (3.146) sa $\mu(x, y)$ dobivamo

$$\mu(x, y)P(x, y)dx + \mu(x, y)Q(x, y)dy = 0,$$

ili

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y)dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y)dy = 0,$$

odakle vidimo da jednačba (3.146) postaje egzaktna. Funkciju $\mu(x, y)$ zovemo integracioni faktor, i ona nam omogućava da diferencijalna forma postane egzaktna. Rješenje odgovarajuće diferencijalne jednačbe je dato opet u obliku (3.147), pri čemu je

$$\phi(x, y) = \int_{x_0}^x \mu(t, y_0)P(t, y_0)dt + \int_{y_0}^y \mu(x, t)Q(x, t)dt.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednađžba

Iako vidimo da u ovom slučaju postoji rješenje odgovarajuće diferencijalne jednađžbe, istaknimo da pronalazak integracionog faktora nije nimalo lagan zadatak, i najčešće ga je moguće odrediti samo za neke specijalne tipove diferencijalnih jednađžbi, dok za većinu to nije moguće uraditi.

3.5.2 O Pfaffovoj diferencijalnoj jednađžbi sa tri varijable

Pfaffova diferencijalna jednađžba sa tri varijable ima oblik

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = 0, \quad (3.149)$$

gdje su P , Q i R funkcije od x , y i z . Pfaffovu diferencijalnu jednađžbu (3.149) možemo napisati u vektorskom obliku kao

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

gdje je $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ i $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

Za Pfaffovu diferencijalnu jednađžbu (3.149) zanima nas rješenje oblika

$$f(x, y, z) = C, \quad (3.150)$$

gdje je C proizvoljna konstanta, što predstavlja jednoparametarsku familiju površi u trodimenzionalnom prostoru. Ako izraz (3.150) napišemo u obliku

$$z = g(x, y), \quad (3.151)$$

i izraz (3.149) u obliku

$$dz = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)} dx - \frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)} dy, \quad (3.152)$$

primjećujemo da izraz (3.151) identički zadovoljava jednađžbu (3.152), tako da imamo

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{P(x, y, z)}{R(x, y, z)}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{Q(x, y, z)}{R(x, y, z)},$$

što predstavlja sistem parcijalnih diferencijalnih jednađžbi prvog reda. Vidimo da se Pfaffova diferencijalna jednađžba može tretirati kao sistem parcijalnih diferencijalnih jednađžbi.

Slično kao i u prethodnom slučaju, ako postoji funkcija $u(x, y, z)$ takva da vrijedi

$$du(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

tada se kaže da je jednađžba (3.149) egzaktna, a njeno rješenje je dato u obliku

$$u(x, y, z) = C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta, i predstavlja familiju površi u trodimenzionalnom prostoru. Ako jednađžba (3.149) nije egzaktna, kao i u slučaju sa dvije varijable,

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

moгуće je pronaći funkciju $\mu(x, y, z)$ (integracioni faktor), i funkciju $u(x, y, z)$ takve da vrijedi

$$\mu P dx + \mu Q dy + \mu R dz = du.$$

Sada ćemo ilustrirati kako se može formirati Pfaffova diferencijalna jednačba ako je zadata jednoparametarska familija površi u trodimenzionalnom prostoru, koja (familija) predstavlja njeno rješenje.

Primjer 3.5.1. Naći Pfaffovu diferencijalnu jednačbu koja odgovara familiji površi

$$x^3 z + x^2 y = C,$$

gdje je C parametar.

Rješenje. Totalni diferencijal gornjeg izraza daje

$$d(x^3 z + x^2 y) = 0,$$

odnosno,

$$x^3 dz + 3x^2 z dx + x^2 dy + 2xy dx = 0,$$

odakle slijedi

$$(3x^2 z + 2xy)dx + x^2 dy + x^3 dz = 0,$$

i nakon dijeljenja sa $x \neq 0$ dobivamo da tražena Pfaffova diferencijalna jednačba koja odgovara zadatoj familiji površi glasi

$$(3xz + 2y)dx + x dy + x^2 dz = 0.$$



Primjer 3.5.2. Naći Pfaffovu diferencijalnu jednačbu koja odgovara familiji površi

$$xy = C(a - z),$$

gdje je C parametar.

Rješenje. Data familija površi je jednoparametarska familija površi i može se zapisati kao

$$\frac{xy}{a - z} = C.$$

Totalni diferencijal gornjeg izraza daje

$$d\left(\frac{xy}{a - z}\right) = 0,$$

odnosno,

$$\frac{(a - z)d(xy) - xy d(a - z)}{(a - z)^2} = 0,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

odakle slijedi da je tražena Pfaffova diferencijalna jednačba koja odgovara zadatoj porodici površi data sa

$$(a - z)(x dy + y dx) + xy dz = 0.$$

◆

3.5.3 Integrabilnost Pfaffovih diferencijalnih jednačbi

U ovoj sekciji ćemo izvesti potrebne i dovoljne uvjete integrabilnosti Pfaffove diferencijalne jednačbe i pokazati da ako je Pfaffova diferencijalna jednačba integrabilna, nije potrebno eksplicitno odrediti integracioni faktor kako bi se dobilo njeno rješenje. Naime, određivanje integracionog faktora često može biti složenije od samog pronalaženja rješenja problema.

Prije nego što odredimo uvjete pod kojima je Pfaffova diferencijalna jednačba (3.149) integrabilna, dokazat ćemo dva rezultata u obliku sljedeće dvije leme koje će nam biti korisne u izvođenju tih uvjeta.

Lema 3.5.1. *Potreban i dovoljan uvjet za postojanje relacije oblika $F(u, v) = 0$ između dvije funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$, koje ne sadrže x i y eksplicitno, jeste da je Jakobijan od u, v u odnosu na x i y nula, odnosno*

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Dokaz.

Uvjet potreban:

Budući da je $F(u, v) = 0$ identitet, diferenciranjem po x i y dobivamo:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Eliminacijom $\frac{\partial F}{\partial v}$ dolazimo do:

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Budući da F zavisi od obje varijable u i v , slijedi da je $\frac{\partial F}{\partial u} \neq 0$, pa je

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0.$$

Uvjet dovoljan:

Ako se eliminira y iz $u = u(x, y)$ i $v = v(x, y)$, dobivamo relaciju oblika

$$F(u, v, x) = 0.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Diferenciranjem u odnosu na x i y dobivamo:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Eliminacijom $\frac{\partial F}{\partial v}$, dolazimo do:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 0, \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Pošto je $v = v(x, y)$, slijedi da $\frac{\partial v}{\partial y} \neq 0$, pa je $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$, tj. F ne sadrži x eksplicitno. Slično, F ne sadrži y eksplicitno. $\square$

Lema 3.5.2. *Neka je $\mathbf{X}$ vektorska funkcija od x, y, z takva da vrijedi $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$, te μ funkcija od x, y, z . Tada vrijedi:*

$$(\mu \mathbf{X}) \cdot \{\nabla \times (\mu \mathbf{X})\} = 0.$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{X} = (P, Q, R)$. Tada vrijedi:

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{X}) \cdot \{\nabla \times (\mu \mathbf{X})\} &= \mu P \left(\frac{\partial(\mu R)}{\partial y} - \frac{\partial(\mu Q)}{\partial z} \right) + \mu Q \left(\frac{\partial(\mu P)}{\partial z} - \frac{\partial(\mu R)}{\partial x} \right) \\ &\quad + \mu R \left(\frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu P)}{\partial y} \right) \\ &= \mu^2 \left\{ P \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + Q \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right\} \\ &\quad + \mu \left\{ PR \frac{\partial \mu}{\partial y} - PQ \frac{\partial \mu}{\partial z} + PQ \frac{\partial \mu}{\partial z} - QR \frac{\partial \mu}{\partial x} + QR \frac{\partial \mu}{\partial x} - PR \frac{\partial \mu}{\partial y} \right\} \\ &= \mu^2 \mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0. \end{aligned}$$

$\square$

Sada se vraćamo na Pfaffovu diferencijalnu jednačbu (3.149). Sve takve jednačbe nisu uvijek integrabilne. Međutim, ako možemo naći funkciju $\mu(x, y, z)$ takvu da izraz $\mu(Pdx + Qdy + Rdz)$ bude totalni diferencijal $d\phi(x, y, z)$, tada jednačba (3.149) postaje integrabilna. Funkcija $\mu(x, y, z)$ naziva se integracioni faktor, a funkcija $\phi(x, y, z)$ naziva se primitivnom funkcijom diferencijalne jednačbe (3.149).

Teorem 3.5.1. *Potreban i dovoljan uvjet da Pfaffova diferencijalna jednačba $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$ bude integrabilna je da vrijedi*

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot } \mathbf{X} = \mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0, \quad (3.153)$$

gdje je $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ i $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednažba

Dokaz.

Uvjet potreban:

Pretpostavimo da je jednažba $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$, tj. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, integrabilna. Tada postoji površ oblika $\phi(x, y, z) = C$, gdje je ϕ neprekidno diferencijabilna funkcija i C konstanta, takva da je

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0$$

i postoji integracioni faktor $\mu(x, y, z)$ takav da vrijedi:

$$\mu P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \text{tj.} \quad \mu \mathbf{X} = \nabla \phi.$$

Slijedi da je $\nabla \times (\mu \mathbf{X}) = \nabla \times (\nabla \phi) = 0$. Prema Lemi 3.5.2, imamo $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$.

Uvjet dovoljan:

Pretpostavimo da je z konstanta. Tada se diferencijalna jednažba $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$ reducira na diferencijalnu jednažbu prvog reda $P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy = 0$, koja ima rješenje oblika $\phi(x, y, z) = C_1$, gdje je C_1 konstanta koja može uključivati z . Također, postoji funkcija $\mu(x, y, z)$ takva da vrijedi:

$$\mu P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}. \quad (3.154)$$

Množenjem jednažbe $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ integracionim faktorom μ dobivamo $\mu(Pdx + Qdy + Rdz) = 0$ odnosno

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \left(\mu R - \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) dz = 0, \quad \text{tj.} \quad d\phi + \psi dz = 0, \quad (3.155)$$

gdje je

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \quad \text{i} \quad \psi = \mu R - \frac{\partial \phi}{\partial z}. \quad (3.156)$$

Budući da je $\mu \mathbf{X} = (\mu P, \mu Q, \mu R) = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} + \psi \right) = \nabla \phi + (0, 0, \psi)$, slijedi:

$$\mu \mathbf{X} \cdot \{ \nabla \times (\mu \mathbf{X}) \} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} + \psi \right) \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x}, 0 \right) = \frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)}.$$

Prema Lemi 3.5.2, iz $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ slijedi $\mu \mathbf{X} \cdot \{ \nabla \times (\mu \mathbf{X}) \} = 0$, pa vrijedi $\frac{\partial(\phi, \psi)}{\partial(x, y)} = 0$. Također, prema Lemi 3.5.1, postoji relacija između ϕ i ψ , koja je nezavisna od x i y , ali ne nužno od z . Drugim riječima, ψ je funkcija samo od ϕ i z , tj. $\psi = \psi(\phi, z)$. Tada iz jednažbe (3.155) dobivamo diferencijalnu jednažbu prvog reda

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} + \psi(\phi, z) = 0,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

koja ima rješenje oblika $\Phi(\phi, z) = C$, pri čemu je C proizvoljna konstanta. Zamjenom ϕ u rješenje $\Phi(\phi, z) = C$ dobivamo rješenje Pfaffove diferencijalne jednačbe u obliku $F(x, y, z) = C$. Stoga je jednačba $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$ integrabilna. $\square$

U prethodnom teroemu naveden je potreban i dovoljan uvjet integrabilnosti u vektorskom obliku. Uvjet (3.153) u skalarnom obliku glasi

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

Teorem 3.5.2. *Ako diferencijalna jednačba $Pdx + Qdy + Rdz = 0$ ima integracioni faktor, tada se može naći beskonačno mnogo takvih faktora.*

Dokaz. Neka je $\mu(x, y, z)$ integracioni faktor zadate jednačbe. Tada postoji funkcija $\phi(x, y, z)$ takva da vrijedi:

$$\mu P = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad \mu Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \mu R = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Sada, ako je $\Phi(\phi)$ proizvoljna funkcija od ϕ , možemo zapisati:

$$\mu \frac{d\Phi}{d\phi} (Pdx + Qdy + Rdz) = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{d\phi} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz \right) = 0.$$

Odatle slijedi:

$$d\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\phi) = \text{const.}$$

Dakle, ako je μ integracioni faktor koji daje rješenje $\phi = \text{const}$ i budući da je Φ proizvoljna funkcija od ϕ , postoji beskonačno mnogo integracionih faktora. $\square$

U narednim primjerima ćemo pokazati kako provjeravamo da li je Pfaffova diferencijalna jednačba integrabilna, i kako je rješavamo uz pomoć integracionog faktora.

Primjer 3.5.3. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$ydx + xdy + 2zdz = 0$$

integrabilna i pronaći njen integral.

Rješenje. Kako je

$$\mathbf{X} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + 2z\mathbf{k},$$

to je rotor vektorskog polja $\mathbf{X}$ dat sa

$$\text{rot } \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 2z \end{vmatrix} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k},$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

pa je

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot } \mathbf{X} = 0.$$

Dakle, uvjet integrabilnosti za datu jednačbu je zadovoljen. Sada, ako posmatramo z kao konstantu, tada se data jednačba svodi na

$$ydx + xdy = 0 \Rightarrow \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

koja ima rješenje

$$\phi(x, y, z) = xy = C_1.$$

Koristeći jednačbu (3.154), integracioni faktor $\mu(x, y, z)$ dat je sa

$$\mu = \frac{1}{P} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot y = 1.$$

Iz jednačbe (3.156) imamo

$$\psi = \mu R - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 2z.$$

Dakle, jednačba $d\phi + \psi dz = 0$ u ovom slučaju se svodi na

$$d\phi + 2zdz = 0 \quad \text{odnosno} \quad d(\phi + z^2) = 0,$$

što ima rješenje $\phi + z^2 = C_2$, i zamjenjujući ϕ dobivamo da je rješenje date jednačbe

$$\boxed{xy + z^2 = C_2.}$$

U ovom rješenju C_2 je konstanta.



Primjer 3.5.4. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy + (y^2 - xy)dz = 0$$

integrabilna i pronaći njen integral.

Rješenje. Kako je $P = y^2 + yz$, $Q = xz + z^2$, $R = y^2 - xy$, to je

$$\mathbf{X} = (y^2 + yz)\mathbf{i} + (xz + z^2)\mathbf{j} + (y^2 - xy)\mathbf{k},$$

pa je

$$\text{rot } \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 + yz & xz + z^2 & y^2 - xy \end{vmatrix} = 2(-x + y - z)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2y\mathbf{k}.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Vrijedi da je

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot } \mathbf{X} = (y^2 + yz) \cdot 2(-x + y - z) + 2(xz + z^2)y - 2(y^2 - xy)(-y) = 0.$$

Dakle, uvjet integrabilnosti za datu jednačbu je zadovoljen. Sada, ako posmatramo z kao konstantu, tada se data jednačba svodi na

$$(y^2 + yz)dx + (xz + z^2)dy = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x+z} + \frac{dy}{y} - \frac{dy}{y+z} = 0,$$

koja ima rješenje

$$\phi(x, y, z) = \frac{(x+z)y}{y+z} = C_1.$$

Koristeći jednačbu (3.154), integracioni faktor $\mu(x, y, z)$ dat je sa

$$\mu = \frac{1}{P} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{1}{y(y+z)} \frac{y}{(y+z)} = \frac{1}{(y+z)^2}.$$

Iz jednačbe (3.156) imamo

$$\psi = \mu R - \frac{\partial \phi}{\partial z} = \frac{1}{(y+z)^2} (y^2 - xy) - \frac{(y+z) \cdot y - (x+z) \cdot y}{(y+z)^2} = 0.$$

Dakle, jednačba $d\phi + \psi dz = 0$ u ovom slučaju se svodi na

$$d\phi = 0,$$

što ima rješenje $\phi = C$, tj. rješenje date jednačbe je

$$\boxed{y(x+z) = C(y+z)}.$$

U ovom rješenju C je konstanta.



Primjer 3.5.5. Dokazati da je jednačba $(yz + z^2)dx - zxdy + xydz = 0$ integrabilna i odrediti njenu primitivnu funkciju.

Rješenje. Imamo $\mathbf{X} = (yz + z^2, -zx, xy)$ i vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{X} = (2x, 2z, -2z).$$

Tada

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = (yz + z^2)(2x) + (-zx)(2z) + (xy)(-2z) = 0.$$

Dakle, zadata jednačba je integrabilna.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Ako uzmemo da je x konstanta, tada se jednačba reducira na:

$$-zxdy + xydz = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = \frac{dz}{z} \Rightarrow y = C_1 z.$$

Stoga je $\phi(x, y, z) = \frac{y}{z} = C_1$, i vrijedi

$$\mu = \frac{1}{Q} \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{1}{zx} \cdot \frac{1}{z} = -\frac{1}{z^2 x}, \quad \psi = \mu P - \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{y+z}{zx}.$$

Dakle, jednačba $d\phi + \psi dx = 0$ dovodi nas do relacije:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + \psi dx = 0,$$

odnosno

$$\frac{1}{z} dy - \frac{y}{z^2} dz - \frac{y+z}{zx} dx = 0.$$

ili

$$xz d(y+z) = (y+z) d(xz).$$

Integrirajući, imamo $(y+z) = Cxz$, gdje je C konstanta. Dakle, tražena primitivna funkcija je

$y+z = Cxz.$

◆

3.5.4 Metode integracije

U ovoj sekciji ćemo izložiti nekoliko metoda rješavanja Pfaffovih diferencijalnih jednačbi sa tri varijable x, y, z .

Metoda 1 (Metoda pogađanja rješenja)

U nekim slučajevima diferencijalna jednačba (3.149) može se riješiti metodom pogađanja rješenja. Konkretno, ako vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{X} = 0,$$

tada je vektorsko polje $\mathbf{X}$ potencijalno, tj. postoji skalarna funkcija ϕ takva da

$$\mathbf{X} = \nabla \phi.$$

U tom slučaju jednačba

$$\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

odnosno

$$\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

daje

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = 0, \quad \text{tj.} \quad d\phi = 0.$$

Otuda slijedi da je ϕ konstantna duž rješenja, pa se opće rješenje može zapisati implicitno u obliku

$$\phi(x, y, z) = \text{const.}$$

Primjer 3.5.6. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$yz \, dx - zx \, dy - y^2 \, dz = 0$$

integrabilna i odrediti njen integral.

Rješenje. Ovdje su $P = yz$, $Q = -zx$, $R = -y^2$.

Dakle,

$$\mathbf{X} = yz\mathbf{i} - zx\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}.$$

Rotor vektorskog polja je

$$\text{rot } \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & -zx & -y^2 \end{vmatrix} = (x - 2y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}.$$

Dakle,

$$\mathbf{X} \cdot \text{rot } \mathbf{X} = (yz\mathbf{i} - zx\mathbf{j} - y^2\mathbf{k}) \cdot ((x - 2y)\mathbf{i} + y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}) = 0,$$

pa je data jednačba integrabilna.

Jednačba se može zapisati kao

$$\frac{dx}{y} - \frac{x}{y^2} dy - \frac{dz}{z} = 0,$$

odnosno

$$d\left(\frac{x}{y}\right) - d(\ln |z|) = d\left(\frac{x}{y} - \ln |z|\right) = 0.$$

Dakle, integral date jednačbe je

$$\boxed{\frac{x}{y} - \ln |z| = C.}$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.5.7. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$yz \, dx + zx \, dy + xy \, dz = 0$$

integrabilna i odrediti njen integral.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Rješenje. Ovdje su $P = yz$, $Q = zx$, $R = xy$. Dakle,

$$\mathbf{X} = yz \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + xy \mathbf{k}.$$

Rotor vektorskog polja računamo kao

$$\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ yz & zx & xy \end{vmatrix} = (x - x)\mathbf{i} - (y - y)\mathbf{j} + (z - z)\mathbf{k} = 0.$$

Dakle, $\mathbf{X} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} = 0$, pa je data jednačba integrabilna.

Iz zadate jednačbe možemo odmah primijetiti da vrijedi

$$d(xyz) = 0,$$

što znači da je rješenje date jednačbe

$$\boxed{xyz = C.}$$

U ovom rješenju C je konstanta. ♦

Primjer 3.5.8. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$(x^2z - y^3)dx + 3xy^2 dy + x^3 dz = 0$$

integrabilna i odrediti njen integral.

Rješenje. Ovdje su $P = x^2z - y^3$, $Q = 3xy^2$, $R = x^3$.

Dakle,

$$\mathbf{X} = (x^2z - y^3)\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}.$$

Rotor vektorskog polja ćemo dobiti kao

$$\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2z - y^3 & 3xy^2 & x^3 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (3x^2 - x^2)\mathbf{j} + (3y^2 + 3y^2)\mathbf{k},$$

odnosno

$$\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = -2x^2\mathbf{j} + 6y^2\mathbf{k}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} &= ((x^2z - y^3)\mathbf{i} + 3xy^2\mathbf{j} + x^3\mathbf{k}) \cdot (-2x^2\mathbf{j} + 6y^2\mathbf{k}) \\ &= -6xy^2 + 6x^3y^2 = 0. \end{aligned}$$

Prema tome, data jednačba je integrabilna.

Jednačba se može zapisati kao:

$$x^2(zdx + xdz) - y^3dx + 3xy^2dy = 0,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

odnosno

$$(zdx + xdz) - \frac{y^3}{x^2}dx + \frac{3y^2}{x}dy = 0.$$

Posljednja jednačba se može napisati u obliku

$$d\left(xz + \frac{y^3}{x}\right) = 0.$$

Dakle, integral date jednačbe je

$$\boxed{xz + \frac{y^3}{x} = C.}$$

U ovom rješenju C je konstanta. ♦

Primjer 3.5.9. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$(y^2 + yz)dx + (z^2 + zx)dy + (y^2 - xy)dz = 0$$

integrabilna i pronaći njenu primitivnu funkciju.

Rješenje. Ovdje je $\mathbf{X} = (y^2 + yz, z^2 + zx, y^2 - xy)$, i vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{X} = 2(y - z - x, y, -y).$$

Dakle,

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 2((y^2 + yz)(y - z - x) + (z^2 + zx)y - (y^2 - xy)y) = 0.$$

Prema tome, data jednačba je integrabilna.

Jednačba se može zapisati kao

$$y(y + z)dx + z(z + x)dy + y(y - x)dz = 0,$$

odnosno

$$y(y + z)d(z + x) + (y + z)(z + x)dy - y(z + x)d(y + z) = 0.$$

Dijeleći obje strane posljednje jednakosti sa $y(y + z)(z + x)$, dobivamo

$$\frac{d(z + x)}{z + x} + \frac{dy}{y} - \frac{d(y + z)}{y + z} = 0.$$

Integriranjem, dobivamo

$$\boxed{y(z + x) = C(y + z).}$$

U ovom rješenju C je konstanta. ♦

Primjer 3.5.10. Provjeriti da li je jednačba

$$yz(y + z)dx + zx(x + z)dy + xy(x + y)dz = 0$$

integrabilna. Ako jeste, pronaći njenu primitivnu funkciju.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Rješenje. Imamo $\mathbf{X} = (yz(y+z), zx(x+z), xy(x+y))$, i vrijedi $\nabla \times \mathbf{X} = (0, 0, 0)$. Prema tome,

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0.$$

Dakle, data jednačba je integrabilna.

Jednačba se može zapisati kao:

$$yz(x+y+z)dx + zx(x+y+z)dy + xy(x+y+z)dz - xyz(dx+dy+dz) = 0.$$

Dijeleći obje strane s $xyz(x+y+z)$, dobivamo

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} - \frac{dz}{z} - \frac{d(x+y+z)}{x+y+z} = 0 \Rightarrow d\left(\ln \frac{xyz}{x+y+z}\right) = 0.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\ln\left(\frac{xyz}{x+y+z}\right) = \text{const},$$

tj.

$$\boxed{xyz = C(x+y+z)}.$$

U ovom rješenju C je konstanta. ♦

Metoda 2 (Metoda razdvojenih varijabli)

Ako je moguće zapisati jednačbu (3.149) u obliku $P(x)dx + Q(y)dy + R(z)dz = 0$, tada je integralna površ određena sa

$$\int P(x)dx + \int Q(y)dy + \int R(z)dz = C,$$

gdje je C konstanta.

Primjer 3.5.11. Provjeriti je li diferencijalna jednačba

$$yzdx + 2zxdy - 3xydz = 0$$

integrabilna i pronaći njenu primitivnu funkciju.

Rješenje. Ovdje je $\mathbf{X} = (yz, 2zx, -3xy)$, pa vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{X} = (-5x, 4y, z).$$

Dakle,

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = yz(-5x) + 2zx(4y) - 3xy(z) = 0.$$

Prema tome, jednačba je integrabilna.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Dijeleći obje strane jednačbe s xyz , dobivamo:

$$\frac{dx}{x} + 2\frac{dy}{y} - 3\frac{dz}{z} = 0,$$

što, nakon integracije, daje primitivnu funkciju:

$$xy^2 = Cz^3,$$

gdje je C konstanta. ◆

Primjer 3.5.12. Riješiti jednačbu

$$a^2y^2z^2 dx + b^2z^2x^2 dy + c^2x^2y^2 dz = 0.$$

Rješenje. Dijeljenjem obje strane ove jednačbe sa $x^2y^2z^2$, dobivamo:

$$\frac{a^2}{x^2} dx + \frac{b^2}{y^2} dy + \frac{c^2}{z^2} dz = 0,$$

što je u obliku pogodnom za metodu razdvojenih varijabli, pa je integral dat sa

$$\int \frac{a^2}{x^2} dx + \int \frac{b^2}{y^2} dy + \int \frac{c^2}{z^2} dz = 0,$$

odnosno

$$\boxed{\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} = C.}$$

U ovom rješenju C je konstanta. ◆

Primjer 3.5.13. Riješiti jednačbu

$$yz \ln z dx - zx \ln z dy + xy dz = 0.$$

Rješenje. Dijeljenjem obje strane sa $xyz \ln z$, dobivamo:

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} + \frac{dz}{z \ln z} = 0.$$

Jednačba je u obliku pogodnom za metodu razdvojenih varijabli. Integriranjem dobivamo

$$\ln x - \ln y + \ln(\ln z) = \ln C_1,$$

odakle slijedi

$$\ln \left(\frac{x}{y} \ln z \right) = \ln C_1,$$

odnosno

$$\boxed{y = Cx \ln z.}$$

U ovom rješenju C je konstanta. ◆

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Primjer 3.5.14. Izraziti jednačbu

$$f(z)(y dx + x dy) + f'(z)xy dz = 0,$$

gdje je $f'(z) = \frac{df}{dz}$, u obliku pogodnom za metodu razdvojenih varijabli i pronaći njenu primitivnu funkciju.

Rješenje. Datu jednačbu možemo zapisati u obliku

$$\begin{aligned} & f(z)(y dx + x dy) + f'(z)xy dz = 0 \\ \Rightarrow & \frac{y dx + x dy}{xy} + \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0 \\ \Rightarrow & \frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} + \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0. \end{aligned}$$

Jednačba je u obliku pogodnom za metodu razdvojenih varijabli. Integriranjem dobivamo:

$$\ln x + \ln y + \ln f(z) = \ln C,$$

odnosno

$$\boxed{xyf(z) = C.}$$

U ovom rješenju C je konstanta.



Metoda 3 (Metoda razdvajanja po jednoj varijabli)

Ako se Pfaffova diferencijalna jednačba (3.149) može zapisati kao

$$P(x)dx + Q(y, z)dy + R(y, z)dz = 0,$$

onda kažemo da je ona razdvojiva po varijabli x . Tada, uzimajući u obzir da je $\mathbf{X} = (P(x), Q(y, z), R(y, z))$ i da je

$$\nabla \times \mathbf{X} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, 0, 0 \right),$$

slijedi da uvjet integrabilnosti $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ implicira

$$\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}.$$

Stoga je izraz $Q dy + R dz$ diferencijal funkcije $\psi(y, z)$. Diferencijalna jednačba se može zapisati kao

$$P(x) dx + d\psi(y, z) = 0 \Rightarrow \int P(x) dx + \psi(y, z) = C.$$

Analogno postupamo i u slučaju kada se Pfaffova diferencijalna jednačba može riješiti razdvajanjem po varijabli y , odnosno, varijabli z .

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Primjer 3.5.15. Provjeriti da li je diferencijalna jednačba

$$(y^2 - z^2)(x^2 - 1) dx - 2zx dy + 2xy dz = 0$$

integrabilna i riješiti je.

Rješenje. Možemo zapisati datu jednačbu u obliku:

$$\frac{x^2 - 1}{x} dx - \frac{2z}{y^2 - z^2} dy + \frac{2y}{y^2 - z^2} dz = 0.$$

$$\text{Dakle, } \mathbf{X} = \left(\frac{x^2 - 1}{x}, -\frac{2z}{y^2 - z^2}, \frac{2y}{y^2 - z^2} \right) \text{ i}$$

$$\nabla \times \mathbf{X} = (0, 0, 0),$$

što znači da je uvjet integrabilnosti $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ zadovoljen. Prema tome, jednačba je integrabilna.

Napišimo jednačbu u obliku

$$\left(x - \frac{1}{x} \right) dx - 2 \frac{d(y/z)}{(y/z)^2 - 1} = 0.$$

Integriranjem dobivamo:

$$\frac{1}{2}x^2 - \ln x - \ln \frac{(y/z) - 1}{(y/z) + 1} = \ln C,$$

što daje

$$\boxed{y - z = C(y + z)e^{\frac{1}{2}x^2}}.$$

U ovom rješenju C je konstanta. ◆

Primjer 3.5.16. Odrediti primitivnu funkciju jednačbe

$$(x^2 - y^2) dx - 2xy dy + e^{-z} dz = 0.$$

Rješenje. Data jednačba se može razdvojiti po varijabli z .

Ovdje su $P = x^2 - y^2$ i $Q = -2xy$.

Možemo integrirati jednačbu ako P i Q zadovoljavaju uvjet integrabilnosti, tj.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0.$$

Imamo da vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}(-2xy) - \frac{\partial}{\partial y}(x^2 - y^2), \\ &= -2y - (-2y) = 0. \end{aligned}$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Dakle, data jednačba je integrabilna i može se zapisati kao

$$x^2 dx + (-y^2 dx - 2xy dy) + e^{-z} dz = 0 \Rightarrow d\left(\frac{x^3}{3}\right) + d(-xy^2) + d(-e^{-z}) = 0.$$

Dakle, rješenje je:

$$\boxed{\frac{x^3}{3} - xy^2 - e^{-z} = C.}$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.5.17. Odrediti primitivnu funkciju jednačbe

$$x(y^2 - a^2) dx + y(x^2 - z^2) dy - z(y^2 - a^2) dz = 0.$$

Rješenje. Dijeljenjem gornje jednačbe sa $(y^2 - a^2)(x^2 - z^2)$, dobivamo:

$$\frac{x dx - z dz}{x^2 - z^2} + \frac{y dy}{y^2 - a^2} = 0.$$

Dakle, data jednačba se može razdvojiti po y .

Jednačba je integrabilna ako vrijedi:

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x},$$

gdje su $P = \frac{x}{x^2 - z^2}$ i $R = \frac{-z}{x^2 - z^2}$.

Računamo parcijalne izvode

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{x}{x^2 - z^2} \right) = \frac{2xz}{(x^2 - z^2)^2},$$

$$\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-z}{x^2 - z^2} \right) = \frac{2xz}{(x^2 - z^2)^2}.$$

Dakle, $\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}$ i jednačba je integrabilna.

Jednačbu možemo zapisati kao

$$\frac{1}{2} \frac{d(x^2 - z^2)}{x^2 - z^2} + \frac{1}{2} \frac{d(y^2 - a^2)}{y^2 - a^2} = 0.$$

Integriranjem dobivamo

$$\frac{1}{2} \ln(x^2 - z^2) + \frac{1}{2} \ln(y^2 - a^2) = \frac{1}{2} \ln C.$$

Odavde slijedi

$$\boxed{(x^2 - z^2)(y^2 - a^2) = C.}$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ◆

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Metoda 4 (Metoda redukcije)

Ako se pretpostavi da je jedna od nezavisnih varijabli, recimo z , konstantna, Pfaffova diferencijalna jednačba (3.149) se svodi na $P dx + Q dy = 0$, čije se rješenje može dobiti u obliku $\phi(x, y) = c$, gdje je c nezavisno od x i y , ali može zavisiti od z . Uzimajući diferencijal od $\phi(x, y)$ i izjednačavajući ovaj izraz sa $P dx + Q dy + R dz$, određujemo c . Integriranjem $\frac{\partial c}{\partial z}$ dobivamo vrijednost c kao funkciju od z , nakon čega $\phi(x, y) = c$ daje traženo rješenje.

Primjer 3.5.18. Provjeriti integrabilnost diferencijalne jednačbe

$$x(y^2 - a^2)dx + y(x^2 - z^2)dy - z(y^2 - a^2)dz = 0$$

i riješiti je.

Rješenje. Odgovarajuće vektorsko polje Pfaffove diferencijalne jednačbe glasi

$$\mathbf{X} = (x(y^2 - a^2), y(x^2 - z^2), -z(y^2 - a^2)),$$

a rotor je dat sa

$$\nabla \times \mathbf{X} = (0, 0, 0),$$

što znači da je uvjet integrabilnosti $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$ zadovoljen. Prema tome, jednačba je integrabilna.

Pretpostavimo da je y konstanta. Tada se data jednačba svodi na:

$$x(y^2 - a^2)dx - z(y^2 - a^2)dz = 0, \quad \text{tj.} \quad x dx - z dz = 0.$$

Integriranjem dobivamo

$$\phi(x, z) = x^2 - z^2 = c,$$

gdje je c nezavisno od x i z , ali može zavisiti od y . Diferenciranjem $\phi(x, z) = c$ daje

$$x dx - \frac{1}{2} \frac{\partial c}{\partial y} dy - z dz = 0,$$

odnosno

$$x(y^2 - a^2)dx - \frac{1}{2}(y^2 - a^2) \frac{\partial c}{\partial y} dy - z(y^2 - a^2)dz = 0.$$

Poređenjem sa datom jednačbom, slijedi

$$-\frac{1}{2}(y^2 - a^2) \frac{\partial c}{\partial y} = y(x^2 - z^2),$$

odnosno

$$\frac{\partial c}{\partial y} + \frac{2cy}{y^2 - a^2} = 0.$$

Integriranjem dobivamo

$$c(y^2 - a^2) = C,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

gdje je C konstanta. Dakle, traženo rješenje je:

$$x^2 - z^2 = \frac{C}{y^2 - a^2},$$

tj.

$$(x^2 - z^2)(y^2 - a^2) = C.$$

◆

Primjer 3.5.19. Riješiti sljedeću Pfaffovu diferencijalnu jednačbu

$$yz \, dx + 2xz \, dy + xy \, dz = 0.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je jedna od varijabli, recimo y , konstanta. Tada dobivamo

$$yz \, dx + xy \, dz = 0, \quad \text{odnosno} \quad xz = \varphi(y).$$

Diferenciranje posljednje jednačbe daje

$$z \, dx + x \, dz = \varphi'(y) \, dy. \quad (3.157)$$

Uspoređujući zadatu parcijalnu diferencijalnu jednačbu i (3.157) vidimo da odgovarajuće funkcije (s istim diferencijalima) moraju biti proporcionalne, tj.

$$\frac{z}{yz} = \frac{x}{xy} = \frac{-\varphi'(y)}{2xz}.$$

Dakle, imamo

$$\frac{\varphi'(y)}{2xz} = -\frac{1}{y}, \quad \text{odnosno} \quad \varphi'(y) = -\frac{2xz}{y} = -\frac{2}{y}\varphi(y),$$

pa prema tome

$$\varphi(y) = \frac{C}{y^2}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Sada imamo $xz = \frac{C}{y^2}$, ili

$$xy^2z = C.$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta.

◆

Metoda 5 (Metoda pomoćnih jednačbi)

Ranije smo vidjeli da se uvjet integrabilnosti jednačbe $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$, dat kao $\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0$, gdje je $\mathbf{X} = (P, Q, R)$ i $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, može zapisati kao

$$P \left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) + Q \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) + R \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} \right) = 0.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Poređenjem sa jednačbom $\mathbf{X} \cdot d\mathbf{r} = 0$, tj. $Pdx + Qdy + Rdz = 0$, dobivamo

$$\frac{dx}{\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y}} = \frac{dy}{\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z}} = \frac{dz}{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}.$$

Ove jednačbe nazivaju se pomoćne jednačbe i mogu se riješiti metodama koje su ranije razmatrane.

Pretpostavimo da su $f(x, y, z) = a$ i $g(x, y, z) = b$ dva integrala ovih jednačbi, gdje su a i b konstante. Trebamo odrediti A i B tako da $A df + B dg = 0$ postane identitet datoj jednačbi. Zatim, koristeći $f = a$ i $g = b$, određujemo vrijednosti A i B , a traženo rješenje se dobiva integracijom.

Primjer 3.5.20. Provjeriti uvjete integrabilnosti i riješiti diferencijalnu jednačbu

$$z(z + y^2) dx + z(z + x^2) dy - xy(x + y) dz = 0.$$

Rješenje. Odgovarajuće vektorsko polje pridruženo datoj diferencijalnoj jednačbi glasi

$$\mathbf{X} = (P, Q, R) = (z(z + y^2), z(z + x^2), -xy(x + y))$$

pa je rotor vektorskog polja $\mathbf{X}$ dat sa

$$\nabla \times \mathbf{X} = (-2(x^2 + xy + z), 2(y^2 + xy + z), 2z(x - y)).$$

Kako je

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) &= -2z(z + y^2)(x^2 + xy + z) + 2z(z + x^2)(y^2 + xy + z) \\ &\quad - 2zxy(x + y)(x - y) = 0, \end{aligned}$$

uvjet integrabilnosti je zadovoljen, pa je diferencijalna jednačba integrabilna.

Pomoćne jednačbe glase

$$\frac{dx}{z + x^2 + xy} = \frac{dy}{-z - y^2 - xy} = \frac{dz}{(y - x)z}.$$

Korištenjem osobina produžene proporcije, iz prve dvije jednačbe njihovim zbrajanjem i poređenjem sa trećom, dobivamo

$$\frac{d(x + y)}{x + y} + \frac{dz}{z} = 0.$$

Množenjem prve jednačbe sa y , a druge sa x , te njihovim zbrajanjem i poređenjem sa trećom jednačbom, dobivamo

$$y dx + x dy - dz = 0.$$

Integriranjem prethodnih relacija dobivamo dva nezavisna prva integrala

$$f(x, y, z) = (x + y)z = \text{const}, \quad g(x, y, z) = xy - z = \text{const}.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Budući da su f i g prvi integrali, data jednačba se može zapisati u obliku

$$A df + B dg = 0,$$

gdje su A i B pogodne funkcije varijabli x, y, z . Kako je

$$df = z dx + z dy + (x + y) dz, \quad dg = y dx + x dy - dz.$$

to vrijedi

$$A(z dx + z dy + (x + y) dz) + B(y dx + x dy - dz) = 0.$$

Posljednja jednačba mora biti proporcionalna originalnoj diferencijalnoj jednačbi

$$z(z + y^2) dx + z(z + x^2) dy - xy(x + y) dz = 0.$$

Upoređivanjem koeficijenata uz dx , dy i dz dobivamo sistem jednačbi

$$\begin{cases} Az + By = z(z + y^2), \\ Az + Bx = z(z + x^2), \\ A(x + y) - B = -xy(x + y). \end{cases}$$

Ovdje je dovoljan jedan proporcionalni izbor koeficijenata A i B , jer se diferencijalna jednačba ne mijenja množenjem nenultom funkcijom. Rješenje posljednjeg sistema je

$$A = z - xy, \quad B = (x + y)z,$$

što se lako direktno provjerava.

Iz relacije $A df + B dg = 0$ slijedi

$$(z - xy) d((x + y)z) = (x + y)z d(xy - z).$$

Integriranjem dobivamo opće rješenje u implicitnom obliku

$$\boxed{(x + y)z = C(xy - z)}.$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ♦

Metoda 6 (Natanijeva metoda)

Razmotrimo Pfaffovu diferencijalnu jednačbu sa tri varijable (3.149). Posmatrajmo varijablu z kao konstantu i rješimo odgovarajuću Pfaffovu diferencijalnu jednačbu

$$P dx + Q dy = 0. \tag{3.158}$$

Možemo posmatrati i x ili y kao konstantu, zavisno od oblika date jednačbe. Izbor se vrši na takav način da odgovarajuća jednačba postane jednostavnija.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Pretpostavimo da je rješenje jednačbe (3.158) dato u obliku:

$$\phi(x, y, z) = C_1,$$

gdje je C_1 konstanta. Tada rješenje jednačbe (3.149) ima oblik

$$\psi(\phi, z) = C_2,$$

gdje je C_2 konstanta. Također možemo ovo rješenje izraziti kao

$$\phi(x, y, z) = f(z), \quad (3.159)$$

gdje je f funkcija samo od z .

U jednačbi (3.159), $\phi(x, y, z)$ nam je poznata funkcija. Da bismo odredili $f(z)$, dodjeljujemo varijabli x fiksnu vrijednost, recimo α . Tada se rješenje (3.159) reducira na:

$$\phi(\alpha, y, z) = f(z), \quad (3.160)$$

i jednačba (3.149) se svodi na oblik

$$Q(\alpha, y, z) dy + R(\alpha, y, z) dz = 0. \quad (3.161)$$

Drugim riječima, sada je

$$\phi(\alpha, y, z) = f(z)$$

rješenje diferencijalne jednačbe (3.161).

Jednačba (3.161) je diferencijalna jednačba prvog reda i njeno rješenje možemo pronaći u obliku

$$K(y, z) = C, \quad (3.162)$$

koristeći metode diferencijalnih jednačbi prvog reda.

Budući da su relacije (3.160) i (3.162) opća rješenja iste diferencijalne jednačbe (3.161), moraju biti ekvivalentne. Stoga, eliminacijom varijable y između relacija (3.160) i (3.162), dobivamo izraz za $f(z)$. Supstitucijom ovog izraza u relaciju (3.159), dobivamo rješenje Pfaffove diferencijalne jednačbe (3.149).

Često pojednostavljujemo ovaj postupak izborom vrijednosti α , poput 0 ili 1, što čini problem rješavanja diferencijalne jednačbe (3.161) jednostavnijim.

Primjer 3.5.21. Riješiti jednačbu

$$2yz \, dx - 2xz \, dy - (x^2 - y^2)(z - 1) \, dz = 0. \quad (3.163)$$

Rješenje. Prvo uzimamo $z = \text{const.}$ Tada se data jednačba (3.163) reducira na:

$$y \, dx - x \, dy = 0. \quad (3.164)$$

Integriranjem jednačbe (3.164) dobivamo:

$$y = C_1 x,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

gdje je C_1 konstanta.

Pretpostavljamo da je rješenje jednačbe (3.163):

$$y = x\psi(z). \quad (3.165)$$

Sada, postavimo $x = \alpha$ u jednačbi (3.163), pa je

$$y = \alpha\psi(z) \quad (3.166)$$

rješenje jednačbe

$$2\alpha z \, dy + (\alpha^2 - y^2)(z - 1) \, dz = 0.$$

Odavde slijedi

$$\left(\frac{2\alpha}{\alpha^2 - y^2} \right) dy + \left(1 - \frac{1}{z} \right) dz = 0.$$

Integriranjem ove jednačbe dobivamo

$$\ln \left| \frac{\alpha + y}{\alpha - y} \right| - \ln |z| + z = \ln |C|, \quad \text{gdje je } C \text{ konstanta.}$$

Odavde slijedi

$$\frac{\alpha + y}{\alpha - y} = Cze^{-z}. \quad (3.167)$$

Eliminacijom y iz jednačbi (3.166) i (3.167), dobivamo

$$\frac{1 + \psi}{1 - \psi} = Cze^{-z}. \quad (3.168)$$

Sada, iz relacije (3.165), imamo

$$\psi = \frac{y}{x}, \quad \text{pa je:} \quad \frac{1 + \psi}{1 - \psi} = \frac{1 + \frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x}} = \frac{y + x}{x - y}. \quad (3.169)$$

Iz relacija (3.168) i (3.169), dobivamo rješenje jednačbe (3.163)

$$\boxed{(x + y)ze^z = C(x - y).}$$

◆

Primjer 3.5.22. Riješiti jednačbu

$$(2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1)dx + dy + 2z \, dz = 0.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačžba

Rješenje. U ovom slučaju, najjednostavnije je tretirati x kao konstantu. Data Pfaffova diferencijalna jednačžba tada postaje

$$dy + 2z \, dz = 0,$$

a njeno rješenje je

$$y + z^2 = C_1, \quad \text{gdje je } C_1 \text{ konstanta.}$$

Sada pretpostavimo da je rješenje date jednačžbe oblika

$$y + z^2 = f(x). \quad (3.170)$$

Ako postavimo $z = \alpha$ u relaciji (3.170), dobivamo

$$y + \alpha^2 = f(x), \quad (3.171)$$

kao rješenje jednačžbe

$$\frac{dy}{dx} + 2xy = -(2x^2 + 2\alpha^2 x^2 + 1),$$

dobivene postavljanjem $z = \alpha$ u datu Pfaffovu diferencijalnu jednačžbu.

Ovo je linearna jednačžba, a njeno rješenje je

$$y + \alpha^2 = -x + C_2 e^{-x^2}, \quad \text{gdje je } C_2 \text{ konstanta.} \quad (3.172)$$

Iz relacija (3.171) i (3.172), dobivamo

$$f(x) = -x + C_2 e^{-x^2}. \quad (3.173)$$

Supstitucijom vrijednosti $f(x)$ iz relacije (3.173) u relaciju (3.170), rješenje date Pfaffove diferencijalne jednačžbe je

$y + x + z^2 = C_2 e^{-x^2}.$

◆

Primjer 3.5.23. Riješiti jednačžbu:

$$z(z + y^2) \, dx + z(z + x^2) \, dy - xy(x + y) \, dz = 0.$$

Rješenje. Može se pokazati da je data Pfaffova diferencijalna jednačžba integrabilna.

Koristeći Natanijevu metodu, uzimamo $y = \text{const.}$ Tada data jednačžba postaje

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+y} \right) dx + \left(\frac{1}{z+y^2} - \frac{1}{z} \right) dz = 0.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Integriranjem dobivamo

$$\frac{x(y^2 + z)}{z(x + y)} = f(y), \quad (3.174)$$

gdje je $f(y)$ funkcija samo od y . Ako postavimo $z = \alpha = 1$, data jednačba postaje

$$\frac{dx}{1 + x^2} + \frac{dy}{1 + y^2} = 0,$$

čije je rješenje

$$\arctan x + \arctan y = \text{const} = \arctan \frac{1}{C},$$

odnosno

$$\arctan \frac{x + y}{1 - xy} = \arctan \frac{1}{C} \Rightarrow \frac{1 - xy}{x + y} = C. \quad (3.175)$$

Ovo rješenje mora biti ekvivalentno sa

$$\frac{x(y^2 + 1)}{x + y} = f(y), \quad \text{postavljanjem } z = 1 \text{ u jednačbi (3.174)}. \quad (3.176)$$

Eliminacijom x iz relacija (3.175) i (3.176), imamo

$$f(y) = 1 - Cy.$$

Dakle, rješenje date jednačbe je:

$$x(y^2 + z) = z(x + y)(1 - Cy).$$

◆

Metoda 7 (Metoda homogenih funkcija)

Definirajmo najprije šta znači da je funkcija homogena.

Definicija 3.5.1. Realna funkcija $P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ naziva se homogenom funkcijom stepena homogenosti $n \in \mathbb{R}$ ako za svaki $t > 0$ i za svako $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$P(tx, ty, tz) = t^n P(x, y, z).$$

Na primjer

$$x^3 + y^3 + 3x^2z = t^3(x^3 + y^3 + 3x^2z)$$

je homogena funkcija stepena homogenosti 3.

Sljedeći primjer pokazuje da stepen homogenosti ne mora biti cijeli broj.

Definirajmo funkciju

$$P : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad P(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}}.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Za svako $t > 0$ vrijedi

$$\begin{aligned} P(tx, ty, tz) &= (t^2x^2 + t^2y^2 + t^2z^2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= (t^2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \\ &= t^{\sqrt{2}} P(x, y, z). \end{aligned}$$

Prema tome, funkcija P je homogena funkcija stepena homogenosti

$$n = \sqrt{2}.$$

Pfaffova diferencijalna jednačba sa tri varijable, odnosno

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0,$$

u kojoj su $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ homogene funkcije istog stepena homogenosti, naziva se *homogena Pfaffova diferencijalna jednačba*.

Ako su funkcije $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ i $R(x, y, z)$ Pfaffove diferencijalne jednačbe homogene po x , y i z stepena homogenosti n , tada se jednačba može transformisati smjenama $y = ux$ i $z = vx$, gdje su u i v funkcije samo od x , u oblik

$$P(1, u, v)dx + Q(1, u, v)(u dx + x du) + R(1, u, v)(x dv + v dx) = 0,$$

odnosno

$$\frac{dx}{x} + A(u, v) du + B(u, v) dv = 0, \quad (3.177)$$

gdje su

$$\begin{aligned} A(u, v) &= \frac{Q(1, u, v)}{P(1, u, v) + uQ(1, u, v) + vR(1, u, v)}, \\ B(u, v) &= \frac{R(1, u, v)}{P(1, u, v) + uQ(1, u, v) + vR(1, u, v)}. \end{aligned}$$

Jednačba (3.177) može se riješiti Metodom 3, odnosno kada je uvjet $\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{\partial B}{\partial u}$ zadovoljen, možemo dobiti rješenje jednačbe (3.177) u obliku:

$$\lambda(u, v) + \ln |x| = C,$$

gdje je C proizvoljna konstanta.

Zamjenom u i v njihovim vrijednostima po x , y i z dobivamo rješenje u obliku

$$\lambda(y/x, z/x) + \ln |x| = C.$$

Možemo primijetiti da ako je uvjet integrabilnosti zadovoljen i ako su P , Q i R homogene funkcije varijabli x , y , z istog stepena, te ako $xP + yQ + zR$ nije identično jednako nuli, tada je

$$\frac{1}{xP + yQ + zR}$$

integracioni faktor date jednačbe.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Primjer 3.5.24. Provjeriti uvjet integrabilnosti i riješiti jednačbu

$$(x^2z - y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz = 0.$$

Rješenje. Ovdje je $\mathbf{X} = (x^2z - y^3, 3xy^2, x^3)$, i vrijedi

$$\nabla \times \mathbf{X} = (0, -2x^2, 6y^2).$$

Prema tome

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = (x^2z - y^3) \cdot 0 + 3xy^2(-2x^2) + x^3 \cdot 6y^2 = 0,$$

što znači da je data jednačba integrabilna.

Funkcije $x^2z - y^3$, $3xy^2$ i x^3 su homogene funkcije varijabli x, y, z stepena homogenosti 3. Uvedimo smjenu $y = ux$ i $z = vx$ kako bismo transformisali jednačbu u oblik

$$(vx^3 - u^3x^3)dx + 3x \cdot u^2x^2(udx + xdu) + x^3(vdx + xdv) = 0,$$

ili

$$\frac{2dx}{x} + \frac{3u^2du + dv}{u^3 + v} = 0.$$

Integracijom lako dobivamo

$$x^2(u^3 + v) = \text{const} = C,$$

odakle uvrštavanjem $u = \frac{y}{x}$ i $v = \frac{z}{x}$ dobivamo

$$x^2 \left(\frac{y^3}{x^3} + \frac{z}{x} \right) = C.$$

Sređivanjem posljednjeg izraza dobivamo opće rješenje date jednačbe

$$\boxed{y^3 + zx^2 = Cx.}$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta.

Datu jednačbu mogli smo riješiti i na sljedeći način. Naime, vrijedi da je

$$F(x, y, z) = xP + yQ + zR = x(x^2z - y^3) + 3xy^3 + x^3z = 2(x^3z + xy^3) \neq 0.$$

Diferencijal funkcije F glasi

$$dF = 2(3x^2zdx + x^3dz + y^3dx + 3xy^2dy) = 2(3x^2z + y^3)dx + 6xy^2dy + x^3dz.$$

Kako su P, Q i R homogene funkcije varijabli x, y, z istog stepena, te $xP + yQ + zR$ nije identično jednako nuli, integracioni faktor je oblika

$$\mu(x, y, z) = \frac{1}{F} = \frac{1}{2(x^3z + xy^3)}.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Množenjem obje strane jednačbe sa $\mu(x, y, z)$, dobivamo:

$$\begin{aligned} & \frac{(x^2z - y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz}{2(x^3z + xy^3)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3x^2z + y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz - 2(x^2z + y^3)dx}{2(x^3z + xy^3)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{(3x^2z + y^3)dx + 3xy^2dy + x^3dz}{2(x^3z + xy^3)} - \frac{dx}{x} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{dF}{F} = 2\frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$F = C'x^2, \quad \text{gdje je } C' \text{ konstanta.}$$

Dakle, traženo rješenje je

$$x^3z + xy^3 = Cx^2,$$

tj.

$$\boxed{x^2z + y^3 = Cx.}$$

U ovom rješenju $C = C'/2$ je proizvoljna konstanta. ♦

Primjer 3.5.25. Provjeriti da li je uvjet integrabilnosti za jednačbu

$$y(y + z)dx + z(z + x)dy + y(y - x)dz = 0$$

zadovoljen i odrediti njen integral.

Rješenje. Ovdje su $P = y(y + z)$, $Q = z(z + x)$ i $R = y(y - x)$ homogene funkcije varijabli x, y, z stepena homogenosti 2, pa je data jednačba homogena. Sada,

$$\mathbf{X} = y(y + z)\mathbf{i} + z(z + x)\mathbf{j} + y(y - x)\mathbf{k},$$

pa je

$$\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y(y + z) & z(z + x) & y(y - x) \end{vmatrix} = 2(y - z - x)\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} - 2y\mathbf{k},$$

odakle dobivamo

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{X} = 2y(y^2 - z^2 - xy - xz) + 2y^2z + 2xyz - 2y^3 + 2y^2x = 0.$$

Dakle, uvjet integrabilnosti je zadovoljen.

Uvođenjem smjene $y = ux$ i $z = vx$, Pfaffova diferencijalna jednačba postaje

$$xu(xu + xv)dx + xv(xv + x)(xdu + udx) + xu(xu - x)(xdv + vdx) = 0,$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

odnosno

$$\begin{aligned} & x^2 u(v+1)(u+v)dx + x^3 v(v+1)du + x^3 u(u-1)dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{dx}{x} + \frac{v}{u(u+v)}du + \frac{u-1}{(v+1)(u+v)}dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{dx}{x} + \frac{du}{u} + \frac{dv}{v+1} - \frac{du+dv}{u+v}du = 0. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$\ln|x| + \ln|u| + \ln|v+1| - \ln|u+v| = \ln|C|,$$

što daje

$$\frac{xu(v+1)}{u+v} = C.$$

Vraćajući smjene za u i v , dobivamo opće rješenje

$$\boxed{y(x+z) = C(y+z)}.$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ♦

Primjer 3.5.26. Provjeriti da li je jednačba

$$(x^2 + xy + yz)dx - x(x+z)dy + x^2dz = 0$$

integrabilna i odrediti njeno rješenje.

Rješenje. Ovdje su $P = x^2 + xy + yz$, $Q = -x(x+z)$ i $R = x^2$ homogene funkcije stepena homogenosti 2, pa je data Pfaffova diferencijalna jednačba homogena. Pridruženo vektorsko polje $\mathbf{X}$ glasi

$$\mathbf{X} = (x^2 + xy + yz)\mathbf{i} - x(x+z)\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}.$$

Rotor vektorskog polja $\mathbf{X}$ je

$$\mathbf{rot} \mathbf{X} = \nabla \times \mathbf{X} = x\mathbf{i} - (2x-y)\mathbf{j} - (3x+2z)\mathbf{k}.$$

odakle je

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = x(x^2 + xy + yz) + (2x-y)x(x+z) - (3x+2z)x^2 = 0,$$

pa je Pfaffova diferencijalna jednačba integrabilna.

Izračunajmo $xP + yQ + zR$:

$$xP + yQ + zR = x(x^2 + xy + yz) - xy(x+z) + x^2z = x^2(x+z) \neq 0.$$

Stoga je integracioni faktor oblika

$$\mu = \frac{1}{x^2(x+z)}.$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Množenjem obje strane prethodne jednačbe sa μ , dobivamo

$$\begin{aligned} & \frac{x^2 + xy + yz}{x^2(x+z)} dx - \frac{x(x+z)}{x^2(x+z)} dy + \frac{x^2}{x^2(x+z)} dz = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{1}{x+z} dx + \frac{y}{x^2} dx - \frac{dy}{x} + \frac{1}{x+z} dz = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{d(x+z)}{x+z} + d\left(-\frac{y}{x}\right) = 0. \end{aligned}$$

Integriranjem dobivamo

$$\ln|x+z| - \frac{y}{x} = C.$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ◆

Primjer 3.5.27. Provjeriti da li je jednačba

$$yz^2(x^2 - yz)dx + zx^2(y^2 - zx)dy + xy^2(z^2 - xy)dz = 0$$

integrabilna i odrediti njeno rješenje.

Rješenje. Ovdje je

$$\mathbf{X} = yz^2(x^2 - yz)\mathbf{i} + zx^2(y^2 - zx)\mathbf{j} + xy^2(z^2 - xy)\mathbf{k},$$

odakle malo duži račun daje

$$\mathbf{X} \cdot (\nabla \times \mathbf{X}) = 0,$$

što znači da je data jednačba integrabilna. Osim toga, data jednačba je homogena Pfaffova diferencijalna jednačba stepena homogenosti 5.

Uvodeći smjenu $x = uz$ i $y = vz$, jednačba se svodi na

$$v(u^2 - v)du + u^2(v^2 - u)dv = 0.$$

Primijetimo da je u ovom slučaju koeficijent uz dz jednak nuli.

Dijeljenjem posljednje jednačbe sa u^2v^2 , dobivamo

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{u^2}\right) du + \left(1 - \frac{u}{v^2}\right) dv = 0 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{du}{v} - \frac{u}{v^2} dv\right) + dv - \frac{1}{u^2} du = 0 \\ \Leftrightarrow & d\left(\frac{u}{v} + v + \frac{1}{u}\right) = 0. \end{aligned}$$

Integracijom dobivamo

$$\frac{u}{v} + v + \frac{1}{u} = \text{const.}$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Vraćanjem smjene za u i v , dobivamo

$$\frac{x}{y} + \frac{z}{x} + \frac{y}{z} = C.$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta.



Metoda 8 (Metoda kvazi-homogenih funkcija)

Uvedimo pojam kvazi-homogene funkcije.

Definicija 3.5.2. Za funkciju $f(x, y, z)$ kažemo da je kvazi-homogena po x, y i z stepena m , ako postoje p, q, r takvi da vrijedi

$$f(xt^p, yt^q, zt^r) = t^m f(x, y, z).$$

pri čemu p, q i r zovemo dimenzijama od x, y i z , redom.

Za kvazi-homogene funkcije vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.5.3. Ako je $f(x, y, z)$ kvazi-homogena funkcija po x, y, z stepena m , pri čemu su p, q, r dimenzije x, y, z , redom, onda vrijedi

$$f(x, y, z) = x^{m/p} f\left(1, \frac{y}{x^{q/p}}, \frac{z}{x^{r/p}}\right).$$

Dokaz. Prema Definiciji 3.5.2,

$$f(xt^p, yt^q, zt^r) = t^m f(x, y, z).$$

Neka je $t^p = 1/x$, tako da vrijedi $t^q = x^{-q/p}$, $t^r = x^{-r/p}$.

Zamjenjujući ove vrijednosti u gornju jednakost, dobivamo

$$f(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}) = x^{-m/p} f(x, y, z).$$

Množenjem s $x^{m/p}$ dobivamo

$$x^{m/p} f(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}) = f(x, y, z),$$

što je i trebalo pokazati.



Teorem 3.5.4. Ako x, y, z imaju dimenzije p, q, r , redom, i ako je $f(x, y, z)$ kvazi-homogena funkcija stepena m , onda vrijedi

$$px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} = mf(x, y, z).$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Dokaz. Prema Teoremu 3.5.3,

$$f(x, y, z) = x^{m/p} f\left(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}\right),$$

odnosno

$$f(x, y, z) = x^{m/p} f(1, u, v),$$

gdje su

$$u = yx^{-q/p} \quad \text{i} \quad v = zx^{-r/p}.$$

Sada računamo parcijalne izvode

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{m}{p} x^{(m-p)/p} f(1, u, v) + x^{m/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u} \left(y \left(-\frac{q}{p} \right) x^{-(q+p)/p} \right) \\ &\quad + x^{m/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v} \left(z \left(-\frac{r}{p} \right) x^{-(r+p)/p} \right) \\ &= \frac{m}{p} x^{(m-p)/p} f(1, u, v) - \frac{q}{p} x^{(m-q-p)/p} y \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u} \\ &\quad - \frac{r}{p} x^{(m-r-p)/p} z \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v}. \end{aligned}$$

Za parcijalne izvode po y i z imamo

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^{m/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u} x^{-q/p} = x^{(m-q)/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u}$$

i

$$\frac{\partial f}{\partial z} = x^{m/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v} x^{-r/p} = x^{(m-r)/p} \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} &= mx^{m/p} f(1, u, v) - qx^{(m-q)/p} y \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u} \\ &\quad - rx^{(m-r)/p} z \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v} + qx^{(m-q)/p} y \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial u} + rx^{(m-r)/p} z \frac{\partial f(1, u, v)}{\partial v} \\ &= mx^{m/p} f(1, u, v) = mf(x, y, z), \end{aligned}$$

odnosno,

$$px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} = mf(x, y, z).$$

□

Definicija 3.5.3. Pfaffova diferencijalna jednačba

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0$$

naziva se kvazi-homogenom stepena m ako su P, Q, R kvazi-homogene funkcije po x, y, z čije su dimenzije $m-p$, $m-q$ i $m-r$, redom.

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Razmotrimo kvazi-homogenu Pfaffovu diferencijalnu jednačinu

$$P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz = 0, \quad (3.178)$$

reda m , gdje su p, q, r dimenzije x, y, z , redom.

Tada, prema definiciji, P, Q, R su kvazi-homogene funkcije stepena $m - p, m - q$, i $m - r$, redom. Prema Teoremu 3.5.3,

$$\begin{aligned} P(x, y, z) &= x^{(m-p)/p} P(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}), \\ Q(x, y, z) &= x^{(m-q)/p} Q(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}), \\ R(x, y, z) &= x^{(m-r)/p} R(1, yx^{-q/p}, zx^{-r/p}). \end{aligned} \quad (3.179)$$

Ako postavimo

$$y = ux^{q/p}, \quad z = vx^{r/p}, \quad (3.180)$$

imamo

$$\begin{aligned} dy &= x^{q/p} du + \frac{q}{p} x^{(q-p)/p} u dx, \\ dz &= x^{r/p} dv + \frac{r}{p} x^{(r-p)/p} v dx. \end{aligned} \quad (3.181)$$

Na osnovu jednakosti (3.179), (3.180), i (3.181), jednačba (3.178) se svodi na

$$\begin{aligned} x^{(m-p)/p} P(1, u, v) dx + x^{(m-q)/p} Q(1, u, v) (x^{q/p} du + \frac{q}{p} x^{(q-p)/p} u dx) \\ + x^{(m-r)/p} R(1, u, v) (x^{r/p} dv + \frac{r}{p} x^{(r-p)/p} v dx) = 0, \end{aligned}$$

odnosno,

$$\begin{aligned} px^{(m-p)/p} P(1, u, v) dx + px^{(m-q)/p} Q(1, u, v) x^{q/p} du \\ + qx^{(m-q)/p} Q(1, u, v) x^{(q-p)/p} u dx + px^{(m-r)/p} R(1, u, v) x^{r/p} dv \\ + rx^{(m-r)/p} R(1, u, v) x^{(r-p)/p} v dx = 0, \end{aligned}$$

tj.,

$$\begin{aligned} x^{(m-p)/p} [pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)] dx \\ + px^{m/p} Q(1, u, v) du + px^{m/p} R(1, u, v) dv = 0. \end{aligned}$$

Dijeljenjem sa

$$x^{m/p} [pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)]$$

dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{x^{(m-p)/p}}{x^{m/p}} + \frac{pQ(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)} du \\ + \frac{pR(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)} dv = 0, \end{aligned}$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačnja

odnosno

$$\frac{dx}{x} + A(u, v)du + B(u, v)dv = 0, \quad (3.182)$$

gdje je

$$A(u, v) = \frac{pQ(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)}$$

i

$$B(u, v) = \frac{pR(1, u, v)}{pP(1, u, v) + quQ(1, u, v) + rvR(1, u, v)}.$$

Sada se jednačnja (3.182) može jednostavno riješiti, budući da je jedna od varijabli odvojena od ostale dvije.

Potreban uvjet za kvazi-homogenost Pfaffove diferencijalne jednačnje može se dobiti na sljedeći način. Neka su

$$P = \sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i}, \quad Q = \sum_{j=1}^{n_2} b_j x^{\lambda_j} y^{\mu_j} z^{\nu_j}, \quad R = \sum_{k=1}^{n_3} c_k x^{\xi_k} y^{\eta_k} z^{\zeta_k},$$

takvi da je jednačnja (3.178) oblika

$$\left(\sum_{i=1}^{n_1} a_i x^{\alpha_i} y^{\beta_i} z^{\gamma_i} \right) dx + \left(\sum_{j=1}^{n_2} b_j x^{\lambda_j} y^{\mu_j} z^{\nu_j} \right) dy + \left(\sum_{k=1}^{n_3} c_k x^{\xi_k} y^{\eta_k} z^{\zeta_k} \right) dz = 0, \quad (3.183)$$

gdje su a_i, b_j, c_k koeficijenti, a $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \lambda_j, \mu_j, \nu_j, \xi_k, \eta_k, \zeta_k$ cijeli brojevi ili razlomci, pozitivni, negativni ili jednaki nuli.

Ako zamijenimo x sa xt^p , y sa yt^q i z sa zt^r , eksponenti od t u različitim članovima jednačnje (3.183) dati su sa

$$p\alpha_i + q\beta_i + r\gamma_i, \quad i = 1, 2, \dots, n_1,$$

$$p\lambda_j + q\mu_j + r\nu_j, \quad j = 1, 2, \dots, n_2,$$

$$p\xi_k + q\eta_k + r\zeta_k, \quad k = 1, 2, \dots, n_3.$$

Sada imamo $n_1 + n_2 + n_3$ linearnih izraza po p, q i r . Da bi jednačnja (3.183) bila kvazi-homogena stepena n , moramo imati P, Q, R kao kvazi-homogene funkcije stepena $n - p, n - q$, i $n - r$, redom. Drugim riječima, eksponent od t u svakom članu od P mora biti $n - p$, u svakom članu od Q mora biti $n - q$, a u svakom članu od R mora biti $n - r$.

Dakle, imamo $n_1 + n_2 + n_3$ linearnih jednačnji:

$$\begin{aligned} (\alpha_i + 1)p + \beta_i q + \gamma_i r - n &= 0, & i &= 1, 2, \dots, n_1, \\ \lambda_j p + (\mu_j + 1)q + \nu_j r - n &= 0, & j &= 1, 2, \dots, n_2, \\ \xi_k p + \eta_k q + (\zeta_k + 1)r - n &= 0, & k &= 1, 2, \dots, n_3. \end{aligned} \quad (3.184)$$

3.5 Pfaffova diferencijalna jednačba

Budući da imamo $n_1 + n_2 + n_3$ jednačbi s četiri nepoznate p , q , r i n , ove jednačbe općenito nisu uvijek konzistentne. Međutim, ako su konzistentne, tada postoje jedinstvene vrijednosti za p , q , r , i n .

Dakle, nužan uvjet za kvazi-homogenost zadate jednačbe je da gore navedene $n_1 + n_2 + n_3$ linearne jednačbe budu konzistentne.

Ako su $n_1 + n_2 + n_3$ jednačbe konzistentne, možemo svaku od njih podijeliti sa p , a jedinstvene vrijednosti za q/p , r/p , n/p mogu se izračunati.

Primjer 3.5.28. Riješiti Pfaffovu diferencijalnu jednačbu

$$(5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^2)dx + (4xy^3 + 2xyz)dy + (xy^2 + 2xz)dz = 0.$$

Rješenje. Ovdje su

$$P = 5x^3 + 2y^4 + 2y^2z + 2z^2,$$

$$Q = 4xy^3 + 2xyz,$$

$$R = xy^2 + 2xz.$$

Može se pokazati da je uvjet integrabilnosti zadovoljen.

Jednačbe (3.184) daju

$$4p \quad - n = 0,$$

$$p + 4q \quad - n = 0,$$

$$p + 2q + r - n = 0,$$

$$p + \quad + 2r - n = 0,$$

$$p + 4q \quad - n = 0,$$

$$p + 2q + r - n = 0,$$

$$p \quad + 2r - n = 0.$$

Da bi ove jednačbe bile konzistentne, moramo imati

$$4p = p + 4q = p + 2q + r = p + 2r.$$

Dakle,

$$2q - r = 0 \quad \text{i} \quad 3p = 4q.$$

Neka je $p = 1$, tada je

$$q = \frac{3}{4}, \quad r = \frac{3}{2}.$$

Uvodeći smjenu

$$y = ux^{3/4}, \quad z = vx^{3/2},$$

zadata jednačba se svodi na

$$\begin{aligned} & (5x^3 + 2ux^3 + 2ux^{3/2} + vx^{3/2} + 2v^2x^3)dx \\ & + (4x^3ux^{9/4} + 2xux^{3/4}vx^{3/2})(x^{3/4}du + 3x^{-1/4}dx) \\ & + (xu^2x^{3/2} + 2xvx^{3/2})(vx^{3/2}dx + x^{3/2}dv) = 0, \end{aligned}$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

odnosno

$$x^3(5 + 5u^4 + 5u^2v + 5v^2)dx + x^4(4u^3 + 2uv)du + x^4(u^2 + 2v)dv = 0.$$

Prema tome,

$$\frac{dx}{x} + \frac{(4u^3 + 2uv)du}{5(1 + u^4 + u^2v + v^2)} - \frac{(u^2 + 2v)dv}{5(1 + u^4 + u^2v + v^2)} = 0,$$

tj.,

$$\frac{dx}{x} + \frac{d(1 + u^4 + u^2v + v^2)}{5(1 + u^4 + u^2v + v^2)} = 0.$$

Integracijom dobivamo

$$\ln x + \frac{1}{5} \ln(1 + u^4 + u^2v + v^2) = \text{const},$$

odnosno

$$x^5(1 + u^4 + u^2v + v^2) = C.$$

Zamjenom $u = \frac{y}{x^{3/4}}$, $v = \frac{z}{x^{3/2}}$, dobivamo

$$x^5 \left(1 + \frac{y^4}{x^3} + \frac{y^2z}{x^{9/4}} + \frac{z^2}{x^3} \right) = C,$$

odnosno

$$\boxed{x^5 + x^2y^4 + x^2y^2z + x^2z^2 = C.}$$

U ovom rješenju C je proizvoljna konstanta. ◆

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

Ovo poglavlje posvećeno je jednom od ključnih rezultata u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačbi, poznatom kao *Cauchy-Kovalevsky teorem*. Teorem garantira postojanje analitičkog rješenja početnog problema za parcijalne diferencijalne jednačbe pod uvjetom da su sve funkcije koje se pojavljuju u jednačbi analitičke. Pokazat ćemo kako se početni problem za parcijalne diferencijalne jednačbe može riješiti pomoću Taylorovih redova.

Ključ ove metode je izračunavanje koeficijenata Taylorovog reda koristeći početne uvjete i samu jednačbu. Međutim, metoda je primjenjiva samo ako rješenje problema predstavlja analitičku funkciju. Cauchy-Kovalevsky teorem precizira uvjete pod kojima takav početni problem ima analitičko rješenje.

Razmotrimo najprije sljedeći početni problem za običnu diferencijalnu jednačbu prvog reda po nepoznatoj funkciji u i nezavisnoj varijabli t :

$$\frac{du}{dt} = F(t, u), \tag{3.185}$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

$$u(0) = u_0. \quad (3.186)$$

Ovdje je u_0 zadati broj, a F je funkcija dvije varijable t i u . Tražimo rješenje $u(t)$ problema (3.185)–(3.186), definiranog na nekom intervalu t -ose koji sadrži tačku $t = 0$. Pretpostavimo da je funkcija F analitička u okolini tačke $(t, u) = (0, u_0)$ u $\mathbb{R}^2$, tj. da F ima Taylorov red koji konvergira ka $F(t, u)$ za svaku tačku (t, u) u okolini tačke $(0, u_0)$. Tada Cauchy-Kovalevsky teorem tvrdi da početni problem (3.185)–(3.186) ima rješenje $u(t)$ koje je definirano i analitičko na intervalu koji sadrži tačku $t = 0$. Kako bismo pronašli Taylorov red za $u(t)$ oko tačke $t = 0$, potrebno je izračunati vrijednosti u i svih njegovih izvoda u $t = 0$. To možemo učiniti koristeći jednačbe (3.185) i (3.186). Naime, iz (3.186) imamo

$$u(0) = u_0,$$

a zamjenom $t = 0$ i $u = u_0$ u (3.185) dobivamo

$$u^{(1)}(0) = F(0, u_0).$$

Da bismo izračunali drugi izvod u $t = 0$, diferenciramo (3.185) po t

$$u^{(2)} = F_t(t, u) + F_u(t, u)u^{(1)},$$

i zamijenimo $t = 0$ i prethodno dobivene vrijednosti za u i $u^{(1)}$ za $t = 0$, čime dobivamo

$$u^{(2)}(0) = F_t(0, u_0) + F_u(0, u_0)F(0, u_0).$$

Zatim dva puta diferenciramo (3.185) po t i zamijenimo $t = 0$ te prethodno dobivene vrijednosti za u , $u^{(1)}$ i $u^{(2)}$ za $t = 0$ kako bismo dobili $u^{(3)}(0)$.

Nastavljajući na ovaj način, možemo izračunati vrijednosti u i svih njegovih izvoda za $t = 0$. Cauchy-Kovalevsky teorem tvrdi da red

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n$$

konvergira za sve t na otvorenom intervalu I koji sadrži tačku $t = 0$ i definira rješenje

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^{(n)}(0)}{n!} t^n,$$

koje predstavlja rješenje početnog problema (3.185)–(3.186) na I .

Razmotrimo sljedeći početni problem, odnosno Cauchyjev problem, za parcijalnu diferencijalnu jednačbu prvog reda s nepoznatom funkcijom u i dvije nezavisne varijable t i x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F\left(t, x, u, \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad (3.187)$$

$$u(0, x) = \phi(x). \quad (3.188)$$

Varijabla t ima posebnu ulogu na dva načina. Prvo, parcijalni izvod $\partial u / \partial t$ pojavljuje se u jednažbi. Drugo, jednažba je riješena s obzirom na ovaj izvod. Funkcija $F(t, x, u, p)$ je funkcija četiri varijable definirana na nekoj domeni u $\mathbb{R}^4$. U početnom uvjetu (3.188) zadana funkcija ϕ definirana je na nekom intervalu C x -ose koji sadrži koordinatni početak. Napomenimo da početna kriva C nije proizvoljna glatka kriva u (t, x) -ravni, već je specifična po tome što leži na x -osi ($t = 0$). Tražimo rješenje $u(t, x)$ Cauchyjevog problema (3.187)–(3.188) definiranog u nekoj domeni Ω u (t, x) -ravni koje sadrži početnu krivu C (vidjeti sliku 3.15 (i)). Primijetimo da se skup C u početnom uslovu naziva intervalom jer predstavlja domen funkcije $\phi(x)$ na realnoj osi. Isti skup C se, međutim, u geometrijskoj formulaciji Cauchyjevog problema identifikuje sa skupom tačaka

$$\{(0, x) \mid x \in C\},$$

pa se tada posmatra kao kriva u (t, x) -ravni. Ova dvojna terminologija je uobičajena u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednažbi i ne predstavlja kontradikciju.

Pretpostavimo najprije da je zadana funkcija $\phi(x)$ analitička u okolini koordinatnog početka na x -osi. Tada, iz početnog uvjeta (3.188), možemo izračunati sve parcijalne izvode funkcije u s obzirom na x u koordinatnom početku

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, 0) = \phi^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Pretpostavimo također da je funkcija F analitička u okolini tačke $(0, 0, \phi(0), \phi^{(1)}(0))$ u $\mathbb{R}^4$. Tada Cauchy-Kovalevsky teorem tvrdi da problem (3.187)–(3.188) ima rješenje $u(t, x)$ koje je definirano i analitičko u okolini koordinatnog početka (t, x) -ravni. Da bismo pronašli Taylorov red za $u(t, x)$ oko koordinatnog početka, potrebno je izračunati vrijednosti svih parcijalnih izvoda funkcije u u koordinatnom početku. To možemo učiniti koristeći jednažbe (3.187) i (3.188). Već smo vidjeli da se izvodi oblika $\partial^n u / \partial x^n$ mogu izračunati iz početnog uvjeta (3.188). Zamjenjujući u (3.187) $t = 0$, $x = 0$ i prethodno dobivene vrijednosti za u i $\partial u / \partial x$ u $(0, 0)$, dobivamo vrijednost izvoda $\partial u / \partial t$ u koordinatnom početku

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0, 0) = F(0, 0, \phi(0), \phi^{(1)}(0)).$$

Da bismo dobili vrijednost $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$, najprije diferenciramo jednažbu (3.187) po x ,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = F_2(t, x, u, u_x) + F_3(t, x, u, u_x)u_x + F_4(t, x, u, u_x)u_{xx},$$

zatim zamijenimo $t = x = 0$ i prethodno dobivene vrijednosti za u , u_x i u_{xx} u tački $(0, 0)$. Ovdje F_j označava parcijalni izvod funkcije F s obzirom na njenu j -tu varijablu, $j = 1, 2, 3, 4$.

Da bismo dobili $\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}$, diferenciramo jednažbu (3.187) dva puta po x i zamijenimo $t = x = 0$ te prethodno dobivene vrijednosti za u , u_x , u_{xx} i u_{xxx} u

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

tački $(0, 0)$. Na ovaj način možemo izračunati vrijednosti svih parcijalnih izvoda $\partial^{n+1}u/\partial x^n \partial t$, $n = 0, 1, 2, \dots$, u tački $(0, 0)$. Zatim, da bismo izračunali $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, diferenciramo jednadžbu (3.187) po t

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F_1(t, x, u, u_x) + F_3(t, x, u, u_x)u_t + F_4(t, x, u, u_x)u_{xt}$$

i zamijenimo $t = x = 0$ i prethodno dobivene vrijednosti za u , u_x , u_t i u_{xt} u koordinatnom početku. Jasno je da postupnim diferenciranjem jednadžbe (3.187) po t i x te zamjenom prethodno dobivenih vrijednosti možemo izračunati sve parcijalne izvode funkcije u u koordinatnom početku.

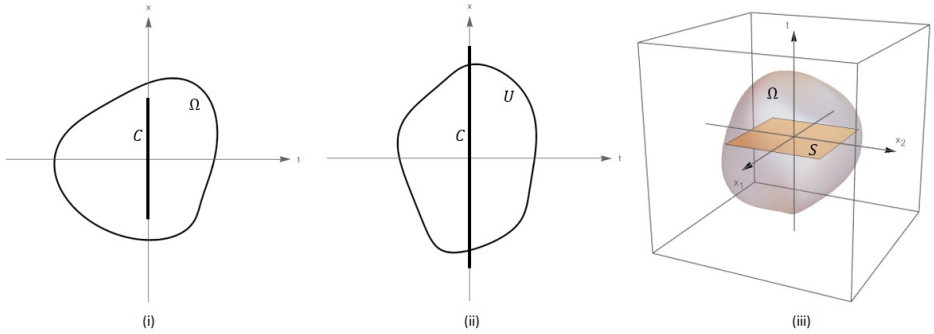
Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko koordinatnog početka je

$$\sum_{(\alpha_t, \alpha_x)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(0, 0)}{\alpha_t! \alpha_x!} t^{\alpha_t} x^{\alpha_x},$$

gdje se sumiranje vrši preko svih parova (α_t, α_x) nenegativnih cijelih brojeva. Cauchy-Kovalevsky teorem tvrdi da ovaj red konvergira za sve (t, x) u nekoj okolini U koordinatnog početka i definira rješenje

$$u(t, x) = \sum_{(\alpha_t, \alpha_x)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(0, 0)}{\alpha_t! \alpha_x!} t^{\alpha_t} x^{\alpha_x}, \quad (3.189)$$

problema (3.187)–(3.188) u U . Preciznije, funkcija definirana sa (3.189) zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednadžbu (3.187) za svako (t, x) u U i početni uvjet (3.188) za svaku tačku $(0, x)$ početne krive C koja je sadržana u U (vidjeti sliku 3.15 (ii)).



Slika 3.15: Geometrijska interpretacija Cauchyjevog problema i lokalne egzistencije rješenja.

Dat ćemo formulaciju Cauchy-Kovalevsky teorema za sljedeći početni problem (ili Cauchyjev problem), koji uključuje parcijalnu diferencijalnu jednadžbu prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom u i $n + 1$ nezavisnih varijabli $t, x_1, \dots, x_n$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(t, x_1, \dots, x_n, u, u_{x_1}, \dots, u_{x_n}), \quad (3.190)$$

$$u(0, x_1, \dots, x_n) = \phi(x_1, \dots, x_n). \quad (3.191)$$

U parcijalnoj diferencijalnoj jednađbi (3.190) funkcija $F(t, x_1, \dots, x_n, u, p_1, \dots, p_n)$ je funkcija $2n + 2$ varijabli. Ponovno napominjemo posebnu ulogu varijable t u (3.190); parcijalni izvod $\partial u / \partial t$ pojavljuje se u jednađbi, a jednađba je riješena s obzirom na ovaj izvod.

U početnom uvjetu (3.191) zadata funkcija ϕ definirana je na nekoj oblasti S prostora $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Tražimo rješenje $u(t, x_1, \dots, x_n)$ Cauchyjevog problema (3.190)–(3.191) definiranog za $(t, x_1, \dots, x_n)$ na nekoj domeni Ω u $\mathbb{R}^{n+1}$ koja sadrži oblast S na hiperravni $t = 0$, na kojoj je zadat početni uvjet (3.191) (vidjeti sliku 3.15 (iii) za $n = 2$).

Teorem 3.6.1 (Cauchy-Kovalevsky). *Pretpostavimo da je funkcija ϕ analitička u okolini koordinatnog početka prostora $\mathbb{R}^n$ i da je funkcija F analitička u okolini tačke*

$$(0, 0, \dots, 0, \phi(0, \dots, 0), \phi_{x_1}(0, \dots, 0), \dots, \phi_{x_n}(0, \dots, 0))$$

u prostoru $\mathbb{R}^{2n+2}$. Tada Cauchyjev problem (3.190)–(3.191) ima rješenje $u(t, x_1, \dots, x_n)$ koje je definirano i analitičko u okolini koordinatnog početka prostora $\mathbb{R}^{n+1}$, i to rješenje je jedinstveno u klasi analitičkih funkcija.

Teorem nam daje dvije tvrdnje:

- (i) postoji analitičko rješenje u nekoj okolini koordinatnog početka, i
- (ii) ovo rješenje je jedinstveno u klasi analitičkih funkcija.

Preciznije rečeno, tvrdnja o postojanju kaže da postoji funkcija $u(t, x_1, \dots, x_n)$ koja je definirana i analitička u nekoj oblasti U koordinatnog početka u $\mathbb{R}^{n+1}$, te da za svaku tačku $(t, x_1, \dots, x_n)$ iz U vrijedi:

- $u(t, x_1, \dots, x_n)$ zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednađbu (3.190),
- $u(0, x_1, \dots, x_n)$ zadovoljava početni uvjet (3.191) za svaku tačku $(0, x_1, \dots, x_n)$ oblasti S sadržane u U .

Tvrdnja o jedinstvenosti kaže da se bilo koja dva analitička rješenja problema (3.190)–(3.191) moraju poklapati u nekoj okolini koordinatnog početka.

Detalje dokaza Cauchy-Kovalevsky teorema nećemo ovdje navoditi. Dokaz postojanja analitičkog rješenja sastoji se u pokazivanju da se koeficijenti Taylorovog reda

$$\sum_{(\alpha_t, \alpha_1, \dots, \alpha_n)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n} u(0, \dots, 0)}{\alpha_t! \alpha_1! \dots \alpha_n!} t^{\alpha_t} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} \quad (3.192)$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

mogu izračunati iz (3.190) i (3.191) (kao što je urađeno za slučaj $n = 1$) i da red (3.192) konvergira u nekoj okolini koordinatnog početka i zadovoljava (3.190) i (3.191) u toj okolini.

Dokaz jedinstvenosti analitičkog rješenja slijedi iz činjenice da bilo koja dva analitička rješenja moraju imati Taylorove redove razvijene oko koordinatnog početka s koeficijentima koji su tačno jednaki koeficijentima iz (3.192). Budući da se koeficijenti iz (3.192) mogu jednoznačno izračunati iz (3.190) i (3.191), slijedi da bilo koja dva analitička rješenja moraju biti ista u nekoj okolini koordinatnog početka.

Primjer 3.6.1. Odrediti sve članove reda manjeg ili jednakog 3 u Taylorovom redu oko koordinatnog početka rješenja za početni problem

$$u_t = uu_x, \quad (3.193)$$

$$u(0, x) = 1 + x^2. \quad (3.194)$$

Rješenje. U ovom problemu $\phi(x) = 1 + x^2$, pa je funkcija ϕ analitička u okolini koordinatnog početka x -ose (zapravo je analitička na cijeloj x -osi). Ovdje je $u_x(0, 0) = \phi'(0) = 0$. Nadalje, $F(t, x, u, p) = up$, a ova funkcija je analitička u okolini $(0, 0, 1, 0)$ u $\mathbb{R}^4$ (zapravo je analitička na cijelom $\mathbb{R}^4$). Prema Cauchy-Kovalevsky teoremu, Cauchyjev problem (3.193)–(3.194) ima analitičko rješenje u okolini koordinatnog početka (t, x) -ravni. Moramo izračunati sve izvode od u reda ≤ 3 u koordinatnom početku. Iz (3.194) imamo

$$u(0, x) = 1 + x^2, \quad u_x(0, x) = 2x, \quad u_{xx}(0, x) = 2, \quad u_{xxx}(0, x) = 0,$$

pa slijedi

$$u(0, 0) = 1, \quad u_x(0, 0) = 0, \quad u_{xx}(0, 0) = 2, \quad u_{xxx}(0, 0) = 0.$$

Iz (3.193) imamo

$$u_t = uu_x, \quad u_{tx} = uu_{xx} + u_x^2, \quad u_{ttx} = 3u_x u_{xx} + uu_{xxx},$$

a korištenjem prethodno dobivenih vrijednosti imamo

$$u_t(0, 0) = 0, \quad u_{tx}(0, 0) = 2, \quad u_{ttx}(0, 0) = 0.$$

Ponovno, iz (3.193) imamo

$$u_{tt} = uu_t + uu_{tx}, \quad u_{ttt} = uu_{tx} + 2u_t u_{tx} + uu_{ttx},$$

a korištenjem prethodno dobivenih vrijednosti imamo

$$u_{tt}(0, 0) = 2, \quad u_{ttt}(0, 0) = 0.$$

Na kraju, iz (3.193) imamo

$$u_{ttt} = uu_{ttx} + 2u_t u_{tx} + u_t u_{ttx},$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

pa slijedi

$$u_{ttt}(0, 0) = 0.$$

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko koordinatnog početka je

$$u(t, x) = \sum_{(\alpha_t, \alpha_x)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(0, 0)}{\alpha_t! \alpha_x!} t^{\alpha_t} x^{\alpha_x}, \quad (3.195)$$

što daje

$$u(t, x) = 1 + t^2 + 2tx + x^2 + \dots$$

Tačke u gornjem rješenju označavaju članove reda ≥ 4 .

Budući da je jednačba (3.193) kvazi-linearna parcijalna diferencijalna jednačba prvog reda, postoji jedinstveno rješenje početnog problema (3.193)–(3.194) u okolini tačke $(t, x) = (0, 0)$. Nadalje, ovo rješenje može se eksplicitno odrediti i ima oblik

$$u(t, x) = 2 \frac{1 + x^2}{1 - 2tx + \sqrt{1 - 4tx - 4t^2}}. \quad (3.196)$$

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko $(0, 0)$ može se direktno izračunati iz (3.196), te se može potvrditi da članovi reda ≤ 3 zaista odgovaraju onima iz (3.195). $\blacklozenge$

Primjer 3.6.2. Odrediti sve članove reda manjeg ili jednakog 3 u Taylorovom redu rješenja oko koordinatnog početka za početni problem

$$u_t = u^2 + u_x, \quad (3.197)$$

$$u(0, x) = 1 + 2x. \quad (3.198)$$

Rješenje. U ovom problemu $\phi(x) = 1 + 2x$, pa je funkcija ϕ analitička u okolini koordinatnog početka x -ose (zapravo je analitička na cijeloj x -osi). Ovdje je $u_x(0, 0) = \phi'(0) = 2$. Nadalje, $F(t, x, u, p) = u^2 + p$, a ova funkcija je analitička u okolini $(0, 0, 1, 2)$ u $\mathbb{R}^4$ (zapravo je analitička na cijelom $\mathbb{R}^4$). Prema Cauchy-Kovalevsky teoremu, Cauchyjev problem (3.197)–(3.198) ima analitičko rješenje u okolini koordinatnog početka (t, x) -ravni. Moramo izračunati sve izvode od u reda ≤ 3 u koordinatnom početku. Iz (3.198) imamo:

$$u(0, x) = 1 + 2x, \quad u_x(0, x) = 2, \quad u_{xx}(0, x) = 0, \quad u_{xxx}(0, x) = 0,$$

pa slijedi:

$$u(0, 0) = 1, \quad u_x(0, 0) = 2, \quad u_{xx}(0, 0) = 0, \quad u_{xxx}(0, 0) = 0.$$

Iz (3.197) imamo:

$$u_t = u^2 + u_x, \quad u_{tx} = 2uu_x + u_{xx}, \quad u_{ttx} = 2(u_x^2 + uu_{xx}) + u_{xxx}.$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

Zamjenom prethodno dobivenih vrijednosti dobivamo:

$$u_t(0, 0) = u(0, 0)^2 + u_x(0, 0) = 1^2 + 2 = 3,$$

$$u_{tx}(0, 0) = 2u(0, 0)u_x(0, 0) + u_{xx}(0, 0) = 2 \cdot 1 \cdot 2 + 0 = 4,$$

$$u_{txx}(0, 0) = 2(u_x(0, 0)^2 + u(0, 0)u_{xx}(0, 0)) + u_{xxx}(0, 0) = 2(2^2 + 1 \cdot 0) + 0 = 8.$$

Dalje, iz (3.197) imamo:

$$u_{tt} = 2uu_t + u_{tx}, \quad u_{ttt} = 2(u_t u_x + uu_{tx}) + u_{txx}.$$

Zamjenom poznatih vrijednosti dobivamo:

$$u_{tt}(0, 0) = 2 \cdot u(0, 0) \cdot u_t(0, 0) + u_{tx}(0, 0) = 2 \cdot 1 \cdot 3 + 4 = 10,$$

$$u_{ttt}(0, 0) = 2(u_t(0, 0)u_x(0, 0) + u(0, 0)u_{tx}(0, 0)) + u_{txx}(0, 0) = 2(3 \cdot 2 + 1 \cdot 4) + 8 = 28.$$

Na kraju, iz (3.197) imamo:

$$u_{ttt} = 2(u_t^2 + uu_{tt}) + u_{ttx},$$

pa je

$$u_{ttt}(0, 0) = 2(3^2 + 1 \cdot 10) + 28 = 66.$$

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko koordinatnog početka je:

$$u(t, x) = \sum_{(\alpha_t, \alpha_x)} \frac{D_t^{\alpha_t} D_x^{\alpha_x} u(0, 0)}{\alpha_t! \alpha_x!} t^{\alpha_t} x^{\alpha_x}, \quad (3.199)$$

što daje

$$u(t, x) = 1 + 2x + 3t + 4tx + 5t^2 + 14t^2x + 4tx^2 + 11t^3 + \dots$$

Tačke označavaju članove reda ≥ 4 .

Nadalje, ovo rješenje može se eksplicitno odrediti i ima oblik

$$u(t, x) = \frac{-2t - 2x - 1}{2t^2 + 2tx + t - 1}. \quad (3.200)$$

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko $(0, 0)$ može se direktno izračunati iz (3.200), te se može potvrditi da članovi reda ≤ 3 zaista odgovaraju onima iz (3.199). $\blacklozenge$

Primjer 3.6.3. Odrediti sve članove reda manjeg ili jednakog 3 u Taylorovom redu rješenja oko koordinatnog početka za početni problem

$$u_t = u_x^2, \quad (3.201)$$

$$u(0, x) = 1 + 2x - 3x^2. \quad (3.202)$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

Rješenje. U ovom problemu $\phi(x) = 1 + 2x - 3x^2$, pa je funkcija ϕ analitička u okolini koordinatnog početka x -ose (zapravo je analitička na cijeloj x -osi). Ovdje je $u_x(0,0) = \phi'(0) = 2$, a $u_{xx}(0,0) = \phi''(0) = -6$. Nadalje, $F(t, x, u, p) = p^2$, a ova funkcija je analitička u okolini $(0, 0, 1, 2)$ u $\mathbb{R}^4$ (zapravo je analitička na cijelom $\mathbb{R}^4$). Prema Cauchy-Kovalevsky teoremu, Cauchyjev problem (3.201)–(3.202) ima analitičko rješenje u okolini koordinatnog početka (t, x) -ravni. Moramo izračunati sve izvode od u reda ≤ 3 u koordinatnom početku. Iz (3.202) imamo

$$u(0, x) = 1 + 2x - 3x^2, \quad u_x(0, x) = 2 - 6x, \quad u_{xx}(0, x) = -6, \quad u_{xxx}(0, x) = 0,$$

pa slijedi

$$u(0, 0) = 1, \quad u_x(0, 0) = 2, \quad u_{xx}(0, 0) = -6, \quad u_{xxx}(0, 0) = 0.$$

Iz (3.201) imamo

$$u_t = u_x^2, \quad u_{tx} = 2u_x u_{xx}, \quad u_{ttx} = 2(u_{xx}^2 + u_x u_{xxx}).$$

Zamjenom prethodno dobivenih vrijednosti dobivamo:

$$u_t(0, 0) = 4, \quad u_{tx}(0, 0) = -24, \quad u_{ttx}(0, 0) = 72.$$

Dalje, iz (3.201) imamo:

$$u_{tt} = 2u_x u_{tx}, \quad u_{tttx} = 2(u_{tx} u_{xx} + u_x u_{ttx}).$$

Zamjenom poznatih vrijednosti dobivamo:

$$u_{tt}(0, 0) = -96, \quad u_{tttx}(0, 0) = 576.$$

Na kraju, diferenciranjem $u_{tt} = 2u_x u_{tx}$ po t dobivamo:

$$u_{ttt} = 2(u_{tx}^2 + u_x u_{ttx}),$$

što daje:

$$u_{ttt}(0, 0) = 3456.$$

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko koordinatnog početka je

$$\begin{aligned} u(t, x) = & u(0, 0) + u_x(0, 0)x + u_t(0, 0)t \\ & + \frac{u_{xx}(0, 0)}{2!}x^2 + u_{tx}(0, 0)tx + \frac{u_{tt}(0, 0)}{2!}t^2 \\ & + \frac{u_{ttx}(0, 0)}{2!}tx^2 + \frac{u_{tttx}(0, 0)}{2!}t^2x + \frac{u_{ttt}(0, 0)}{3!}t^3 + \dots, \end{aligned}$$

što daje

$$u(t, x) = 1 + 2x - 3x^2 + 4t - 24tx - 48t^2 + 36tx^2 + 288t^2x + 1152t^3 + \dots$$

Tačke u ovom rješenju označavaju članove reda ≥ 4 . ♦

Primjer 3.6.4. Odrediti sve članove reda manjeg ili jednakog 3 u Taylorovom razvoju rješenja početnog problema

$$u_t = (\sin u)u_x, \tag{3.203}$$

$$u(0, x) = \frac{\pi}{6} + x. \tag{3.204}$$

3.6 Teorem Cauchy-Kovalevsky

Rješenje. U ovom problemu funkcija $\phi(x) = \frac{\pi}{6} + x$ je analitička u okolini x -ose. Dakle, rješenje $u(x, t)$ je analitičko u okolini tačke $(0, 0)$. Po Cauchy-Kovalevsky teoremu, problem (3.203)-(3.204) ima analitičko rješenje, te ćemo izračunati sve izvode u do reda ≤ 3 u tački $(0, 0)$.

Iz početnog uvjeta (3.204) imamo

$$u(0, x) = \frac{\pi}{6} + x, \quad u_x(0, x) = 1, \quad u_{xx}(0, x) = 0, \quad u_{xxx}(0, x) = 0.$$

Dakle,

$$u(0, 0) = \frac{\pi}{6}, \quad u_x(0, 0) = 1, \quad u_{xx}(0, 0) = 0, \quad u_{xxx}(0, 0) = 0.$$

Iz jednačine (3.203) slijedi

$$u_t = (\sin u)u_x,$$

pa u tački $(0, 0)$ imamo

$$u_t(0, 0) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

Dalje, diferenciranjem (3.203) po x dobivamo

$$u_{tx} = (\cos u)u_x^2 + (\sin u)u_{xx},$$

te u tački $(0, 0)$

$$u_{tx}(0, 0) = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot 1 + \left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot 0 = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ponovnim diferenciranjem (3.203) po t dobivamo

$$u_{tt} = (\cos u)u_t u_x + (\sin u)u_{tx},$$

pa u tački $(0, 0)$ imamo

$$u_{tt}(0, 0) = \left(\cos \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 + \left(\sin \frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dalje, računamo izvode višeg reda:

$$\begin{aligned} u_{txx} &= (u_{xxx} - u_x^3) \sin u + 3u_x u_{xx} \cos u, \\ u_{ttt} &= (u_{txx} - u_x^2 u_t) \sin u + (u_{xx} u_t + 2u_x u_{tx}) \cos u, \\ u_{ttt} &= (u_{txx} u_x u_t^2) \sin u + (2u_t u_{tx} + u_x u_{tt}) \cos u. \end{aligned}$$

Izračunavanjem dobivamo:

$$u_{txx}(0, 0) = -\frac{1}{2}, \quad u_{ttt}(0, 0) = 1, \quad u_{ttt}(0, 0) = \frac{15}{8}.$$

3.7 Zadaci za samostalan rad

Taylorov red za $u(t, x)$ razvijen oko koordinatnog početka je

$$\begin{aligned} u(t, x) = & u(0, 0) + u_x(0, 0)x + u_t(0, 0)t \\ & + \frac{u_{xx}(0, 0)}{2!}x^2 + u_{tx}(0, 0)tx + \frac{u_{tt}(0, 0)}{2!}t^2 \\ & + \frac{u_{txx}(0, 0)}{2!}tx^2 + \frac{u_{ttx}(0, 0)}{2!}t^2x + \frac{u_{ttt}(0, 0)}{3!}t^3 + \dots, \end{aligned}$$

što daje

$$u(t, x) = \frac{\pi}{6} + x + \frac{1}{2}t + \frac{\sqrt{3}}{4}t^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}tx - \frac{1}{4}tx^2 + \frac{1}{4}t^2x + \frac{5}{16}t^3 + \dots.$$

Tačke označavaju članove reda ≥ 4 . ◆

Cauchy-Kovalevsky teorem je teorem od fundamentalnog značaja u teoriji parcijalnih diferencijalnih jednačbi. Međutim, njegova praktična primjena često je ograničena strogim zahtjevom da početni uvjeti i desna strana jednačbe moraju biti analitički, kao i činjenicom da teorem tvrdi postojanje i jedinstvenost rješenja samo u (možda vrlo maloj) okolini koordinatnog početka.

3.7 Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti nezavisne prve integrale sljedećih simetričnih sistema diferencijalnih jednačbi.

$$\begin{aligned} (i) \quad & \frac{dx}{-x^2} = \frac{dy}{xy - 2z^2} = \frac{dz}{xz}; \\ (ii) \quad & \frac{dx}{z(x-a)} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{x^2 + y^2 + ax}, \quad a \in \mathbb{R}; \\ (iii) \quad & \frac{dx}{xy} = \frac{dy}{-y\sqrt{1-y^2}} = \frac{dz}{z\sqrt{1-y^2} - axy}; \\ (iv) \quad & \frac{dx}{x+y-xy^2} = \frac{dy}{x^2y-x-y} = \frac{dz}{y^2-x^2}; \\ (v) \quad & \frac{dx}{x(y-z)} = \frac{dy}{y(z-x)} = \frac{dz}{z(x-y)}; \\ (vi) \quad & \frac{dx_1}{x_1-x_2} = \frac{dx_2}{x_1-x_2} = \frac{dx_3}{(x_3-x_4)(x_1-x_2+1)} = \frac{dx_4}{x_3-x_4}. \end{aligned}$$

2. Naći opće rješenje sljedećih linearnih homogenih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

$$\begin{aligned} (i) \quad & x \frac{\partial u}{\partial x} - 2y \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \\ (ii) \quad & (1 + \sqrt{3z-x-y}) \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0; \end{aligned}$$

3.7 Zadaci za samostalan rad

- (iii) $8xz \frac{\partial u}{\partial x} + 2yz \frac{\partial u}{\partial y} + (4x^2 + y^2) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$
- (iv) $\frac{\partial u}{\partial x} + (1 + x - y - z) \frac{\partial u}{\partial y} + (y - x + z) \frac{\partial u}{\partial z} = 0;$
- (v) $(x_1 + x_3 + x_4) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1 + x_3 + x_4) \frac{\partial u}{\partial x_2} + (x_1 + x_2 + x_4) \frac{\partial u}{\partial x_3} + (x_1 + x_2 + x_4) \frac{\partial u}{\partial x_4} = 0.$

3. Naći rješenje sljedećih Cauchyjevih problema:

- (i) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(x, 1) = x;$
- (ii) $2\sqrt{x} \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(1, y) = y^2;$
- (iii) $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad u(1, y, z) = yz;$
- (iv) $\frac{\partial u}{\partial x} + (2e^x - y) \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u(0, y) = y.$

4. Naći ono rješenje jednadžbe

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

koje prolazi kružnicom

$$x^2 + y^2 = ax, \quad z = 1.$$

5. Riješiti sljedeće Cauchyjeve probleme:

- (i) $(y - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (u - x) \frac{\partial u}{\partial y} = x - y, \quad y = z = -x;$
- (ii) $(x - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (y - u) \frac{\partial u}{\partial y} = 2u, \quad x - y = 2, \quad u + 2x = 1;$
- (iii) $(y + 2u^2) \frac{\partial u}{\partial x} - 2x^2 u \frac{\partial u}{\partial y} = x^2, \quad u = x, \quad y = x^2;$
- (iv) $x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u - x^2 - y^2, \quad u = x - x^2, \quad y = -2;$
- (v) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{y - x}{u}, \quad u = y^2, \quad x = 1.$

6. Odrediti onu integralnu površ $u = u(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$u(x + u) \frac{\partial u}{\partial x} - y(y + u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

za koju je $u(1, y) = \sqrt{y}.$

3.7 Zadaci za samostalan rad

7. Naći rješenje Cauchyjevog problema

$$u(x+u)\frac{\partial u}{\partial x} - y(y+u)\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad u = h, \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

8. Riješiti sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$x^n \frac{\partial u}{\partial x} - y^n \frac{\partial u}{\partial y} = u^n$$

za $n \in \mathbb{N}$. Za $n = 1$ i $n = -1$ naći onu integralnu površ koja sadrži pravu $u = 1$, $x = y\sqrt{2}$.

9. Naći skup integracionih faktora diferencijalne jednačbe

$$(x^3y - 2y^2)dx + (y^3x - 2x^4)dy = 0.$$

10. Naći opće rješenje sljedećih linearnih nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

$$(i) \quad y \frac{\partial u}{\partial x} + x \frac{\partial u}{\partial y} = x - y;$$

$$(ii) \quad e^x \frac{\partial u}{\partial x} + y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = ye^x;$$

$$(iii) \quad (u - y)^2 \frac{\partial u}{\partial x} + xu \frac{\partial u}{\partial y} = xu;$$

$$(iv) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \tan u \frac{\partial u}{\partial y} = \cos u;$$

$$(v) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = u + \sqrt{x^2 + y^2 + a^2}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$(vi) \quad 2y(2a - x) \frac{\partial u}{\partial x} + (x^2 + u^2 - y^2 - 4ax) \frac{\partial u}{\partial y} = -2yu, \quad a \in \mathbb{R}.$$

11. Naći opće rješenje sljedećih linearnih nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

$$(i) \quad (x+z) \frac{\partial u}{\partial x} + (z+x) \frac{\partial u}{\partial y} + (x+y) \frac{\partial u}{\partial z} = u;$$

$$(ii) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + (z+u) \frac{\partial u}{\partial y} + (y+u) \frac{\partial u}{\partial z} = y+z;$$

$$(iii) \quad x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} + z \frac{\partial u}{\partial z} = x^2 + 2u;$$

$$(iv) \quad (u-x) \frac{\partial u}{\partial x} + (u-y) \frac{\partial u}{\partial y} - z \frac{\partial u}{\partial z} = x+y.$$

12. Naći opće rješenje sljedećih linearnih nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

3.7 Zadaci za samostalan rad

- (i) $x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + x_n \frac{\partial u}{\partial x_n} = u + \frac{x_1 x_2, \dots, x_n}{u};$
- (ii) $(1 + \sqrt{u - a_1 x_1 - \dots - a_n x_n}) \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial u}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} = a_1 + a_2 + \cdots + a_n,$ $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R};$
- (iii) $(x_2 + x_3 + \cdots + x_n + u) \frac{\partial u}{\partial x_1} + (x_1 + x_3 + \cdots + x_n + u) \frac{\partial u}{\partial y} + \cdots + (x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1} + u) \frac{\partial u}{\partial y} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n.$

13. Ispitati integrabilnost sljedećih sistema parcijalnih diferencijalnih jednačbi, i ako su rješivi, riješiti ih.

- (i) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u}{y} - y^2; \end{cases}$
- (ii) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2y^2} + \frac{2u}{y} - y^2; \end{cases}$
- (iii) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u}{x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2u}{y}; \end{cases}$
- (iv) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = y - u, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = xu; \end{cases}$
- (v) $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 2yu - u^2, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = ux. \end{cases}$

14. Neka je f neprekidno diferencijabilna funkcija svojih argumenata. Naći potpune integrale sljedećih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

- (i) $f(p, q) = 0;$
- (ii) $f(y, p, q) = 0;$
- (iii) $f(u, p, q) = 0;$
- (iv) $f(x, y, p, q) = 0.$

15. Naći potpune integrale sljedećih parcijalnih diferencijalnih jednačbi:

- (i) $px + qy + upq = 0;$
- (ii) $p^2 - q^2 + u = 0;$

3.7 Zadaci za samostalan rad

- (iii) $px + qy = u$;
- (iv) $(p - x)^2 - (q - y)^2 = 1$;
- (v) $2u - px + qy + q^2 = 0$;
- (vi) $p^m + q^m = u^n \quad m, n \in \mathbb{N}$.

16. Naći potpune, singularni i opći integral sljedećih parcijalnih diferencijalnih jednačini:

- (i) $u - px - qy - p^2 - pq - q^2 = 0$;
- (ii) $p^2 + q^2 + 1 - \left(\frac{1 - p - q}{x + y + u} \right)^2 = 0$;
- (iii) $u + px + x^3pq + x^2yq^2$;
- (iv) $u - px - qy - \sqrt[3]{pq} = 0$.

17. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$u^2(2 + p^2 + q^2) = x^2 + y^2 + 2u(xp + yq).$$

Odrediti potpuni, singularni i opći integral. Naći ono rješenje za koje je $u = x + y$ i $y = x^2$.

18. Naći onu površ koja zadovoljava parcijalnu diferencijalnu jednačinu

$$u = px + qy + pq$$

i koja prolazi parabolom $x = 0$, $u = y^2$.

19. Naći rješenja sljedećih Cauchyjevih problema:

- (i) $u - px - qy - 3p^2 + q^2 = 0$, $x = 0$, $u = y^2$;
- (ii) $p^2 + q^2 - u = 0$, $x = \cos t$, $y = \sin t$, $u = 1$;
- (iii) $p^2 - 2pq + q^2 - 4u = 0$, $x = 0$, $y = t$, $u = \frac{t^2}{2}$;
- (iv) $p^2 - q^2 - 2u = 0$, $x = 0$, $y = t$, $u = (1 + t)^2$;
- (v) $u^2 - p^2 - q^2 - 1 = 0$, $x = t$, $y = 1 - t$, $u = 1$;
- (vi) $p^2 + q^2 - u^2 + 1 = 0$, $x^2 + y^2 = \lambda^2$, $u = 1$.

20. Data je parcijalna diferencijalna jednačina

$$u^2 - p^2x^2 - q^2y^2 = 0.$$

- a) Metodom Lagrange-Charpita odrediti potpuni i opći integral.
- b) Cauchyjevim metodom karakteristika odrediti partikularno rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$u = x^2, \quad y = x^2.$$

3.7 Zadaci za samostalan rad

21. Data je parcijalna diferencijalna jednačba

$$u^2 - pq = 0.$$

- a) Metodom Lagrange-Charpita odrediti potpuni i opći integral.
- b) Cauchyjevom metodom karakteristika odrediti partikularno rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$x = 1, \quad u = y^2.$$

22. Metodom karakteristika riješiti sljedeće Cauchyjeve probleme:

- (i) $p^2 + q^2 = 2u, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad u = 1;$
- (ii) $p^2 + q^2 + \left(p - \frac{x}{2}\right)\left(q - \frac{y}{2}\right) - u = 0, \quad u(x, 0) = 0;$
- (iii) $2pq - u = 0, \quad u(0, y) = \frac{y^2}{2};$
- (iv) $2p^2x + qy - u = 0, \quad u(x, 1) = -\frac{x}{2}.$

23. Naći potpuni i singularni integral jednačbe

$$u^2(1 + \sum_{i=1}^n p_i^2) = 1.$$

24. Odrediti obvojnice familije linija

$$x_1 + a^2 x_2 - 2a = 0, \quad (a \in \mathbb{R})$$

u $\mathbb{R}^2$ i familije ravni

$$2a_1 x_1 + 2a_2 x_2 - x_3 + a_1^2 + a_2^2 = 0, \quad (a_1, a_2 \in \mathbb{R})$$

u $\mathbb{R}^3$.

25. Naći potpune integrale *Eikonalove* parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\sum_{i=1}^n p_i^2 = 1.$$

26. Hamilton-Jacobi jednačba je parcijalna diferencijalna jednačba oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H(p_1, p_2, \dots, p_n) = 0,$$

gdje je $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Dokazati da je

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \sum_{i=1}^n a_i x_i - tH(a_1, \dots, a_n) + b$$

potpuni integral Hamilton-Jacobi jednačbe, gdje su $a_1, \dots, a_n$ i b proizvoljne konstante.

3.7 Zadaci za samostalan rad

27. Koristeći Cauchyjevu metodu karakteristika riješiti Cauchyjev problem

$$\sum_{i=1}^n x_i p_i + u = 0, \quad u(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}).$$

28. Napisati karakteristični sistem za parcijalnu diferencijalnu jednačbu

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{i=1}^n x_i p_i = f(x_1, \dots, x_n, t),$$

gdje su $a_1, \dots, a_n$ proizvoljne konstante. Koristeći karakteristični sistem Cauchyjevim metodom naći ono rješenje koje zadovoljava uvjet

$$u(x_1, \dots, x_n, 0) = g(x_1, \dots, x_n).$$

29. Koristeći Cauchyjevu metodu karakteristika riješiti sljedeće Cauchyjeve probleme:

- (i) $x_1 p_1 + x_2 p_2 = 2u, \quad u(x_1, 1) = g(x_1);$
- (ii) $x_1 p_1 + 2x_2 p_2 + p_3 = 3u, \quad u(x_1, x_2, 0) = g(x_1, x_2);$
- (iii) $u p_1 + p_2 = 1, \quad u(x_1, x_1) = \frac{1}{2} x_1;$
- (iv) $x_1 p_2 - x_2 p_1 = 0, \quad u(x_1, 0) = g(x_1);$
- (v) $p_1 + p_2 = u^2, \quad u(x_1, 0) = g(x_1);$
- (vi) $p_1 p_2 = u, \quad u(0, x_2) = x_2^2.$

30. Odrediti koje od sljedećih Pfaffovih diferencijalnih jednačbi su integrabilne i pronaći rješenja za one koje su integrabilne:

- (i) $yz \, dx + 2xz \, dy - 3xy \, dz = 0;$
- (ii) $(y^2 + xz) \, dx + (x^2 + yz) \, dy + 3z^2 \, dz = 0.$

31. Provjeriti da li su sljedeće Pfaffove diferencijalne jednačbe integrabilne i riješiti ih:

- (i) $2yz \, dx - 2xz \, dy - (x^2 - y^2)(z - 1) \, dz = 0;$
- (ii) $(y^2 + yz) \, dx + (z^2 + zx) \, dy + (y^2 - xy) \, dz = 0;$
- (iii) $(y^2 + z^2) \, dx + xy \, dy + xz \, dz = 0;$
- (iv) $yz(y + z) \, dx + xz(x + z) \, dy + xy(x + y) \, dz = 0;$
- (v) $z^2 \, dx + (z^2 - 2yz) \, dy + (2y^2 - yz - xz) \, dz = 0;$
- (vi) $(x^2 y - y^3 - y^2 z) \, dx + (xy^2 - x^2 z - x^3) \, dy + (x^2 + x^2 y) \, dz = 0;$
- (vii) $(2xz - yz) \, dx + (2yz - xz) \, dy - (x^2 - xy + y^2) \, dz = 0;$
- (viii) $yz \, dx + 2xz \, dy + xy \, dz = 0;$

3.7 Zadaci za samostalan rad

$$(ix) \quad (e^z y + e^z) dx + (e^z z + e^z) dy + (e^y - e^y z - e^z) dz = 0;$$

$$(x) \quad (2x^2 + 2xy + 2xz^2 + 1) dx + dy + 2z dz = 0;$$

$$(xi) \quad 2x(y + z) dx + (2yz - x^2 + y^2 - z^2) dy + (2yz - x^2 - y^2 + z^2) dz = 0;$$

$$(xii) \quad (2x^3 y + 1) dx + x^4 dy + x^2 \tan z dz = 0;$$

$$(xiii) \quad 2(y + z) dx - (x + z) dy + (2y - x + z) dz = 0;$$

$$(xiv) \quad (6x^5 + 4x^3 y + 3x^2 z + 2xy^2) dx + (x^4 + 2x^2 y + 3y^2) dy + (x^3 + 2z) dz = 0.$$

32. Za svaki od sljedećih početnih problema, provjeriti najprije da li su zadovoljeni uvjeti Cauchy-Kovalevsky teorema, a zatim pronaći članove Taylorovog reda do reda ≤ 2 razvijenog oko koordinatnog početka:

$$(i) \quad u_t = e^{tx} u_x, \quad u(0, x) = 1 - x + x^2;$$

$$(ii) \quad u_t = u_{x_1} u_{x_2}, \quad u(0, x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 2x_1^2;$$

$$(iii) \quad u_t = u^2 + u_{x_2} u_{x_3}, \quad u(0, x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_2^2 - x_3^3 + x_2 x_3.$$

33. Za sljedeći početni problem

$$u_t = \sin u_x, \quad u(0, x) = \frac{\pi}{4} x$$

provjeriti da li su uvjeti Cauchy-Kovalevsky teorema zadovoljeni i pronaći Taylorov red rješenja razvijen oko koordinatnog početka.

34. Za sljedeći početni problem

$$u_t = \cos u_x, \quad u(0, x) = \frac{\pi}{4} x + \frac{\pi}{6} x^2$$

provjeriti da li su uvjeti Cauchy-Kovalevsky teorema zadovoljeni i pokazati da vrijedi

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \frac{\pi}{4} x + \frac{\sqrt{2}}{2} t + \frac{\pi}{6} x^2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\pi}{3} x t + \frac{\pi}{12} t^2 - \frac{\sqrt{2}}{4} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 x t \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 x^2 - \frac{\sqrt{2}}{8} \left(\frac{\pi}{3}\right)^2 t^3 + \dots \end{aligned}$$

gdje tačke označavaju članove reda ≥ 4 .

Parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda

U ovom poglavlju razmatrat ćemo linearne parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda. Posebna pažnja posvećena je njihovoj klasifikaciji na eliptičke, paraboličke i hiperboličke tipove, kao i kanonskim oblicima koji omogućavaju jednostavniju analizu i rješavanje problema. Ova klasifikacija igra ključnu ulogu u razumijevanju ponašanja rješenja i izbora odgovarajućih metoda rješavanja.

Razmatraju se klasične parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda, uključujući Laplaceovu jednadžbu, jednadžbu provođenja toplote i talasnu jednadžbu. Poseban naglasak stavljen je na formulaciju i rješavanje početnih i rubnih problema, te na pitanja egzistencije i jedinstvenosti rješenja.

U okviru poglavlja obrađuju se i standardne metode rješavanja, kao što su Fourierova metoda ili metoda razdvajanja varijabli, koje se prirodno nadovezuju na teorijsku klasifikaciju jednadžbi. Kroz riješene primjere ilustruje se veza između tipa jednadžbe, postavljenih uvjeta i osobina rješenja, sa ciljem da se studentima omogući dublje razumijevanje strukture parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda.

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

U ovoj sekciji ćemo pokazati da se parcijalne diferencijalne jednadžbe višeg reda sa konstantnim koeficijentima mogu eksplicitno riješiti. Prvo ćemo posmatrati homogene parcijalne diferencijalne jednadžbe drugog reda koje u sebi sadrže samo parcijalne izvode drugog reda, a zatim ćemo pokazati kako se metoda operatora može koristiti za rješavanje nekih posebnih nehomogenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi. Na kraju, metodu operatora ćemo proširiti na rješavanje općih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog i višeg reda.

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Za parcijalne diferencijalne jednađbe oblika

$$u_{xx} + k_1 u_{xy} + k_2 u_{yy} = 0, \quad (4.1)$$

gdje su k_1 i k_2 konstante, koristimo oznake $D_1 = \partial/\partial x$ i $D_2 = \partial/\partial y$, tako da se jednađba (4.1) simbolički može zapisati kao

$$(D_1^2 + k_1 D_1 D_2 + k_2 D_2^2) u = 0. \quad (4.2)$$

Simbolički operator na lijevoj strani izjednačen sa nulom, odnosno

$$D_1^2 + k_1 D_1 D_2 + k_2 D_2^2 = 0, \quad (4.3)$$

naziva se pomoćna jednađba pridružena parcijalnoj diferencijalnoj jednađbi (4.1). Neka su njezini korijeni $D_1/D_2 = m_1, m_2$.

Slučaj I. Ako su korijeni jednađbe (4.3) međusobno različiti, tada je jednađba (4.2) ekvivalentna sa

$$(D_1 - m_1 D_2)(D_1 - m_2 D_2) u = 0. \quad (4.4)$$

Jednađba (4.4) će biti zadovoljena ako je u rješenje jednađbe $(D_1 - m_2 D_2)u = 0$, tj. $u_x - m_2 u_y = 0$. Ovo je linearna parcijalna diferencijalna jednađba prvog reda, i ona je ekvivalentna sa sistemom diferencijalnih jednađbi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_2} = \frac{du}{0}.$$

Iz ovoga slijedi da je $y + m_2 x = c_1$ i $u = c_2$, pa je rješenje dato sa $u = g(y + m_2 x)$, pri čemu je g proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Slično, jednađba (4.4) će također biti zadovoljena ako je u rješenje jednađbe $(D_1 - m_1 D_2)u = 0$, tj. ako je $u = f(y + m_1 x)$, pri čemu je f proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Sada je opće rješenje jednađbe (4.1) dato sa

$$u = f(y + m_1 x) + g(y + m_2 x).$$

Slučaj II. Ako su korijeni jednađbe (4.3) međusobno jednaki, tj. $m_1 = m_2$, tada je jednađba (4.4) ekvivalentna sa

$$(D_1 - m_1 D_2)^2 u = 0. \quad (4.5)$$

Stavljajući $(D_1 - m_1 D_2)u = v$, dobivamo $(D_1 - m_1 D_2)v = 0$, što kao i ranije daje $v = g(y + m_1 x)$, pri čemu je g proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija. Stoga (4.5) poprima oblik $(D_1 - m_1 D_2)u = g(y + m_1 x)$, odnosno

$$u_x - m_1 u_y = g(y + m_1 x).$$

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

Ovo je opet linearna parcijalna diferencijalna jednadžba prvog reda, pa je ona ekvivalentna sa sistemom diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m_1} = \frac{du}{g(y + m_1x)},$$

odakle slijedi $y + m_1x = c_1$ i $du = g(c_1)dx$, tj. $u = g(c_1)x + c_2$, pri čemu je c_2 proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija koja ovisi od c_1 . Stoga je opće rješenje (4.1) u ovom slučaju dato sa

$$u = f(y + m_1x) + xg(y + m_1x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Primjer 4.1.1. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xx} + u_{xy} - 2u_{yy} = 0.$$

Rješenje. Pomoćna jednadžba date parcijalne diferencijalne jednadžbe glasi

$$m^2 + m - 2 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

čija su rješenja $m_1 = 1$ i $m_2 = -2$. Stoga se opće rješenje može zapisati kao

$$u(x, y) = f(y + x) + g(y - 2x).$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ◆

Primjer 4.1.2. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$2u_{xx} + 5u_{xy} + 2u_{yy} = 0.$$

Rješenje. Pomoćna jednadžba glasi

$$2m^2 + 5m + 2 = 0, \quad m = D_1/D_2.$$

Njena rješenja su $m_1 = -2$, $m_2 = -1/2$. Stoga se opće rješenje može zapisati kao

$$u(x, y) = f(y - 2x) + g(2y - x).$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ◆

Primjer 4.1.3. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xx} + 6u_{xy} + 9u_{yy} = 0.$$

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

Rješenje. Pomoćna jednadžba je

$$m^2 + 6m + 9 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

a njena rješenja su $m_{1,2} = -3$. Stoga se opće rješenje može zapisati kao

$$u(x, y) = f(y - 3x) + xg(y - 3x).$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

U naredna dva primjera ćemo pokazati kako se ova metoda može primijeniti na rješavanje homogenih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi višeg reda.

Primjer 4.1.4. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xxx} + u_{xxy} - u_{xyy} - u_{yyy} = 0.$$

Rješenje. Pomoćna jednadžba glasi

$$m^3 + m^2 - m - 1 = 0.$$

Rješavanjem kubne jednadžbe dobivamo korijene $m_{1,2} = -1$ i $m_3 = 1$. Stoga se opće rješenje može zapisati kao

$$u(x, y) = f_1(y - x) + xf_2(y - x) + f_3(y + x).$$

U ovom rješenju f_1 , f_2 i f_3 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Primjer 4.1.5. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xxxx} - u_{yyyy} = 0.$$

Rješenje. Pomoćna jednadžba je algebarska jednadžba četvrtog stepena

$$m^4 - 1 = 0,$$

koja ima dva realna rješenja $m_1 = 1$ i $m_2 = -1$ i dva konjugovano kompleksna rješenja $m_3 = i$ i $m_4 = -i$. Opće rješenje se može zapisati u obliku

$$u(x, y) = f_1(y + x) + f_2(y - x) + f_3(y + ix) + f_4(y - ix).$$

U ovom rješenju f_1 , f_2 , f_3 i f_4 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Sada ćemo razmatrati nehomogene parcijalne diferencijalne jednadžbe oblika

$$\mathcal{L}(D_1, D_2)[u] := (D_1^2 + k_1 D_1 D_2 + k_2 D_2^2) u = F(x, y). \quad (4.6)$$

Kao u slučaju običnih diferencijalnih jednadžbi, partikularno rješenje $u_p(x, y)$ jednadžbe (4.6) može se dobiti korištenjem operatorske metode, tj. primjenom inverznog operatora $\mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1}$ na jednadžbu (4.6), odakle dobivamo

$$u_p(x, y) = \mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1} F(x, y) = \frac{1}{\mathcal{L}(D_1, D_2)} F(x, y). \quad (4.7)$$

U ovisnosti od oblika funkcije F , razlikujemo sljedeće specijalne slučajeve.

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

1° **slučaj.** Neka je $F(x, y) = e^{ax+by}$. Budući da je

$$(D_1^2 + k_1 D_1 D_2 + k_2 D_2^2) e^{ax+by} = (a^2 + k_1 ab + k_2 b^2) e^{ax+by},$$

odnosno

$$\mathcal{L}(D_1, D_2) [e^{ax+by}] = \mathcal{L}(a, b) [e^{ax+by}],$$

primjenjujući inverzni operator $\mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1}$ dobivamo

$$u_p(x, y) = \mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1} e^{ax+by} = \frac{1}{\mathcal{L}(a, b)} e^{ax+by},$$

ako vrijedi $\mathcal{L}(a, b) \neq 0$.

2° **slučaj.** Neka je $F(x, y) = \sin(mx + ny)$ ili $F(x, y) = \cos(mx + ny)$. Budući da je

$$(D_1^2 + k_1 D_1 D_2 + k_2 D_2^2) \sin(mx + ny) = (-m^2 - k_1 mn - k_2 n^2) \sin(mx + ny),$$

primjenjujući na obje strane inverzni operator, dobivamo

$$u_p(x, y) = \mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1} \sin(mx + ny) = \frac{1}{-m^2 - k_1 mn - k_2 n^2} \sin(mx + ny),$$

pod uvjetom da vrijedi $m^2 + k_1 mn + k_2 n^2 \neq 0$.

Na sličan način imamo da je

$$u_p(x, y) = \mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1} \cos(mx + ny) = \frac{1}{-m^2 - k_1 mn - k_2 n^2} \cos(mx + ny).$$

3° **slučaj.** Neka je $F(x, y) = x^m y^n$, gdje su m i n nenegativni cijeli brojevi. Budući da vrijedi

$$u_p(x, y) = \mathcal{L}(D_1, D_2)^{-1} x^m y^n = \frac{1}{\mathcal{L}(D_1, D_2)} x^m y^n,$$

razvijamo $\frac{1}{\mathcal{L}(D_1, D_2)}$ u binomni red po rastućim stepenima po D_1 ili D_2 , a zatim djelujemo na $x^m y^n$ član po član.

4° **slučaj.** Neka je $F(x, y)$ proizvoljna funkcija od x i y . Da bismo izračunali (4.7), rastavljamo $\frac{1}{\mathcal{L}(D_1, D_2)}$ na parcijalne razlomke tretirajući $\mathcal{L}(D_1, D_2)$ kao funkciju samo od D_1 i djelujemo na svaki parcijalni razlomak funkcije $F(x, y)$, uzimajući u obzir da vrijedi

$$\frac{1}{D_1 - mD_2} F(x, y) = \int F(x, c - mx) dx,$$

gdje se c nakon integracije zamjenjuje sa $y + mx$.

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Da bismo ovo pokazali, stavimo da je

$$\frac{1}{D_1 - mD_2} F(x, y) = \phi(x, y),$$

odakle slijedi

$$(D_1 - mD_2)\phi(x, y) = F(x, y).$$

Posljednjoj jednađbi možemo pridružiti sistem diferencijalnih jednađbi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{d\phi}{F(x, y)},$$

odakle vidimo da je $y + mx = c$, te vrijedi

$$dx = \frac{d\phi}{F(x, c - mx)}.$$

Ovo sada daje

$$\phi(x, y) = \int F(x, c - mx) dx.$$

U sljedećim primjerima ćemo demonstrirati navedena četiri slučaja.

Primjer 4.1.6. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xx} - 5u_{xy} + 6u_{yy} = e^{x+y}. \quad (4.8)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.8) pomoćna jednađba je

$$m^2 - 5m + 6 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

što daje $m_1 = 2$, $m_2 = 3$. Prema tome, rješenje homogene jednađbe je

$$u_h(x, y) = f(y - 2x) + g(y - 3x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Kako je $a = b = 1$, partikularno rješenje je dato sa

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= (D_1^2 - 5D_1D_2 + 6D_2^2)^{-1} e^{x+y} = \frac{1}{1^2 - 5 \cdot 1 \cdot 1 + 6 \cdot 1^2} e^{x+y} \\ &= \frac{1}{1 - 5 + 6} e^{x+y} = \frac{1}{2} e^{x+y}. \end{aligned}$$

Prema tome, opće rješenje jednađbe (4.8) je dato kao zbir homogenog i partikularnog rješenja, tj.

$$u(x, y) = f(y - 2x) + g(y - 3x) + \frac{1}{2} e^{x+y}.$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ◆

Primjer 4.1.7. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xx} - u_{xy} = \cos x \cos 2y. \quad (4.9)$$

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.9) pomoćna jednađba je

$$m^2 - m = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

što daje $m_1 = 0$, $m_2 = 1$. Stoga je rješenje homogene jednađbe dato sa

$$u_h(x, y) = f(y) + g(y + x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \frac{1}{D_1^2 - D_1 D_2} \cos x \cos 2y \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{D_1^2 - D_1 D_2} [\cos(x + 2y) + \cos(x - 2y)] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{-1 + 2} \cos(x + 2y) + \frac{1}{-1 - 2} \cos(x - 2y) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(x + 2y) - \frac{1}{3} \cos(x - 2y) \right]. \end{aligned}$$

Stoga je opće rješenje jednađbe (4.9) dato sa

$$u(x, y) = f(y) + g(y + x) + \frac{1}{2} \cos(x + 2y) - \frac{1}{6} \cos(x - 2y).$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ◆

Primjer 4.1.8. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xx} + 4u_{xy} - 5u_{yy} = y^2. \quad (4.10)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.10) pomoćna jednađba je

$$m^2 + 4m - 5 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

što daje $m_1 = -5$, $m_2 = 1$. Prema tome, rješenje homogene jednađbe je

$$u_h(x, y) = f(y + 5x) + g(y - x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$u_p(x, y) = \frac{1}{D_1^2 + 4D_1 D_2 - 5D_2^2} y^2 = \frac{1}{D_1^2 \left(1 + 4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2} \right)} y^2.$$

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

Prema formuli za razvoj u binomni red imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + 4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}} &= \left(1 + 4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \binom{-1}{k} \left(4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}\right)^k \\ &= 1 - \left(4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}\right) + \left(4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}\right)^2 + \dots \\ &= 1 - 4\frac{D_2}{D_1} + 21\frac{D_2^2}{D_1^2} + \dots \end{aligned}$$

U posljednjem redu smo napisali samo članove reda zaključno sa kvadratom od $\frac{D_2}{D_1}$ jer članovi oblika $\frac{D_2^k}{D_1^k}$, za $k \geq 3$, ne utiču na rezultat, pošto je $D_2^k y^2 = 0$ za sve $k \geq 3$. Dalje, kako je

$$\frac{D_2}{D_1} y^2 = \frac{1}{D_1} (D_2 y^2) = \frac{1}{D_1} (2y) = \int 2y dx = 2xy + c_1,$$

i

$$\begin{aligned} \frac{D_2^2}{D_1^2} y^2 &= \frac{1}{D_1^2} (D_2^2 y^2) = \frac{1}{D_1^2} (2) = \frac{1}{D_1} \int 2 dx = \frac{1}{D_1} (2x + c_2) \\ &= \int (2x + c_2) dx = x^2 + c_2 x + c_3, \end{aligned}$$

to imamo

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \frac{1}{D_1^2 + 4D_1 D_2 - 5D_2^2} y^2 = \frac{1}{D_1^2 \left(1 + 4\frac{D_2}{D_1} - 5\frac{D_2^2}{D_1^2}\right)} y^2 \\ &= \frac{1}{D_1^2} \left(1 - 4\frac{D_2}{D_1} + 21\frac{D_2^2}{D_1^2} + \dots\right) y^2 = \frac{1}{D_1^2} (y^2 - 8xy + 21x^2) \\ &= \frac{1}{D_1} \int (y^2 - 8xy + 21x^2) dx = \frac{1}{D_1} (xy^2 - 4x^2 y + 7x^3) \\ &= \int (xy^2 - 4x^2 y + 7x^3) dx = \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{4x^3 y}{3} + \frac{7x^4}{4}, \end{aligned}$$

pri čemu smo proizvoljne konstante u gornjim integralima izjednačavali sa nulom (što je dozvoljeno s obzirom da se radi o partikularnom rješenju).

Konačno, opće rješenje jednadžbe (4.10) je

$$u(x, y) = f(y + 5x) + g(y - x) + \frac{x^2 y^2}{2} - \frac{4x^3 y}{3} + \frac{7x^4}{4}.$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ◆

Primjer 4.1.9. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xx} - 4u_{xy} + 4u_{yy} = e^{2x+y}. \quad (4.11)$$

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.11) pomoćna jednađba je

$$(m - 2)^2 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

čija su rješenja $m_{1,2} = 2$. Stoga je rješenje homogene jednađbe dato sa

$$u_h(x, y) = f(y + 2x) + xg(y + 2x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$u_p(x, y) = \frac{1}{(D_1 - 2D_2)^2} e^{2x+y}.$$

Jasno je da 1° **slučaj** ne vrijedi. Međutim, možemo primijeniti 4° **slučaj**. Za ovu primjenu primijetimo da za jednađbu $(D_1 - 2D_2)v = e^{2x+y}$ rješenje je dato sa

$$v(x, y) = \int F(x, c - 2x) dx = \int e^{2x+(c-2x)} dx = xe^c = xe^{2x+y}.$$

Budući da $(D_1 - 2D_2)u_p = v = xe^{2x+y}$, partikularno rješenje je

$$u_p(x, y) = \int xe^{2x+(c-2x)} dx = \int xe^c dx = \frac{1}{2}x^2e^c = \frac{1}{2}x^2e^{2x+y}.$$

Stoga je opće rješenje jednađbe (4.11)

$$u(x, y) = f(y + 2x) + xg(y + 2x) + \frac{1}{2}x^2e^{2x+y}.$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Primjer 4.1.10. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xx} + u_{xy} - 6u_{yy} = y \cos x. \quad (4.12)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.12) pomoćna jednađba je

$$m^2 + m - 6 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

čija su rješenja $m_1 = -3$, $m_2 = 2$. Stoga je rješenje homogene jednađbe dato sa

$$u_h(x, y) = f(y - 3x) + g(y + 2x),$$

pri čemu su f i g proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$u_p(x, y) = \frac{1}{(D_1 - 2D_2)(D_1 + 3D_2)} y \cos x.$$

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Prvo rješavamo jednađbu $(D_1 + 3D_2)v = y \cos x$ kako bismo odredili

$$\begin{aligned} v(x, y) &= \int (c + 3x) \cos x dx = (c + 3x) \sin x + 3 \cos x \\ &= y \sin x + 3 \cos x. \end{aligned}$$

Sada, budući da je $(D_1 - 2D_2)u_p = v = y \sin x + 3 \cos x$, partikularno rješenje je

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \int [(c - 2x) \sin x + 3 \cos x] dx \\ &= (c - 2x)(-\cos x) - (-2)(-\sin x) + 3 \sin x \\ &= \sin x - y \cos x. \end{aligned}$$

Stoga je opće rješenje jednađbe (4.12):

$$u(x, y) = f(y - 3x) + g(y + 2x) + \sin x - y \cos x.$$

U ovom rješenju f i g su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. $\blacklozenj$

Iz gornjih primjera jasno je da se navedena procedura može jednostavno proširiti na parcijalne diferencijalne jednađbe višeg reda oblika

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n} + k_1 \frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1} \partial y} + \cdots + k_n \frac{\partial^n u}{\partial y^n} = F(x, y),$$

pod uvjetom da je funkcija $F(x, y)$ odgovarajućeg oblika. Ovu tehniku ćemo ilustrirati na sljedećim primjerima.

Primjer 4.1.11. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xxx} - 2u_{xy} = 2e^{2x} + 3x^2y. \quad (4.13)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.13) pomoćna jednađba je

$$m^3 - 2m^2 = 0, \quad m = D_1/D_2,$$

što daje $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, $m_3 = 2$. Stoga je rješenje homogene jednađbe dato sa

$$u_h(x, y) = f_1(y) + xf_2(y) + f_3(y + 2x),$$

pri čemu su f_1 , f_2 i f_3 proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \frac{1}{D_1^3 - 2D_1^2 D_2} (2e^{2x} + 3x^2y) \\ &= \frac{2}{8 - 8 \cdot 0} e^{2x} + \frac{3}{D_1^3} \left(1 + \frac{2D_2}{D_1} + \frac{4D_2^2}{D_1^2} + \cdots \right) x^2y \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{3}{D_1^3} \left(x^2y + \frac{2}{3} x^3 \right) \\ &= \frac{1}{4} e^{2x} + \frac{1}{20} x^5y + \frac{1}{60} x^6. \end{aligned}$$

4.1 Operatorska metoda za jednadžbe višeg reda

Primijetimo da smo partikularno rješenje odredili korištenjem tehnika izloženih u 1° **slučaju** i 3° **slučaju**.

Sada je opće rješenje jednadžbe (4.13) dato sa

$$u(x, y) = f_1(y) + xf_2(y) + f_3(y + 2x) + \frac{1}{4}e^{2x} + \frac{1}{20}x^5y + \frac{1}{60}x^6.$$

U ovom rješenju f_1 , f_2 i f_3 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Sada ćemo razmotriti opću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu drugog reda sa konstantnim koeficijentima koja je oblika

$$\mathcal{A}(D_1, D_2)[u] = (D_1^2 + k_1D_1D_2 + k_2D_2^2 + k_3D_1 + k_4D_2 + k_5)[u] = F(x, y). \quad (4.14)$$

Uz pretpostavku da su koeficijenti k_i , $i = 1, \dots, 5$, konstantni, možemo pretpostaviti da je rješenje jednadžbe (4.14) oblika $e^{\lambda x + \mu y}$ za $F(x, y) = 0$, što vrijedi ako i samo ako je

$$\lambda^2 + k_1\lambda\mu + k_2\mu^2 + k_3\lambda + k_4\mu + k_5 = 0. \quad (4.15)$$

Jednadžba (4.15) je algebarska jednadžba sa dvije nepoznate λ i μ . Ova jednadžba općenito ima beskonačno mnogo rješenja (λ, μ) . Konkretno, ako (λ_i, μ_i) , $i = 1, 2, \dots, n$ predstavljaju n rješenja jednadžbe (4.15), tada je

$$\sum_{i=1}^n c_i e^{\lambda_i x + \mu_i y}$$

rješenje jednadžbe (4.14) za $F(x, y) = 0$.

Napomenimo da uvijek možemo faktorizirati $\mathcal{A}(D_1, D_2)$ u faktore oblika $D_1 - mD_2 - c$, i kako bismo pronašli rješenje $(D_1 - mD_2 - c)u = 0$, pišemo

$$u_x - mu_y = cu.$$

Za ovu jednadžbu, pridruženi sistem diferencijalnih jednadžbi glasi

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{-m} = \frac{du}{cu},$$

što nakon integracije daje

$$u(x, y) = e^{cx}\phi(y + mx),$$

pri čemu je ϕ proizvoljna neprekidno diferencijabilna funkcija.

Primjer 4.1.12. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} + 3u_x + 3u_y + 2u = 0. \quad (4.16)$$

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Rješenje. Algebarska jednađba pridružena jednađbi (4.16) glasi

$$\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2 + 3\lambda + 3\mu + 2 = 0.$$

Primijetimo da posljednju jednađbu možemo napisati u obliku

$$(\lambda + \mu)^2 + 3(\lambda + \mu) + 2 = 0,$$

čija su rješenja $\lambda + \mu = -2$ i $\lambda + \mu = -1$. Sada datu parcijalnu diferencijalnu jednađbu možemo pisati u obliku

$$(D_1 + D_2 + 1)(D_1 + D_2 + 2)u = 0,$$

pa je njeno opće rješenje dato sa

$$u(x, y) = e^{-x}\phi_1(y - x) + e^{-2x}\phi_2(y - x).$$

U ovom rješenju ϕ_1 i ϕ_2 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Primjer 4.1.13. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$u_{xx} - u_{yy} + u_x - u_y = e^{2x+3y}. \quad (4.17)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.17), odnosno

$$(D_1^2 - D_2^2 + D_1 - D_2)u = e^{2x+3y},$$

imamo $\mathcal{A}(D_1, D_2) = (D_1 - D_2)(D_1 + D_2 + 1)$. Stoga je rješenje homogene jednađbe $\mathcal{A}(D_1, D_2)[u] = 0$ dato sa

$$u_h(x, y) = \phi_1(y + x) + e^{-x}\phi_2(y - x),$$

pri čemu su ϕ_1 i ϕ_2 proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Za partikularno rješenje imamo

$$u_p(x, y) = \frac{1}{D_1^2 - D_2^2 + D_1 - D_2} e^{2x+3y} = -\frac{1}{6} e^{2x+3y}.$$

Konačno, opće rješenje glasi

$$u(x, y) = \phi_1(y + x) + e^{-x}\phi_2(y - x) - \frac{1}{6} e^{2x+3y}.$$

U ovom rješenju ϕ_1 i ϕ_2 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

Primjer 4.1.14. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$(D_1 + D_2 - 1)(D_1 + 2D_2 - 3)u = 4 + 3x + 6y. \quad (4.18)$$

4.1 Operatorska metoda za jednađbe višeg reda

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.18) imamo $\mathcal{A}(D_1, D_2) = (D_1 + D_2 - 1)(D_1 + 2D_2 - 3)$. Stoga je rješenje homogene jednađbe $\mathcal{A}(D_1, D_2)[u] = 0$ dato sa

$$u_h(x, y) = e^x \phi_1(y - x) + e^{3x} \phi_2(y - 2x),$$

pri čemu su ϕ_1 i ϕ_2 proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Sada za partikularno rješenje imamo

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \frac{1}{3 + D_1^2 + 3D_1D_2 + 2D_2^2 - 4D_1 - 5D_2} (4 + 3x + 6y) \\ &= \frac{1}{3 \left(1 + \frac{D_1^2}{3} + D_1D_2 + \frac{2D_2^2}{3} - \frac{4D_1}{3} - \frac{5D_2}{3} \right)} (4 + 3x + 6y) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{4}{3}D_1 + \frac{5}{3}D_2 + \dots \right) (4 + 3x + 6y) = 6 + x + 2y. \end{aligned}$$

Stoga je opće rješenje jednađbe (4.18) dato sa

$$\boxed{u(x, y) = e^x \phi_1(y - x) + e^{3x} \phi_2(y - 2x) + 6 + x + 2y.}$$

U ovom rješenju ϕ_1 i ϕ_2 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. $\blacklozenj$

Primjer 4.1.15. Riješiti parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$(D_1^2 + 2D_1D_2 + D_2^2 - 2D_1 - 2D_2)u = \sin(x + 2y). \quad (4.19)$$

Rješenje. Za parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.19) imamo $\mathcal{A}(D_1, D_2) = (D_1 + D_2)(D_1 + D_2 - 2)$. Stoga je rješenje homogene jednađbe $\mathcal{A}(D_1, D_2)[u] = 0$ dato sa

$$u_h(x, y) = \phi_1(y - x) + e^{2x} \phi_2(y - x),$$

pri čemu su ϕ_1 i ϕ_2 proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije.

Sada za partikularno rješenje imamo

$$\begin{aligned} u_p(x, y) &= \frac{1}{D_1^2 + 2D_1D_2 + D_2^2 - 2D_1 - 2D_2} \sin(x + 2y) \\ &= \frac{1}{-1 + 2(-2) + (-4) - 2D_1 - 2D_2} \sin(x + 2y) \\ &= -\frac{1}{2(D_1 + D_2) + 9} \sin(x + 2y) \\ &= -\frac{2(D_1 + D_2) - 9}{4(D_1^2 + 2D_1D_2 + D_2^2) - 81} \sin(x + 2y) \\ &= -\frac{2(D_1 + D_2) - 9}{4[-1 + 2(-2) - 4] - 81} \sin(x + 2y) \\ &= \frac{1}{117} [2\{\cos(x + 2y) + 2\cos(x + 2y)\} - 9\sin(x + 2y)] \\ &= \frac{1}{39} [2\cos(x + 2y) - 3\sin(x + 2y)]. \end{aligned}$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Stoga je opće rješenje jednađbe (4.19) dato sa

$$u(x, y) = \phi_1(y - x) + e^{2x}\phi_2(y - x) + \frac{1}{39}[2\cos(x + 2y) - 3\sin(x + 2y)].$$

U ovom rješenju ϕ_1 i ϕ_2 su proizvoljne neprekidno diferencijabilne funkcije. ♦

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Ovdje ćemo prvo posmatrati kvazilinearnu parcijalnu diferencijalnu jednađbu drugog reda

$$A(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0 \quad (4.20)$$

gdje su funkcije $A, B, C \in C^2(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$, a $F \in C(\mathcal{D})$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^5$. Primijetimo da možemo pretpostaviti da je $A \neq 0$ u oblasti Ω . Naime, ako je $C \neq 0$, zamjenom mjesta nezavisnih varijabli x i y dobivamo jednađbu u kojoj je $A \neq 0$. Ako je $A = C = 0$ u Ω , onda je $B \neq 0$, pa se smjenom $x' = x + y$ i $y' = x - y$ parcijalna diferencijalna jednađba (4.20) svodi na jednađbu u kojoj je $A \neq 0$.

Posmatrajmo sada algebarsku jednađbu

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (4.21)$$

Jednađba (4.21), u nedegeneriranom slučaju, predstavlja ili parabolu ili hiperbolu ili elipsu. Preciznije, ako je $B^2 - AC = 0$, onda je parabola, ako je $B^2 - AC < 0$, onda je elipsa, ako je $B^2 - AC > 0$, onda je hiperbola.

Parcijalna diferencijalna jednađba (4.20) je

- (i) *hiperboličnog* tipa u oblasti Ω ako je $B^2 - AC > 0$;
- (ii) *paraboličnog* tipa u oblasti Ω ako je $B^2 - AC = 0$;
- (iii) *eliptičnog* tipa u oblasti Ω ako je $B^2 - AC < 0$.

Parcijalna diferencijalna jednađba (4.20) može biti i mješovitog tipa, ako je različitih tipova u nekim podoblastima oblasti Ω .

Da bismo jednađbu sveli na kanonski oblik uvodimo nove nezavisne varijable ξ i η pomoću transformacija

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y),$$

gdje su $\xi, \eta \in C^2(\Omega)$, i takve da je njihov Jacobian različit od nule. Ovo je dovoljan uvjet egzistencije inverznih funkcija za funkcije u sistemu smjene, zato

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

se taj sistem može riješiti po x i y : $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Za ovakvu smjenu se kaže da je *regularna*.

Imamo

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) = v(\xi, \eta).$$

Izračunavanjem odgovarajućih parcijalnih izvoda dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ &\quad + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Zamjenjujući u polaznu parcijalnu diferencijalnu jednađbu, imamo

$$\bar{A} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\bar{B} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \bar{C} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \bar{F} \left(\xi, \eta, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) = 0, \quad (4.22)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{A}(\xi, \eta) &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2, \\ \bar{B}(\xi, \eta) &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y}, \\ \bar{C}(\xi, \eta) &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + 2B \eta_x \eta_y + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2. \end{aligned}$$

S druge strane je

$$\bar{B}^2(x, y) - \bar{A}(x, y)\bar{C}(x, y) = (B^2(x, y) - A(x, y)C(x, y)) \left(\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right)^2.$$

Dakle, datom smjenom varijabli ne mijenja se tip parcijalne diferencijalne jednađbe. Funkcije $\xi(x, y)$ i $\eta(x, y)$ treba birati tako da (4.22) dobiva što jednostavniji oblik. U tom cilju, polaznoj parcijalnoj diferencijalnoj jednađbi (4.20) pridružiti ćemo sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednađbu

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 = 0. \quad (4.23)$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Tražimo da vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:

1. $\bar{A} = 0, \bar{C} = 0,$
2. $\bar{A} = 0, \bar{B} = 0,$
3. $\bar{A} = \bar{C}, \bar{B} = 0,$

tako da razlikujemo sljedeće slučajeve:

Hiperbolični tip. Parcijalna diferencijalna jednađba (4.23) se može napisati u obliku

$$\frac{1}{A} \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] \left[A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right] = 0.$$

Ova parcijalna diferencijalna jednađba se može razložiti na dvije linearne homogene parcijalne diferencijalne jednađbe prvog reda

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \quad (4.24)$$

Ovim jednađbama se pridružuju sistemi običnih diferencijalnih jednađbi, redom

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}, \quad (4.25)$$

ili u obliku

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0, \quad A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0.$$

Ove dvije jednađbe se mogu skupa napisati u sljedećem obliku

$$A(dy)^2 - 2B dx dy + C(dx)^2 = 0,$$

koja se naziva *jednađba karakteristika* pridružena parcijalnoj diferencijalnoj jednađbi (4.20) ili *karakteristična jednađba*. Budući da su koeficijenti jednađbi (4.25) iz $C^2(\Omega)$ i kako je $A \neq 0$ u Ω , postoje opći integrali ovih jednađbi,

$$\varphi(x, y) = C_1, \quad \psi(x, y) = C_2. \quad (4.26)$$

Dakle, funkcije φ i $\psi \in C^2(\Omega)$ su redom rješenja parcijalne diferencijalne jednađbe (4.24), pa zadovoljavaju uvjete $\frac{\partial \varphi}{\partial y} \neq 0, \frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0$ u Ω . Funkcije (4.26) se nazivaju *karakteristike* parcijalne diferencijalne jednađbe (4.20). Za jednađbu hiperboličnog tipa integrali (4.26) su realni i različiti, tj. postoje dvije različite familije karakteristika.

Budući da je

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0,$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

iz jednađbi karakteristika slijedi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Sada je

$$\frac{\partial(\varphi, \psi)}{\partial(x, y)} = \frac{2\sqrt{B^2 - AC}}{A} \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \neq 0.$$

Smjena nezavisnih varijabli

$$\xi = \varphi(x, y), \quad \eta = \psi(x, y)$$

je regularna. Budući da su funkcije $\varphi(x, y)$ i $\psi(x, y)$ rješenja jednađbe (4.23), onda je $\bar{A} = \bar{C} = 0$. Kako je $\bar{B}^2 - \bar{A}\bar{C} > 0$, to je $\bar{B} \neq 0$ u Ω . Sada, parcijalnu diferencijalnu jednađbu (4.22) podijelimo sa $2\bar{B}$ i dobivamo kanonski oblik jednađbe hiperboličnog tipa

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \Phi \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

Napomenimo da se smjenom

$$\alpha(x, y) = \xi(x, y) + \eta(x, y), \quad \beta(x, y) = \xi(x, y) - \eta(x, y),$$

polazna parcijalna diferencijalna jednađba, također, svodi na kanonski oblik koji glasi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \beta^2} = \bar{\Phi}_1 \left(\alpha, \beta, u, \frac{\partial u}{\partial \alpha}, \frac{\partial u}{\partial \beta} \right).$$

Parabolični tip. U ovom slučaju jednađbe (4.24) su jednake međusobno. Homogenoj linearnoj parcijalnoj diferencijalnoj jednađbi prvog reda

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} + B \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \tag{4.27}$$

se pridružuje obična diferencijalna jednađba

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B}.$$

Opći integral ove jednađbe je $\varphi(x, y) = C$, i to je karakteristika polazne parcijalne diferencijalne jednađbe. Formule za transformaciju su $\xi(x, y) = \varphi(x, y)$, $\eta = \psi(x, y)$, gdje je $\varphi(x, y)$ rješenje jednađbe (4.27), a $\psi(x, y)$ može biti bilo koja dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija, takva da je smjena varijabli regularna. Kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe paraboličnog tipa je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_2 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Eliptični tip. Ovo je slučaj kada je $B^2 - AC < 0$. Pretpostavimo da su funkcije A, B, C analitičke funkcije varijabli x, y, z u oblasti Ω . Tada dobivamo jednađbe karakteristika

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B \pm i\sqrt{-(B^2 - AC)}}{A}.$$

Budući da su koeficijenti jednađbi također analitičke funkcije od x i y , iz teorije analitičkih funkcija slijedi da postoje analitička rješenja tih jednađbi u oblasti Ω ,

$$g(x, y) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad \bar{g}(x, y) = \varphi(x, y) - i\psi(x, y),$$

za koje je $\left| \frac{\partial g}{\partial y} \right| \neq 0$ u oblasti Ω . Dakle, jednađba eliptičnog tipa ima dvije familije konjugovano kompleksnih karakteristika $g(x, y) = C_1$, $\bar{g}(x, y) = C_2$. Da bismo izbjegli rad sa kompleksnim varijablama, za formule transformacije se mogu uzeti funkcije

$$\xi(x, y) = \varphi(x, y), \quad \eta(x, y) = \psi(x, y).$$

Kako je

$$\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(g, \bar{g})} \frac{\partial(g, \bar{g})}{\partial(x, y)} = -\frac{\sqrt{AC - B^2}}{A} \left| \frac{\partial g}{\partial y} \right|^2 \neq 0,$$

ova smjena je regularna. Izjednačavanjem realnog i imaginarnog dijela u jednačnosti

$$A \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + C \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \equiv 0$$

koja vrijedi, jer je $g(x, y)$ rješenje odgovarajuće jednađbe, dobivamo

$$A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 \equiv A \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + 2B \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2,$$

$$A \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + B \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) + C \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial y} \equiv 0,$$

pa je $\bar{B} = 0$ i $\bar{A} = \bar{C}$. Dakle, kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe eliptičnog tipa je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Phi_3 \left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right).$$

U nastavku dajemo nekoliko riješenih primjera.

Primjer 4.2.1. Odrediti kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Rješenje. Ovdje je

$$A = y^2, \quad B = 0, \quad C = -x^2.$$

Imamo da je

$$B^2 - AC = x^3 y^2 \geq 0.$$

Ova jednađba je hiperboličnog tipa svugdje osim za $x = 0$ i $y = 0$, gdje je paraboličnog tipa. Jednađbe karakteristika su

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 = C_1, \quad \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2 = C_2.$$

Da bismo našli kanonski oblik posmatrajmo smjenu

$$\xi = \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2, \quad \eta = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}x^2.$$

Na osnovu ovoga je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -x \frac{\partial u}{\partial \xi} + x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = y \frac{\partial u}{\partial \xi} + y \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &= x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ &= y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

Ovo nam daje kanonsku formu jednađbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \frac{\eta}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{\xi}{2(\xi^2 - \eta^2)} \frac{\partial u}{\partial \eta}.$$

Ako je $x = 0$ ili $y = 0$, tada je jednađba paraboličnog tipa i ima oblik

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, (y \neq 0), \text{ odnosno } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, (x \neq 0).}$$

◆

Primjer 4.2.2. Odrediti kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Rješenje. Ovdje je

$$A = x^2, \quad B = xy, \quad C = y^2.$$

Imamo da je

$$B^2 - AC = x^2y^2 - x^2y^2 \geq 0.$$

Ova jednađba uvijek paraboličnog tipa. Jednađba karaktersitike je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\frac{y}{x} = C.$$

Za $y = 0$ ova jednađba se svodi na

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0,$$

a za $x = 0$ na

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Da bismo našli kanonski oblik za $x, y \neq 0$ posmatrajmo smjenu

$$\xi = \frac{y}{x}, \quad \eta = y,$$

Kako je $\frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} = -\frac{y}{x^2}$ ova smjena je regularna za $y \neq 0$. Koristeći ovu smjenu jednađba se reducira na kanonsku formu

$$y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0.$$

Dakle,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad y \neq 0.$$



Primjer 4.2.3. Odrediti kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Rješenje. Ovdje je

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = x^2.$$

Imamo da je

$$B^2 - AC = -x^2 \leq 0.$$

Ova jednađba je paraboličnog tipa na y -osi ($x = 0$) i ima oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0.$$

Ako je $x \neq 0$, onda je ova jednađba eliptičnog tipa. Jednađbe karakteristika su

$$\frac{dy}{dx} = ix, \quad \frac{dy}{dx} = -ix.$$

Poslije integracije dobivamo

$$2y - ix^2 = C_1, \quad 2y + ix^2 = C_2.$$

Da bismo našli kanonski oblik posmatrajmo smjenu

$$\xi = 2y, \quad \eta = x^2.$$

Na osnovu ovoga je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = 2x \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = 2 \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &= 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}. \end{aligned}$$

Ovo nam daje kanonsku formu jednađbe

$$4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial \eta} + 4x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = 0,$$

odnosno

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta}.}$$

◆

Primjer 4.2.4. Odrediti kanonski oblik parcijalne diferencijalne jednađbe

$$x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

4.2 Klasifikacija jednađžbi drugog reda sa dvije varijable

Rješenje. Ovdje je

$$A = x, \quad B = 0, \quad C = y.$$

Imamo da je

$$B^2 - AC = -xy.$$

Ova jednađžba je paraboličnog tipa ako je $x = 0, y \neq 0$ i ima kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{2}{y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0$$

ili ako je $y = 0, x \neq 0$ i ima kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2}{x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Ako je $xy < 0$ onda je ova jednađžba hiperboličnog tipa. Jednađžbe karakteristika su

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{-\frac{y}{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{-\frac{y}{x}}. \quad (4.28)$$

Ako je $x < 0$ i $y > 0$ jednađžbe (4.28) možemo napisati u obliku

$$\frac{dy}{\sqrt{y}} = \frac{dx}{\sqrt{-x}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\frac{dx}{\sqrt{-x}}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\sqrt{y} + \sqrt{-x} = C_1, \quad \sqrt{y} - \sqrt{-x} = C_2.$$

Da bismo našli kanonski oblik uvedimo smjenu

$$\xi = \sqrt{y} + \sqrt{-x}, \quad \eta = \sqrt{y} - \sqrt{-x}.$$

Na osnovu ovoga je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ &= -\frac{1}{4x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2x} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{4x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4x\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{4x\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ &= \frac{1}{4y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{2y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{1}{4y} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} - \frac{1}{4y\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{4y\sqrt{y}} \frac{\partial u}{\partial \eta}. \end{aligned}$$

4.2 Klasifikacija jednađbi drugog reda sa dvije varijable

Ovo nam daje

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} - \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3}{4} \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Kako je

$$\sqrt{y} = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \sqrt{-x} = \frac{\xi - \eta}{2},$$

kanonski oblik jednađbe je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} + \frac{3}{\xi^2 - \eta^2} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} - \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Ako je $x > 0$ i $y < 0$ jednađbe (4.28) možemo napisati u obliku

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -\frac{dx}{\sqrt{x}}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\sqrt{-y} + \sqrt{x} = C_1, \quad \sqrt{-y} - \sqrt{x} = C_2.$$

Da bismo našli kanonski oblik uvedimo smjenu

$$\xi = \sqrt{-y} + \sqrt{x}, \quad \eta = \sqrt{-y} - \sqrt{x}.$$

Na sličan način kao u prethodnom slučaju dobivamo kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \eta} + \frac{3}{\xi^2 - \eta^2} \left(\xi \frac{\partial u}{\partial \eta} + \eta \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0.$$

Ako je $xy > 0$ onda je ova jednađba eliptičnog tipa.

Ako je $x < 0$ i $y < 0$ jednađbe karaktersitika su

$$\frac{dy}{dx} = i\sqrt{\frac{y}{x}}, \quad \frac{dy}{dx} = -i\sqrt{\frac{y}{x}},$$

odnosno

$$\frac{dy}{\sqrt{-y}} = i\frac{dx}{\sqrt{-x}}, \quad \frac{dy}{\sqrt{-y}} = -i\frac{dx}{\sqrt{-x}}.$$

Poslije integracije dobivamo

$$\sqrt{-y} + i\sqrt{-x} = C_1, \quad \sqrt{-y} - i\sqrt{-x} = C_2.$$

Da bismo našli kanonski oblik uvedimo smjenu

$$\xi = \sqrt{-y}, \quad \eta = \sqrt{-x}.$$

4.3 Talasna jednađžba

Na osnovu ovoga je

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{2\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = -\frac{1}{2\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\
 &= -\frac{1}{4x} \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{1}{4x\sqrt{-x}} \frac{\partial u}{\partial \eta}, \\
 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\
 &= -\frac{1}{4y} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{1}{4y\sqrt{-y}} \frac{\partial u}{\partial \xi}.
 \end{aligned}$$

Koristeći ovo dobivamo kanonski oblik

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{3}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{3}{\eta} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0.$$

Na sličan način i za $x > 0$ i $y > 0$, dobivamo da jednađžba ima isti kanonski oblik. ◆

4.3 Talasna jednađžba

U ovoj sekciji ćemo detaljno proučavati talasnu (valnu) jednađžbu kao kanoničnog predstavnika hiperboličnih jednađžbi drugog reda. Polazeći od jednodimenzionalne talasne jednađžbe i odgovarajućeg početnog problema pokazuje se, koristeći D’Alambertovu formulu, korektnost postavljenog problema u smislu klasičnog rješenja, tj. u klasi $\mathcal{C}$. Zatim ćemo izvesti odgovarajuće formule za dvodimenzionalnu i trodimenzionalnu talasnu jednađžbu. Fourierovom metodom razdvajanja promijenljivih se efektivno dokazuje egzistencija rješenja za razne tipove početno-rubnog problema.

4.3.1 Rubni problemi i teoremi jedinstvenosti

Jednađžba oblika

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2} \right) + f, \quad c > 0,$$

koju kraće, koristeći Δ operator, možemo pisati u sljedećem obliku

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \tag{4.29}$$

4.3 Talasna jednadžba

u kojem je $c > 0$ i $t \geq 0$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, ($n \geq 1$) oblast, nazivamo *talasnom jednadžbom*. Ako je $f = 0$, onda jednadžbu (4.29) nazivamo *homogenom talasnom jednadžbom*. Ovdje je funkcija $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ funkcija, a funkcija $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je data. Proučavat ćemo njena rješenja u oblasti $Q = \Omega \times (0, \infty)$, koja zadovoljavaju zadani rubni uvjet i zadane početne (Cauchyve) uvjete.

Dirichletov, odnosno Neumannov, rubni problem sastoji se u nalaženju rješenja jednadžbe (4.29) koje zadovoljava uvjet

$$u(x, t) = g(x, t) \quad \text{za} \quad (x, t) \in \Sigma,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{na} \quad \Sigma,$$

gdje je $\Sigma = \Gamma \times (0, \infty)$ i $g = g(x, t)$ i $h = h(x, t)$ zadane funkcije na Σ a $\Gamma = \partial\Omega$ i $\partial u / \partial \nu$ izvod u smjeru vanjske normale ν na Σ . Početni uvjet sastoji se u zadavanju perturbacije i brzine perturbacije u trenutku $t = 0$:

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x) \quad \text{za} \quad x \in \Omega,$$

gdje su $u_0 = u_0(x)$ i $u_1 = u_1(x)$ zadane funkcije na Ω .

Određivanje rješenja talasne jednadžbe koje zadovoljava neke od rubnih uvjeta zove se *rubni problem* (Dirichletov, Neumannov, itd.). Određivanje rješenja talasne jednadžbe u oblasti Q , koje zadovoljava zadani rubni uvjet i zadani početni uvjet zove se *početno-rubni (mješoviti) problem*. Ako jednadžbu posmatramo u $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, zadaju se samo početni uvjeti na $\mathbb{R}^n$, pa imamo početni ili Cauchyev problem.

Za zadane funkcije $f = f(x, t)$, $g = g(x, t)$, $h = h(x, t)$, $u_0 = u_0(x)$ i $u_1 = u_1(x)$ pretpostavljamo da su neprekidne (i eventualno dovoljno glatke). Rješenja početno-rubnog problema tražimo u klasi $\mathcal{C}^2(Q) \cap \mathcal{C}^1(\bar{Q})$. Za egzistenciju rješenja potrebni su uvjeti kompatibilnosti

$$u_0(x) = g(x, 0), \quad u_1(x) = \frac{\partial g(x, 0)}{\partial t} \quad \text{za} \quad x \in \Gamma$$

u slučaju Dirichetovog problema, i

$$\frac{\partial u_0(x)}{\partial \nu} = h(x, 0) \quad \text{za} \quad x \in \Gamma$$

u slučaju Neumannovog problema. Ako rješenje tražimo u klasi $\mathcal{C}^2(\bar{Q})$, za Dirichetov problem potreban je i uvjet

$$\frac{\partial^2 g(x, 0)}{\partial t^2} - c^2 \Delta u_0(x) = f(x, 0) \quad \text{za} \quad x \in \Gamma.$$

Pokazuje se da su uvjeti kompatibilnosti i dovoljni za egzistenciju odgovarajućih rješenja. Rješenje Cauchyevog problema tražimo u klasi $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Opisana rješenja nazivamo *klasičnim*.

Lema 4.3.1. *Ako $w \in C^2(\overline{Q})$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, tada vrijedi*

$$\Delta w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2.$$

Dokaz. Neka je $e_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \dots, 0)$, ..., $e_n = (0, 0, \dots, 1)$ kanonska baza u $\mathbb{R}^n$. Imamo

$$\begin{aligned} \mathbf{grad} w(x, t) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} e_i \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \sum_{i=1}^n \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} e_i \right) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) \\ \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2 &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i^2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i \partial t} \right) \\ &\quad - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial x_i} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x_i \partial t} \right) = \Delta w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Ovim smo dokazali navedeni identitet. $\square$

Teorem 4.3.1. *Početno-rubni problem za jednadžbu (4.29) ima najviše jedno rješenje u klasi $C^2(\overline{Q})$.*

Dokaz. Neka su $u = u(x, t)$ i $u^* = u^*(x, t)$ dva različita rješenja početno-rubnog problema. Neka je $w = u - u^*$. Tada je

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = c^2 \Delta w \quad \text{na} \quad \overline{Q}, \quad (4.30)$$

$$w = 0 \text{ odnosno } \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na} \quad \Sigma, \quad (4.31)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad \text{na} \quad \overline{\Omega} \times \{0\}, \quad (4.32)$$

Na osnovu (4.30) za svako $t \in (0, \infty)$ je

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dV &= \int_{\Omega} \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dV \\ &= c^2 \int_{\Omega} \Delta w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} dV. \end{aligned}$$

4.3 Talasna jednađžba

Prema Lemi 4.3.1 je

$$\Delta w(x, t) \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} = \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2,$$

pa imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right)^2 dV &= c^2 \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) dV \\ &\quad - \frac{c^2}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2 dV. \end{aligned}$$

Integriranjem prethodne jednakosti od 0 do τ , za $\tau \in (0, \infty)$, dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial \tau} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} w(x, \tau)|^2 \right) dV \\ = c^2 \int_0^\tau \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) dV dt \\ + \int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} w(x, 0)|^2 \right) dV = 0. \end{aligned}$$

Na osnovu Teorema o divergenciji i uvjeta (4.31) imamo

$$\begin{aligned} \int_0^\tau \int_{\Omega} \operatorname{div} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) dV dt &= \int_{\Gamma \times (0, \tau)} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \mathbf{grad} w(x, t) \right) \cdot \nu dS \\ &= \int_{\Gamma \times (0, \tau)} \left(\frac{\partial w(x, t)}{\partial \nu} \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} \right) dS = 0. \end{aligned}$$

Na osnovu uvjeta (4.32) je

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial w(x, 0)}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} w(x, 0)|^2 \right) dV = 0,$$

pa je

$$\int_{\Omega} \left(\left(\frac{\partial w(x, \tau)}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} w(x, \tau)|^2 \right) dV = 0.$$

Na osnovu ovoga imamo da su parcijalni izvodi funkcije w jednaki nuli za bilo koje $(x, \tau) \in Q$, pa je $w(x, t) = \text{const}$ na Q . Kako je po pretpostavci $w(x, 0) = 0$ to je $w \equiv 0$, tj. $u = u^*$ na Q . $\square$

4.3.2 D'Alembertova formula

Ovdje ćemo posmatrati homogenu talasnu jednađžbu u jednodimenzionalnom slučaju i odgovarajuće početne i rubne uvjete za $n = 1$.

4.3 Talasna jednačica

Teorem 4.3.2. Funkcija $u(x, t) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ je rješenje homogene talasne jednačice (4.29) u $\mathbb{R}^2$, ako i samo ako je

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct), \quad (4.33)$$

gdje su $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

Dokaz. Neka je u rješenje date jednačice. Svodeći ovu jednačicu na kanonski oblik dobivamo da su jednačice karakteristika

$$dx^2 - c^2 dt^2 = 0,$$

odakle slijedi

$$x + ct = C_1, \quad x - ct = C_2.$$

Uvođenjem novih varijabli

$$\xi = x + ct, \quad \eta = x - ct$$

data jednačica se svodi na

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Prema tome imamo

$$\frac{\partial u(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \tilde{\varphi}(\xi)$$

odnosno,

$$u(\xi, \eta) = \int_0^\xi \tilde{\varphi}(\zeta) d\zeta + \psi(\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta).$$

Iz toga slijedi (4.33). Da vrijedi obrnuto može se provjeriti direktno uvrštavajući funkciju (4.33) u (4.29). $\square$

Neka su uz jednačicu (4.29) dati početni uvjeti

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \quad (4.34)$$

Teorem 4.3.3. Neka je $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ i $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$. Tada Cauchyev problem (4.29)-(4.34) ima jedinstveno rješenje i ono je dato D'Alembertovom formulom

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta. \quad (4.35)$$

Dokaz. Neka je u rješenje problema. Prema Teoremu 4.3.2 postoje funkcije $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ takve da je

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct). \quad (4.36)$$

4.3 Talasna jednažba

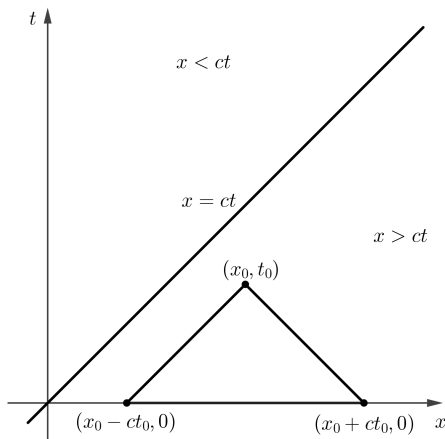
Iz (4.34) dobivamo

$$\begin{aligned}\varphi(x) + \psi(x) &= u_0(x) \\ \varphi'(x) - \psi'(x) &= \frac{1}{c}u_1(x).\end{aligned}$$

Iz tog slijedi

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\zeta) d\zeta + C \right), \\ \psi(x) &= \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\zeta) d\zeta - C \right),\end{aligned}$$

gdje je C neka konstanta. Uvrštavajući to u (4.36) dobivamo (4.35). Može se pokazati direktnom provjerom da funkcija u , definirana formulom (4.35), zadovoljava (4.29) i (4.34). $\square$



Slika 4.1: Oblast zavisnosti rješenja za $x > 0$ i $t > 0$.

Primjer 4.3.1. Neka je $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ i $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$ i neka su zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti $u_0(0) = u_0''(0) = u_1(0) = 0$. Naći rješenje sljedećeg mješovitog problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x).\end{aligned}$$

Rješenje. Na osnovu D'Alembertove formule vidimo da je rješenje za $x > ct$ dato sa

$$\frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta.$$

4.3 Talasna jednačba

Ako je $x < ct$ tada interval zavisnosti rješenja $[x - ct, x + ct]$ može da upadne i u negativni dio x -ose gdje funkcije $u_0 = u_0(x)$ i $u_1 = u_1(x)$ nisu definirane pa će rješenje da zavisi od rubnih uvjeta. Prema D'Alembertovoj formuli je

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct).$$

gdje su φ, ψ date sa

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) + \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\zeta) d\zeta + C \right),$$

$$\psi(x) = \frac{1}{2} \left(u_0(x) - \frac{1}{c} \int_0^x u_1(\zeta) d\zeta - C \right).$$

Na osnovu rubnog uvjeta imamo da je

$$u(0, t) = \varphi(ct) + \psi(-ct) = 0,$$

pa je

$$\psi(-ct) = -\varphi(ct).$$

Ako uvedemo smjenu $\alpha = -ct$ tada je

$$\psi(\alpha) = -\varphi(-\alpha).$$

Zamijenjujući α sa $c - xt$ dobivamo za $x < ct$,

$$\psi(x - ct) = -\varphi(ct - x),$$

pa je

$$\psi(x - ct) = -\frac{1}{2} \left(u_0(ct - x) - \frac{1}{c} \int_0^{ct-x} u_1(\zeta) d\zeta - C \right).$$

To znači da je rješenje $u(x, t)$ navedenog problema za $x > 0, t > 0$, dato sa

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta, & x > 0, t < x/c; \\ \frac{1}{2} (u_0(x + ct) - u_0(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta, & x > 0, t > x/c. \end{cases}$$

Koristeći uvjete kompatibilnosti može se pokazati da je u dva puta neprekidno diferencijabilna po x i t . ◆

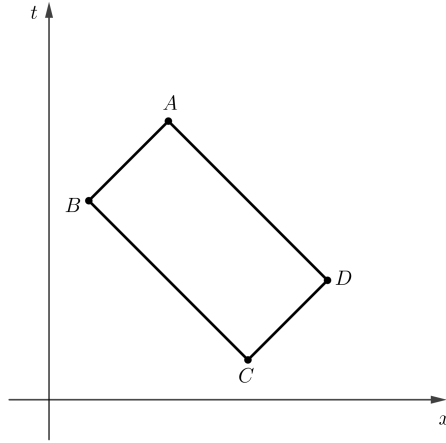
Primjer 4.3.2. Neka je $u \in \mathcal{C}^2$ rješenje jednačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty)$$

i A, B, C i D vrhovi paralelograma čije su stranice paralelne sa karakterističnim krivim u $x \in \mathbb{R}, t \in (0, \infty)$, tada su zbirovi vijednosti funkcije u , u suprotnim vrhovima jednaki, tj.

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C).$$

4.3 Talasna jednačba



Slika 4.2: Paralelogram sa stranicama koje su paralelne sa karakterističnim krivim.

Rješenje. Na osnovu prethodnog razmatranja imamo da je

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) + \psi(x - ct)$$

gdje je $\varphi, \psi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Neka su vrhovi poredani kao na Slici 4.2. Neka je $A = (x_1, t_1)$, $B = (x_2, t_2)$, $C = (x_3, t_3)$ i $D = (x_4, t_4)$. Kako te tačke leže na pravim koje su paralelne sa karakterističnim krivim, to je

$$x_1 + ct_1 = x_3 + ct_3, \quad x_2 + ct_2 = x_4 + ct_4, \quad x_1 - ct_1 = x_2 - ct_2, \quad x_3 - ct_3 = x_4 - ct_4.$$

Kako je

$$\begin{aligned} u(A) &= \varphi(x_1 + ct_1) + \psi(x_1 - ct_1) \\ u(B) &= \varphi(x_2 + ct_2) + \psi(x_2 - ct_2) \\ u(C) &= \varphi(x_3 + ct_3) + \psi(x_3 - ct_3) \\ u(D) &= \varphi(x_4 + ct_4) + \psi(x_4 - ct_4) \end{aligned}$$

to je očigledno

$$u(A) + u(D) = u(B) + u(C).$$

◆

Primjer 4.3.3. Neka je $u_0 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ i $u_1 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ i neka su zadovoljeni uvjeti kompatibilnosti $u_0(0) = \alpha(0)$, $u_1(0) = \alpha'(0)$, $c^2 u_0''(0) = \alpha''(0)$. Naći rješenje sljedećeg mješovitog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \end{aligned}$$

4.3 Talasna jednadžba

Rješenje. Sada ćemo pokazati kako se metodom refleksije konstruiše rješenje na $[0, \infty) \times [0, \infty)$. Podijelimo skup $[0, \infty) \times [0, \infty)$ pravom $ct = x$ na dva dijela. Stavimo da je

$$\Omega_1 = \{(x, t) : x > ct > 0\}.$$

Na osnovu D'Alembertove formule za $(x, t) \in \Omega_1$ rješenje je dato sa

$$\bar{u}_1(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta.$$

Stavimo da je

$$v(x) = \bar{u}_1(x, x/c) = \frac{1}{2} (u_0(2x) + u_0(0)) + \frac{1}{2c} \int_0^{2x} u_1(\zeta) d\zeta.$$

Dalje, stavimo da je

$$\Omega_2 = \{(x, t) : ct > x > 0\}$$

i posmatrajmo problem

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (x, t) \in \Omega_1, \\ u(0, t) &= \alpha(t), \quad u(x, x/c) = v(x). \end{aligned}$$

Označimo rješenje ovog problema sa $u_2 = u_2(x, t)$. Za svako $(x, t) \in \Omega_2$ posmatrajmo paralelogram sa vrhovima

$$A = (x, t), \quad B = \left(0, \frac{ct - x}{c}\right), \quad C = \left(\frac{x + ct}{2}, \frac{x + ct}{2c}\right), \quad D = \left(\frac{ct - x}{2}, \frac{ct - x}{2c}\right).$$

Na osnovu prethodnog primjera je

$$\begin{aligned} \bar{u}_2(x, t) &= u_2(B) + u_2(C) - u_2(D) = \alpha\left(\frac{ct - x}{c}\right) + v\left(\frac{x + ct}{2}\right) - v\left(\frac{ct - x}{2}\right) \\ &= \alpha\left(\frac{ct - x}{c}\right) + \frac{1}{2} (u_0(x + ct) - u_0(ct - x)) + \frac{1}{2c} \int_{ct-x}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Stavimo da je

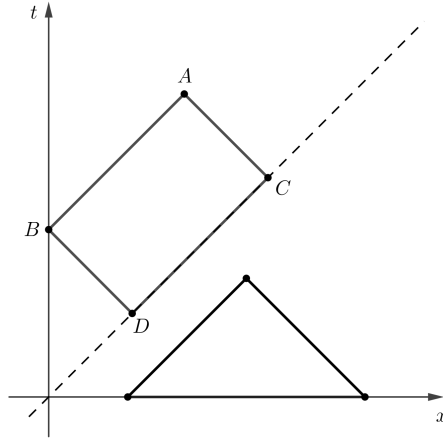
$$u(x, t) = \begin{cases} \bar{u}_1(x, t), & (x, t) \in \Omega_1, \\ \bar{u}_2(x, t), & (x, t) \in \Omega_2. \end{cases}$$

Pokažimo sada da su na pravoj $x = ct$ funkcije

$$u, \quad \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$$

neprekidne. Direktnim računom se dobije da je

$$\begin{aligned} \bar{u}_1(x, x/c) - \bar{u}_2(x, x/c) &= v(0) - \alpha(0) = u_0(0) - \alpha(0) \\ \frac{\partial \bar{u}_1(x, x/c)}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_2(x, x/c)}{\partial x} &= -u_1(0) + \alpha'(0), \\ \frac{\partial^2 \bar{u}_1(x, x/c)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \bar{u}_2(x, x/c)}{\partial x^2} &= -c^2 u_0''(0) + \alpha''(0). \end{aligned}$$



Slika 4.3: Metoda refleksije za određivanje rješenja.

Na osnovu uvjeta kompatibilnosti imamo da je

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_2, \quad \frac{\partial \bar{u}_1(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}_2(x, t)}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_1(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_2(x, t)}{\partial x^2}$$

na pravoj $x = ct$. Na isti način se može pokazati da na pravoj $x = ct$ vrijedi

$$\frac{\partial \bar{u}_1(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}_2(x, t)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_1(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}_2(x, t)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 \bar{u}_1(x, t)}{\partial t \partial x} = \frac{\partial^2 \bar{u}_2(x, t)}{\partial t \partial x},$$

pa je $u = u(x, t)$ dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija po svojim argumentima na $[0, \infty) \times [0, \infty)$. ♦

Iz (4.35) slijedi da je vrijednost rješenja u tački $(x, t) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ određeno vrijednostima početnih uvjeta na intervalu $(x - ct, x + ct)$.

Primjedba 4.3.1. Pretpostavimo da su funkcije u_0 i u_1 ograničene. Iz (4.35) slijedi da za svako $T > 0$ rješenje u zadovoljava nejednakost

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |u(x, t)| = \sup_{\mathbb{R}} |u_0| + T \sup_{\mathbb{R}} |u_1|, \quad (0 \leq t \leq T).$$

Primjedba 4.3.2. Pretpostavimo da neka od funkcija u_0 i u_1 ima u tački $x_0 \in \mathbb{R}$ prekid prve vrste. Tada funkcija (4.35) zadovoljava početni uvjet svuda na $\mathbb{R}$, drugi početni uvjet svuda na $\mathbb{R}$ osim možda u tački x_0 i jednačbu (4.29) svuda na $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ osim na karakteristikama koje prolaze kroz x_0 na kojima derivacije $\partial u / \partial t$ i $\partial u / \partial x$ imaju konačan skok. Funkcija u je u oblasti $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ po dijelovima klase C^2 i predstavlja slabo rješenje Cauchyevog problema. Pokazuje se da je takvo rješenje jedinstveno. Kao što vidimo, lokalna neregularnost početnog uvjeta prenosi se po karakteristikama u oblast $\mathbb{R} \times (0, \infty)$, te uzrokuje globalnu neregularnost rješenja. Ovo svojstvo predstavlja bitnu razliku u ponašanju hiperbolične jednačbe sa jedne strane i eliptične i parabolične sa druge.

4.3 Talasna jednačžba

Teorem 4.3.4. Neka je $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$, $u_0 \in C^2(\mathbb{R})$ i $u_1 \in C^1(\mathbb{R})$. Tada Cauchyev problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

$$u(x, 0) = u_0(x),$$

$$\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x),$$

ima rješenje

$$u(x, t) = \frac{1}{2} (u_0(x + ct) + u_0(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(\zeta) d\zeta + \frac{1}{2c} \int_D f(\xi, \zeta) d\xi d\zeta,$$

gdje je D trougao sa tjemenuima $(x - ct, 0)$, $(x + ct, 0)$ i (x, t) .

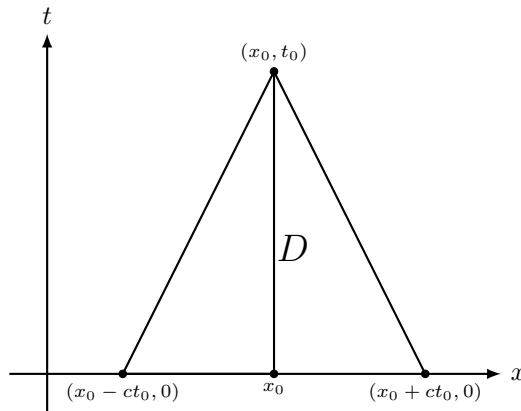
Dokaz. Neka je $(x_0, t_0) \in D$ proizvoljna tačka. Integriranjem ove jednačžbe po oblasti D dobivamo da je

$$\int \int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt = \int \int_D f(x, t) dx dt.$$

Ako na lijevu stranu ove relacije primijenimo Greenovu formulu dobivamo

$$\int \int_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt = - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt,$$

gdje je $\Gamma = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$.



Slika 4.4: Oblast zavisnosti D .

4.3 Talasna jednačžba

Kako je

$$\begin{aligned}\overline{AB} : t = 0 &\Rightarrow dt = 0, \\ \overline{BC} : t = \frac{1}{c}(x_0 - x) + t_0 &\Rightarrow dt = -\frac{1}{c}dx, \\ \overline{CA} : t = \frac{1}{c}(x - x_0) + t_0 &\Rightarrow dt = \frac{1}{c}dx,\end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned}\int_{\overline{AB}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt &= \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) dx = \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_1(x) dx, \\ \int_{\overline{BC}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt &= -c \int_{(x_0+ct_0, 0)}^{(x_0, t_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \\ &= c(u(x_0 + ct_0, 0) - u(x_0, t_0)) \\ &= c(u_0(x_0 + ct_0) - u(x_0, t_0)), \\ \int_{\overline{CA}} \frac{\partial u}{\partial t} dx + c^2 \frac{\partial u}{\partial x} dt &= c \int_{(x_0, t_0)}^{(x_0-ct_0, t_0)} \left(\frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right) \\ &= c(u(x_0 - ct_0, 0) - u(x_0, t_0)) \\ &= c(u_0(x_0 - ct_0) - u(x_0, t_0)).\end{aligned}$$

Sada je

$$\begin{aligned}\iint_D \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dx dt &= 2cu(x_0, t_0) \\ &\quad - c(u_0(x_0 + ct_0) + u_0(x_0 - ct_0)) - \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_1(x) dx,\end{aligned}$$

pa je

$$u(x_0, t_0) = \frac{1}{2} (u_0(x_0+ct_0) + u_0(x_0-ct_0)) + \frac{1}{2c} \int_{x_0-ct_0}^{x_0+ct_0} u_1(x) dx + \frac{1}{2c} \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Kako je $(x_0, t_0) \in D$ proizvoljna tačka to dobivamo navedenu formulu. $\square$

Pokažimo sada da rješenje Cauchyevog problema za nehomogenu jednačžbu neprekidno zavisi od promjene početnih uvjeta, tj. da je problem dobro postavljen. Drugim riječima, mala promjena funkcija u_0 ili u_1 rezultira malu promjenu funkcije $u(x, t)$.

Teorem 4.3.5. *Neka su $u(x, t)$ i $u^*(x, t)$ rješenja sljedećih Cauchyevih problema,*

4.3 Talasna jednadžba

redom

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), & u(x, 0) &= u_0(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1(x), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f^*(x, t), & u(x, 0) &= u_0^*(x), & \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1^*(x).\end{aligned}$$

Tada za svako $\varepsilon > 0$ i $t_0 > 0$ postoji $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$, tako da iz nejednakosti

$$|u_0(x) - u_0^*(x)| < \varepsilon, \quad |u_1(x) - u_1^*(x)| < \varepsilon, \quad |f(x, t) - f^*(x, t)| < \varepsilon, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$$

slijedi

$$|u(x, t) - u^*(x, t)| < \varepsilon, \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$$

Dokaz. Zaista, iz D'Alembertove formule imamo

$$\begin{aligned}u(x, t) - u^*(x, t) &= \frac{1}{2}(u_0(x + ct) - u_0^*(x + ct)) + \frac{1}{2}(u_0(x - ct) - u_0^*(x - ct)) \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} (u_1(\zeta) - u_1^*(\zeta)) d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\xi)}^{x+c(t-\xi)} (f(\zeta, \xi) - f^*(\zeta, \xi)) d\zeta d\xi < \varepsilon,\end{aligned}$$

pa je za $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, t_0]$,

$$\begin{aligned}|u(x, t) - u^*(x, t)| &\leq \frac{1}{2}|u_0(x + ct) - u_0^*(x + ct)| + \frac{1}{2}|u_0(x - ct) - u_0^*(x - ct)| \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} |u_1(\zeta) - u_1^*(\zeta)| d\zeta \\ &\quad + \frac{1}{2c} \int_0^t \int_{x-c(t-\xi)}^{x+c(t-\xi)} |f(\zeta, \xi) - f^*(\zeta, \xi)| d\zeta d\xi \\ &\leq \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2c} 2ct + \frac{\delta}{2c} 2ct^2 \leq \delta(1 + t_0 + t_0^2) < \varepsilon,\end{aligned}$$

$$\text{za } \delta = \delta(\varepsilon, t_0) < \frac{\varepsilon}{1 + t_0 + t_0^2}.$$

□

4.3.3 Teorem jedinstvenosti i oblast zavisnosti

Neka je $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Hiperpovrš

$$\begin{aligned}\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < t^{(0)}, \quad c(t^{(0)} - t) &= |x - x^{(0)}|\}, \\ \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > t^{(0)}, \quad c(t^{(0)} - t) &= |x - x^{(0)}|\},\end{aligned}$$

4.3 Talasna jednačba

su karakteristike (talasne jednačbe) kroz tačku $(x^{(0)}, t^{(0)})$. Oblasti

$$\begin{aligned} \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t < t^{(0)}, c(t^{(0)} - t) < |x - x^{(0)}|\}, \\ \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t > t^{(0)}, c(t^{(0)} - t) > |x - x^{(0)}|\}, \end{aligned}$$

se zovu respektivno konus prošlosti i konus budućnosti tačke $(x^{(0)}, t^{(0)})$. Neka je $t^{(0)} > 0$; označimo sa $\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$ dio konusa prošlosti tačke $(x^{(0)}, t^{(0)})$ koji leži u poluprostoru $\{t > 0\}$. Očigledno je

$$\partial\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)}) = S(x^{(0)}, t^{(0)}) \cup B(x^{(0)}, t^{(0)}) \cup \{(x^{(0)}, t^{(0)})\},$$

gdje je

$$\begin{aligned} S(x^{(0)}, t^{(0)}) &= \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : 0 < t < t^{(0)}, c(t^{(0)} - t) = |x - x^{(0)}|\}, \\ B(x^{(0)}, t^{(0)}) &= K(x^{(0)}, ct^{(0)}) \subset \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Jedinični vektor normale u tački $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in S(x^{(0)}, t^{(0)})$ ima komponente

$$\begin{aligned} \nu_i(x, t) &= \frac{x_i - x_i^{(0)}}{|x - x^{(0)}|(1 + c^2)^{1/2}}, \quad i \in \{1, 2, \dots, n\} \\ \nu_t(x, t) &= \frac{c}{(1 + c^2)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Teorem 4.3.6. *Ako funkcija $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})})$ zadovoljava homogenu jednačbu*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0 \quad u \quad \mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)}),$$

i homogene početne uvjete

$$u(\cdot, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad u \quad B(x^{(0)}, t^{(0)}),$$

onda je $u = 0$ u $\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$.

Dokaz. Neka $(\bar{x}, \bar{t}) \in \mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$. Kako je $\mathcal{K}(\bar{x}, \bar{t}) \subseteq \mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$ to je

$$\int_{\mathcal{K}(\bar{x}, \bar{t})} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \right) \frac{\partial u}{\partial t} dV dt = 0.$$

Na osnovu Leme 4.3.1 je

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u \right) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) - 2c^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

pa je

$$\int_{\mathcal{K}(\bar{x}, \bar{t})} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) - 2c^2 \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right] dV dt = 0.$$

4.3 Talasna jednačba

Na osnovu Teorema o divergenciji imamo

$$\begin{aligned} \int_{S(\bar{x}, \bar{t})} \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) \nu_t - 2c^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \nu_i \right] dS \\ + \int_{B(\bar{x}, \bar{t})} \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) \nu_t - 2c^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \nu_i \right] dB = 0 \end{aligned}$$

Koristeći početne uvjete

$$u(x, 0) = \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0 \quad \text{u} \quad B(x^{(0)}, t^{(0)}),$$

dobivamo da je

$$\int_{B(\bar{x}, \bar{t})} \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) \nu_t - 2c^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \nu_i \right] dB = 0,$$

pa je

$$\int_{S(\bar{x}, \bar{t})} \left[\left(\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + c^2 |\mathbf{grad} u|^2 \right) \nu_t - 2c^2 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \nu_i \right] dS = 0.$$

Kako je

$$\sum_{i=1}^n \nu_i^2(x, t) = \frac{1}{1 + c^2},$$

množeći prethodnu jednakost sa $\nu_t(x, t)$ dobivamo

$$\sum_{i=1}^n \int_{S(\bar{x}, \bar{t})} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \nu_i^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} \right)^2 \nu_t^2 - 2 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial t} \nu_i \nu_t \right] dS = 0,$$

ili

$$\sum_{i=1}^n \int_{S(\bar{x}, \bar{t})} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \nu_i - \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_t \right)^2 dS = 0.$$

Na osnovu ovoga slijedi da je

$$\frac{\partial u}{\partial t} \nu_i - \frac{\partial u}{\partial x_i} \nu_t = 0 \quad \text{na} \quad S(\bar{x}, \bar{t}), \quad i = 1, \dots, n.$$

Neka je $(\xi, 0) \in \partial B(\bar{x}, \bar{t})$. Tada je

$$l(\xi) = \frac{1}{(1 + c^2)^{1/2}} \left(\frac{\bar{x} - \xi}{\bar{t}}, 1 \right)$$

jedinični vektor izvodnice hiperpovrši $S(\bar{x}, \bar{t})$ kroz tačku $(\xi, 0)$. Parametarski, jednačbu segmenta koji spaja tačku $(\xi, 0)$ i $(\bar{x}, \bar{t})$ možemo zadati sa

$$\lambda \rightarrow (x(\lambda), t(\lambda)) = (\xi, 0) + \lambda l(\xi), \quad \lambda \in [0, \bar{t}(1 + c^2)^{1/2}]$$

4.3 Talasna jednačžba

jer je udaljenost između tačaka $(\xi, 0)$ i $(\bar{x}, \bar{t})$ jednaka $\bar{t}(1 + c^2)^{1/2}$. Kako je

$$\begin{aligned} |\bar{x} - x(\lambda)|^2 &= \sum_{i=1}^n (\bar{x}_i - x_i(\lambda))^2 = \sum_{i=1}^n \left(\bar{x}_i - \xi_i - \frac{\lambda(\bar{x}_i - \xi_i)}{\bar{t}(1 + c^2)^{1/2}} \right)^2 \\ &= \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{t}(1 + c^2)^{1/2}} \right)^2 \sum_{i=1}^n |\bar{x}_i - \xi_i|^2 = c^2 \bar{t}^2 \left(1 - \frac{\lambda}{\bar{t}(1 + c^2)^{1/2}} \right)^2 \\ &= c^2 \left(\bar{t} - \frac{\lambda}{(1 + c^2)^{1/2}} \right)^2 = c^2 (\bar{t} - t(\lambda))^2, \end{aligned}$$

to zaključujemo da sve tačke na tom linijskom segmentu pripadaju $S(\bar{x}, \bar{t})$. Može se pokazati da je

$$l(\xi) \cdot \nu(x(\lambda), t(\lambda)) = 0.$$

Kako je

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} u(x(\lambda), t(\lambda)) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_i} l_i(\xi) + \frac{\partial u}{\partial t} l_t(\xi) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial u}{\partial t} \frac{\nu_i}{\nu_t} l_i(\xi) + \frac{\partial u}{\partial t} l_t(\xi) \\ &= \frac{\partial u}{\partial t} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\nu_i}{\nu_t} l_i(\xi) + l_t(\xi) \right) = \frac{1}{\nu_t} \frac{\partial u}{\partial t} (l(\xi) \cdot \nu(x(\lambda), t(\lambda))) = 0, \end{aligned}$$

to je $u(x, t) = \text{const}$ na segmentu sa krajevima u $(\xi, 0)$ i $(\bar{x}, \bar{t})$ pa je $u(\bar{x}, \bar{t}) = u(\xi, 0) = 0$. Zbog proizvoljnosti tačke $(\bar{x}, \bar{t})$, zaključujemo da je $u(x, t) = 0$ u $\mathcal{K}(x^{(0)}, t^{(0)})$. $\square$

Direktno iz ovoga teorema dobivamo sljedeće dvije posljedice:

Posljedica 4.3.1. *Neka su funkcije u_0 i u_1 definirane na kugli $K(x, ct)$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, a funkcija f u $\mathcal{K}(x, t)$. Tada problem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= f \quad u \quad \mathcal{K}(x, t), \\ u(x, 0) &= u_0 \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1 \quad u \quad K(x, ct), \end{aligned}$$

ima najviše jedno rješenje.

Posljedica 4.3.2. *Neka su funkcije u_0 i u_1 definirane na $\mathbb{R}^n$, a funkcija f na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Tada Cauchyev problem*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u &= f \quad u \quad \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(x, 0) &= u_0 \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1 \quad u \quad \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

ima najviše jedno rješenje.

Iz Posljedice 4.3.1 zaključujemo da je vrijednost rješenja Cauchyevog problema u tački $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ određena početnim uvjetima na kugli $K(x, ct)$. Ta kugla je oblast zavisnosti tačke (x, t) . (Može se pokazati da je u slučaju neparnog $n \geq 3$ stvarna oblast zavisnosti samo sfera $\partial K(x, ct)$.)

4.3.4 Kirchhoffova i Poissonova formula

U ovom dijelu ćemo proučavati talasnu jednadžbu sa odgovarajućim početnim i rubnim uvjetima za $n = 2$ i $n = 3$. Dokažimo najprije sljedeću lemu.

Lema 4.3.2. *Neka $\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$ i neka je*

$$u_\varphi(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K((x, y, z); ct)} \varphi(\xi, \eta, \zeta) dS. \quad (4.37)$$

Tada je

$$u_\varphi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty)),$$

i vrijedi

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = c^2 \Delta u_\varphi \text{ u } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (4.38)$$

$$u_\varphi(x, y, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.39)$$

Dokaz. Uvedimo sferne koordinate tj. stavimo da je

$$\xi = x + \alpha ct, \quad \eta = y + \beta ct, \quad \zeta = z + \gamma ct$$

pri čemu je

$$\alpha = \sin \theta \cos \varphi, \quad \beta = \sin \theta \sin \varphi, \quad \gamma = \cos \theta,$$

gdje se θ mijenja od 0 do π , a ugao φ od 0 do 2π . Kada tačka (ξ, η, ζ) opisuje sferu $\partial K((x, y, z); ct)$ tada tačka (α, β, γ) opisuje sferu K_1 sa centrom u koordinatnom početku poluprečnika jedan. No, kako je $dS = c^2 t^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ to imamo da je

$$u_\varphi(x, y, z, t) = \frac{t}{4\pi} \int_{\partial K_1} \varphi(x + \alpha ct, y + \beta ct, z + \gamma ct) dS. \quad (4.40)$$

Iz (4.40) i pretpostavke o funkciji φ dobivamo da je

$$\begin{aligned} \Delta u_\varphi(x, y, z, t) &= \frac{t}{4\pi} \int_{\partial K_1} \Delta \varphi(x + \alpha ct, y + \beta ct, z + \gamma ct) dS \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K((x, y, z); ct)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) dS. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Diferencirajući sada izraz (4.40) po t dobićemo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial K_1} \varphi(x + \alpha ct, y + \beta ct, z + \gamma ct) dS \\ &\quad + \frac{ct}{4\pi} \int_{\partial K_1} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS \end{aligned}$$

ili

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi ct} \int_{\partial K((x, y, z); ct)} \left(\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} + \gamma \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right) dS$$

4.3 Talasna jednadžba

i po formuli Ostrogradskog imamo

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{u_\varphi}{t} + \frac{1}{4\pi ct} \int_{K((x,y,z);ct)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta.$$

Stavimo da je

$$I = \int_{K((x,y,z);ct)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) d\xi d\eta d\zeta,$$

pa imamo

$$\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = \frac{u_\varphi}{t} + \frac{I}{4\pi ct}.$$

Diferencirajući taj izraz po t dobićemo da je

$$\frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial t^2} = \frac{1}{4\pi ct} \frac{\partial I}{\partial t}, \quad (4.42)$$

no, kako je

$$I = \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho,$$

to diferenciranjem po t imamo da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial t} &= c \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) c^2 t^2 \sin \theta d\theta d\psi \\ &= c \int_{\partial K((x,y,z);ct)} \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \right) dS. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Uvrštavanjem (4.43) u (4.42) i upoređivanjem dobivenog izraza sa (4.41) dobivamo da funkcija u_φ zadovoljava jednadžbu (4.38).

Na osnovu formule (4.40) vidi se da će funkcija $u_\varphi(x, y, z, t)$ imati neprekidne izvode do k -tog reda, ako je funkcija $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ neprekidna zajedno sa svojim izvodima do k -tog reda. Također iz formule (4.40) neposredno slijedi da funkcija $u_\varphi(\xi, \eta, \zeta)$ zadovoljava uvjete (4.39). $\square$

Lema 4.3.3. *Neka $\varphi \in C^3(\mathbb{R}^3)$ i neka je*

$$\nu_\varphi = \frac{\partial u_\varphi}{\partial t},$$

gdje je u_φ definirana formulom (4.37). Tada je $\nu_\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3 \times (0, \infty))$ i vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \nu_\varphi}{\partial t^2} &= c^2 \Delta \nu_\varphi \quad u \quad \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \\ \nu_\varphi(x, y, z, 0) &= \varphi(x, y, z), \quad \frac{\partial \nu_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = 0, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (4.44)$$

4.3 Talasna jednačba

Dokaz. Kako je $\varphi \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ to su zadovoljeni svi uvjeti Leme 4.3.2, pa se neposredno zaključuje da je rješenje talasne jednačbe i funkcija

$$\nu_\varphi(x, y, z, t) = \frac{\partial u_\varphi(x, y, z, t)}{\partial t} \quad \text{za} \quad (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty).$$

Funkcija u_φ zadovoljava početni uvjet

$$u_\varphi(x, y, z, 0) = 0, \quad \frac{\partial u_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = \varphi(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

pa je

$$\nu_\varphi(x, y, z, 0) = \frac{\partial u_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} = \varphi(x, y, z)$$

i

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nu_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u_\varphi(x, y, z, 0)}{\partial t^2} \\ &= c^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y, z, 0)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, 0)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, z, 0)}{\partial z^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

jer $u(x, y, z, 0) = 0$ za svako $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. □

Posmatrajmo sada talasnu jednačbu:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u \tag{4.45}$$

i potražimo njeno rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = u_1(x). \tag{4.46}$$

Da bismo našli funkciju u koja zadovoljava (4.45)-(4.46) uzmimo za funkciju $\varphi(x)$ uz početne uvjete (4.39) funkciju $u_1(x)$, a uz početne uvjete (4.44) funkciju $u_0(x)$ i sabirajući ta rješenja dobivamo rješenje jednačbe (4.45) koje zadovoljava uvjet (4.46). Na taj način smo dokazali sljedeći teorem:

Teorem 4.3.7. *Neka je $n = 3$, $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^3)$ i $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^3)$. Tada je rješenje Cauchyevog problema (4.45), (4.46) dato Kirchhoffovom formulom*

$$u(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K(x, ct)} u_0 dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K(x, ct)} u_1 dS. \tag{4.47}$$

Iz formule (4.47) zaključujemo da je vrijednost rješenja Cauchyevog problema u tački $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times (0, \infty)$ određeno vrijednostima početnih uvjeta na sferi $\partial K(x, ct)$. Ta činjenica zove se *Huygensov princip*. Pokazuje se da ovaj princip vrijedi za svako neparno $n \geq 3$.

Rješenje Cauchyevog problema za $n = 2$ možemo dobiti *metodom spuštanja*. Pretpostavimo da funkcije u_0 i u_1 ne zavise od treće varijable. Tada ni funkcija

4.3 Talasna jednadžba

(4.47) ne zavisi od treće varijable, pa predstavlja rješenje Cauchyevog problema u $\mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$. Zaista, neka je $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ rješenje Cauchyevog problema (4.45)-(4.46). Za $n = 2$, stavimo da je

$$\bar{u}(x_1, x_2, x_3, t) := u(x_1, x_2, t).$$

Kako je u rješenje Cauchyevog problema za $n = 2$, to je

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \bar{u} \text{ u } \mathbb{R}^3 \times (0, \infty), \quad (4.48)$$

$$\bar{u} = \bar{u}_0, \quad \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \bar{u}_1 \text{ u } \mathbb{R}^3 \times (t = 0) \quad (4.49)$$

za

$$\bar{u}_0(x_1, x_2, x_3) := u_0(x_1, x_2), \quad \bar{u}_1(x_1, x_2, x_3) := u_1(x_1, x_2). \quad (4.50)$$

Ako stavimo da je $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ i $\bar{x} = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3$, tada na osnovu (4.48), (4.49) i Kirchhoffove formule za $n = 3$ imamo:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \bar{u}(\bar{x}, t) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K(\bar{x}, ct)} \bar{u}_0 dS \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{\partial K(\bar{x}, ct)} \bar{u}_1 dS. \end{aligned}$$

Uzimajući u obzir da je element površine sfere $\partial K(\bar{x}, ct)$ dat formulom

$$dS = \frac{ct d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}},$$

i s obzirom na (4.50)¹, dobivamo

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{K(x, ct)} \frac{u_0(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}} \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi c} \int_{K(x, ct)} \frac{u_1(\xi_1, \xi_2) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - (\xi_1 - x_1)^2 - (\xi_2 - x_2)^2}}. \end{aligned}$$

Na taj način smo dokazali sljedeći teorem.

Teorem 4.3.8. *Neka je $n = 2$, $u_0 \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^2)$ i $u_1 \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$. Tada je rješenje Cauchyevog problema (4.45)-(4.46) dato Poissonovom formulom*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2\pi c} \int_{K(x, ct)} \frac{u_0(\xi) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - \xi|^2}} \right) \\ &+ \frac{1}{2\pi c} \int_{K(x, ct)} \frac{u_1(\xi) d\xi_1 d\xi_2}{\sqrt{c^2 t^2 - |x - \xi|^2}}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Prvi, odnosno drugi član na desnoj strani formule (4.51) zove se retardirani potencijal dvostrukog, odnosno jednostrukog, sloja. Iz formule (4.51) zaključujemo da je vrijednost rješenja Cauchyevog problema u tački $(x, t) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$ određeno vrijednostima početnih uvjeta na kugli $K(x, ct)$. Ta činjenica zove se difuzija vala; ona vrijedi za svako parno n i za $n = 1$.

¹Faktor 2 se dobije jer se sfera $\partial K(x, ct)$ sastoji od dvije hemisfere.

4.3.5 Nehomogena talasna jednađžba

Posmatrajmo još Cauchyev problem za nehomogenu talasnu jednađžbu (uz homogene početne uvjete).

Posmatrajmo jednađžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \Delta u + f \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (4.52)$$

i potražimo njeno rješenje koje zadovoljava početne uvjete

$$u(x, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n. \quad (4.53)$$

Ako tom rješenju dodamo rješenje homogene jednađžbe koja zadovoljava početne uvjete (4.46), dobit ćemo rješenje jednađžbe (4.52) koje zadovoljava početne uvjete (4.46).

Dokažimo sljedeću lemu.

Lema 4.3.4. *Neka je $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ i neka je za svako $\tau > 0$ funkcija $v(x, t; \tau)$ rješenje problema*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \times (\tau, \infty), \quad (4.54)$$

$$v(x, \tau; \tau) = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (4.55)$$

Tada je funkcija

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau \quad (4.56)$$

rješenje Cauchyevog problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = f \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (4.57)$$

$$u(\cdot, 0) = \frac{\partial u}{\partial t}(\cdot, 0) = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n. \quad (4.58)$$

Dokaz. Na osnovu (4.56) imamo da je

$$\Delta u = \int_0^t \Delta v d\tau, \quad (4.59)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau + v(x, t; t) = (\text{zbog (4.55)}) \\ &= \int_0^t \frac{\partial v}{\partial t} d\tau, \end{aligned} \quad (4.60)$$

4.3 Talasna jednačba

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial v(x, t; t)}{\partial t} \\ &= (\text{zbog (4.55)}) = \int_0^t \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} d\tau + f(x, t).\end{aligned}\quad (4.61)$$

Na osnovu (4.54), (4.59) i (4.61) dobivamo da vrijedi (4.57). Da vrijedi (4.58) vidi se iz (4.56) i (4.60). Ovim je lema dokazana. $\square$

Koristeći prethodnu lemu dokažimo sljedeći teorem.

Teorem 4.3.9. *Neka $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Tada za $n = 3$, odnosno $n = 2$, rješenje Cauchyevog problema (4.52), (4.53) dato je formulama*

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi c^2} \int_{K(x, ct)} \frac{f\left(\xi, t - \frac{|x - \xi|}{c}\right)}{|x - \xi|} dV, \quad (4.62)$$

odnosno,

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi c} \int_0^t \int_{K(x, c(t-\tau))} \frac{f(\xi, \tau)}{\sqrt{c^2(t-\tau)^2 - |x - \xi|^2}} dV d\tau. \quad (4.63)$$

Dokaz. Rješenje problema (4.54)-(4.55) za $n = 3$ dobivamo se iz Kirchhoffove formule zamjenom $t \rightarrow t - \tau$, pa imamo da je

$$\nu(x, t; \tau) = \frac{1}{4\pi c^2(t - \tau)} \int_{\partial K(x, c(t-\tau))} f dS,$$

pa prema (4.56) dobivamo

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t - \tau)} \int_{\partial K(x, c(t-\tau))} f dS d\tau \\ &= \int_0^t \frac{1}{4\pi c^2(t - \tau)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(x + \nu c(t - \tau), \tau) c^2(t - \tau)^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\tau,\end{aligned}$$

pri čemu je $\nu = (\alpha, \beta, \gamma)$. Uvodeći umjesto τ novu varijablu $r = c(t - \tau)$, dobivamo

$$\begin{aligned}u(x, t) &= \int_0^{ct} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{1}{4\pi c^2 r} f\left(x + \nu r, t - \frac{r}{c}\right) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr \\ &= \frac{1}{4\pi c^2} \int_0^{ct} \frac{1}{r} \int_{\partial K(x, r)} f\left(\xi, t - \frac{r}{c}\right) dS dr,\end{aligned}$$

tj. formula (4.62). Analogno se dokazuje formula (4.63). $\square$

Primjedba 4.3.3. Pomoću formula (4.47), (4.51), (4.62) i (4.63) može se dokazati da je Cauchyev problem (za $n = 3$ i $n = 2$) korektno postavljen.

4.3 Talasna jednačba

Primjer 4.3.4. Koristeći D'Alembertovu formulu i Lemu 4.3.4 odrediti rješenje jednačbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= x - t, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= x^2, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin x.\end{aligned}$$

Rješenje. Rješenje $u(x, t)$ možemo napisati u obliku $u = u_1 + u_2$, gdje je

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} &= 0, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u_1(x, 0) &= x^2, \quad \frac{\partial u_1}{\partial t}(x, 0) = \sin x,\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} &= x - t, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u_2(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u_2}{\partial t}(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

D'Alembertovom formulom dobivamo

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2}((x+t)^2 + (x-t)^2) - \frac{1}{2}(\cos(x+t) - \cos(x-t)).$$

Neka je v rješenje jednačbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq \tau, \\ v(x, \tau; \tau) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau; \tau) = x - \tau.\end{aligned}$$

Ako je $\tilde{v}$ funkcija data sa $\tilde{v}(x, t; s) = v(x, t+s, s)$, onda $\tilde{v}$ zadovoljava jednačbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, t \geq 0, \\ \tilde{v}(x, 0; \tau) &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x, 0; \tau) = x - \tau.\end{aligned}$$

Primjenom D'Alembertove formule dobivamo

$$\tilde{v}(x, t, \tau) = \int_{x-t}^{x+t} (r - \tau) dr = \frac{(x+t)^2}{2} - \frac{(x-t)^2}{2} - \tau(x+t) + \tau(x-t).$$

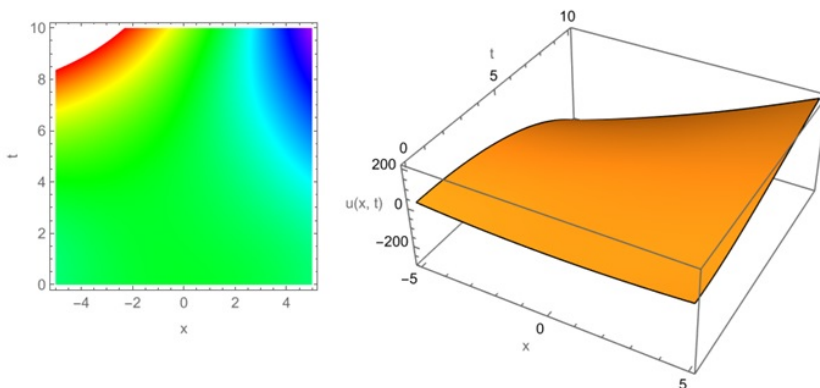
Stoga je,

$$v(x, t, \tau) = \frac{(x+t-\tau)^2}{2} - \frac{(x-t+\tau)^2}{2} - \tau(x+t-\tau) + \tau(x-t+\tau).$$

4.3 Talasna jednažba

Na osnovu Leme 4.3.4, imamo

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau = \frac{-t^3}{6} + \frac{t^2 x}{2}.$$



Slika 4.5: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [-5, 5]$, $t \in [0, 10]$ iz Primjera 4.3.4.

◆

Primjedba 4.3.4. U prethodnom primjeru smo prikazali grafik funkcije gustine površi. Grafik funkcije gustine površi predstavlja grafički prikaz koji se koristi za vizualizaciju distribucije ili varijacije vrijednosti preko dvodimenzionalne površine ili područja. On u suštini mapira skalarne vrijednosti u boje, omogućavajući posmatraču da interpretira prostorne obrasce i intenzitete. Tamnije ili svjetlije boje ukazuju na niže ili više vrijednosti, u zavisnosti od odabrane skale boja.

4.3.6 Fourierova metoda

Fourierova metoda ili metoda seperacije (razdvajanja) promijenljivih je jedna od najrasprostranjenijih metoda rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednažbi. Izložićemo tu metodu na primjeru titranja žice pričvršćene na krajevima.

Primjer 4.3.5. Homogena žica učvršćena na krajevima $x = 0$, $x = l$, ima u početnom trenutku vremena $t = 0$ oblik u_0 . Odrediti oblik žice u trenutku t pretpostavljajući da je početna brzina data sa u_1 .

4.3 Talasna jednađžba

Rješenje. Zadatak se svodi na rješavanje sljedećeg početno-rubnog problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (4.64)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0, \quad (4.65)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = u_1(x). \quad (4.66)$$

Ovaj problem, kao što smo na početku rekli, riješićemo Fourierovom metodom razdvajanja varijabli. Rješenje tražimo u obliku

$$u(x, t) = X(x)T(t).$$

Odavde je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = X(x)T''(t),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X''(x)T(t).$$

Sada jednađžba (4.64) postaje

$$X(x)T''(t) = c^2 X''(x)T(t),$$

odnosno,

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Ova jednakost je moguća ako i samo ako su obje strane jednake jednoj te istoj konstanti. Označimo tu konstantu sa $-\lambda^2$, tj. imamo

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \quad (4.67)$$

Iz (4.67) imamo

$$T''(t) + c^2 \lambda^2 T(t) = 0, \quad (4.68)$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0. \quad (4.69)$$

Iz (4.69) odredimo $X(x)$ tako da vrijede rubni uvjeti

$$X(0) = 0, \quad X(l) = 0. \quad (4.70)$$

Opće rješenje jednađžbe (4.69) je dato sa

$$X(x) = C_1 \cos \lambda x + C_2 \sin \lambda x.$$

Budući da tražimo netrivialno rješenje, to na osnovu (4.70) dobivamo da je

$$\lambda_k = \frac{k\pi}{l}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

4.3 Talasna jednačba

Vrijednosti λ_k zovemo svojstvene vrijednosti, a odgovarajuće funkcije

$$X_k(x) = \sin \frac{k\pi x}{l} \quad \text{za } C_2 = 1$$

svojstvene funkcije. Opće rješenje jednačbe (4.68) dato je sa

$$T_k(t) = a_k \cos c\lambda t + b_k \sin c\lambda t,$$

odnosno

$$T_k(t) = a_k \cos \frac{ck\pi t}{l} + b_k \sin \frac{ck\pi t}{l}, \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Sve funkcije $u_k(x, t) = X_k(x)T_k(t)$ zadovoljavaju jednačbu (4.64) uz rubne uvjete (4.65). Pod pretpostavkom da red

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{ck\pi t}{l} + b_k \sin \frac{ck\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \quad (4.71)$$

konvergira i da se može diferencirati član po član dva puta po x , odnosno po t , tada $u(x, t)$ zadovoljava (4.64) i (4.65). Koeficijente a_k i b_k ćemo odrediti iz uvjeta (4.66). Ti uvjeti daju

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi x}{l} = u_0(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{k\pi c}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} = u_1(x). \end{aligned}$$

Iz teorije Fourierovih redova slijedi da su a_k i $b_k \frac{k\pi c}{l}$ Fourierovi koeficijenti funkcija u_0 i u_1 , respektivno, tj.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2}{l} \int_0^l u_0(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \\ b_k &= \frac{2}{k\pi c} \int_0^l u_1(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx. \end{aligned} \quad (4.72)$$

Formalno² rješenje početno-rubnog problema dato je sa (4.71)-(4.72). ◆

Sljedeći teorem govori o konvergenciji formalnog rješenja.

Teorem 4.3.10. *Pretpostavimo da su funkcije u_0 i u_1 po dijelovima iz $C^3([0, l])$ odnosno $C^2([0, l])$ i da zadovoljavaju uvjete kompatibilnosti*

$$u_0(0) = u_0(l) = u_0''(0) = u_0''(l) = u_1(0) = u_1(l) = 0.$$

Tada je funkcija definirana redom (4.71) neprekidna i ima neprekidne parcijalne izvode do drugog reda. Pored toga, red (4.71) se može diferencirati član po član po x i t dva puta, pri čemu su dobiveni redovi apsolutno i uniformno konvergentni na skupu $[0, l] \times [0, \infty)$.

²tj. ono koje se dobije uz pretpostavku o konvergencijama datih redova.

4.3 Talasna jednadžba

Dokaz. Zaista, uzimajući u obzir pretpostavke za funkcije $u_0 = u_0(x)$ i $u_1 = u_1(x)$, trima odnosno dvjema uzastopnim parcijalnim integracijama u (4.72) dobivamo

$$a_k = -\frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{1}{k^3} \int_0^l u_0'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$b_k = -\frac{2}{l} \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \frac{1}{k^3} \frac{1}{c} \int_0^l u_1''(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Stavimo da je

$$a_k^{(3)} = \frac{2}{l} \int_0^l u_0'''(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$b_k^{(2)} = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{1}{c} u_1''(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx.$$

Kako su $u_0'''(x)$ i $\frac{1}{c}u_1''(x)$ po dijelovima neprekidne funkcije, to su $a_k^{(3)}$ i $b_k^{(2)}$ Fourierovi koeficijenti u razvoju ovih funkcija po kosinusima, odnosno, sinusima, redom, pa na osnovu Besselove nejednakosti dobivamo da su redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k^{(3)}|^2, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |b_k^{(2)}|^2$$

konvergentni. Kako je $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, to je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k^{(3)}}{k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + |a_k^{(3)}|^2 \right) < \infty$$

i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b_k^{(2)}}{k} \right| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k^2} + |b_k^{(2)}|^2 \right) < \infty$$

pa su i redovi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_k^{(3)}}{k} \right|, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b_k^{(2)}}{k} \right|$$

konvergentni. Kako je

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \left(a_k^{(3)} \cos \frac{ck\pi t}{l} + b_k^{(2)} \sin \frac{ck\pi t}{l} \right) \sin \frac{k\pi x}{l},$$

to je

$$|u(x, t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x, t)| = \left(\frac{l}{\pi}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \left(\left| \frac{a_k^{(3)}}{k} \right| + \left| \frac{b_k^{(2)}}{k} \right| \right) < \infty,$$

4.3 Talasna jednadžba

pa na osnovu Weierstrassovog testa apsolutne i uniformne konvergencije imamo da red (4.71) konvergira apsolutno i uniformno na $[0, l] \times [0, \infty)$. Kako je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial u_k(x, t)}{\partial x} \right| \leq A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\left| \frac{a_k^{(3)}}{k} \right| + \left| \frac{b_k^{(2)}}{k} \right| \right) < \infty$$

i

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial x^2} \right| \leq B \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left| \frac{a_k^{(3)}}{k} \right| + \left| \frac{b_k^{(2)}}{k} \right| \right) < \infty,$$

gdje su A i B neke konstante, koristeći Abelov test dobivamo da prvi i drugi formalni parcijalni izvod reda (4.71) po x konvergira apsolutno i uniformno. Analogno dobivamo da prvi i drugi formalni parcijalni izvod reda (4.71) po t konvergira apsolutno i uniformno. Kako su $u_k(x, t)$ dva puta neprekidno diferencijabilne funkcije po x i t to je $u(x, t)$ definirana preko (4.71) dva puta neprekidno diferencijabilna funkcija po x i t . Neposredno se zaključuje da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u_k(x, t)}{\partial x^2} \right) \equiv 0,$$

pa kako funkcija $u(x, t)$ zadovoljava navedene rubne i početne uvjete to je ona rješenje navedenog mješovitog problema. Primijetimo da smo na početku dokazali egzistenciju rješenja i pod slabijim uvjetima, tj. za $u_0 \in \mathcal{C}^2([0, l])$ odnosno $u_1 \in \mathcal{C}^1([0, l])$. $\square$

Primjer 4.3.6. Koristeći Fourierovu metodu razdvajanja varijabli i Lemu 4.3.4 odrediti rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= A \sin(\omega t) \sin x, \quad x \in [0, \pi], t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

Rješenje. Neka je v rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in [0, \pi], t \geq \tau, \\ v(0, t; \tau) &= v(\pi, t; \tau) = 0, \\ v(x, \tau; \tau) &= 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}(x, \tau; \tau) = A \sin(\omega \tau) \sin x. \end{aligned}$$

Ako je $\tilde{v}$ funkcija data sa $\tilde{v}(x, t, s) = v(x, t + s, s)$, onda $\tilde{v}$ zadovoljava jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial x^2} &= 0, \quad x \in [0, \pi], t \geq 0, \\ \tilde{v}(0, t; \tau) &= \tilde{v}(\pi, t; \tau) = 0, \\ \tilde{v}(x, 0; \tau) &= 0, \quad \frac{\partial \tilde{v}}{\partial t}(x, 0; \tau) = A \sin(\omega \tau) \sin x. \end{aligned}$$

4.3 Talasna jednadžba

Pomoću Fourierove metode, slično kao u prethodnom primjeru, dobivamo da funkcija $\tilde{v}$ ima oblik

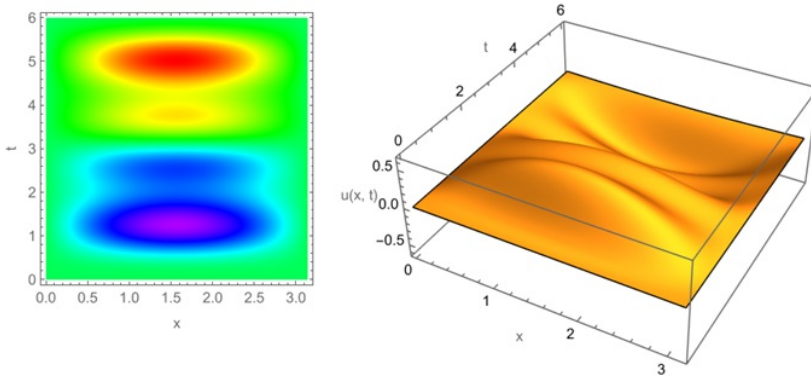
$$\tilde{v}(x, t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos ckt + b_k \sin ckt) \sin kx,$$

gdje je na osnovu početnih uvjeta $a_k = 0$ za svaki k , $b_k = 0$ za svaki $k > 1$ i $b_1 = \frac{A}{c} \sin(\omega\tau)$, pa je

$$\tilde{v}(x, t; \tau) = \frac{A}{c} \sin(\omega\tau) \sin ct \sin x.$$

Sada primjenom Leme 4.3.4 imamo

$$u(x, t) = \int_0^t v(x, t; \tau) d\tau = \int_0^t \tilde{v}(x, t-\tau; \tau) d\tau = \frac{A}{c(c^2 - \omega^2)} [c \sin \omega t - \omega \sin ct] \sin x.$$



Slika 4.6: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, \pi]$, $t \in [0, 6]$ iz Primjera 4.3.6 za $c = 1$, $A = 2$, $\omega = 4$.



Primjer 4.3.7. Naći rješenje problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(x), \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ u(0, t) &= A, \quad u(l, t) = B, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Specijalno, naći rješenje ako je $F(x) = h$ i $f(x) = g(x) = A = B = 0$, gdje je h konstanta.

4.3 Talasna jednačžba

Rješenje. Potražimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x).$$

Uvrštavanjem u jednačžbu dobivamo

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right) + F(x).$$

Ako $U = U(x)$ zadovoljava jednačžbu

$$c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F(x) = 0,$$

tada $v(x, t)$ zadovoljava talasnu jednačžbu

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Uvrštavanje funkcije $u(x, t)$ u početne i rubne uvjete, dobivamo

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= v(x, 0) + U(x) = f(x), \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = g(x), \\ u(0, t) &= v(0, t) + U(0) = A, \\ u(l, t) &= v(l, t) + U(l) = B. \end{aligned}$$

Prema tome, $U(x)$ je rješenje problema

$$\begin{aligned} c^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + F &= 0, \quad 0 < x < l, \\ U(0) &= A, \quad U(l) = B, \end{aligned}$$

a za $v(x, t)$ vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= f(x) - U(x), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = g(x), \quad 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Ova jednačžba je riješena u Primjeru 4.3.5. Lako se može vidjeti da je

$$U(x) = A + (B - A) \frac{x}{l} + \frac{x}{l} \int_0^l \left[\frac{1}{c^2} \int_0^\eta F(\xi) d\xi \right] d\eta - \int_0^x \left[\frac{1}{c^2} \int_0^\eta F(\xi) d\xi \right] d\eta.$$

Ako je $F(x) = h$ i $f(x) = g(x) = A = B = 0$, tada je

$$U(x) = \frac{h}{2c^2} (lx - x^2).$$

4.3 Talasna jednačba

Funkcija $v(x, t)$ zadovoljava jednačbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= c^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < l, \quad t > 0, \\ v(x, 0) &= -\frac{h}{2c^2}(lx - x^2), \quad \frac{\partial v(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad 0 \leq x \leq l, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t > 0.\end{aligned}$$

Na osnovu Primjera 4.3.5 imamo da je

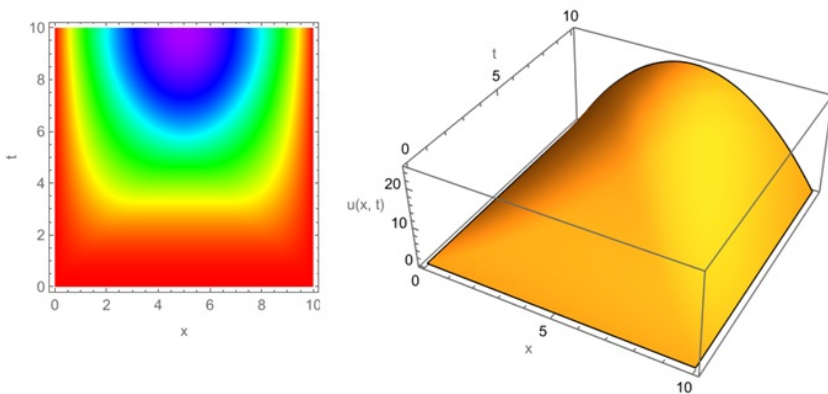
$$v(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi ct}{l} \sin \frac{k\pi x}{l},$$

gdje je

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l \left[-\frac{h}{2c^2}(lx - x^2) \right] \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \begin{cases} -\frac{4l^2 h}{k^3 \pi^3 c^2}, & k - \text{neparan}, \\ 0, & k - \text{paran}. \end{cases}$$

Prema tome,

$$\begin{aligned}u(x, t) &= v(x, t) + U(x, t) \\ &= \frac{hx}{2c^2}(l - x) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(-\frac{4l^2 h}{(2k-1)^3 \pi^3 c^2} \right) \cos \frac{(2k-1)\pi ct}{l} \sin \frac{(2k-1)\pi x}{l}.\end{aligned}$$



Slika 4.7: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, 10]$, $t \in [0, 10]$ iz Primjera 4.3.7 za $c = 1$ i $F(x) = h = 1$, $f(x) = g(x) = A = B = 0$.



Primjer 4.3.8. Razmotrimo problem titranja metalne žice, kao što je npr. žica gitare, a koja može biti privučena magnetom. Pretpostavimo da posmatrana žica

4.3 Talasna jednadžba

ima dužinu 25 cm, sa $c = 522$ u talasnoj jednadžbi, da su joj krajevi učvršćeni i da je “trznuta” tako da joj je početno odstupanje

$$\psi(x) = \frac{1}{10} \left(1 - \frac{2}{25} \left| x - \frac{25}{2} \right| \right),$$

a zatim puštena (tako da joj je početna brzina jednaka nuli). Pretpostavimo dalje da magnet djeluje konstantnom silom prema gore od 100 dina ($1 \text{ din} = 10^{-5} \text{ N}$). Odrediti funkciju koja opisuje titranje žice.

Rješenje. Naš problem se svodi na rješavanje sljedećeg početno-rubnog problema

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 100, \quad 0 < x < 25, \quad t > 0, \quad (4.73)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(25, t) = 0, \quad t > 0, \quad (4.74)$$

$$u(x, 0) = \psi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 25. \quad (4.75)$$

gdje je $c = 522$, a ψ je data gore. Primijetimo da je jednadžba (4.73) nehomogena zbog konstantnog člana 100 na desnoj strani. Taj član predstavlja *forsiranje*, tj. vanjsku silu koja kontinuirano djeluje na žicu. U ovom slučaju forsiranje potiče od magneta koji stalno privlači žicu prema gore, pa žica ne titra samo usljed početnog trzaja, nego i pod stalnim uticajem spoljašnje sile.

Zbog prisustva forsiranja, rješenje prirodno razlažemo na stacionarni dio, koji opisuje trajni uticaj vanjske sile, i oscilatorni dio, koji opisuje titranje žice oko nove ravnotežne pozicije. Kao u prethodnom primjeru, potražimo rješenje u obliku

$$u(x, t) = v(x, t) + U(x),$$

gdje je $v(x, t)$ rješenje odgovarajućeg homogenog problema (oscilatorni dio rješenja), a $U(x)$ vremenski nezavisno partikularno rješenje (stacionarni dio rješenja). Funkciju $U(x)$ biramo tako da zadovoljava

$$-c^2 U''(x) = 100, \quad 0 < x < 25,$$

uz rubne uvjete

$$U(0) = 0, \quad U(25) = 0.$$

Integracijom dobivamo

$$U(x) = -\frac{50}{c^2} x^2 + Ax + B.$$

Iz rubnih uvjeta slijedi $B = 0$ i $A = \frac{1250}{c^2}$, pa je

$$U(x) = -\frac{50}{c^2} x^2 + \frac{1250}{c^2} x.$$

4.3 Talasna jednadžba

Sada ćemo naći rješenje homogenog dijela. Definirajmo

$$v(x, t) = u(x, t) - U(x).$$

Tada $v(x, t)$ zadovoljava homogeni početno-rubni problem

$$\begin{aligned} v_{tt} - c^2 v_{xx} &= 0, & 0 < x < 25, \quad t > 0, \\ v(0, t) &= 0, & v(25, t) &= 0, \\ v(x, 0) &= \psi(x) - U(x), & v_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Rješenje ovog homogenog početno-rubnog problema tražimo u obliku Fourierovog sinusnog reda

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_n t) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right), \quad \omega_n = \frac{cn\pi}{25}.$$

Koeficijenti a_n određuju se iz početnog uvjeta

$$v(x, 0) = \psi(x) - U(x),$$

pa vrijedi

$$a_n = \frac{2}{25} \int_0^{25} (\psi(x) - U(x)) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) dx = \frac{-125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3 \pi^3} + \frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5n^2 \pi^2}.$$

Uvrštavanjem a_n i ω_n u $v(x, t)$ dobivamo da je rješenje homogenog problema (tj. oscilatorni dio rješenja) dato sa

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5n^2 \pi^2} - \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3 \pi^3} \right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{25}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right).$$

Sabiranjem stacionarnog i oscilatornog dijela dobivamo da je rješenje početno-rubnog problema (4.73)-(4.75) dato sa

$$\begin{aligned} u(x, t) &= -\frac{50}{c^2} x^2 + \frac{1250}{c^2} x \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5n^2 \pi^2} - \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3 \pi^3} \right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{25}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) \end{aligned} \quad (4.76)$$

Primijetimo da zbog simetrije funkcije $\psi(x) - U(x)$ u Fourierovom razvoju učestvuju samo neparni članovi. Rješenje je periodično sa periodom

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{50}{c}.$$

Sada ćemo izložiti drugi način traženja rješenja početno-rubnog problema (4.73)-(4.75). Prema (4.71), rješenje tražimo u obliku sinusnog reda

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right). \quad (4.77)$$

4.3 Talasna jednačba

Primijetimo da ovo rješenje zadovoljava rubne uvjete (4.74).

Uvrštavanjem rješenja (4.77) u (4.73), dobivamo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(T_n''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{25^2} T_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) = 100.$$

Razvijanjem konstante 100 u Fourierov sinusni red na intervalu $(0, 25)$ dobivamo

$$100 = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right),$$

gdje su

$$c_n = \frac{2}{25} \int_0^{25} 100 \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) dx = \frac{200(1 - (-1)^n)}{n\pi}.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $\sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right)$ dobivamo

$$T_n''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{25^2} T_n(t) = c_n.$$

Dalje, uvrštavanjem rješenja (4.77) u (4.74), dobivamo da vrijedi

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right).$$

Kao i maloprije, razvijanjem u Fourierov red po sinusima na $(0, 25)$ i izjednačavanjem, dobivamo da je

$$T_n(0) = \frac{2}{25} \int_0^{25} \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) dx = \frac{4}{5n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Označimo $\frac{4}{5n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ sa b_n .

Da bismo našli $T_n(t)$, moramo riješiti sljedeći Cauchyjev problem

$$\begin{aligned} T_n''(t) + \frac{c^2 n^2 \pi^2}{25^2} T_n(t) &= c_n, \\ T_n(0) &= b_n, \\ T_n'(0) &= 0. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Diferencijalna jednačba u (4.78) je nehomogena linearna diferencijalna jednačba drugog reda sa konstantnim koeficijentima. Riješit ćemo je metodom varijacije konstanti.

Najprije rješavamo odgovarajuću homogenu jednačbu

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0,$$

4.3 Talasna jednačba

gdje je $\omega_n = \frac{cn\pi}{25}$. Njena karakteristična jednačba je

$$r^2 + \omega_n^2 = 0,$$

odakle slijedi $r = \pm i\omega_n$, pa opće rješenje odgovarajuće homogene jednačbe glasi

$$T_n^{(h)}(t) = A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t),$$

pri čemu su A_1, A_2 proizvoljne konstantne. Opće rješenje odgovarajuće nehomogene jednačbe pretpostavljamo u obliku

$$T_n(t) = A_1(t) \cos(\omega_n t) + A_2(t) \sin(\omega_n t),$$

gdje su $A_1(t)$ i $A_2(t)$ nepoznate funkcije vremena. Metodom varijacije konstanti dolazimo do sistema

$$\begin{cases} A_1'(t) \cos(\omega_n t) + A_2'(t) \sin(\omega_n t) = 0, \\ -A_1'(t) \sin(\omega_n t) + A_2'(t) \cos(\omega_n t) = \frac{c_n}{\omega_n}. \end{cases}$$

Rješavanjem ovog sistema slijedi da je

$$A_1'(t) = -\frac{c_n}{\omega_n} \sin(\omega_n t), \quad A_2'(t) = \frac{c_n}{\omega_n} \cos(\omega_n t),$$

odakle integracijom dobivamo

$$A_1(t) = \frac{c_n}{\omega_n^2} \cos(\omega_n t) + C_1, \quad A_2(t) = \frac{c_n}{\omega_n^2} \sin(\omega_n t) + C_2.$$

Opće rješenje sada glasi

$$T_n(t) = C_1 \cos(\omega_n t) + C_2 \sin(\omega_n t) + \frac{c_n}{\omega_n^2}.$$

Vrijednosti konstanti C_1, C_2 ćemo odrediti iz početnih uvjeta u (4.78). Iz prvog uvjeta dobivamo

$$b_n = \frac{c_n}{\omega_n^2} + C_1, \quad \Rightarrow \quad C_1 = b_n - \frac{c_n}{\omega_n^2},$$

a iz drugog uvjeta slijedi $C_2 = 0$. Prema tome,

$$T_n(t) = \left(b_n - \frac{c_n}{\omega_n^2} \right) \cos(\omega_n t) + \frac{c_n}{\omega_n^2}.$$

Kako je $\omega_n = \frac{cn\pi}{25}$, $b_n = \frac{4}{5n^2\pi^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ i $c_n = \frac{200(1 - (-1)^n)}{n\pi}$ za $n = 1, 2, 3, \dots$, konačno dobivamo da je rješenje Cauchyjevog problema (4.78) dato sa

$$T_n(t) = \left(\frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5n^2\pi^2} - \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3 \pi^3} \right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{25}\right) + \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3 \pi^3}.$$

4.3 Talasna jednažba

Uvrštavanjem u (4.77), dobivamo rješenje početno-rubnog problema (4.73)-(4.75) u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{5n^2\pi^2} - \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3\pi^3} \right) \cos\left(\frac{cn\pi t}{25}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3\pi^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right). \quad (4.79)$$

Rješenje je periodično sa periodom

$$T = \frac{2\pi}{c\pi/25} = \frac{50}{c}.$$

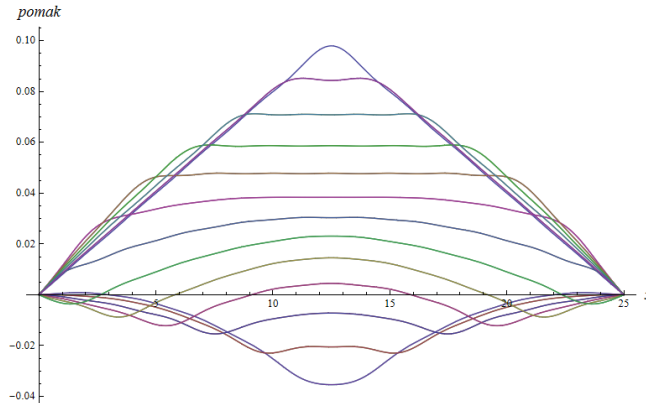
Primijetimo da je $T_n(t) = 0$ za parno n , jer su tada $b_n = 0$ i $c_n = 0$. Prema tome, u konačnom rješenju našeg problema učestvuju samo neparni članovi reda, što je u skladu sa zaključkom iz prvog načina rješavanja problema.

Ostaje još da pokažemo da su rješenja (4.79) i (4.76) ista na $(0, 25)$. Naime, razvijajući funkciju $U(x) = -\frac{50}{c^2}x^2 + \frac{1250}{c^2}x$ u Fourierov sinusni red na $(0, 25)$, dobivamo da je

$$-\frac{50}{c^2}x^2 + \frac{1250}{c^2}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{125000(1 - (-1)^n)}{c^2 n^3\pi^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{25}\right).$$

Detalje ovog računa prepuštamo čitaocu.

Dvadeset i pet “snimaka” rješenja (uzetih tokom jednog perioda) prikazano je na Slici 4.8. Jasno se uočava uticaj vanjske sile na titranje žice.



Slika 4.8: Dvadeset i pet “snimaka” titrajuće žice iz Primjera 4.3.8.



Primjedba 4.3.5. U prethodnom primjeru konstantno forsiranje ne utiče na sopstvene frekvencije titranja žice, već isključivo mijenja njen ravnotežni položaj. Oscilatorni dio rješenja ima iste frekvencije kao u homogenom slučaju, dok stacionarni dio opisuje trajnu deformaciju žice izazvanu djelovanjem magneta.

Istovremeno, prikazana su dva ekvivalentna pristupa rješavanju datog problema. U prvom pristupu forsiranje se uklanja uvođenjem stacionarnog rješenja $U(x)$, čime se problem svodi na homogeni početno-rubni problem za funkciju $v(x, t)$. U drugom pristupu rješenje se direktno razvija u Fourierov sinusni red, pri čemu se uticaj forsiranja pojavljuje u vremenskim koeficijentima $T_n(t)$ koji su rješenja nehomogenih običnih diferencijalnih jednačbi drugog reda sa konstantnim koeficijentima.

Primjer 4.3.9. Naći rješenje problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u(x, 0, t) &= u(x, M, t) = 0, \\ u(0, y, t) &= u(L, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad \frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = g(x, y),\end{aligned}$$

za $x \in [0, L], y \in [0, M], t \in \mathbb{R}^+$.

Rješenje. Potražimo rješenje jednačbe u obliku proizvoda

$$u(x, y, t) = T(t)X(x)Y(y),$$

onda iz date jednačbe slijedi da je

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

što je samo moguće ukoliko su sve tri funkcije

$$\frac{T''(t)}{T(t)}, \quad \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

konstantne. Tada, neka su konstante b i c takve da je

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = b,$$

i

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c,$$

što povlači da je

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = b - c.$$

4.3 Talasna jednadžba

Razmotrimo sva moguća rješenja jednadžbe $\frac{X''(x)}{X(x)} = c$, za razne vrijednosti konstante c . Iz $T(t)X(0)Y(y) = T(t)X(L)Y(y) = 0$, slijedi da je $X(0) = X(L) = 0$.

1) Za $c > 0$, imamo

$$X(x) = C_1 e^{\sqrt{c}x} + C_2 e^{-\sqrt{c}x},$$

pa je iz $X(0) = 0$, $C_1 = -C_2$, onda iz $X(L) = 0$, imamo

$$0 = C_1(e^{\sqrt{c}L} - e^{-\sqrt{c}L}) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Dakle ne postoji netrivialno rješenje.

2) Ako je $c = 0$, onda je $X(x) = C_1 x + C_2$, tada $X(0) = X(L) = 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0$. Dakle ne postoji netrivialno rješenje.

3) Ukoliko je $c < 0$,

$$X(x) = C_1 \sin(\sqrt{-c}x) + C_2 \cos(\sqrt{-c}x).$$

Tada, $X(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$. Sada iz $X(L) = 0$ slijedi da je $\sin(\sqrt{-c}L) = 0$, a to znači da je c oblika $c = -(\frac{n\pi}{L})^2$, za neki prirodni broj n .

Na osnovu navedenog, sva netrivialna rješenja jednadžbe $\frac{X''}{X} = c$ su oblika

$$X_n(x) = C_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Na isti način, dobivamo da su sva netrivialna rješenja jednadžbe $\frac{Y''}{Y} = b - c$, gdje je $b - c < 0$, oblika

$$Y_n(y) = c_n \sin \frac{n\pi y}{M}.$$

Iz $c < 0$ i $b - c < 0$ dobivamo da je $b < 0$. Pa za $b < 0$ slijedi da je

$$T(t) = C_1 \sin(\sqrt{-ba^2}t) + C_2 \cos(\sqrt{-ba^2}t),$$

gdje konstanta $-b$ ima oblik

$$-b = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{M}\right)^2, m, n \in \mathbb{N},$$

što ćemo označavati sa $\lambda_{n,m}$.

Tada je formalno rješenje u dato linearnom kombinacijom

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m} (a_{n,m} \cos \sqrt{\lambda_{n,m}}at + b_{n,m} \sin \sqrt{\lambda_{n,m}}at) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}.$$

Na osnovu početnih uvjeta vidimo da je

$$f(x, y) = \sum_{n,m} a_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M},$$

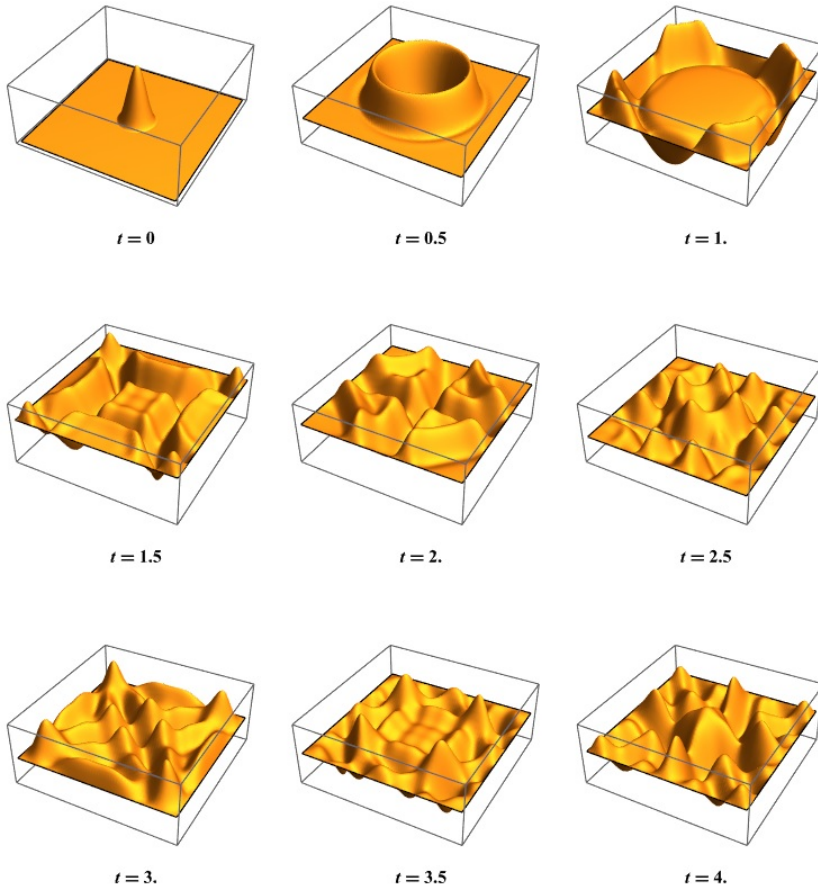
4.3 Talasna jednadžba

$$g(x, y) = \sum_{n,m} b_{n,m} \sqrt{\lambda_{n,m}} a \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}.$$

Dakle, koeficijenti $a_{n,m}$, $b_{n,m}$ su definirani sa

$$a_{n,m} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M},$$

$$b_{n,m} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_{n,m}} a} \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M g(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}.$$



Slika 4.9: Grafik funkcije $u = u(x, y, t)$, iz Primjera 4.3.9 za $a = 1$, $g(x, y) = 0$ i

$$f(x, y) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{1/4}\right), & \text{ako } \sqrt{x^2+y^2} < \frac{1}{4}, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

◆

4.4 Laplaceova jednadžba

U ovom dijelu ćemo proučavati jednu od najvažnijih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, a ujedno i predstavnika eliptičnih parcijalnih diferencijalnih jednadžbi drugog reda, a to je *Laplaceova jednadžba*

$$\Delta u = 0,$$

i sa njom vezanu *Poissonovu jednadžbu*

$$-\Delta u = f.$$

U oba slučaja je $x \in \Omega$, pri čemu je $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x)$ gdje je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ data oblast a u nepoznata funkcija. U (4.4) funkcija $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ je također data. Počet ćemo s jednom od najvažnijih osobina linearnih eliptičnih jednadžba a to je principa maksimuma, tj. da su vrijednosti rješenja unutar ograničene oblasti majorirane vrijednostima na rubu te oblasti.

Za Laplaceovu jednadžbu izučavat ćemo samo rubne probleme jer kao što smo vidjeli u uvodu početni problem nije korektno postavljen.

4.4.1 Rubni problemi i princip maksimuma

Kao što smo već vidjeli, navedene jednadžbe imaju beskonačno mnogo rješenja u oblasti Ω . Nas će zanimati rješenje kojim je opisano titranje membrane uz zadane režim na rubu; taj režim se opisuje *rubnim uvjetima*. Imamo sljedeća tri rubna problema:

1) *Dirichletov* problem sastoji se od nalaženja rješenja za koje je zadovoljen uvjet

$$u = g \quad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

gdje je g zadana funkcija na Γ ; na primjer ako je membrana učvršćena na rubu onda je $g = 0$;

2) *Neumannov* problem se sastoji u nalaženju rješenja koje zadovoljava uvjet

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

gdje je h zadana funkcija na Γ , a $\partial u / \partial \nu$ izvod po spoljašnjoj normalni na $\partial\Omega$;

3) Ako se traži rješenje jednadžbe koje zadovoljava jednakost

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} + cu = h \quad \text{na} \quad \Gamma = \partial\Omega,$$

gdje su c i h zadane funkcije na Γ , onda imamo *Robinov* problem.

Određivanje rješenja Laplaceove jednadžbe koje zadovoljava neki od rubnih uvjeta zove se rubni problem (Dirichletov, Neumannov, itd.). Formulacija problema diktira pretpostavke o klasi funkcija u kojoj se rješenje traži. Za zadane

4.4 Laplaceova jednadžba

funkcije f , g , c i h pretpostavljamo da su neprekidne. Tada je za Dirichleov problem pripadna klasa $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Za Neumannov i Robinov problem pripadna klasa je $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$. Uz gornje pretpostavke govorimo o *klasičnim rješenjima* rubnih problema.

Naprijed navedeni rubni problemi nazivaju se i unutrašnji rubni problemi. Za razliku od ovih posmatraju se i tzv. vanjski rubni problemi. Formuliramo ih za $n \geq 2$. Uvedimo sljedeću definiciju.

Definicija 4.4.1. *Za funkciju u koja je definirana u okolini beskonačnosti (vanjština kugle) u $\mathbb{R}^n$ kažemo da je regularna u beskonačnosti, ako je zadovoljen uvjet*

$$u(x) \rightarrow 0, \quad |x| \rightarrow \infty,$$

za $n > 2$, odnosno ako je ograničena u nekoj okolini beskonačnosti za $n = 2$.

Definicija 4.4.2. *Za funkciju u kažemo da je harmonijska na (ili u) otvorenom skupu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, ako je $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ i $\Delta u = 0$ u $\mathcal{O}$.*

Pretpostavimo da je $\Gamma = \partial\Omega$ povezan skup; tada je $\Omega_1 = \overline{\Omega}^c$ neograničena oblast. *Spoljašnji Dirichleov problem* sastoji se u nalaženju funkcije $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}_1)$, koja je na Ω_1 harmonijska i koja je regularna u beskonačnosti, a na rubu Γ vrijedi $u = f$, gdje je f neprekidna funkcija. Analogno se formulišu i ostala dva rubna problema. Vanjski problemi u općem slučaju bez pretpostavke o regularnosti u beskonačnosti rješenja nije jedinstveno rješiv.

Prvi korak u teoriji rubnih problema su teoremi o jedinstvenosti rješenja. Za dokaz jedinstvenosti rješenja Dirichletovog problema potreban nam je princip maksimuma (v. Teorem 4.4.8) koji kaže da ako je $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonijska funkcija u oblasti Ω , onda ona svoje ekstreme prima na $\Gamma = \partial\Omega$; tj. za svako $x \in \overline{\Omega}$ vrijedi

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x) \leq \max_{\Gamma} u.$$

Sada navedimo teorem koji govori o jedinstvenosti rješenja Dirichletovog problema.

Teorem 4.4.1. *Dirichleov problem*

$$-\Delta u = f \quad u \quad \Omega,$$

$$u = g \quad u \quad \Gamma,$$

ima najviše jedno rješenje $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$.

Dokaz. Neka su $u_1, u_2 \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ rješenja problema. Funkcija $w = u_1 - u_2$ je harmonijska u Ω i jednaka je nuli na Γ . Prema principu maksimuma imamo da je $0 \leq w(x) \leq 0$, tj. $w = 0$. $\square$

Posljedica 4.4.1. *Neka je funkcija $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ harmonijska u oblasti Ω . Tada vrijedi*

$$\max_{x \in \overline{\Omega}} |u(x)| \leq \max_{\Gamma} |u|. \quad (4.80)$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Dokaz. Prema principu maksimuma za $x \in \bar{\Omega}$ imamo

$$u(x) \leq \max_{\Gamma} u \leq \max_{\Gamma} |u|,$$

$$-u(x) \leq \max_{\Gamma} (-u) \leq \max_{\Gamma} |u|,$$

a iz tog slijedi (4.80). □

Ako je $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega})$ rješenje Dirichletovog problema

$$\Delta u = 0 \quad u|_{\Omega}, \quad (4.81)$$

$$u = g \quad u|_{\Gamma}, \quad (4.82)$$

prema (4.80) vrijedi

$$\max_{\bar{\Omega}} |u| \leq \max_{\Gamma} |g|.$$

Oдавde slijedi da je problem (4.81) i (4.82) korektno postavljen.

Lema 4.4.1. Za funkcije $u, v \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vrijedi prva Greenova formula

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, dV = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, dS - \int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, dV. \quad (4.83)$$

Dokaz. Parcijalnom integracijom dobivamo

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dV = \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) dV - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dV. \quad (4.84)$$

Na prvi član desne strane primijenimo formulu Ostrogradskog:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial u}{\partial x_i} v \right) dV = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i \, dS. \quad (4.85)$$

Iz (4.84) i (4.85) slijedi

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \Delta u v \, dV &= \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} v \, dV \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \nu_i \, dS - \sum_{i=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} dV, \end{aligned}$$

a iz toga slijedi tražena jednakost. □

Stavljajući u (4.83) $v = 1$ odnosno $v = u$, dobivamo sljedeću posljedicu.

Posljedica 4.4.2. Za funkciju $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vrijedi jednakost

$$\int_{\Omega} \Delta u \, dV = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} \, dS, \quad (4.86)$$

$$\int_{\Omega} \Delta u u \, dV + \int_{\Omega} |\mathbf{grad} u|^2 \, dV = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} u \, dS. \quad (4.87)$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Zamjenjujući u (4.83) funkciju u sa v i oduzimajući tako dobivenu jednakost od (4.83), dobivamo sljedeću propoziciju.

Posljedica 4.4.3. *Za funkcije $u, v \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ vrijedi druga Greenova formula*

$$\int_{\Omega} (\Delta u v - \Delta v u) dV = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u \right) dS.$$

Ako za rješenje Neumannovog rubnog problem pretpostavimo nešto veću regularnost nego u originalnoj postavci, pomoću jednakosti (4.87) može se dokazati njegova jedinstvenost.

Teorem 4.4.2. *Ako Neumannov problem*

$$-\Delta u = f \quad \text{u } \Omega,$$

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{na } \Gamma,$$

ima rješenje $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$, onda je

$$\int_{\Omega} f dV + \int_{\Gamma} h dS = 0. \quad (4.88)$$

Svaka takva dva rješenja razlikuju se za konstantu.

Dokaz. Uvjet (4.88) slijedi neposredno iz (4.86). Neka su u_1 i $u_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ rješenja i neka je $w = u_1 - u_2$. Imamo

$$\Delta w = 0 \quad \text{u } \Omega,$$

$$\frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \Gamma.$$

Jednakost (4.87) za funkciju w glasi

$$\int_{\Omega} |\mathbf{grad} w|^2 dV = 0.$$

Iz toga slijedi da je $\mathbf{grad} w = 0$ u Ω , tj. $\partial w / \partial x_i = 0$ u Ω , $i = 1, 2, \dots, n$. Prema tome je $w = \text{const}$, tj. $u_1 - u_2 = \text{const}$. $\square$

Za dokaz Neumannovog problema u klasi $\mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ koristi se teorija potencijala i teorija integralnih jednadžbi, pa je dokaz mnogo složeniji i ovdje ga nećemo navoditi.

Teoremi jedinstvenosti za spoljašnji Dirichletov problem formulišu se isto kao za unutrašnji Dirichletov problem, dok za spoljašnji Neumannov problem svaka dva rješenja razlikuju se za konstantu za $n = 2$, a za $n > 2$ ako rješenje postoji ono je jedinstveno. Za dokaz ovih tvrdnji potrebna su dodatna razmatranja što ovdje nećemo činiti.

4.4.2 Fundamentalno rješenje i Greenova funkcija

Greenova funkcija³ koristi se za nalaženje rješenja nehomogenih diferencijalnih jednadžbi i pripadnih rubnih uvjeta na osnovu rješenja odgovarajuće homogene jednadžbe. Pri tome se početni uvjeti mogu posmatrati kao poseban slučaj rubnih uvjeta.

Intuitivno, Greenova funkcija opisuje odziv sistema na izvor koncentriran u jednoj tački prostora nezavisnih varijabli. Ako je ta tačka na rubu oblasti, Greenova funkcija se bira tako da zadovoljava nehomogene rubne uvjete, dok se u slučaju unutrašnje tačke koristi za rješavanje nehomogene parcijalne diferencijalne jednadžbe.

Da bismo, više intuitivno i ne ulazeći puno u važne detalje, objasnili o čemu se radi, posmatrajmo linearnu nehomogenu diferencijalnu jednadžbu

$$D(u(x)) = f(x),$$

gdje je D diferencijalni operator, a nezavisna varijabla x koja može biti jednodimenzionalna ili višedimenzionalna, tj. $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, i $u(x)$ je nepoznata funkcija. Ako pretpostavimo da je funkcija $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ i da je $u_1(x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe $D(u(x)) = f(x)$, tj. $D(u_1(x)) = f_1(x)$, i da je $u_2(x)$ rješenje diferencijalne jednadžbe $D(u(x)) = f_2(x)$, tj. $D(u_2(x)) = f_2(x)$, onda je $u_1(x) + u_2(x)$ rješenje jednadžbe $D(u(x)) = f(x)$, jer je $D(u_1(x) + u_2(x)) = D(u_1(x)) + D(u_2(x)) = f_1(x) + f_2(x) = f(x)$. Ovo je poznata osobina linearnih diferencijalnih jednadžbi i vrijedi ako je $f(x)$ suma velikog broja funkcija. Ovu ideju možemo dalje formalizirati predstavljajući funkciju $f(x)$ kao superpoziciju beskonačno mnogo lokalizovanih izvora, tj. napisati je pomoću integrala. U tom cilju, uvedimo Diracovu⁴ δ funkciju (ili δ distribuciju ili generaliziranu funkciju, poznatu još kao i jedinični impuls) na skupu realnih brojeva, koja je svuda jednaka nuli osim u nuli. Naglašavamo da δ -funkcija nema smisla kao klasična funkcija, već isključivo u okviru integrala. Možemo pisati

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0, \\ \infty, & x = 0, \end{cases}$$

tako da je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) dx = 1.$$

³Greenova funkcija je dobila ime po engleskom matematičaru i fizičaru Georgeu Greenu (1793–1841), koji ju je uveo 1828. godine u eseju *Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*.

⁴P. A. M. Dirac (1902–1984) uveo je ovu delta-funkciju u originalnom izdanju svoje knjige *The Principles of Quantum Mechanics* (Oxford University Press, 1930), a ovaj koncept se dalje razrađuje u kasnijim izdanjima, uključujući i 4. izdanje iz 1958. godine. U tom kontekstu razmatranja ortogonalnosti (generalizovanih) baznih funkcija u Hilbertovom prostoru pojavljuje se relacija $\langle x|y \rangle = c\delta(x - y)$.

4.4 Laplaceova jednadžba

Integracijom na proizvoljnom segmentu $[a, b]$ imamo

$$\int_a^b \delta(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \in [a, b], \\ 0, & 0 \notin [a, b]. \end{cases}$$

Za Diracovu δ funkciju vrijedi sljedeća osobina translacije (pomaka)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - a) f(x) dx = f(a).$$

Vratimo se, sada, problemu od kojeg smo pošli. Koristeći Diracovu δ funkciju, tj. osobinu translacije, možemo funkciju $f(x)$ napisati u sljedećem obliku

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(y - x) f(y) dy = f(x),$$

tj. $f(x)$ smo predstavili kao beskonačnu kolekciju tačaka.

Greenova funkcija $G(x, y)$ za diferencijalni operator D je funkcija za koju vrijedi

$$D(G(x, y)) = \delta(y - x). \quad (4.89)$$

Sada, koristeći prethodno, možemo pisati

$$\int_{-\infty}^{+\infty} D(G(x, y)) f(y) dy = f(x).$$

Pošto je D linearan operator koji, u ovom slučaju, djeluje samo na x , to ga možemo "izvući" ispred integrala, tj.

$$D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) f(y) dy \right) = f(x),$$

tj. rješenje $u(x)$ možemo napisati u integralnoj formi $u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x, y) f(y) dy$. Dakle, ako znamo Greenovu funkciju, možemo riješiti odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu.

Fundamentalno rješenje. Fundamentalno rješenje Φ linearnog diferencijalnog operatora D je funkcija (ili distribucija) koja zadovoljava jednadžbu

$$D\Phi = \delta$$

u smislu distribucija, u cijelom prostoru (bez nametnutih rubnih uvjeta) [20]. Ovdje D označava linearni diferencijalni operator, dok je δ Diracova δ -distribucija koja predstavlja izvor koncentrisan u jednoj tački. Jednakost $D\Phi = \delta$ razumije se u distribucijskom smislu, a izraz *u cijelom prostoru* znači da se problem razmatra na prostoru $\mathbb{R}^n$, bez dodatnih rubnih ili početnih uvjeta.

Fundamentalno rješenje opisuje odziv operatora D na tačkasti izvor u beskonačnom prostoru. Ono se naziva *fundamentalnim* zato što predstavlja osnovni

4.4 Laplaceova jednadžba

gradivni blok svih rješenja. Naime, ako je poznato fundamentalno rješenje Φ , tada se za jednadžbu

$$Du = f$$

može (formalno) pisati

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi(x - y) f(y) dy,$$

što odgovara superpoziciji tačkastih izvora.

U većini konkretnih problema rješenja se, međutim, traže u ograničenim oblastima uz zadane rubne uvjete. U takvim slučajevima fundamentalno rješenje više ne zadovoljava propisane rubne uvjete. Greenova funkcija predstavlja prirodno uopćenje fundamentalnog rješenja na ograničene oblasti. Ona se definira kao rješenje jednadžbe (4.89) u posmatranoj oblasti, uz dodatni zahtjev da zadovoljava odgovarajuće rubne uvjete. Drugim riječima, Greenova funkcija se može posmatrati kao fundamentalno rješenje prilagođeno geometriji oblasti i rubnim uvjetima problema.

Greenova funkcija, kao što smo ranije istakli, predstavlja odziv sistema na jedinični impuls. Ovu ideju ilustrujemo na jednostavnom primjeru običnih diferencijalnih jednadžbi, pri čemu ćemo ujedno pokazati kako se Greenova funkcija može eksplicitno odrediti u ovakvim, jednostavnijim slučajevima. Kao dodatnu literaturu, studentima preporučujemo poglavlje *Green's Functions* iz knjige [5].

Primjer 4.4.1. Neka je data linearna nehomogena diferencijalna jednadžba

$$L[y] = f,$$

gdje je L linearni diferencijalni operator, a f zadana funkcija. Formalno, rješenje ove jednadžbe može se zapisati u obliku

$$y = L^{-1}[f],$$

gdje L^{-1} označava inverzni operator diferencijalnog operatora L .

U praksi, inverz diferencijalnog operatora ne pojavljuje se u algebarskom, već u integralnom obliku. Preciznije, rješenje se traži u obliku

$$y(x) = \int G(x, \xi) f(\xi) d\xi, \quad (4.90)$$

gdje je funkcija $G(x, \xi)$ jezgra (kernel) pripadnog integralnog operatora, tj. Greenova funkcija.

Razmotrimo šta se dešava kada u početnom problemu uzmemo

$$f(t) = \delta(t - t_0),$$

odnosno kada posmatramo diferencijalnu jednadžbu

$$y'(t) + cy(t) = \delta(t - t_0), \quad y(0) = 0.$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Ovdje $\delta(t - t_0)$ predstavlja jedinični impuls u trenutku $t = t_0$.

Koristeći rješenje dato sa (4.90) dobivamo

$$y(t) = \int_0^t G(t, \tau) \delta(\tau - t_0) d\tau = \begin{cases} G(t, t_0), & 0 < t_0 < t, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Pri tome smo iskoristili osobinu translacije Diracove δ -funkcije

$$\int_a^b f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0), \quad a < t_0 < b.$$

Za Greenovu funkciju $G(t, \tau)$ tražimo rješenje problema

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t, \tau) + c G(t, \tau) = \delta(t - \tau), \quad G(0, \tau) = 0.$$

Za $t \neq \tau$ vrijedi homogena jednadžba $G_t + cG = 0$, pa je $G(t, \tau) = A(\tau)e^{-ct}$ za $t < \tau$ i $G(t, \tau) = B(\tau)e^{-c\tau}$ za $t > \tau$. Integriranjem po intervalu $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$ i puštanjem $\varepsilon \rightarrow 0$ dobivamo uvjet skoka

$$G(\tau^+, \tau) - G(\tau^-, \tau) = 1.$$

Zbog kauzalnosti uzimamo $G(t, \tau) = 0$ za $t < \tau$, pa je $G(\tau^-, \tau) = 0$ i $G(\tau^+, \tau) = 1$. Otuda slijedi

$$G(t, \tau) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < \tau, \\ e^{-c(t-\tau)}, & t > \tau, \end{cases}$$

odnosno $G(t, \tau) = H(t - \tau)e^{-c(t-\tau)}$.

Ovdje je H Heavisideova funkcija definirana sa

$$H(s) = \begin{cases} 0, & s < 0, \\ 1, & s > 0, \end{cases}$$

(dok se vrijednost u $s = 0$ može uzeti proizvoljno, npr. $H(0) = \frac{1}{2}$), pa zapis $G(t, \tau) = H(t - \tau)e^{-c(t-\tau)}$ znači da je $G(t, \tau) = 0$ za $t < \tau$, a $G(t, \tau) = e^{-c(t-\tau)}$ za $t > \tau$.

Primjer 4.4.2. U slučaju rubnog problema posmatrajmo diferencijalnu jednadžbu

$$y''(x) - a^2 y(x) = \delta(x - x'), \quad y(0) = y(L) = 0.$$

Koristeći opće rješenje dato relacijom (4.90), dobivamo

$$y(x) = \int_0^L G(x, \xi) \delta(\xi - x') d\xi = G(x, x'), \quad 0 < x' < L.$$

Primjećujemo da rubni uvjeti zahtijevaju da Greenova funkcija zadovoljava

$$G(0, x') = 0, \quad G(L, x') = 0.$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Da bismo eksplicitno odredili Greenovu funkciju, primijetimo da za $x \neq x'$ vrijedi homogena jednadžba

$$y''(x) - a^2 y(x) = 0.$$

Stoga Greenovu funkciju tražimo u obliku

$$G(x, x') = \begin{cases} A(x') \sinh(ax), & 0 < x < x', \\ B(x') \sinh(a(L - x)), & x' < x < L, \end{cases}$$

gdje su konstante $A(x')$ i $B(x')$ određene iz uvjeta neprekidnosti Greenove funkcije u tački $x = x'$ i skoka njenog izvoda

$$\frac{\partial G}{\partial x}(x'^+, x') - \frac{\partial G}{\partial x}(x'^-, x') = 1,$$

kao i iz rubnih uvjeta $G(0, x') = G(L, x') = 0$.

U ovom primjeru, Greenova funkcija se gradi od rješenja homogene jednadžbe; ako ta rješenja ne znamo eksplicitno, ne znamo ni Greenovu funkciju u zatvorenom obliku, ali to ne znači da ona ne postoji.

Napominjemo da se Greenova funkcija može eksplicitno konstruirati samo u slučajevima kada se odgovarajuća homogena diferencijalna jednadžba može riješiti u zatvorenom obliku. U općem slučaju Greenova funkcija postoji, ali se ne može zapisati eksplicitnom formulom.

Primjeri običnih diferencijalnih jednadžbi jasno pokazuju osnovnu ideju Greenove funkcije kao odziva sistema na jedinični impuls. U tim slučajevima Greenova funkcija se može eksplicitno konstruirati rješavanjem odgovarajuće homogene jednadžbe i prilagođavanjem rješenja rubnim ili početnim uvjetima.

Kod parcijalnih diferencijalnih jednadžbi ista ideja ostaje na snazi, ali se pojavljuju nove poteškoće. Prije svega, diferencijalni operator djeluje na više nezavisnih varijabli, a geometrija oblasti i tip rubnih uvjeta imaju značajan utjecaj na oblik rješenja. Zbog toga se Greenova funkcija za parcijalne diferencijalne jednadžbe može eksplicitno odrediti samo u posebnim slučajevima i za jednostavne oblasti.

U nastavku ćemo se posvetiti Laplaceovoj parcijalnoj diferencijalnoj jednadžbi. Posebnu pažnju posvetit ćemo ulozi fundamentalnog rješenja i Greenove funkcije u formulaciji i analizi rješenja rubnih problema.

Prvo ćemo odrediti rješenje (homogene) Laplaceove jednadžbe u oblasti $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, koje je *sferno simetrično* u odnosu na ishodište, tj. rješenje $u(x)$ koje zavisi samo o sfernoj varijabli $r = |x|$: $u(x) = \psi(r)$, $0 < r < \infty$.

Imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} &= \psi'(r) \frac{\partial r}{\partial x_i} = \psi'(r) \frac{x_i}{r}, \\ \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2} &= \psi''(r) \frac{x_i^2}{r^2} + \psi'(r) \frac{1}{r} - \psi'(r) \frac{x_i^2}{r^3}, \end{aligned}$$

4.4 Laplaceova jednađžba

pa jednađžba za funkciju ψ glasi:

$$\psi''(r) + \frac{n-1}{r} \psi'(r) = 0.$$

Separacijom varijabli dobivamo

$$\psi(r) = C \int \frac{dr}{r^{n-1}} + C_1, \quad (4.91)$$

gdje su C i C_1 konstante. Može se provjeriti da (4.91) zadovoljava Laplaceovu jednađžbu. Funkciju ψ sa konstantama $C = -1/|S_n|$,⁵ $C_1 = 0$, označavat ćemo sa ψ_n :

$$\psi_n(r) = \begin{cases} \frac{1}{(n-2)|S_n|} \frac{1}{r^{n-2}}, & n > 2, \\ \frac{1}{2\pi} \ln \frac{1}{r}, & n = 2. \end{cases}$$

Funkcija ψ_n zove se fundamentalno rješenje Laplaceove jednađžbe. Za njega za $x \neq y$ vrijedi

$$\Delta_y \psi_n(|y - x|) = 0.$$

Bez dokaza navodimo sljedeću lemu.

Lema 4.4.2. *Ako je $f \in C(\bar{\Omega})$, tada nesvojstveni integral*

$$\int_{\Omega} f(y) \psi_n(|x - y|) dV_y, \quad x \in \bar{\Omega},$$

konvergira.

Pomoću fundamentalnog rješenja izvest ćemo integralnu reprezentaciju rješenja Laplaceove jednađžbe. Prije toga dokažimo sljedeći važan teorem.

Teorem 4.4.3. *Za funkciju $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vrijedi integralna reprezentacija*

$$\begin{aligned} u(x) = & \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y \\ & - \int_{\Omega} \Delta u(y) \psi_n(|x - y|) dV_y, \quad x \in \Omega. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Dokaz. Neka je $x \in \Omega$, $\varepsilon > 0$, $K(x, \varepsilon) \subset \Omega$. Primijenimo drugu Greenovu formulu za funkcije $u(y)$ i $\psi_n(|x - y|)$ u oblasti $\Omega_{\varepsilon} = \Omega \setminus \bar{K}(x, \varepsilon)$. Uzimajući u obzir da je $\Delta_y \psi_n(|y - x|) = 0$ u Ω_{ε} , dobivamo

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_{\varepsilon}} \Delta u(y) \psi_n(|x - y|) dV_y \\ & = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y \\ & + \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y, \end{aligned} \quad (4.93)$$

⁵ $|S_n|$ je površina jedinične sfere u $\mathbb{R}^n$: vrijedi $|S_n| = 2\pi^{n/2}/\Gamma(n/2)$ pri čemu Γ označava gama-funkciju, definiranu za $t > 0$ formulom $\Gamma(t) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \lambda^{t-1} d\lambda$.

4.4 Laplaceova jednadžba

gdje je ν vektor vanjske normale u tački $y \in \Omega_\varepsilon$. Uzmimo u toj jednakosti limes kada $\varepsilon \rightarrow 0$. Budući da je $\Delta u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, imamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega_\varepsilon} \Delta u(y) \psi_n(|x - y|) dV_y = \int_{\Omega} \Delta u(y) \psi_n(|x - y|) dV_y. \quad (4.94)$$

Prvi integral na desnoj strani od (4.93) ne zavisi od ε . Dalje imamo, uzimajući u obzir da je zapremina kugle $K(x, R)$ jednaka $\frac{|S_n|}{nR^n}$ i (4.86),

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) dS_y \right| \\ &= \left| \psi_n(\varepsilon) \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \frac{\partial u}{\partial \nu} dS_y \right| \leq |\psi_n(\varepsilon)| \int_{K(x, \varepsilon)} |\Delta u(y)| dV \\ &\leq \max_{\Omega} |\Delta u| |\psi_n(\varepsilon)| |K(x, \varepsilon)| = \begin{cases} \max_{\Omega} |\Delta u| \frac{\varepsilon^2}{n(n-2)}, & n > 2, \\ \frac{1}{2} \max_{\Omega} |\Delta u| |\ln \varepsilon| \varepsilon^2, & n = 2. \end{cases} \end{aligned}$$

Desna strana u posljednjoj jednakosti teži nuli kad $\varepsilon \rightarrow 0$, pa imamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) dS_y = 0. \quad (4.95)$$

Pomoću teorema o srednjoj vrijednosti u integralnom računu dobivamo

$$\begin{aligned} & \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y \\ &= -\psi'_n(\varepsilon) \int_{\partial K(x, \varepsilon)} u(y) dS = -\psi'_n(\varepsilon) u(y_\varepsilon) |\partial K(x, \varepsilon)|, \end{aligned}$$

gdje je y_ε neka tačka na $\partial K(x, \varepsilon)$. Uzimajući u obzir da je površina sfere $\partial K(x, R)$ jednaka $R^{n-1} |S_n|$, dobivamo

$$\int_{\partial K(x, \varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y = u(y_\varepsilon).$$

Zbog neprekidnosti, $u(y_\varepsilon) \rightarrow u(x)$ kad $\varepsilon \rightarrow 0$, pa imamo

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial K(x, \varepsilon)} \left(u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x - y|) \right) dS_y = u(x). \quad (4.96)$$

Iz (4.93), (4.94), (4.95) i (4.96) slijedi (4.92). $\square$

Definicija 4.4.3. Funkcija $G(x, y)$, $x, y \in \Omega$, $x \neq y$, je Greenova funkcija za Dirichletov problem ako za svako fiksno $y \in \Omega$ ima oblik

$$G(x, y) = \psi_n(|x - y|) + w(x, y), \quad y \in \Omega, \quad y \neq x, \quad (4.97)$$

4.4 Laplaceova jednačica

gdje je $w(x, y)$ harmonijska funkcija po y na Ω , neprekidna na $\bar{\Omega}$ i vrijedi

$$G(x, y) = 0, \quad y \in \partial\Omega. \quad (4.98)$$

Funkcija $w(x, y)$ očigledno zadovoljava uvjet

$$w(x, y) = -\psi_n(|x - y|), \quad y \in \partial\Omega.$$

Prema tome, za svako $x \in \Omega$ funkcija w je rješenje specijalnog Dirichletovog problema:

$$\Delta_y w(x, y) = 0, \quad y \in \Omega, \quad (4.99)$$

$$w(x, y) = -\psi_n(|x - y|), \quad y \in \partial\Omega. \quad (4.100)$$

Pomoću Greenove funkcije možemo riješiti opći Dirichletov problem.

Teorem 4.4.4. *Za $x \in \Omega$ neka je $w(x, \cdot) \in C^2(\bar{\Omega})$ rješenje Dirichletovog problema (4.99), (4.100) i neka je G definirana formulom (4.97). Tada za funkciju $u \in C^2(\bar{\Omega})$ vrijedi integralna reprezentacija*

$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) u(y) dS_y - \int_{\Omega} G(x, y) \Delta u(y) dV_y, \quad x \in \Omega. \quad (4.101)$$

Dokaz. Pomoću druge Greenove formule dobivamo

$$\int_{\Omega} \Delta u(y) w(x, y) dV_y = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} w(x, y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} w(x, y) \right) dS_y,$$

ili

$$0 = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} w(x, y) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} w(x, y) \right) dS_y - \int_{\Omega} \Delta u(y) w(x, y) dV_y.$$

Sabirajući tu jednakost sa reprezentacijom (4.92) i uzimajući u obzir (4.100), dobivamo (4.101). $\square$

Posljedica 4.4.4. *Ako je $u \in C^2(\bar{\Omega})$ rješenje Dirichletovog problema*

$$-\Delta u = f \quad \text{u } \Omega \quad \text{i} \quad u = g \quad \text{na } \Gamma, \quad (4.102)$$

onda je

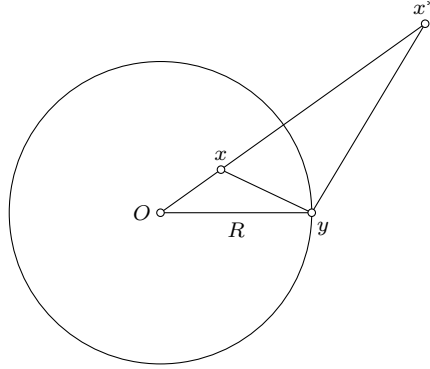
$$u(x) = - \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) g(y) dS_y + \int_{\Omega} G(x, y) f(y) dV_y. \quad (4.103)$$

Reprezentacija (4.103) predstavlja reprezentaciju rješenja problema (4.102) (uz pretpostavku da taj problem ima dovoljno regularno rješenje i da za oblast Ω postoji dovoljno regularna Greenova funkcija). Tim je rješenje općeg Dirichletovog problema (4.102) u oblasti Ω svedeno na određivanje Greenove funkcije te

4.4 Laplaceova jednadžba

oblasti, tj. na rješavanje specijalnog Dirichleovog problema (4.99)-(4.100). Valja napomenuti da ta činjenica nema bitno praktično značenje, jer za proizvoljno Ω opći i specijalni problem bitno se ne razlikuju. Ipak, ako je oblast Ω dovoljno simetrična i ako joj se granice sastoje od dijelova hiperravnina i sfere (pravaca i kružnica za $n = 2$), Greenovu funkciju možemo odrediti metodom zrcaljenja.

Primjer 4.4.3. Odrediti Greenovu funkciju za kuglu.



Slika 4.10: Greenova funkcija za kuglu.

Rješenje. Neka je x^* inverzna tačka u odnosu na sferu $\partial K(0, R)$

$$x^* = \frac{R^2}{|x|^2} x, \quad (4.104)$$

primijetimo da $x \in K(0, R)$, $x \neq 0$, povlači $x^* \notin K(0, R)$ i $|x^*| \rightarrow \infty$, $x \rightarrow 0$. Metoda zrcaljena zasniva se na ovoj činjenici: za $x \neq 0$, $x^* \notin \partial K(0, R)$, funkcije $y \rightarrow |x - y|$, $y \rightarrow |x^* - y|$, $y \in \partial K(0, R)$ su proporcionalne. To slijedi iz sličnosti trouglova Oxy i Ox^*y : Oni imaju zajednički ugao sa vrhom u O , a iz (4.104) dobivamo

$$\frac{|x^*|}{R} = \frac{R}{|x|},$$

tj. proporcionalnost stranica koje zatvaraju taj ugao. Zato je

$$\frac{|x^* - y|}{|x - y|} = \frac{R}{|x|},$$

ili

$$|x - y| = \frac{|x|}{R} |x^* - y|.$$

Za $x \neq 0$, $y \in \partial K(0, R)$, iz tog slijedi

$$\psi_n(|x - y|) = \psi_n\left(\frac{|x|}{R} |x^* - y|\right),$$

4.4 Laplaceova jednadžba

ili

$$\psi_n(|x - y|) - \psi_n\left(\frac{|x|}{R} |x^* - y|\right) = 0. \quad (4.105)$$

S druge strane, za $x \in K(0, R)$, $x \neq 0$, vrijedi $\Delta_y \psi_n\left(\frac{|x|}{R} |x^* - y|\right) = 0$ za $y \in K(0, R)$ (jer $x^* \notin K(0, R)$). Uzimajući u obzir (4.97), (4.98), zaključujemo da je lijeva strana od (4.105) predstavlja Greenovu funkciju za kuglu $K(0, R)$:

$$G(x, y) = \psi_n(|x - y|) - \psi_n\left(\frac{|x|}{R} |x^* - y|\right), \quad x \neq 0. \quad (4.106)$$

Dalje, imamo

$$\begin{aligned} \frac{|x|}{R} |x^* - y| &= \frac{|x|}{R} \left(R^2 \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 + |y|^2 - 2 \left(\frac{R}{|x|} \right)^2 x \cdot y \right)^{1/2} \\ &= \left(R^2 + \left(\frac{|x| |y|}{R} \right)^2 - 2x \cdot y \right)^{1/2}, \end{aligned}$$

a to je dobro definirano i za $x = 0$. Prema tome, imamo

$$G(x, y) = \psi_n(|x - y|) - \psi_n\left(\left(R^2 + \left(\frac{|x| |y|}{R} \right)^2 - 2x \cdot y \right)^{1/2} \right). \quad (4.107)$$

Funkcija (4.107) je simetrična i nenegativna:

$$\begin{aligned} G(x, y) &= G(y, x), \\ G(x, y) &\geq 0, \end{aligned}$$

za $x, y \in \overline{K}(0, R)$, $x \neq y$. Može se pokazati da to svojstvo ima i Greenova funkcija za proizvoljnu oblast Ω . $\blacklozenj$

Reprezentacija (4.101) za kuglu ima teorijsko značenje. Vanjska normala na $\partial K(0, R)$ je $\nu(y) = y/R$, pa iz (4.107), uzimajući u obzir da je

$$\psi'_n(r) = -\frac{1}{|S_n|} \frac{1}{r^{n-1}},$$

dobivamo

$$-\frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S_n| R |x - y|^n}, \quad x \in K(0, R), \quad y \in \partial K(0, R). \quad (4.108)$$

Zaista, koristeći (4.106), imamo,

$$\frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) = \frac{\partial}{\partial y_i} \psi_n(|x - y|) - \frac{\partial}{\partial y_i} \psi_n\left(\frac{|x|}{R} |x^* - y|\right).$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \psi_n(|x - y|) = \frac{1}{|S_n|} \frac{x_i - y_i}{|x - y|^n}$$

i

$$\frac{\partial}{\partial y_i} \psi_n\left(\frac{|x|}{R}|x^* - y|\right) = \frac{1}{|S_n|} \frac{R^2 x_i - |x|^2 y_i}{R^2 \left(\frac{|x|}{R}|x^* - y|\right)^n} = \frac{1}{|S_n|} \frac{R^2 x_i - |x|^2 y_i}{R^2 |x - y|^n}$$

za $y \in \partial K(x, R)$, to imamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \nu} G(x, y) &= \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{R} \frac{\partial}{\partial y_i} G(x, y) \\ &= \frac{-1}{R|S_n|} \frac{1}{|x - y|^n} \sum_{i=1}^n y_i \left(y_i - x_i - \frac{|x|^2 y_i - R^2 x_i}{R^2} \right) \\ &= \frac{-1}{R|S_n|} \frac{R^2 - |x|^2}{|x - y|^n}. \end{aligned}$$

Funkcija (4.108) se zove Poissonovo jezgro; označavaćemo je sa $\mathcal{K}(x, y)$:

$$\mathcal{K}(x, y) = \frac{R^2 - |x|^2}{|S_n| R |x - y|^n}, \quad x \in K(0, R), \quad y \in \partial K(0, R).$$

Posljedica 4.4.5. *Ako je $u \in \mathcal{C}^2(\overline{K(0, R)})$ i $\Delta u = 0$ u $K(0, R)$, onda vrijedi reprezentacija (Poissonova formula)*

$$u(x) = \int_{\partial K(0, R)} \mathcal{K}(x, y) u(y) dS_y, \quad x \in K(0, R).$$

Jezgro $\mathcal{K}$ ima ova svojstva

$$\begin{aligned} \Delta_x \mathcal{K}(x, y) &= 0 \quad \text{za } x \in K(0, R), \quad y \in \partial K(0, R), \\ \mathcal{K}(x, y) &\geq 0 \quad \text{za } x \in K(0, R), \quad y \neq x, \\ \int_{\partial K(0, R)} \mathcal{K}(x, y) dS_y &= 1 \quad \text{za } x \in K(0, R). \end{aligned} \tag{4.109}$$

Posljednje svojstvo slijedi iz (4.4.5) stavljajući $u = 1$.

Dokazat ćemo da formula (4.4.5) daje rješenje Dirichletovog problema (za kuglu) klase $\mathcal{C}(\overline{K(0, R)})$. Jedinstvenost takvog rješenja smo već dokazali.

Teorem 4.4.5. *Neka je funkcija g neprekidna na $\partial K(0, R)$. Tada funkcija*

$$u(x) = \int_{\partial K(0, R)} \mathcal{K}(x, y) g(y) dS_y \tag{4.110}$$

zadovoljava u kugli $K(0, R)$ jednadžbu

$$\Delta u = 0, \tag{4.111}$$

i za svako $x' \in \partial K(0, R)$ uvjet

$$\lim_{x \rightarrow x'} u(x) = g(x'), \quad (x \in K(0, R)). \tag{4.112}$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Dokaz. Jednakost (4.111) slijedi iz prve jednakosti u (4.109). Za $\varepsilon > 0$ neka je $\delta > 0$ takvo da $y, x' \in \partial K(0, R)$, $|y - x'| < \delta$ povlači $|g(y) - g(x')| < \varepsilon/2$. Neka je $|g(y)| \leq C$, ($C > 0$) za svako $y \in \partial K(0, R)$. Koristeći posljednje dvije jednakosti u (4.109), za $x \in K(0, R)$, $x' \in \partial K(0, R)$ dobivamo procjenu

$$\begin{aligned} |u(x) - g(x')| &\leq \int_{|y-x'| < \delta} \mathcal{K}(x, y) |g(y) - g(x')| dS_y \\ &\quad + \int_{|y-x'| > \delta} \mathcal{K}(x, y) |g(y) - g(x')| dS_y \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \frac{R^2 - |x|^2}{|S_n| R} \int_{|y-x'| > \delta} \frac{dS_y}{|x - y|^n}. \end{aligned} \quad (4.113)$$

Za $|y - x'| > \delta$ i $|x - x'| < \delta/2$ imamo

$$\begin{aligned} |x - y| &= |(x - x') - (y - x')| \geq \left| |x - x'| - |y - x'| \right| \\ &= |y - x'| - |x - x'| \geq \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}, \\ \frac{1}{|x - y|^n} &\leq \frac{1}{(\delta/2)^n}. \end{aligned}$$

Iz ovog i (4.113) slijedi

$$|u(x) - g(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2C \frac{R^2 - |x|^2}{(\delta/2)^n} R^{n-2},$$

pa za dovoljno malo $\delta_1 > 0$ i $|x - x'| \leq \delta_1$, drugi član na desnoj strani je manji od $\varepsilon/2$, pa za $|x - x'| \leq \min(\delta/2, \delta_1)$ imamo $|u(x) - g(x')| \leq \varepsilon$. $\square$

Primjedba 4.4.1. Iz gornjeg dokaza vidi se da je svojstvo (4.112) lokalno; drugim riječima, ako g ima prekide, rubni uvjet je zadovoljen u svakoj tački neprekidnosti funkcije g . Zato ima smisla posmatrati Dirichletov problem ako je g po dijelovima neprekidna funkcija. Funkcija (4.110) predstavlja tada generalizirano rješenje.

Primjer 4.4.4. Neka je

$$H_1^+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0\}$$

gornji poluprostor, a

$$H_1^0 = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = 0\}$$

razdvajajuća hiperravn. Preslikavanje

$$R_1(x) = (-x_1, x_2, \dots, x_n)$$

nazivamo *zrcaljenjem u ravni* H_1^0 .

4.4 Laplaceova jednadžba

- (a) **Princip refleksije za harmonijske funkcije.** Neka je $u \in \mathcal{C}^2(H_1^+)$ harmonijska funkcija koja iščezava na H_1^0 . Pokažite da je funkcija $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, definirana refleksijom

$$v(x) = \begin{cases} u(x), & x_1 \geq 0, \\ -u(R_1(x)), & x_1 < 0, \end{cases}$$

harmonijska.

- (b) **Greenova funkcija za poluprstor.** Pokažite da je Greenova funkcija za H_1^+ data formulom

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(R_1(x) - y).$$

- (c) **Greenova funkcija za poluloptu.** Odredite Greenovu funkciju za poluloptu B^+ .

Rješenje.

- (a) Pokažimo kako možemo riješiti (a). Mogli bismo pokušati direktno pokazati da je funkcija v harmonijska. To je kada je $x_1 \neq 0$, a potrebne izvode je moguće izračunati i u tačkama gdje je $x_1 = 0$. Međutim, postoji općenitija metoda koja koristi jedinstvenost rješenja Dirichletovog problema na lopti. Fiksirajmo proizvoljan poluprečnik $r > 0$ i posmatrajmo loptu B_r . Neka je $g = v|_{\partial B_r}$ restrikcija funkcije v na sferu ∂B_r . Funkcija g je neprekidna, posebno u tačkama gdje je $x_1 = 0$. Postoji jedinstveno rješenje $\tilde{v}$ Laplaceove jednadžbe $\Delta \tilde{v} = 0$ sa rubnim uvjetom $\tilde{v}|_{\partial B_r} = g$. Primijetimo da je funkcija $-\tilde{v} \circ R_1$ također rješenje ove jednadžbe, pa zbog jedinstvenosti mora vrijediti $\tilde{v} = -\tilde{v} \circ R_1$. Iz toga slijedi da $\tilde{v}$ iščezava na skupu $B_r \cap H_1^0$. Sada posmatrajmo funkciju $\tilde{v} - u$. Ona je također harmonijska na skupu $B_r \cap H_1^+$, a osim toga identički je jednaka nuli na granici $\partial(B_r \cap H_1^+)$. Prema principu maksimuma, funkcija $\tilde{v} - u$ mora biti jednaka nuli na cijelom skupu $B_r \cap H_1^+$. Dakle, vrijedi $\tilde{v} = u$ na $B_r \cap H_1^+$, a refleksijom dobivamo da je $\tilde{v} = v$ na cijeloj lopti B_r . Kako je $r > 0$ bilo proizvoljno, puštanjem da r raste zaključujemo da ova jednakost vrijedi u cijelom prostoru.
- (b) Neka je Φ fundamentalno rješenje Laplaceove jednadžbe, a $G(x, y)$ Greenova funkcija za poluprstor H_1^+ . Sljedeća svojstva trebaju da vrijede
- (1) za svako $x \in H_1^+$ funkcija $G(x, y) - \Phi(x - y)$ je harmonijska funkcija po varijabli y ;
 - (2) za svako $x \in H_1^+$ vrijedi

$$\lim_{y \rightarrow H_1^0} G(x, y) = 0.$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Vidjeli smo da je u slučaju jedinične lopte Greenova funkcija data kao razlika fundamentalnog rješenja i njegovog zrcaljenja preko granice lopte. Na taj način se ova dva člana poništavaju na granici i time se dobiva drugo svojstvo. Imajući ovo u vidu, stvaimo da je

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(R_1(x) - y).$$

Prvo svojstvo je zadovoljeno jer funkcija $\Phi(R_1(x) - y)$ nije harmonijska jedino u tački $y = R_1(x)$, a za $x \in H_1^+$ to se može desiti samo ako je $y \in H_1^-$. Da bismo pokazali drugo svojstvo, primijetimo da je funkcija $\Phi(z)$ radijalno simetrična. Kako vrijedi

$$\|R_1(x) - y\| = \|x - R_1(y)\|,$$

za svako $y \in H_1^0$ dobivamo

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(x - R_1(y)) = \Phi(x - y) - \Phi(x - y) = 0.$$

Time smo pokazali da je G Greenova funkcija za poluprstor H_1^+ .

- (c) Da bismo govorili o Greenovoj funkciji za poluloptu, uvedimo sljedeću oznaku za inverziju u sferi,

$$\iota(x) := |x|^{-2}x.$$

Znamo da je Greenova funkcija za loptu data formulom

$$G_B(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\iota(x) - y)).$$

Sada, pretpostavljamo da se Greenova funkcija za poluloptu može dobiti refleksijom ovog izraza, odnosno

$$G(x, y) = \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\iota(x) - y)) - \Phi(R(x) - y) + \Phi(|x|(\iota(R(x)) - y)).$$

Ako su $x, y \in B^+$, tada izrazi $\iota(x) - y$, $R(x) - y$ i $|x|(\iota(R(x)) - y)$ nikada nisu jednaki nuli, pa je funkcija $G(x, y) - \Phi(x - y)$ harmonijska. Granica polulopte B^+ sastoji se iz dva dijela: $\overline{B^0}$ i $\partial B^+ \cap H^+$. Ako je $y \in B^0$, tada vrijedi

$$\begin{aligned} G(x, y) &= \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\iota(x) - y)) - \Phi(x - R(y)) + \Phi(|x|(\iota(R(x)) - y)) \\ &= \Phi(x - y) - \Phi(|x|(\iota(x) - y)) - \Phi(x - y) + \Phi(|x|(\iota(x) - y)) = 0. \end{aligned}$$

S druge strane, ako je $y \in \partial B^+ \cap H^+$, odnosno ako y leži na hemisferičnom dijelu granice, tada vrijedi

$$\| |x|(\iota(x) - y) \| = \|x - y\|, \quad \| |x|(\iota(R(x)) - y) \| = \|R(x) - y\|.$$

Otuda slijedi

$$G(x, y) = [\Phi(x - y) - \Phi(|x|(\iota(x) - y))] - [\Phi(R(x) - y) - \Phi(|x|(\iota(R(x)) - y))] = 0.$$

◆

4.4.3 Harmonijske funkcije

Kao što smo već rekli funkcija u je harmonijska na (ili u) otvorenom skupu $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^n$, ako je $u \in \mathcal{C}^2(\mathcal{O})$ i $\Delta u = 0$ u $\mathcal{O}$.

Harmonijske funkcije imaju važne osobine. Navest ćemo ovdje neke od njih, ne ulazeći u teoriju ovih funkcije, jer bi to izlazilo iz okvira ove knjige.

Na osnovu Teorema 4.4.3, za funkciju $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ vrijedi integralna reprezentacija

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) \right) dS_y - \int_{\Omega} \Delta u(y) \psi_n(|x-y|) dV_y, \quad x \in \Omega.$$

Ako je $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ harmonijska funkcija tada je $\Delta u = 0$ na Ω pa je

$$u(x) = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) \right) dS_y. \quad (4.114)$$

Sada ćemo navesti interesantan teorem o srednjoj vrijednosti, koji tvrdi da je srednja vrijednost harmonijske funkcije na sferi jednaka njenoj vrijednosti u centru sfere. Može se pokazati da ako neka neprekidna funkcija ima svojstvo srednje vrijednosti, onda ona mora biti harmonijska. To je obrat teorema o srednjoj vrijednosti.

Teorem 4.4.6. *Neka je $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otvoren skup. Ako je funkcija u harmonijska na Ω , onda za svako $x \in \Omega$ i za svaku kuglu $K(x, R) \subset \Omega$ vrijede formule (svojstva srednje vrijednosti):*

$$u(x) = \frac{1}{R^{n-1}|S_n|} \int_{\partial K(x, R)} u(y) dS_y, \quad (4.115)$$

$$u(x) = \frac{n}{R^n|S_n|} \int_{K(x, R)} u(y) dV_y. \quad (4.116)$$

Dokaz. Na osnovu (4.114), za $\Omega = K(x, R)$ imamo da je

$$u(x) = \int_{\partial K(x, R)} \left(\frac{\partial u(y)}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) - u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) \right) dS_y.$$

Identično kao u dokazu Teorema 4.4.3 imamo da je prvi član u gornjem integralu jednak nuli. Kako je spoljašnja normala na $\partial K(x, R)$ data sa

$$\nu(y) = \frac{y-x}{|y-x|},$$

4.4 Laplaceova jednadžba

to je

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) &= \mathbf{grad}_y \psi_n(|x-y|) \cdot \nu(y) \\ &= \frac{1}{|S_n|} \frac{1}{|x-y|^n} (x-y) \cdot \frac{1}{|x-y|} (y-x) \\ &= -\frac{1}{|S_n|} \frac{1}{|x-y|^{n-1}}.\end{aligned}$$

Oдавde je

$$\begin{aligned}u(x) &= - \int_{\partial K(x,R)} u(y) \frac{\partial}{\partial \nu} \psi_n(|x-y|) dS_y \\ &= \frac{1}{|S_n|} \int_{\partial K(x,R)} \frac{1}{|x-y|^{n-1}} \\ &= \frac{1}{|S_n| R^{n-1}} \int_{\partial K(x,R)} u(y) dS_y,\end{aligned}$$

pa vidimo da vrijedi formula (4.115). Ako je $0 < r \leq R$, na osnovu rečenog dobivamo da je

$$u(x) = \frac{1}{r^{n-1}|S_n|} \int_{\partial K(x,r)} u(y) dS_y.$$

Množeći ovo sa r^{n-1} i integriranjem po r dobivamo

$$\int_0^R r^{n-1} u(x) dr = \frac{1}{|S_n|} \int_0^R dr \int_{\partial K(x,r)} u(y) dS_y.$$

Kako je

$$\int_0^R dr \int_{\partial K(x,r)} u(y) dS_y = \int_{K(x,R)} u(y) dV_y$$

i

$$\int_0^R r^{n-1} u(x) dr = \frac{R^n}{n} u(x),$$

dobivamo formulu 4.116. □

Teorem 4.4.7. *Ako je u harmonijska funkcija na otvorenom slupu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ i različita od konstante, onda ona na skupu Ω nema ekstrem.*

Dokaz. Ako funkcija u prima u nekoj tački minimum, onda funkcija $(-u)$ prima u toj tački maksimum. Zato je dovoljno posmatrati slučaj maksimuma. Neka je

$$\begin{aligned}M &= \sup_{x \in \Omega} u(x) \in \mathbb{R}, \\ \Omega_M &= \{x \in \Omega : u(x) = M\}.\end{aligned}$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Pretpostavimo da je Ω_M neprazan skup. Zbog neprekidnosti funkcije u , skup Ω_M je zatvoren u Ω . Ako niz $x^{(k)} \in \Omega_M$ teži tački $x^{(0)} \in \Omega$, onda je

$$u(x^{(0)}) = \lim_{k \rightarrow \infty} u(x^{(k)}) = M,$$

pa $x^{(0)} \in \Omega_M$. Neka $x \in \Omega_M$ i $K(x, R) \subset \Omega$. Na osnovu teorema o srednjoj vrijednosti za harmonijsku funkciju $M - u$ vrijedi

$$0 = M - u(x) = \frac{n}{R^n |S_n|} \int_{K(x, R)} (M - u(y)) dV_y.$$

Kako je $M \geq u(y)$ to je $M = u(y)$ za svako $y \in K(x, R)$, odakle imamo da je $K(x, R) \subset \Omega_M$. Dakle, Ω_M je i otvoren skup, pa je $\Omega_M = \Omega$. To znači da je u konstantna, što je suprotno pretpostavci, pa zaključujemo da je Ω_M prazan skup. $\square$

Posljedica ovog teorema je sljedeći princip maksimuma.

Teorem 4.4.8 (Princip maksimuma). *Ako je funkcija $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ harmonijska u oblasti Ω , ona svoje ekstreme prima na $\Gamma = \partial\Omega$; drugim riječima, za svako $x \in \bar{\Omega}$ vrijedi*

$$\min_{\Gamma} u \leq u(x) \leq \max_{\Gamma} u.$$

4.4.4 Fourierova metoda

Riješimo prvo sljedeći zadatak.

Primjer 4.4.5. Odrediti formalno rješenje ovog Dirichletovog problema za pravougaonik $P = (0, a) \times (0, b)$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (4.117)$$

$$u(0, y) = u(x, b) = u(a, y) = 0 \quad \text{za} \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b, \quad (4.118)$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq a. \quad (4.119)$$

Rješenje. Odredimo rješenja jednadžbe (4.117) koja su separiranog oblika

$$u(x, y) = X(x)Y(y).$$

dobivamo

$$X''(x)Y(y) + X(x)Y''(y) = 0,$$

ili

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\lambda,$$

4.4 Laplaceova jednadžba

gdje je $\lambda = \text{const.}$ Imamo jednadžbe

$$X'' + \lambda X = 0, \quad (4.120)$$

$$Y'' - \lambda Y = 0. \quad (4.121)$$

Rubni uvjeti (4.118) daju

$$X(0) = X(a) = 0, \quad (4.122)$$

$$Y(b) = 0. \quad (4.123)$$

Svojstvene vrijednosti problema (4.120), (4.122) su $\lambda_n = (n\pi/a)^2$, a svojstvene funkcije

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a}.$$

Svako rješenje problema (4.121), (4.123) (za $\lambda = \lambda_n$) je oblika

$$Y_n(y) = A_n \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a},$$

gdje je A_n konstanta. Rješenje postavljenog problema tražimo u obliku

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}. \quad (4.124)$$

Uvjet (4.119) daje

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}.$$

Iz tog slijedi da je $A_n \sinh(n\pi b/a)$ Fourierov koeficijent funkcije f , razvijene po sinusima. Prema tome je

$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx. \quad (4.125)$$

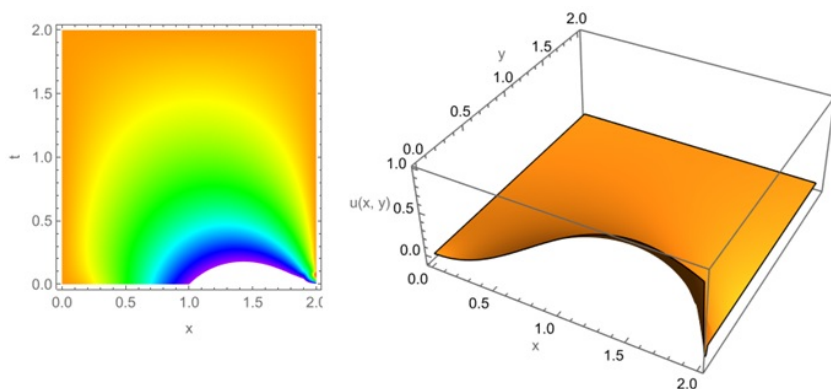
Formalno rješenje je dato formulama (4.124) i (4.125). Stavimo da je

$$A_n^* = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx.$$

tad (4.124) možemo napisati u obliku

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}. \quad (4.126)$$

4.4 Laplaceova jednačba



Slika 4.11: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, 2]$, $y \in [0, 2]$ iz Primjera 4.4.5 za $f(x) = \sin^2(x)$.



Sada ćemo dokazati teorem koji govori o konvergenciji formalnog rješenja.

Teorem 4.4.9. *Neka je $f(x)$ neprekidna diferencijabilna funkcija na $[0, a]$ i $f''(x)$ po dijelovima neprekidna i $f(0) = f(a) = 0$. Tada, red (4.126) predstavlja jedinstveno rješenje $u(x, y)$ problema (4.119). Funkcija $u(x, y)$ zajedno sa parcijalnim izvodima $\frac{\partial u}{\partial x}$ i $\frac{\partial u}{\partial y}$, data redom (4.126), je neprekidna na pravougaoniku*

$0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, dok su funkcije $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ neprekidne na pravougaoniku $0 \leq x \leq a$, $0 < y \leq b$.

Dokaz. Jedinstvenost rješenja je već pokazana za Dirichletov problem. Dovoljno je pokazati da je funkcija $u(x, y)$ data sa (4.126) rješenje. Na osnovu pretpostavke o funkciji f iz teorije Fourierovih redova znamo da je

$$u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a}$$

i da ovaj red konvergira uniformno po x . Posmatrajmo sada funkciju

$$R_n(y) = \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

Jasno je da je $0 \leq R_n(y) \leq 1$ za svako n i $0 \leq y \leq b$, tj. ove funkcije su uniformno ograničene. Tvrđimo da je za $0 \leq y \leq b$ niz funkcija $\{R_n(y)\}$ nerastući. Ovo je očigledno tačno ako je $y = 0$ ili $y = b$, a za $0 < y < b$ dovoljno je dokazati da je funkcija

$$S(s) = \frac{\sinh qs}{\sinh ps}$$

4.4 Laplaceova jednadžba

gdje je $p > q > 0$ opadajuća funkcija za $s > 0$. Kako je

$$\begin{aligned} 2S'(x) \sinh^2 ps &= 2q \sinh ps \cosh qs - 2p \sinh qs \cosh ps \\ &= -(p-q) \sinh(p+q)s + (p+q) \sinh(p-q)s \\ &= -(p^2 - q^2) \left[\frac{\sinh(p+q)s}{p+q} - \frac{\sinh(p-q)s}{p-q} \right] \\ &= -(p^2 - q^2) \sum_{n=0}^{\infty} [(p+q)^{2n} - (p-q)^{2n}] \frac{s^{2n+1}}{(2n+1)!}, \end{aligned}$$

to imamo da je $S'(s) < 0$ pa je $S(s)$ opadajuća funkcija za $s > 0$. Kako Fourierov red po sinusima funkcije $f(x)$ uniformno konvergira na osnovu Abelovog testa za uniformnu konvergenciju, dobivamo da red na desnoj strani od (4.126) konvergira uniformno ka funkciji $u(x, y)$ u odnosu na x i y na pravougaoniku $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, pri čemu je $u(x, y)$ neprekidna funkcija.

Iz teorije Fourierovih redova, na osnovu pretpostavke o funkciji $f'(x)$, imamo da Fourierov red po kosinusima

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

dobiven formalnim diferenciranjem reda po sinusima u razvoju funkcije $f(x)$, konvergira uniformno za $0 \leq x \leq a$ ka $f'(x)$. Na osnovu Abelovog teorema o uniformnoj konvergenciji dobivamo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{n\pi}{a} \frac{\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \cos \frac{n\pi x}{a}$$

konvergira uniformno ka $u_x(x, y)$ na zatvorenom pravougaoniku $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Kako je to red neprekidnih funkcija, to je i funkcija $u_x(x, y)$ neprekidna funkcija na tom pravougaoniku.

Kako je $f(x)$ neprekidno diferencijabilna funkcija i $f''(x)$ po dijelovima neprekidna, to red

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{n\pi x}{a}$$

koji se dobije dva puta diferenciranjem član po član po x reda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \sin \frac{n\pi x}{a}$$

konvergira apsolutno i uniformno za $0 \leq x \leq a$. Na osnovu Besselove nejednakosti primjenjene na funkciju $f''(x)$ znamo da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| A_n^* \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 \right|^2 < \infty.$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Kako je prema Cauchy-Schwarzovoj nejednakosti

$$\rho_n = \sum_{k=1}^n \left| A_k^* \left(\frac{k\pi}{a} \right) \right|^2 \frac{1}{k} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n \left| A_k^* \left(\frac{k\pi}{a} \right) \right|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} < \infty$$

za svako n , to je $\{\rho_n\}$ ograničen niz, pa kako je i monotono rastući, to je on i konvergentan, tj.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| A_k^* \frac{k\pi^2}{a^2} \right| < \infty,$$

odakle slijedi da je

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| A_k^* \frac{k\pi}{a} \right| < \infty,$$

pa je dati numerički red konvergentan.

Na osnovu Weierstrassovog testa apsolutne i uniformne konvergencije imamo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{n\pi}{a} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

konvergira apsolutno i uniformno za $0 \leq x \leq a$.

Stavimo da je

$$\bar{R}_n(y) = \frac{\cosh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}}.$$

Slično kao za $R_n(y)$ može se pokazati da je $\bar{R}_n(y)$ nerastući niz za $0 \leq y \leq b$. Iz činjenice da je

$$\bar{R}_n^2(y) = \frac{1}{\sinh^2 \frac{n\pi b}{a}} + R_n^2(y),$$

imamo da je $\bar{R}_n(y)$ uniformno ograničen niz. Na osnovu Abelovog testa uniformne konvergencije red

$$- \sum_{n=1}^{\infty} A_n^* \frac{n\pi}{a} \frac{\cosh \frac{n\pi(b-y)}{a}}{\sinh \frac{n\pi b}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a}$$

konvergira uniformno ka $u_y(x, y)$ na zatvorenom pravougaoniku $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$. Kako je to red neprekidnih funkcija, to je i funkcija $u_y(x, y)$ neprekidna funkcija na tom pravougaoniku.

Konačno, kako je $|A_n^*| \leq C$, i kako za $0 \leq y \leq b$ vrijedi

$$\sinh \frac{n\pi(b-y)}{a} < \frac{1}{2} e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}}, \quad \sinh \frac{n\pi b}{a} \geq \frac{1}{2} e^{\frac{n\pi b}{a}} (1 - e^{-2\pi b/a}),$$

4.4 Laplaceova jednadžba

to članovi reda koji se dobije diferenciranjem dva puta reda (4.126) po x i y član po član, su po apsolutnoj vrijednosti manji od

$$C \left(\frac{n\pi b}{a} \right)^2 \frac{\frac{1}{2} e^{\frac{n\pi(b-y)}{a}}}{\frac{1}{2} e^{\frac{n\pi b}{a}} (1 - e^{-2\pi b/a})} = C \left(\frac{n\pi b}{a} \right)^2 \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{(1 - e^{-2\pi b/a})}.$$

Na osnovu D'Alembertovog testa imamo da red

$$\sum_{n=1}^{\infty} C \left(\frac{n\pi b}{a} \right)^2 \frac{e^{-\frac{n\pi y}{a}}}{(1 - e^{-2\pi b/a})}$$

konvergira za $0 < y_0 \leq b$, pa red koji se dobije diferenciranjem dva puta reda (4.126) po x i y , član po član, uniformno konvergira ka funkcijama $u_{xx}(x, y)$ i $u_{yy}(x, y)$ za $0 \leq x \leq a$, $0 < y \leq b$, koje su također neprekidne na tom pravougaoniku. $\square$

Primjer 4.4.6. Odrediti formalno rješenje sljedećeg Dirichletovog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(x, b) = g(x), \quad x \in [0, a], \\ u(0, y) &= h(y), \quad u(a, y) = k(y), \quad y \in [0, b]. \end{aligned}$$

Rješenje. Ovaj problem možemo razbiti na četiri potproblema istog tipa kao u prethodnom zadatku, pri čemo u svakom od tih potproblema zadržimo jedan rubni uvjet, a ostale postavimo na nulu. Na taj način ćemo dobiti četiri funkcije čiji zbir će biti rješenje navedenog mješovitog problema, tj.

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a} + B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi y}{a} \\ &\quad + C_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi(a-x)}{b} + D_n \sin \frac{n\pi y}{b} \sinh \frac{n\pi x}{b}, \end{aligned}$$

gdje su konstante A_n , B_n , C_n i D_n definirane sa

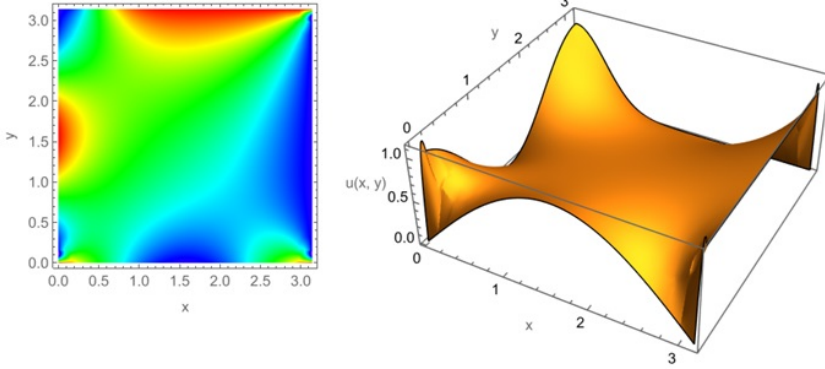
$$A_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx,$$

$$B_n = \frac{2}{a \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a g(x) \sin \frac{n\pi x}{a} dx,$$

$$C_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b h(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy,$$

4.4 Laplaceova jednadžba

$$D_n = \frac{2}{b \sinh \frac{n\pi a}{b}} \int_0^b k(y) \sin \frac{n\pi y}{b} dy.$$



Slika 4.12: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$ iz Primjera 4.4.6 za $f(x) = \sin x$, $g(x) = e^{-3x^2}$, $h(y) = \cos^2 y$ i $k(y) = 1$.

◆

Primjer 4.4.7. Naći formalno rješenje sljedećeg Neumannovog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, b) = 0, \quad x \in [0, a], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0, \quad y \in [0, b]. \end{aligned}$$

Rješenje. Ako pretpostavimo da je rješenje oblika $u(x, y) = X(x)Y(y)$, tada na osnovu datih rubnih uvjeta imamo

$$X'(0) = X'(a) = Y'(b) = 0,$$

pa se jednostavno vidi da X_n i Y_n postaju

$$X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{a}, \quad Y_n(y) = A_n \cosh \frac{n\pi(b-y)}{a},$$

gdje je A_n konstanta. Rješenje postavljenog problema tražimo u obliku linearne kombinacije

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cosh \frac{n\pi(b-y)}{a}.$$

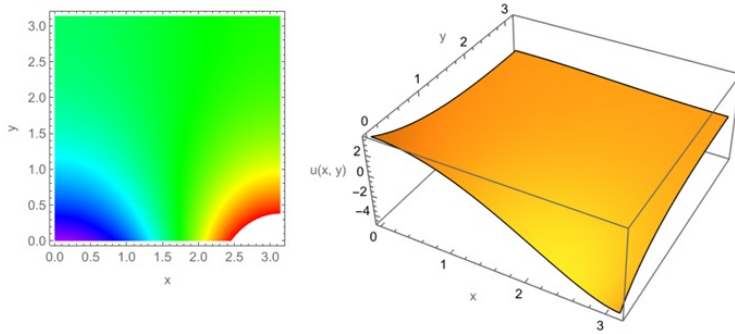
4.4 Laplaceova jednačba

Kako je

$$f(x) = \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) = - \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{n\pi}{a} \cos \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a},$$

slijedi da je $-A_n \frac{n\pi}{a} \sinh \frac{n\pi b}{a}$ Fourierov koeficijent funkcije f , razvijene po kosinusima. Prema tome je

$$A_n = - \frac{2}{n\pi \sinh \frac{n\pi b}{a}} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx.$$



Slika 4.13: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, y)$, $x \in [0, \pi]$, $y \in [0, \pi]$ iz Primjera 4.4.7 za $f(x) = x^2$.



Primjer 4.4.8. Neka je dat sljedeći Dirichletov problem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, c), \\ u(x, y, 0) &= f(x, y), \quad u(x, y, c) = g(x, y), \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \\ u(0, y, z) &= u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c], \\ u(x, 0, z) &= u(x, b, z) = 0, \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]. \end{aligned}$$

Rješenje. Odredimo rješenja u obliku proizvoda $u(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$. Laplaceova jednačba za funkciju $u(x, z) = X(x)Y(y)Z(z)$ postaje

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} = 0,$$

odakle je

$$\frac{X''}{X} = \lambda_1, \tag{4.127}$$

4.4 Laplaceova jednadžba

$$\frac{Y''}{Y} = \lambda_2, \quad (4.128)$$

$$\frac{Z''}{Z} = -\lambda_1 - \lambda_2. \quad (4.129)$$

Prema rubnim uvjetima imamo

$$X(0) = X(a) = Y(0) = Y(b) = 0.$$

To povlači da je $\lambda_1 = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$, a $\lambda_2 = -\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$, za neke prirodne brojeve m i n , pa su rješenja jednadžbe (4.127) oblika

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{a},$$

a rješenja jednadžbe (4.128) oblika

$$Y_m(y) = \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

Prema tome, rješenja jednadžbe (4.129) su oblika

$$Z_{n,m}(z) = \frac{1}{\sinh(c\sqrt{\lambda_{n,m}})} \left(a_{n,m} \sinh\left((c-z)\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) + b_{n,m} \sinh\left(z\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) \right),$$

gdje je

$$\lambda_{n,m}^2 = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2.$$

Formalno rješenje je onda dato sa

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} \frac{1}{\sinh(c\sqrt{\lambda_{n,m}})} \left(a_{n,m} \sinh\left((c-z)\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) + b_{n,m} \sinh\left(z\sqrt{\lambda_{n,m}}\right) \right) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}.$$

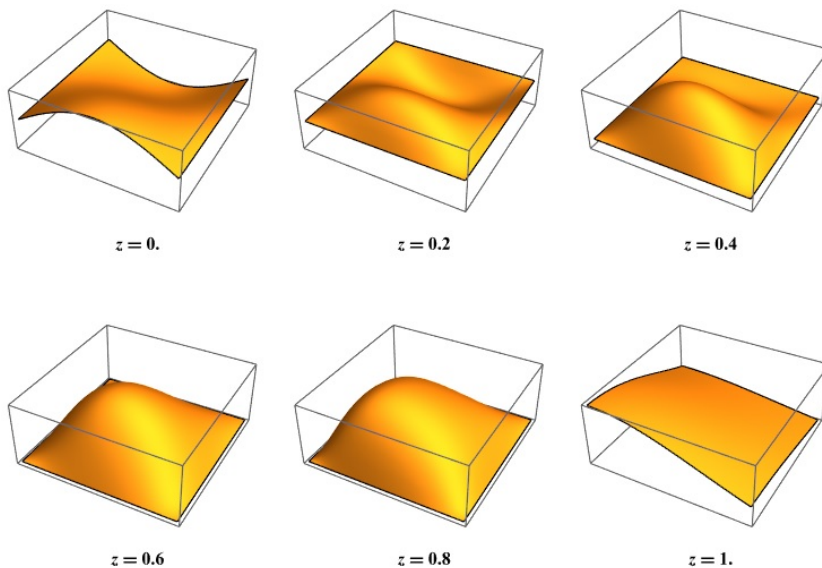
Iz

$$f(x, y) = u(x, y, 0) = \sum_{n,m} a_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

$$g(x, y) = u(x, y, c) = \sum_{n,m} b_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b},$$

slijedi da su $a_{n,m}$ i $b_{n,m}$ Fourierovi koeficijenti funkcija f i g .

4.4 Laplaceova jednačba



Slika 4.14: Grafik funkcije $u = u(x, y, z)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, $z \in [0, 1]$, iz Primjera 4.4.8 za $f(x, y) = \sin \pi x \cos \pi y$ i $g(x, y) = e^{-x^2-y^2}$.

◆

Razmotrimo sada Dirichletov problem u polarnim koordinatama. Posmatrajmo smjene $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. Ako je funkcija $U(r, \theta)$ definirana sa

$$U(r, \theta) = u(x, y),$$

onda ćemo imati

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2r^2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ &\quad + r^2 \cos^2 \theta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - r \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned}$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Tada,

$$\begin{aligned} r^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - r^{-1} \cos \theta \frac{\partial u}{\partial x} - r^{-1} \sin \theta \frac{\partial u}{\partial y} \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0 \Leftrightarrow r^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} = 0.$$

Dirichletov problem u polarnim koordinatama postaje onda

$$\begin{aligned} r^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, r_1 < r < r_2, \\ U(r_2, \theta) &= f(\theta), f(\theta + 2\pi) = f(\theta), \\ U(r_1, \theta) &= g(\theta), g(\theta + 2\pi) = g(\theta). \end{aligned}$$

Ako je funkcija $U(r, \theta)$ oblika $U(r, \theta) = R(r)T(\theta)$, prethodna jednadžba postaje

$$\begin{aligned} R''(r)T(\theta) + r^{-1}R'(r)T(\theta) + r^{-2}R(r)T''(\theta) &= 0 \\ \Rightarrow \frac{R''(r)}{R(r)} + r^{-1}\frac{R'(r)}{R(r)} + r^{-2}\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} &= 0 \\ \Rightarrow r^2\frac{R''(r)}{R(r)} + r\frac{R'(r)}{R(r)} &= -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \lambda. \end{aligned}$$

Na osnovu rubnih uvjeta funkcija $T(\theta)$ je 2π -periodična, a to je samo moguće ako je $\lambda \geq 0$ i $\sqrt{\lambda}$ cijeli broj. Time, za $\lambda > 0$, dobivamo niz rješenja

$$T_n(\theta) = a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta, n \in \mathbb{N},$$

a za funkciju $R(r)$ imat ćemo jednadžbu

$$r^2 R''(r) + r R'(r) = n^2 R(r).$$

To je Eulerova jednadžba čija su rješenja data u obliku

$$R_n(r) = c_n r^n + d_n r^{-n}, n \in \mathbb{N}.$$

Ako je $\lambda = 0$, onda je lako vidjeti da je $T(\theta)$ konstantna funkcija i da je funkcija $R(r)$ oblika $R(r) = a_0 \log r + b_0$.

Tada rješenje možemo napisati kao

$$U(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \cos n\theta + (C_n r^n + D_n r^{-n}) \sin n\theta + a_0 \log r + b_0. \quad (4.130)$$

4.4 Laplaceova jednadžba

Primjer 4.4.9. Riješiti Dirichletov problem

$$\begin{aligned} r^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} &= 0, 1 < r < 2, \\ U(1, \theta) &= 3 + 4 \cos 2\theta, \\ U(2, \theta) &= 5 \sin \theta, U(r, \theta + 2\pi) = U(r, \theta). \end{aligned}$$

Rješenje. Primjenom identiteta (4.130) lako je vidjeti da je $b_0 = 3$. Iz

$$3 + 4 \cos 2\theta = U(1, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) \cos n\theta + (C_n + D_n) \sin n\theta + 3,$$

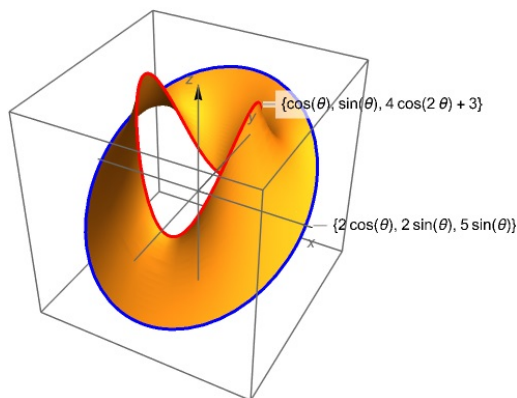
slijedi da je $C_n + D_n = 0$, za svaki n , $A_n + B_n = 0$ za svaki $n \neq 2$ a da je $A_2 + B_2 = 4$.

Sada iz

$$5 \sin \theta = U(2, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n 2^n + B_n 2^{-n}) \cos n\theta + (C_n 2^n + D_n 2^{-n}) \sin n\theta + a_0 \log 2 + 3,$$

slijedi da je $a_0 = -\frac{3}{\log 2}$, $A_n 2^n + B_n 2^{-n} = 0$, za svaki n , $C_n 2^n + D_n 2^{-n} = 0$ za svaki $n \neq 1$, a da je $C_1 2 + D_1 2^{-1} = 5$. Time, dobivamo da je $A_n = B_n = 0$ za svaki $n \neq 2$, $C_n = D_n = 0$ za svaki $n \neq 1$, $A_2 = -\frac{4}{15}$, $B_2 = \frac{64}{15}$, $C_1 = -D_1 = \frac{10}{3}$. Odavde imamo da je

$$U(r, \theta) = \left(-\frac{4}{15} r^2 + \frac{64}{15} r^{-2} \right) \cos 2\theta + \left(\frac{10}{3} r - \frac{10}{3} r^{-1} \right) \sin \theta - \frac{3}{\log 2} \log r + 3.$$



Slika 4.15: Grafik funkcije $U = U(r, \theta)$, $1 < r < 2$, $0 < \theta < 2\pi$ iz Primjera 4.4.9.



4.5 Jednadžba provođenja toplote

U ovom dijelu ćemo proučavati jednostavnu paraboličnu jednadžbu, a to je jednadžba provođenja toplote, koja odražava bitne osobine paraboličnih jednadžbi: princip maksimuma i povećanje glatkosti rješenja u odnosu na glatkost početnog uvjeta. Razmotrit ćemo početne i rubne probleme vezane za ovu jednadžbu.

4.5.1 Početni i rubni uvjeti

Jednadžbu oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u + f, \quad (4.131)$$

u kojoj je $k > 0$, gdje je $t > 0$, $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 1$ oblast, nazivamo *jednadžbom provođenja toplote*. Ako je $f \equiv 0$ onda jednadžbu (4.131) nazivamo *homogenom jednadžbom provođenja toplote*. Ovdje je funkcija $u : \bar{\Omega} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $u = u(x, t)$ nepoznata, a funkcija $f : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ je data. Proučavaćemo njeno rješenje u oblasti $Q = \Omega \times (0, \infty)$, koje zadovoljava zadani rubni uvjet i zadane početne uvjete.

Dirichletov, odnosno Neumannov, rubni uvjet sastoji se u nalaženju rješenja jednadžbe (4.131) koje zadovoljava uvjet

$$u = g \quad \text{na} \quad \Sigma = \Gamma \times (0, \infty),$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = h \quad \text{na} \quad \Sigma, \quad (4.132)$$

gdje su g i h zadane funkcije na Σ a $\Gamma = \partial\Omega$ i $\partial u/\partial \nu$ izvod po vanjskoj normali ν na Σ . Početni uvjet sastoji se u zadavanju temperature u trenutku $t = 0$:

$$u(\cdot, 0) = u_0,$$

gdje je u_0 zadana funkcija na Ω .

Određivanje rješenja jednadžbe provođenja koje zadovoljava neke od rubnih uvjeta zove se rubni problem (Dirichleov, Neumannov, itd.). Određivanje rješenja jednadžbe provođenja u oblasti Ω , koje zadovoljava zadani rubni uvjet i zadani početni uvjet, zove se početno-rubni problem. Ako jednadžbu posmatramo u $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, zadaju se samo početni uvjeti na $\mathbb{R}^n$, pa imamo početni ili Cauchyev problem.

Za zadane funkcije f , g , h i u_0 pretpostavljamo da su neprekidne (i eventualno dovoljno glatke), a u slučaju početnog problema za f i u_0 pretpostavljamo i ograničenost. Rješenja početno-rubnog problema tražimo u klasi $\mathcal{C}(Q) \cap \mathcal{C}(\bar{Q})$ u slučaju Dirichleovog uvjeta, odnosno u klasi $\mathcal{C}^2(Q) \cap \mathcal{C}^1(\bar{Q})$ u slučaju Neumannovog uvjeta. Za egzistenciju rješenja potrebni su uvjeti kompatibilnosti

$$u_0(x) = g(x, 0), \quad \text{za} \quad x \in \Gamma$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

u slučaju Dirichletovog uvjeta, i

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu}(x) = h(x, 0) \quad \text{za } x \in \Gamma$$

u slučaju Neumannovog uvjeta. Ako rješenje tražimo u klasi $\mathcal{C}^2(\overline{Q})$, za Dirichletov slučaj potreban je i uvjet

$$\frac{\partial g}{\partial t}(x, 0) - k\Delta u_0(x) = f(x, 0) \quad \text{za } x \in \Gamma.$$

Pokazuje se da su uvjeti kompatibilnosti i dovoljni za egzistenciju odgovarajućih rješenja. Rješenje Cauchyevog problema tražimo u klasi *ograničenih* funkcija iz $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$. Opisana rješenja nazivamo klasičnim.

Teorem 4.5.1. *Početno-rubni problem ima najviše jedno rješenje u klasi $\mathcal{C}^2(\overline{Q})$.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 rješenja i $w = u_1 - u_2$. Tada je

$$\frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w = 0 \quad \text{u } \overline{Q}, \quad (4.133)$$

$$w = 0 \quad \text{na } \Sigma \quad \text{odnosno} \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0 \quad \text{na } \Sigma, \quad (4.134)$$

$$w = 0 \quad \text{na } \Omega \times \{0\}. \quad (4.135)$$

Iz (4.133) za svako $t \in (0, \infty)$ slijedi

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(x, t) dV = k \int_{\Omega} \Delta w(x, t) w(x, t) dV,$$

ili nakon primjene Posljedice 4.4.2, te uvažavajući uvjet (4.134),

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2(x, t) dV + k \int_{\Omega} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2 dV = 0.$$

Nakon integracije te jednakosti po intervalu $(0, \tau)$, te uvažavajući uvjet (4.135), dobivamo

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} w^2(x, \tau) dV + k \int_{\Omega} \int_0^{\tau} |\mathbf{grad} w(x, t)|^2 dt dV = 0.$$

Iz ovog slijedi da je $w(\cdot, \tau) = 0$ za svako $\tau \in \mathbb{R}$, tj. $w = 0$, $u_1 = u_2$ u Q . $\square$

4.5.2 Princip maksimuma

Pokazat ćemo da i za jednadžbu provođenja kao i za Laplaceovu jednadžbu vrijedi princip maksimuma. Neka je $T > 0$, $Q_T = \Omega \times (0, T)$ i $\Sigma_T = \Gamma \times (0, T)$. Skup $P_T = (\Omega \times \{0\}) \cup \overline{\Sigma}_T$ zove se parabolična granica cilindra Q_T (ili $\overline{Q}_T$).

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Teorem 4.5.2 (Princip maksimuma). *Ako funkcija $u \in \mathcal{C}^2(Q) \cap C(\overline{Q})$ zadovoljava u cilindru Q homogenu jednadžbu*

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0, \quad (4.136)$$

onda ona za svako T svoj ekstrem na cilindru $\overline{Q}_T$ prima na paraboličnoj granici P_T tog cilindra.

Dokaz. Dovoljno je tvrđenje dokazati u slučaju maksimuma. Neka je

$$\max_{\overline{Q}_T} u = M, \quad \max_{P_T} u = m. \quad (4.137)$$

Tada je $m \leq M$. Pretpostavimo da je $m < M$, tj. da funkcija u svoj maksimum na $\overline{Q}_T$ ne prima na P_T . Neka je $(x^{(0)}, t^{(0)}) \in \overline{Q}_T \setminus P_T$, $u(x^{(0)}, t^{(0)}) = M$ i

$$v(x, t) = u(x, t) + \frac{M - m}{2T} (t^{(0)} - t).$$

Za $(x, t) \in P_T$ imamo $t^{(0)} - t \leq T$, $u(x, t) \leq m$, pa vrijedi

$$v(x, t) \leq m + \frac{M - m}{2} = \frac{M + m}{2} < M.$$

S druge strane je

$$v(x^{(0)}, t^{(0)}) = M.$$

Iz tog slijedi da funkcija v svoj maksimum na $\overline{Q}_T$ ne prima na P_T . Prema tome, ako je

$$(x^{(1)}, t^{(1)}) \in \overline{Q}_T, \quad \max_{\overline{Q}_T} v = v(x^{(1)}, t^{(1)}),$$

onda je

$$(x^{(1)}, t^{(1)}) \in \overline{Q}_T \setminus P_T = Q_T \cup (\Omega \times \{T\}).$$

Ako je $(x^{(1)}, t^{(1)}) \in Q_T$, onda je

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x^{(1)}, t^{(1)}) &= 0, & \frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{(1)}, t^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x^{(1)}, t^{(1)}) &\leq 0, & i &= 1, \dots, n, \end{aligned} \quad (4.138)$$

a ako je $(x^{(1)}, t^{(1)}) \in \Omega \times \{T\}$, onda je

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t}(x^{(1)}, t^{(1)}) &\geq 0, & \frac{\partial v}{\partial x_i}(x^{(1)}, t^{(1)}) &= 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}(x^{(1)}, t^{(1)}) &\leq 0, & i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

4.5 Jednadžba provođenja topline

U oba slučaja dobivamo

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v\right)(x^{(1)}, t^{(1)}) \geq 0.$$

S druge strane, iz (4.132), slijedi

$$\left(\frac{\partial v}{\partial t} - k\Delta v\right)(x^{(1)}, t^{(1)}) = -\frac{M-m}{2T} < 0,$$

što je u kontradikciji sa (4.135). Pa prema tome, pretpostavka $m < M$ je kontradiktorna, pa je $m = M$. $\square$

Posljedica 4.5.1. *Početno-rubni problem sa Dirichletovim rubnim uvjetima ima najviše jedno rješenje u klasi $\mathcal{C}^2(Q) \cap \mathcal{C}(\bar{Q})$.*

Dokaz. Neka su u_1 i u_2 rješenja i $w = u_1 - u_2$. Funkcija w zadovoljava homogenu jednadžbu, homogeni rubni i homogeni početni uvjet. Prema Teoremu 4.5.2, za svako T funkcija w svoje ekstreme na $\bar{Q}_T$ prima na P_T . Zbog uvjeta $w = 0$ na P_T zaključujemo da je $w = 0$ u Q_T , tj. $u_1 = u_2$ u Q . $\square$

Primjedba 4.5.1. Iz Teorema 4.5.2 slijedi korektnost početno-rubnog problema za homogenu jednadžbu sa Dirichletovim uvjetima: za svako $T > 0$ rješenje u zadovoljava nejednakost

$$\max_{\bar{Q}_T} |u| \leq \max\{\max_{\bar{\Omega}} |u_0|, \max_{\Sigma_T} |g|\}.$$

Teorem 4.5.3. *Početni problem ima najviše jedno (ograničeno) rješenje $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times (0, \infty)) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$.*

Dokaz. Neka su u_1, u_2 rješenja, C pozitivan broj i $|u_1(x, t)| \leq C, |u_2(x, t)| \leq C$ za $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty)$. Tada je funkcija $w = u_1 - u_2$ rješenje homogenog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} - k\Delta w &= 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ w(\cdot, 0) &= 0 \text{ na } \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

i vrijedi

$$|w(x, t)| \leq 2C \text{ za } (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, \infty).$$

Neka je $R > 0$, $K_R = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < R\}$, $Q_R = K_R \times (0, \infty)$, $\Sigma_R = \partial K_R \times (0, \infty)$ i

$$v_R(x, t) = \frac{4nC}{R^2} \left(\frac{|x|^2}{2n} + kt \right).$$

Funkcija v_R zadovoljava homogenu jednadžbu u $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$:

$$\frac{\partial v_R}{\partial t} - k\Delta v_R = 0.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Dalje imamo

$$v_R(x, 0) = \frac{2C|x|^2}{R^2} \geq 0 \text{ za } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$v_R(x, t) \geq 2C \text{ za } (x, t) \in \Sigma_R.$$

Iz (4.136) i (4.137) zaključujemo da je

$$v_R \geq |w| \text{ na } (K_R \times \{0\}) \cup \Sigma_R.$$

Iz tog slijedi

$$v_R + w \geq 0, \quad v_R - w \geq 0 \text{ na } (K_R \times \{0\}) \cup \Sigma_R.$$

Za $T > 0$ stavljamo

$$Q_{R,T} = K_R \times (0, T), \quad \Sigma_{R,T} = \partial K_R \times (0, T),$$

$$P_{R,T} = (K_R \times \{0\}) \cup \bar{\Sigma}_{R,T}.$$

Funkcije $v_R + w$ i $v_R - w$ pripadaju klasi $\mathcal{C}^2(\bar{Q}_R)$ i zadovoljavaju u Q_R homogenu jednadžbu provođenja. Iz (4.138) slijedi da su minimalne vrijednosti tih funkcija na parabolichnoj granici $P_{R,T}$ cilindra $Q_{R,T}$ nenegativne. Prema Teoremu 4.5.2 zaključujemo da je

$$v_R + w \geq 0, \quad v_R - w \geq 0 \text{ na } Q_{R,T},$$

ili

$$|w| \leq v_R \text{ u } Q_{R,T}.$$

Neka je $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty)$, R_0 i T pozitivni brojevi, $(x, t) \in Q_{R_0,T}$. Tada je

$$|w(x, t)| \leq v_R(x, T) \text{ za } R > R_0,$$

ili

$$|w(x, t)| \leq \frac{4nC}{R^2} \left(\frac{|x|^2}{2n} + kt \right) \text{ za } R > R_0.$$

Uzimajući u toj nejednakosti limes za $R \rightarrow \infty$, dobivamo $w(x, t) = 0$, tj. $u_1(x, t) = u_2(x, t)$. $\square$

Primjer 4.5.1. Razmatramo željeznu šipku dužine 50 cm, sa specifičnom toplotom $c = 0.437 \text{ J/(g K)}$, gustoćom $\rho = 7.88 \text{ g/cm}^3$ i toplotnom provodljivošću $\kappa = 0.836 \text{ W/(cm K)}$. Pretpostavljamo da je šipka izolirana osim na krajevima i da joj je (nekako) zadana početna temperatura

$$\psi(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|,$$

gdje je $\psi(x)$ data u stepenima Celzijusa. Konačno, pretpostavljamo da su u trenutku $t = 0$ krajevi šipke uronjeni u ledenu kupku (0°C).

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Rješenje. Moramo riješiti sljedeći početno-rubni problem

$$\begin{aligned}\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 0, & 0 < x < 50, \quad t > 0, \\ u(x, 0) &= \psi(x), & 0 < x < 50, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(50, t) &= 0, & t > 0.\end{aligned}$$

Rješenje tražimo u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right). \quad (4.139)$$

Primijetimo da rješenje (4.139) zadovoljava rubne uvjete $u(0, t) = u(50, t) = 0$. Uvrštavanjem (4.139) u polaznu jednadžbu dobivamo

$$\rho c \sum_{n=1}^{\infty} T'_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) - \kappa \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \frac{n^2 \pi^2}{50^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0,$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\rho c T'_n(t) + \frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2} T_n(t) \right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) = 0.$$

Budući da su funkcije $\sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right)$ linearno nezavisne, izjednačavanjem koeficijenata uz svaku od njih dobivamo diferencijalne jednadžbe

$$\rho c T'_n(t) + \frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2} T_n(t) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Početni uvjet $u(x, 0) = \psi(x)$ daje

$$\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right),$$

pa razvijanjem ψ u Fourierov sinusni red na intervalu $(0, 50)$ dobivamo

$$T_n(0) = b_n = \frac{2}{50} \int_0^{50} \psi(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right) dx.$$

Za $\psi(x) = 5 - \frac{1}{5}|x - 25|$ direktnim računanjem slijedi

$$b_n = \frac{40}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Dakle, za svaki n dobivamo Cauchyjev problem prvog reda

$$\begin{aligned}\rho c T'_n(t) + \frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2} T_n(t) &= 0, \\ T_n(0) &= b_n.\end{aligned} \quad (4.140)$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Opće rješenje jednadžbe (4.140) je

$$T_n(t) = C e^{-\lambda_n t},$$

gdje je $\lambda_n = \frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2 \rho c}$. Iz početnog uvjeta $T_n(0) = b_n$ slijedi $C = b_n$, pa je

$$T_n(t) = \frac{40}{\pi^2 n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2 \rho c} t}. \quad (4.141)$$

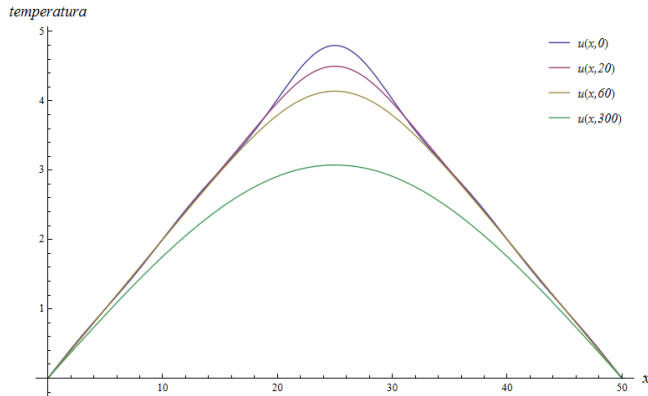
Uvrštavanjem (4.141) u (4.139) dobivamo rješenje početno-rubnog problema:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{40}{\pi^2 n^2} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2 \rho c} t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right). \quad (4.142)$$

Rješenje (4.142) se može aproksimirati parcijalnim sumama reda (koje koristimo za praktično crtanje)

$$u_N(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{40}{\pi^2 n^2} e^{-\frac{\kappa n^2 \pi^2}{50^2 \rho c} t} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{50}\right).$$

Na slici 4.16 prikazane su “snimke” funkcije $u(x, t)$ u vremenima $t = 0, t = 20, t = 60$ i $t = 300$ sekundi, tj., prikazujemo grafike funkcija $u(x, 0)$, $u(x, 20)$, $u(x, 60)$ i $u(x, 300)$. Prvih deset članova Fourierovog reda korišteno je za konstruisanje navedenih krivih.



Slika 4.16: Rješenje $u(x, t)$ iz Primjera 4.5.1 u vremenima 0, 20, 60 i 300 (sekundi).

◆

4.5.3 Poissonova formula

U ovoj tački opisujemo rješenje početnog problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0 \text{ na } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (4.143)$$

$$u(\cdot, 0) = u_0 \text{ u } \mathbb{R}^n. \quad (4.144)$$

Teorem 4.5.4. *Neka je $u_0 \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ ograničena funkcija. Tada je rješenje početnog problema (4.143), (4.144) dato Poissonovom formulom*

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \xi, t) u_0(\xi) dV, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \quad (4.145)$$

gdje je

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2^n (\pi k t)^{n/2}} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4kt}}.$$

Dokaz. Može se pokazati da za svako $\xi \in \mathbb{R}^n$ funkcija G zadovoljava homogenu jednadžbu⁶

$$\frac{\partial G}{\partial t} - k\Delta G = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty). \quad (4.146)$$

Neka su C , R_0 , T i R pozitivni brojevi i $|u_0| \leq C$ u $\mathbb{R}^n$, $R > 2R_0$. Koristeći oznake iz Teorema 4.5.3, iz $(x, t) \in \overline{Q}_{R_0, T}$ i $|\xi| > R$ imamo

$$R_0 < \frac{R}{2} < \frac{|\xi|}{2}, \quad |x - \xi| \geq |\xi| - |x| \geq |\xi| - R_0 > \frac{|\xi|}{2},$$

$$e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4kt}} < e^{-\frac{|\xi|^2}{16kT}},$$

pa vrijedi

$$\left| \int_{|\xi| > R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4kt}} u_0(\xi) dV \right| < C \int_{|\xi| > R} e^{-\frac{|\xi|^2}{16kT}} dV = C |S_n| \int_R^\infty e^{-\frac{r^2}{16kT}} r^{n-1} dr.$$

Ostatak nesvojstvenog konvergentnog integrala

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{16kT}} r^{n-1} dr$$

teži nuli, pa za proizvoljno $\varepsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ tako da za $(x, t) \in \overline{Q}_{R_0, T}$ i $R > \delta$ vrijedi

$$\left| \int_{|\xi| > R} e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4kt}} u_0(\xi) dV \right| < \varepsilon.$$

⁶Funkcija G je fundamentalno rješenje jednadžbe provođenja (toplotno jezgro).

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Drugim riječima, za svako $T_0 > 0$, $T_0 < T$, integral (4.145) konvergira uniformno na $\overline{Q}_{R_0, T_0}$, pa je zbog toga funkcija u neprekidna na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Analogno se dokazuje uniformna konvergencija formalne derivacije integrala (4.145), iz čega slijedi beskonačna diferencijabilnost funkcije u na $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$ i mogućnost deriviranja pod znakom integrala. Zbog toga i jednakosti (4.146), funkcija u zadovoljava jednadžbu (4.143). Ostaje nam da dokažemo da je funkcija (4.145) neprekidna na $\mathbb{R}^n \times [0, \infty)$ i da zadovoljava uvjet (4.144). Uvodeći u (4.145) novu varijablu integracije

$$\eta = \frac{\xi - x}{2(kt)^{1/2}},$$

dobivamo

$$u(x, t) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) dV. \quad (4.147)$$

Zbog jednakosti

$$\frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} dV = 1, \quad (4.148)$$

iz (4.147) slijedi da za svako $x \in \mathbb{R}^n$ i $t \geq 0$ vrijedi

$$|u(x, t)| \leq \sup_{\mathbb{R}^n} |u_0|. \quad (4.149)$$

Dokažimo da za svako $x \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$u(x, t) \rightarrow u_0(x), \quad t \rightarrow +0. \quad (4.150)$$

Jednakost (4.148) pomnožimo sa u_0 i oduzmimo od (4.147):

$$u(x, t) - u_0(x) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} (u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) - u_0(x)) dV. \quad (4.151)$$

Imamo

$$|u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) - u_0(x)| \leq |u_0(x + 2\eta\sqrt{kt})| + |u_0(x)| \leq 2C. \quad (4.152)$$

Za proizvoljno $N > 0$ iz (4.151) i (4.152) dobivamo

$$\begin{aligned} |u(x, t) - u_0(x)| &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|\eta|^2} |u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) - u_0(x)| dV \\ &\leq \frac{1}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta| \leq N} e^{-|\eta|^2} |u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) - u_0(x)| dV + \frac{2C}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta| > N} e^{-|\eta|^2} dV. \end{aligned} \quad (4.153)$$

Neka je $\varepsilon > 0$. Za dovoljno veliko N vrijedi

$$\frac{2C}{\pi^{n/2}} \int_{|\eta| > N} e^{-|\eta|^2} dV < \frac{\varepsilon}{2}.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Neka je $\delta = \delta(x, t) > 0$ takvo da za $0 < t < \delta$ i $|\eta| \leq N$ vrijedi

$$|u_0(x + 2\eta\sqrt{kt}) - u_0(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Iz (4.153) za $0 < t < \delta$ dobivamo

$$|u(x, t) - u_0(x)| < \varepsilon.$$

□

Primjedba 4.5.2.

- (i) Iz (4.149) slijedi da je početni problem korektno postavljen.
- (ii) Primijetimo da (4.150) vrijedi uniformno za ograničeno x , jer se δ može tako odabrati nad kompaktnim skupom nezavisno od x . Primijetimo također da iz (4.149) slijedi da je funkcija u ograničena. Da je ovo jedinstveno rješenje slijedi iz Teorema 4.5.3.
- (iii) Rješenje $u(x, t)$ definirano relacijom (4.145) zavisi od vrijednosti funkcije $u_0(\xi)$ u svim tačkama $\xi \in \mathbb{R}^n$, bez obzira na to koliko su tačke x i ξ međusobno udaljene. Čak i ako početna funkcija u_0 ima kompaktan nosač, njen utjecaj na rješenje $u(x, t)$ prostire se na cijeli prostor $\mathbb{R}^n$ za svako $t > 0$. Ova pojava poznata je kao *beskonačna brzina prostiranja poremećaja* kod toplotne jednadžbe (eng. *infinite speed of propagation*).
- (iv) Rješenje u definirano relacijom (4.145) pripada klasi $C^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, \infty))$ čak i ako funkcija u_0 nije neprekidna; štaviše, u je realna analitička funkcija na skupu $\mathbb{R}^n \times (0, \infty)$. Ova pojava poznata je kao *zaglađujući efekat toplotnog jezgra* (eng. *smoothing effect*).
- (v) Iz dokaza Teorema 4.5.4 vidi se da je za (4.150) dovoljna neprekidnost funkcije u_0 u tački x . Prema tome, ako se regularnost početnog uvjeta naruši lokalno, i regularnost rješenja samo se lokalno naruši. Dakle, jednadžba provođenja ima svojstvo regularnosti rješenja slično kao i Laplaceova jednadžba. Ako je funkcija u_0 po dijelovima neprekidna, formula (4.145) daje *generalizirano* rješenje početnog problema. Takvo rješenje je jedinstveno.

Primjedba 4.5.3. Pretpostavka o neprekidnosti početne funkcije može se oslabiti. Naime, može se pokazati da ako je funkcija u_0 Lebesgue-izmjeriva⁷ i zadovoljava nejednakost

$$|u_0(x)| \leq Me^{a|x|^2} \quad x \in \mathbb{R}^n, \text{ za } M > 0 \text{ i } a > 0,$$

⁷Skup $E \subset \mathbb{R}^n$ naziva se *Lebesgue-izmjeriv* ako mu se može pridružiti Lebesgueova mjera $m(E)$, koja predstavlja njegovu dužinu, površinu ili zapreminu (zavisno od dimenzije prostora). Lebesgueova mjera predstavlja uopćenje pojma dužine, površine i zapremine. Na primjer, za pravougaonik

$$E = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

da je tada sa (4.145) definirano rješenje jednadžbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0$$

klase C^∞ za $x \in \mathbb{R}^n$ i $0 < t < 1/4ka$.

Pretpostavka Lebesgue-izmjerivosti funkcije u_0 osigurava da je integrand u Poissonovoj formuli (4.145), tj. funkcija $G(x, \xi, t)u_0(\xi)$ Lebesgue-izmjeriva, pa je pripadni Lebesgueov integral dobro definiran. Uvjet rasta $|u_0(x)| \leq Me^{a|x|^2}$ zatim garantira konvergenciju integrala (za $0 < t < 1/(4ka)$) i omogućava diferenciranje pod integralom, što vodi zaglađujućem efektu i glatkoći rješenja za $t > 0$.

Primjedba 4.5.4. Interesantno je da se jedinstvenost rješenja početnog problema (4.143)–(4.144) može dobiti i pod znatno slabijim pretpostavkama. Naime, ako je rješenje ograničeno odozdo, odnosno ako je nenegativno, tada princip maksimuma isključuje mogućnost postojanja netrivialnih rješenja sa nultim početnim uvjetom, te je rješenje jedinstveno.

Primjedba 4.5.5. (Nejedinstvenost rješenja toplotne jednadžbe: primjer Tychonova) Bez dodatnih pretpostavki na funkciju u_0 (kao što je u Teoremu 4.5.4 njena ograničenost) datu sa (4.145), ona predstavlja samo jedno od mogućih rješenja problema (4.143)–(4.144). Tako je recimo i funkcija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n!} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-\frac{1}{t^2}})$$

rješenje problema (4.143) - (4.144) za $n = k = 1$. Naime, možemo pokazati da početni problem (4.143)–(4.144) ima beskonačno mnogo rješenja.

Potrebno je konstruirati beskonačno mnogo netrivialnih rješenja jednodimenzionalne toplotne jednadžbe sa datim početnim uvjetom $u(0, t) = u_0$. Najprije razmatramo sljedeći problem

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & x \in \mathbb{R}, t \in (-\infty, \infty), \\ u(0, t) = u_0(t), & t \in \mathbb{R}, \\ u_x(0, t) = 0, & t \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.154)$$

vrijedi

$$m(E) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

Funkcija $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ naziva se *Lebesgue-izmjeriva* ako su skupovi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \alpha\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

Lebesgue-izmjerivi. Napominjemo da su sve neprekidne i glatke funkcije Lebesgue-izmjerive. Studentima koji se žele detaljnije upoznati s pojmovima Lebesgueove mjere, Lebesgue-izmjerivih skupova i funkcija, preporučujemo knjigu [25] koja pruža intuitivan i pristupačan uvod u teoriju mjere, prilagođen studentima.

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Rješenje tražimo formalnim razvojem funkcije u u Taylorov red po varijabli x :

$$u(x, t) = \sum_{j=0}^{\infty} g_j(t) x^j.$$

Formalni račun (kao da su sve operacije dozvoljene) koristeći $u_t = u_{xx}$, zahtijeva

$$g_0(t) = u_0(t), \quad g_1(t) = 0, \quad g'_j(t) = (j+2)(j+1)u_{j+2}(t), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

odakle

$$g_{2n}(t) = \frac{1}{(2n)!} u_0^{(n)}(t), \quad g_{2n+1}(t) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Sada dobivamo

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_0^{(n)}(t)}{(2n)!} x^{2n}. \quad (4.155)$$

Sada biramo funkciju u_0 tako da ovaj red zaista definira rješenje problema (4.154). U tu svrhu definiramo funkciju

$$u_0(t) = \begin{cases} e^{-t^{-\alpha}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

gdje je konstanta $\alpha > 1$.

Možemo pokazati da postoji broj $\theta = \theta(\alpha) > 0$ (ovaj dio dokaza može biti dobra vježba za studente) takav da vrijedi

$$|u_0^{(n)}(t)| \leq n! (\theta t)^{-n} e^{-\frac{1}{2}t^{-\alpha}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad t > 0.$$

Otuda slijedi da funkcija u definirana relacijom (4.155) predstavlja regularno rješenje problema (4.154) koje dodatno zadovoljava homogeni početni uvjet $u(x, 0) = 0$.

Ostavljamo za vježbu da se pokaže uniformna konvergencija odgovarajućih redova za svako x iz kompaktnih podskupova od $\mathbb{R}$ i $t > 0$. Ovim opravdavamo formalno izvršene operacije.

Takvo rješenje naziva se *rješenje Tychonova* ili *Tychonovljevo rješenje* toplotne jednadžbe koje zadovoljava homogeni početni uvjet $u(x, 0) = 0$ i ono nije identički jednako nuli, jer vrijedi

$$u(0, t) = u_0(t), \quad t > 0.$$

Štaviše, za svako fiksirano realno $t > 0$ rješenje Tychonova $u(x, t)$ predstavlja cijelu⁸ funkciju po varijabli x . Međutim, $u(x, t)$ nije realno analitička funkcija

⁸Cijela funkcija je ona koja je analitička u cijeloj kompleksnoj ravni.

4.5 Jednadžba provođenja toplote

po varijabli t , budući da svi njeni izvodi u $t = 0$ iščezavaju, iako funkcija nije identički jednaka nuli.

Za različite vrijednosti parametra $\alpha > 1$ dobivaju se različita rješenja Tychonova.

Sa matematičkog stanovišta, nejedinstvenost je posljedica načina na koji je zadan početni uvjet. Naime, početni uvjet je zadan na karakterističnoj površi $t = 0$ jednadžbe toplotnog provođenja na kojoj ova jednadžba ne sadrži dovoljno informacija da bi se jednoznačno odredilo dalje ponašanje rješenja u vremenu. Za $t = 0$ imamo $u(x, 0)$. Možemo izračunati $Du(x, 0)$, $D^2u(x, 0)$, ali ne znamo $u_{tt}(x, 0)$, jer iz jednadžbe $u_t - k\Delta u = 0$ možemo dobiti u_t , ali ne i u_{tt} bez dodatnih informacija. Drugim riječima, jednadžba ne govori kako se rješenje *zakrivljuje* u vremenu u trenutku $t = 0$. Dakle, bez dodatnih uvjeta na početnu funkciju mogu postojati različita rješenja koja se poklapaju za $t = 0$, ali se kasnije ($t > 0$) ponašaju različito, o čemu upravo i govori primjer Tychonova.

4.5.4 Nehomogena jednadžba provođenja toplote

U ovom dijelu ćemo razmotriti Cauchyev problem za nehomogenu jednadžbu provođenja toplote (uz homogene početne uvjete). Gotovo identično razmatranju provedenom pri proučavanju nehomogene talasne jednadžbe može se dokazati da vrijedi sljedeća lema.

Lema 4.5.1. *Neka je $f \in C^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ i neka je za svako $\tau > 0$ funkcija $\nu(x, t; \tau)$ rješenje problema*

$$\frac{\partial \nu}{\partial t} - k\Delta \nu = 0 \text{ u } \mathbb{R}^n \times (\tau, \infty), \quad (4.156)$$

$$\nu(x, \tau; \tau) = f(x, \tau), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.157)$$

tada je funkcija

$$u(x, t) = \int_0^t \nu(x, t; \tau) d\tau$$

rješenje Cauchyevog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= 0 \text{ u } \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Ako za funkciju f pretpostavimo da je još i ograničena, tada na osnovu Teorema 4.5.4 dobivamo da je za svako $\tau > 0$ rješenje Cauchyevog problema (4.156), (4.157) dato Poissonovom formulom

$$\nu(x, t; \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) dV, \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (\tau, \infty),$$

pa iz prethodne leme dobivamo sljedeći teorem.

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Teorem 4.5.5. *Neka je $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \times [0, \infty))$ i ograničena. Tada je rješenje Cauchyevog problema*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= 0, \text{ u } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

dato formulom

$$u(x, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) dV d\tau \quad (x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, \infty).$$

Primjedba 4.5.6. Kombinujući Teorem 4.5.4 i 4.5.5 dobivamo da je

$$u(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \xi, t) u_0(\xi) dV + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} G(x, \xi, t - \tau) f(\xi, \tau) dV d\tau$$

rješenje Cauchyevog problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u &= f \text{ u } \mathbb{R}^n \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 \text{ u } \mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

4.5.5 Fourierova metoda

U ovom dijelu ćemo na nekoliko primjera ilustrirati Fourierovu metodu razdvajanja varijabli za nalaženje rješenja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi.

Propozicija 4.5.1. *Neka su $b_1, b_2, \dots, b_N$ realne konstante. Tada, jednadžba*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L},\end{aligned} \tag{4.158}$$

ima rješenje oblika

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Dokaz. Koristeći Fourierovu metodu razdvajanja varijabli rješenje $u(x, t)$ tražimo u obliku $u(x, t) = T(t)X(x)$. Uvrštavajući u parcijalnu diferencijalnu jednadžbu dobivamo

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

To je samo moguće ako su funkcije

$$\frac{T'(t)}{T(t)} \text{ i } \frac{X''(x)}{X(x)}$$

konstantne. Neka je $\lambda \in \mathbb{R}$ i

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = \lambda.$$

Odavde dobivamo dvije diferencijalne jednadžbe

$$T'(t) - \lambda kT(t) = 0,$$

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0.$$

Rješenje ovih običnih diferencijalnih jednadžbi zavisi od konstante λ . Posmatrajmo sljedeća tri slučaja:

- 1) Za $\lambda < 0$, rješenja su oblika $u(x, t) = e^{\lambda kt} [C_1 \sin(\sqrt{-\lambda}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\lambda}x)]$. Tada imamo $0 = u(0, t) = C_2 e^{\lambda kt}$, odakle slijedi da je $C_2 = 0$. Zatim, iz

$$0 = u(L, t) = C_1 e^{\lambda kt} \sin(\sqrt{-\lambda}L),$$

dobivamo da je $u(x, t)$ netrivialno rješenje samo ako je $\sqrt{-\lambda}L = n\pi$, gdje je n cijeli broj. Dakle, za svaki cijeli broj n sa

$$u_n(x, t) = C_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

je dato netrivialno rješenje polaznog problema. Direktnom provjerom se vidi da je

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 kt}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

zaista rješenje početnog problema (4.158).

- 2) Za $\lambda > 0$, rješenja su oblika $u(x, t) = e^{\lambda kt} (C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x})$. Pored toga imamo da je

$$0 = u(0, t) = (C_1 + C_2) e^{\lambda kt},$$

$$0 = u(L, t) = C_1 e^{\lambda kt} (e^{\sqrt{\lambda}L} - e^{-\sqrt{\lambda}L}),$$

što pokazuje da ne postoji netrivialno rješenje za ovaj slučaj.

- 3) Za $\lambda = 0$, rješenja su oblika $u(x, t) = C_1 x + C_2$. U ovom slučaju za rubne uvjete dobivamo $0 = u(0, t) = C_2$, i $0 = u(L, t) = C_1 L + 0$, a to znači da za $\lambda = 0$ ne postoji netrivialno rješenje.

□

4.5 Jednadžba provođenja topline

Propozicija 4.5.2. *Neka su $b_1, b_2, \dots, b_N$, a i b realne konstante. Tada, jednadžba*

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= a, \quad u(L, t) = b, \\ u(x, 0) &= \sum_{n=1}^N b_n \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{b-a}{L}x + a,\end{aligned}\tag{4.159}$$

ima rješenje oblika

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L} + \frac{b-a}{L}x + a.$$

Dokaz. Primijetimo da je

$$w(x, t) = \frac{b-a}{L}x + a$$

netrivijalno rješenje jednadžbe koje zadovoljava rubne uvjete. Također, iz Propozicije 4.5.1 imamo da

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^N b_n e^{\frac{-n^2 \pi^2 k t}{L^2}} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

predstavlja rješenje jednadžbe (4.158). Lako je provjeriti da je $u = v + w$ rješenje jednadžbe (4.159). $\square$

Propozicija 4.5.3. *Pretpostavimo da za svaki $s \geq 0$, sljedeća jednadžba ima rješenje $v \in \mathcal{C}^2$:*

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \geq s, \\ v(0, t, s) &= v(L, t, s) = 0, \\ v(x, s, s) &= h(x, s).\end{aligned}$$

Tada, rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h(x, t), \quad x \in [0, L], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 0,\end{aligned}\tag{4.160}$$

je dato sa $u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds$.

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Dokaz. Diferenciranjem po t dobivamo

$$u_t(x, t) = v(x, t, t) + \int_0^t v_t(x, t, s) ds = h(x, t) + k \int_0^t v_{xx}(x, t, s) ds = h(x, t) + u_{xx}(x, t),$$

odakle dobivamo da je $u(x, t) = \int_0^t v(x, t, s) ds$ rješenje problema (4.160). $\square$

Primjer 4.5.2. Odrediti rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned} u_t &= k u_{xx} + t(\sin(2\pi x) + 2x), & x \in [0, 1], t \geq 0, \\ u(0, t) &= 1, & u(1, t) = t^2, \\ u(x, 0) &= 1 + \sin(3\pi x) - x. \end{aligned}$$

Rješenje. Formirajmo funkciju $w(x, t)$ kao u Propoziciji 4.5.2, tj. stavimo da je $w(x, t) = (t^2 - 1)x + 1$. Tada imamo

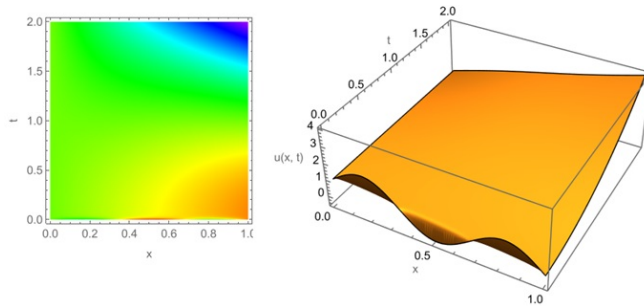
$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2tx, & x \in [0, L], t \geq 0, \\ w(0, t) &= 1, & w(1, t) = t^2, \\ w(x, 0) &= 1 - x. \end{aligned}$$

Ako je rješenje $u(x, t)$ dato sa $u(x, t) = v(x, t) + w(x, t)$, onda je

$$\begin{aligned} v_t &= k v_{xx} + t \sin(2\pi x), & x \in [0, T], t \geq 0, \\ v(0, t) &= v(1, t) = 0, \\ v(x, 0) &= \sin(3\pi x). \end{aligned}$$

Pomoću Propozicija 4.5.1 i 4.5.3 funkciju v možemo napisati u obliku $v = v_1 + v_2$, gdje je v_1 rješenje jednadžbe (4.158) i v_2 je rješenje jednadžbe (4.160). Dakle,

$$\begin{aligned} v_1(x, t) &= e^{-9\pi^2 kt} \sin(3\pi x), \\ v_2(x, t) &= e^{-4\pi^2 kt} \sin(2\pi x) \int_0^t s e^{4\pi^2 ks} ds. \end{aligned}$$



Slika 4.17: Grafik gustine i grafik funkcije $u = u(x, t)$, $x \in [0, 1]$, $t \in [0, 2]$ iz Primjera 4.5.2 za $k = 1$.



Primjer 4.5.3. Naći temperaturu štapa $0 \leq x \leq l$ sa izoliranom površinom, ako postoji izvor toplote $\phi(t) \sin \pi x/l$, početna temperatura je proizvoljna funkcija $f(x)$, a temperatura na rubu je nula.

Rješenje. Određivanje temperature štapa svodi se na rješavanje sljedećeg početno-rubnog problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < l, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.161)$$

Rješenje tražimo u obliku $u(x, t) = w(x, t) + v(x, t)$, gdje je $w(x, t) = \varphi(t) \sin \frac{\pi x}{l}$, pri čemu je φ nepoznata funkcija koju treba odrediti tako da je w rješenje problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \phi(t) \sin \frac{\pi x}{l}, \\ w(x, 0) &= 0, \quad 0 < x < l, \quad w(0, t) = 0, \quad w(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

Funkciju v određujemo tako da je

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \\ v(x, 0) &= f(x), \quad 0 < x < l, \\ v(0, t) &= 0, \quad v(l, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Tako određena funkcija u će očigledno biti rješenje početno-rubnog problema (4.161). Uvrštavanjem funkciju w u (4.5.5) dobivamo sljedeći Cauchyev problem:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -k \frac{\pi^2}{l^2} \varphi(t) + \phi(t), \\ \varphi(0) &= 0. \end{aligned}$$

Rješavajući ovaj problem dobivamo da je

$$\varphi(t) = \int_0^t e^{-\frac{k\pi^2}{l^2}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau,$$

odnosno,

$$w(x, t) = \left(\int_0^t e^{-\frac{k\pi^2}{l^2}(t-\tau)} \phi(\tau) d\tau \right) \sin \frac{\pi x}{l}.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Problem (4.162) rješavamo Fourierovom metodom tražeći rješenje u obliku $v(x, t) = T(t)X(x)$. Uvrštavajući u parcijalnu jednadžbu za funkciju $v(x, t)$ dobivamo dvije obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0$$

i

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

pri čemu je

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l},$$

a rješenje druge jednadžbe je

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}}.$$

Oдавde imamo da je formalno rješenje

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}, \quad (4.163)$$

gdje su a_n Fourierovi koeficijenti funkcija f razvijene po sinusima na intervalu $(0, l)$:

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Neka je $f \in C^1([0, l])$ i neka zadovoljava uvjete kompatibilnosti $f(0) = f(l) = 0$. Tada je

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Kako je $f \in C^1([0, l])$, to iz teorije Fourierovih redova slijedi da red na desnoj strani konvergira apsolutno i uniformno na $[0, l]$. No, kako je $e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} < 1$ za $t > 0$, zaključujemo da red (4.163) konvergira apsolutno i uniformno na $[0, l] \times (0, \infty)$. Iz tog slijedi da $v \in C([0, l] \times [0, \infty))$. Formalna derivacija reda (4.163) po varijabli t je

$$-\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{n^2 \pi^2 k}{l^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}. \quad (4.164)$$

Neka je $C > 0$, $|f| \leq C$; tada je $|a_n| \leq 2C$. Za $x \in [0, l]$ i $t \geq t_0 > 0$ imamo

$$\left| a_n \frac{n^2 \pi^2 k}{l^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l} \right| \leq 2C \frac{n^2 \pi^2 k}{l^2} e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t_0}{l^2}},$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

$$\frac{(n+1)^2 e^{-\frac{(n+1)^2 \pi^2 k t_0}{l^2}}}{n^2 e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t_0}{l^2}}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 e^{-\frac{\pi^2 (2n+1) k t_0}{l^2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Iz toga slijedi da red (4.164) konvergira apsolutno i uniformno na $[0, l] \times [0, \infty)$, pa zaključujemo da funkcija u ima na $[0, l] \times [0, \infty)$ neprekidnu derivaciju $\partial v / \partial t$ koja se iz (4.163) dobiva formalnim deriviranjem. Na isti način dokazujemo analognu tvrdnju za proizvoljnu derivaciju funkcije v . Iz tog slijedi da je $v \in C^2((0, l) \times (0, \infty))$ i da vrijedi (4.162). $\blacklozenj$

Primjer 4.5.4. Početna temperatura štapa $0 \leq x \leq l$ sa izoliranom površinom je $u_0 = \text{const}$. Na krajevima štapa održava se temperatura

$$u(0, t) = u_1 = \text{const}, \quad u(l, t) = u_2 = \text{const}, \quad 0 < t < \infty.$$

Naći temperaturu $u(x, t)$, $t > 0$, kao i stacionarnu temperaturu

$$\bar{u}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t).$$

Rješenje. Zadatak se svodi na rješavanje sljedećeg početno-rubnog problema:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(t, 0) = u_0,$$

$$u(0, x) = u_1, \quad u(l, x) = u_2.$$

Rješenje ovog problema tražimo u obliku

$$u(x, t) = \bar{u}(x) + v(x, t),$$

gdje je $\bar{u}(x)$ definirana kao stacionarno rješenje gornje jednadžbe, koje zadovoljava date početne uvjete, tj.

$$\frac{d^2 \bar{u}(x)}{dx^2} = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$\bar{u}(0) = u_1, \quad \bar{u}(l) = u_2,$$

odavde je

$$\bar{u}(x) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l},$$

tj. $\bar{u}(x)$ je granična vrijednost kojoj teži temperatura štapa kada $t \rightarrow \infty$.

Funkcija $v(x, t)$ je rješenje početno-rubnog problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$v(x, 0) = u(x, 0) - \bar{u}(x) = u_0 - u_1 - (u_2 - u_1) \frac{x}{l},$$

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0, \quad 0 < t < \infty.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Rješenje početo-rubnog problema za funkciju $v(x, t)$ tražimo metodom separacije varijabli tj.

$$v(x, t) = T(x)X(x).$$

Uvrštavajući u parcijalnu jednadžbu za funkciju $v(x, t)$ dobivamo dvije obične diferencijalne jednadžbe drugog reda

$$T'(t) + \lambda k T(t) = 0$$

i

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,$$

pri čemu je

$$X(0) = X(l) = 0.$$

Rješenje prve jednadžbe je

$$X_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{l},$$

a rješenje druge jednadžbe je

$$T_n(t) = a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}}.$$

Oдавde imamo da je

$$v(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Izračunavanjem Fourierovih koeficijenata a_n , dobivamo

$$a_n = \frac{2}{n\pi} \left((u_0 - u_1)(1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1}(u_2 - u_2) \right),$$

pa je

$$u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left((u_0 - u_1)(1 - (-1)^n) + (-1)^{n+1}(u_1 - u_2) \right) e^{-\frac{n^2 \pi^2 k t}{l^2}} \sin \frac{n\pi x}{l}.$$

Oдавde dobivamo

$$\bar{u}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u(x, t) = u_1 + (u_2 - u_1) \frac{x}{l}.$$

◆

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Primjer 4.5.5. Posmatrajmo jednadžbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u(x, 0, t) &= u(x, M, t) = 0, \\ u(0, y, t) &= u(L, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= f(x, y),\end{aligned}$$

za $x \in [0, L]$, $y \in [0, M]$, $t \geq 0$, gdje je f funkcija iz $\mathcal{C}^1$ koja se anulira na rubovima pravougaonika $[0, L] \times [0, M]$.

Rješenje. Ako rješenje jednadžbe napišemo u obliku proizvoda $T(t)X(x)Y(y)$, onda iz date jednadžbe slijedi da je

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)},$$

što je samo moguće ukoliko su sve tri funkcije

$$\frac{T'(t)}{T(t)}, \quad \frac{X''(x)}{X(x)}, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)}$$

konstantne. Dakle, postoje konstante b i c takve da je

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} = b,$$

i

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = c,$$

što povlači da je

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = b - c.$$

Postupajući kao i u Propoziciji 4.5.1 imamo

$$X(x) = a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \text{ za } c = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N},$$

i

$$Y(y) = b_m \sin \frac{m\pi y}{M} \text{ za } b - c = -\left(\frac{m\pi}{M}\right)^2, \quad m \in \mathbb{N}.$$

To implicira da su sve moguće vrijednosti konstante $-b$ koje označavamo sa $\lambda_{n,m}$ date sa

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{M}\right)^2, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Tada je,

$$T(t) = e^{-\lambda_{n,m}kt},$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

pa je formalno rješenje u dato kao linearna kombinacija funkcija

$$u_{n,m}(x, y, t) = e^{-\lambda_{n,m}kt} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M},$$

tj.

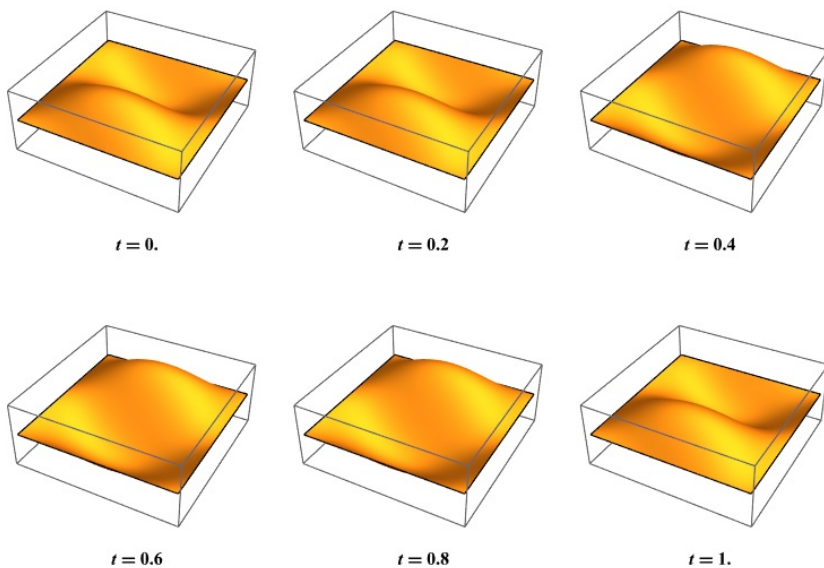
$$u(x, y, t) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} b_{n,m} e^{-\lambda_{n,m}kt} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}.$$

Iz

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} b_{n,m} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M}$$

slijedi da su konstante $b_{n,m}$ Fourierovi koeficijenti funkcije f . Drugim riječima,

$$b_{n,m} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{M} dy dx.$$



Slika 4.18: Grafik funkcije $u = u(x, y, t)$, $x \in [0, 1]$, $y \in [0, 1]$, iz Primjera 4.5.5 za $k = 1$ i $f(x, y) = \sin \pi x \sin 2\pi y$.

◆

4.5 Jednadžba provođenja topline

Primjer 4.5.6. Naći rješenje mješovitog problema

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u(x, 0, t) &= \frac{\partial u(x, M, t)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(L, y, t)}{\partial x} = 0, \\ u(x, y, 0) &= \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{2M},\end{aligned}$$

za $x \in [0, L]$, $y \in [0, M]$, $t \geq 0$.

Rješenje. Slično kao u Primjeru 4.5.5 imamo da je

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = b, \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = c, \quad \frac{Y''(y)}{Y(y)} = b - c.$$

Osim toga, za svako y i t vrijedi

$$u_x(0, y, t) = u_x(L, y, t) = 0 \Rightarrow X'(0)T(t)Y(y) = X'(L)T(t)Y(y) = 0,$$

odakle slijedi da je

$$X'(0) = X'(L) = 0.$$

Analizirajmo slučajeve kao u Propoziciji 4.5.1 za konstantu c :

1) Za $c > 0$, imamo

$$X(x) = C_1 e^{x\sqrt{c}} + C_2 e^{-x\sqrt{c}},$$

pa je

$$X'(x) = C_1 \sqrt{c} e^{x\sqrt{c}} - C_2 \sqrt{c} e^{-x\sqrt{c}}.$$

Tada iz $X'(0) = 0$ imamo

$$0 = C_1 + C_2,$$

a iz $X'(L) = 0$ dobivamo

$$0 = C_1 (e^{L\sqrt{c}} - e^{-L\sqrt{c}})$$

pa je $C_1 = C_2 = 0$.

2) Za $c = 0$, imamo $X(x) = C_1 x + C_2$ pa je $X'(x) = C_1$, što implicira da je $C_1 = 0$, pa je $X(x)$ konstantna funkcija.

3) Za $c < 0$ je

$$X(x) = C_1 \sin(x\sqrt{-c}) + C_2 \cos(x\sqrt{-c}),$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

pa je

$$X'(x) = C_1\sqrt{-c}\cos(x\sqrt{-c}) - C_2\sqrt{-c}\sin(x\sqrt{-c}).$$

Tada iz $X'(0) = 0$ imamo $C_1 = 0$, a s druge strane iz $X'(L) = 0$ dobivamo

$$\cos(L\sqrt{-c}) = 0$$

pa je $c = -(\frac{n\pi}{L})^2$. Dakle

$$X(x) = C_2 \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Na isti način, iz $\frac{\partial u(x, M, t)}{\partial y} = 0$ slijedi da je $Y'(M) = 0$, a iz $u(x, 0, t) = 0$ slijedi da je $Y(0) = 0$. Razmotrimo sada slučajeve za konstantu $b - c$:

1) Za $b - c > 0$, imamo

$$Y(y) = C_1 e^{\sqrt{b-c}y} + C_2 e^{-\sqrt{b-c}y},$$

tada $Y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2$. S druge strane,

$$Y'(y) = C_1\sqrt{b-c}e^{y\sqrt{b-c}} - C_2\sqrt{b-c}e^{-y\sqrt{b-c}} = C_1(\sqrt{b-c}e^{y\sqrt{b-c}} + \sqrt{b-c}e^{-y\sqrt{b-c}}),$$

onda

$$0 = Y'(M) \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

2) Za $b - c = 0$, imamo

$$Y(y) = C_1 y + C_2 \Rightarrow Y'(y) = C_1,$$

tada

$$0 = Y'(M) \Rightarrow C_1 = 0.$$

Pored toga, iz $Y(0) = 0$ slijedi da je $C_2 = 0$.

3) Za $b - c < 0$,

$$Y(y) = C_1 \sin(y\sqrt{c-b}) + C_2 \cos(y\sqrt{c-b}).$$

Tada $0 = Y(0) \Rightarrow C_2 = 0$. Iz

$$Y'(y) = C_1\sqrt{c-b}\cos(y\sqrt{c-b}),$$

slijedi da je

$$0 = Y'(M) = C_1\sqrt{c-b}\cos(M\sqrt{c-b}),$$

a to znači da je

$$b - c = -\left(\frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{M}\right)^2,$$

a da je

$$Y(y) = C_1 \sin \frac{(m + \frac{1}{2})\pi y}{M}.$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Na osnovu navedenog imamo da su sve moguće vrijednosti konstante $-b$ koje označavamo sa $\lambda_{n,m}$ date sa

$$\lambda_{n,m} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{(m + \frac{1}{2})\pi}{M}\right)^2, \quad m, n \in \mathbb{N},$$

odakle slijedi da je

$$T(t) = e^{-\lambda_{n,m}kt},$$

pa je rješenje u dato kao linearna kombinacija funkcija

$$u_{n,m}(x, y, t) = e^{-\lambda_{n,m}kt} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{(m + \frac{1}{2})\pi y}{M}.$$

Dakle,

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} b_{n,m} e^{-\lambda_{n,m}kt} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{(m + \frac{1}{2})\pi y}{M}.$$

Iz

$$u(x, y, 0) = \sum_{n,m \in \mathbb{N}} b_{n,m} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{(m + \frac{1}{2})\pi y}{M},$$

slijedi da su konstante $b_{n,m}$ Fourierovi koeficijenti funkcije $\cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{2M}$, a to su

$$b_{n,m} = \frac{4}{LM} \int_0^L \int_0^M \cos \frac{2\pi x}{L} \sin \frac{3\pi y}{2M} \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{(m + \frac{1}{2})\pi y}{M} dy dx.$$

◆

Primjer 4.5.7. Naći temperaturu paralelepipeda $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$, $0 \leq z \leq l_3$, ako je početna temperatura na površini jednaka nuli.

Rješenje. Zadatak se svodi na rješavanje sljedećeg početno-rubnog problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right),$$

$$u|_{x=0} = u|_{x=l_1} = 0, \quad u|_{y=0} = u|_{y=l_2} = 0, \quad u|_{z=0} = u|_{z=l_3} = 0,$$

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z).$$

Rješenje tražimo u obliku

$$u(x, y, z) = v(x, y, z)T(t).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu dobivamo

$$T'(t)v(x, y, z) = kT(t) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right),$$

4.5 Jednadžba provođenja topline

što je moguće samo ako je

$$\frac{T'(t)}{kT(t)} = \frac{\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)}{v(x, y, z)} = -\lambda.$$

Odavde dobivamo

$$\begin{aligned} T'(t) + \lambda kT(t) &= 0 \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \lambda v(x, y, z) &= 0. \end{aligned} \quad (4.165)$$

Rješenje jednadžbe (4.165) tražimo, metodom separacije varijabli, u obliku

$$v(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z).$$

Uvrštavanjem u jednadžbu (4.165), imamo

$$X''YZ + XY''Z + XYZ'' + \lambda XYZ = 0.$$

Dijeljenjem posljednje jednadžbe sa XYZ i korištenjem početnih uvjeta dobivamo sljedeći početni problem

$$\begin{aligned} \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{Z''}{Z} + \lambda &= 0, \\ X(0) = X(l_1) = 0, \quad Y(0) = Y(l_2) = 0, \quad Z(0) = Z(l_3) = 0. \end{aligned} \quad (4.166)$$

Iz (4.166) dobivamo sljedeće tri jednadžbe

$$X'' + k_1^2 X = 0, \quad Y'' + k_2^2 Y = 0, \quad Z'' + k_3^2 Z = 0,$$

gdje je

$$k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = \lambda.$$

Netrivijana rješenja ovih jednadžba su, redom,

$$X_n(x) = \sin k_1 x, \quad Y_m(y) = \sin k_2 y, \quad Z_p(z) = \sin k_3 z,$$

pri čemu je

$$k_1 = \frac{n\pi}{l_1}, \quad k_2 = \frac{m\pi}{l_2}, \quad k_3 = \frac{p\pi}{l_3},$$

pa je

$$\begin{aligned} v_{mnp} &= \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \sin \frac{p\pi z}{l_3}, \\ T_{mnp} &= e^{k\lambda t} a_{mnp} = e^{-k(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)t} a_{mnp}. \end{aligned}$$

Sada je

$$u(x, y, z, t) = \sum_{m,n,p=1}^{\infty} a_{mnp} e^{-k(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2)t} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \sin \frac{p\pi z}{l_3}.$$

4.5 Jednadžba provođenja topline

Iz početnog uvjeta

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z) = \sum_{m,n,p=1}^{\infty} a_{mnp} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \sin \frac{p\pi z}{l_3},$$

dobivamo

$$a_{mnp} = \frac{8}{l_1 l_2 l_3} \int_0^{l_1} \int_0^{l_2} \int_0^{l_3} \varphi(x, y, z) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \sin \frac{p\pi z}{l_3} dz dy dx.$$

◆

Primjer 4.5.8. Koeficijent difuzije za ugljen-monoksid (CO) u zraku je $D = 0.208 \text{ cm}^2/\text{s}$. Razmatramo cijev dužine 100 cm, ispunjenu zrakom, koja u početku ne sadrži CO. Pretpostavljamo da su oba kraja cijevi otvorena prema velikim rezervoarima zraka, koji također ne sadrže CO, i da se CO proizvodi unutar cijevi konstantnom brzinom 10^{-7} g/cm^3 po sekundi.

Rješenje. Označimo sa $u(x, t)$, $0 < x < 100$, koncentraciju CO u zraku, izraženu u jedinicama g/cm^3 , i modeliramo u kao rješenje početno-rubnog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= 10^{-7}, & 0 < x < 100, & t > 0, \\ u(x, 0) &= 0, & 0 < x < 100, \\ u(0, t) &= 0, & t > 0, \\ u(100, t) &= 0, & t > 0. \end{aligned} \tag{4.167}$$

Želimo odrediti evoluciju koncentracije CO u cijevi. Rješenje u tražimo u obliku

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \left(\frac{n\pi x}{100} \right).$$

Tada je

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) - D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(T'_n(t) + \frac{Dn^2\pi^2}{100^2} T_n(t) \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{100} \right),$$

pa imamo

$$10^{-7} = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin \left(\frac{n\pi x}{100} \right).$$

Razvijanjem konstante 10^{-7} u Fourierov sinusni red dobivamo da je

$$c_n = \frac{2}{100} \int_0^{100} 10^{-7} \sin \left(\frac{n\pi x}{100} \right) dx = \frac{2 \cdot 10^{-7} (1 - (-1)^n)}{n\pi}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

4.5 Jednadžba provođenja toplote

Da bismo našli koeficijente $T_n(t)$ funkcije $u(x, t)$, moramo riješiti početni problem

$$T'_n(t) + \frac{Dn^2\pi^2}{100^2}T_n(t) = c_n, \quad T_n(0) = 0. \quad (4.168)$$

Koristeći formulu za rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda sa konstantnim koeficijentima dobivamo

$$T_n(t) = e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{100^2}t} \left(C_n + c_n \int e^{\frac{Dn^2\pi^2}{100^2}t} dt \right) = C_n e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{100^2}t} + \frac{c_n 100^2}{Dn^2\pi^2}$$

Iz početnog uvjeta slijedi da je $C_n = -\frac{c_n 100^2}{Dn^2\pi^2}$, pa je rješenje početnog problema (4.168) dato sa

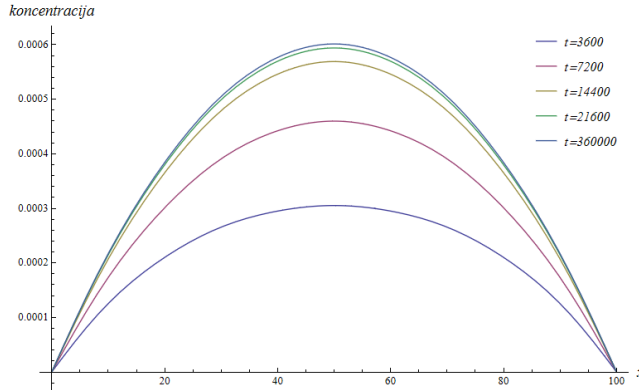
$$T_n(t) = \frac{c_n 100^2}{Dn^2\pi^2} \left(1 - e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{100^2}t} \right).$$

Rješenje početno-rubnog problema (4.167) je dato sa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 10^{-3} (1 - (-1)^n)}{Dn^3\pi^3} \left(1 - e^{-\frac{Dn^2\pi^2}{100^2}t} \right) \sin \left(\frac{n\pi x}{100} \right).$$

Za parno n je $c_n = 0$, pa u sumi učestvuju samo neparni članovi.

Na slici 4.19 prikazujemo koncentraciju CO u cijevi u vremenima $t = 3600$ (1 sat), $t = 7200$ (2 sata), $t = 14400$ (4 sata), $t = 21600$ (6 sati) i $t = 360000$ (100 sati). Graf sugerira da se koncentracija približava stacionarnom stanju (čitalac treba primijetiti koliko se malo koncentracija mijenja između 4 sata i 100 sati proteklog vremena). Prvih deset članova Fourierovog reda korišteno je za konstruisanje navedenih krivih.



Slika 4.19: Koncentracija CO u cijevi iz Primjera 4.5.8 nakon 1, 2, 4, 6 i 100 sati.

◆

4.6 Zadaci za samostalan rad

Primjedba 4.5.7. U posljednjem primjeru, kada $t \rightarrow \infty$, eksponencijalni član u $T_n(t)$ teži nuli, pa rješenje konvergira ka stacionarnom rješenju $u_\infty(x)$ problema

$$-Du_\infty'' = 10^{-7}, \quad u_\infty(0) = u_\infty(100) = 0,$$

odakle slijedi

$$u_\infty(x) = \frac{10^{-7}}{2D} x(100 - x).$$

Lako se provjeri da je razvoj funkcije $u_\infty(x) = \frac{10^{-7}}{2D} x(100 - x)$ u Fourierov sinusni red upravo jednak

$$\frac{2 \cdot 10^{-3}}{D\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{n^3} \sin\left(\frac{n\pi x}{100}\right).$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

1. Koristeći operatorsku metodu riješite sljedeće parcijalne diferencijalne jednačbe:

- (i) $u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = \sin x$;
- (ii) $u_{xx} - u_{xy} - 6u_{yy} = xy$;
- (iii) $u_{xx} - u_{yy} = \sin x \cos 2y$;
- (iv) $u_{xxx} - 3u_{xxy} + 4u_{yyy} = e^{x+2y}$;
- (v) $u_{xxxx} - 2u_{xxyy} + u_{yyyy} = 0$;
- (vi) $2u_{xx} + u_{yy} - 3u_y = 3\cos(3x - 2y)$;
- (vii) $u_{xx} - u_{xy} + u_y - u = \cos(x + 2y) + e^y$;
- (viii) $(D_1 + D_2 - 1)(D_1 + 3D_2 - 2)u = xy + e^{2x+3y}$.

2. Odrediti tip parcijalne diferencijalne jednačbe i svesti je na kanonski oblik:

- (i) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2 \sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - (3 + \cos^2 x) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;
- (ii) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y \frac{\partial u}{\partial x} = 0$;
- (iii) $y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$;
- (iv) $y \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0$.

3. Odrediti tip parcijalne diferencijalne jednačbe i svesti je na kanonski oblik. Ako je moguće odrediti opće rješenje:

- (i) $4y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x^2 y \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^3 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 4y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- (ii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - (1+y^2)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2y(1+y^2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0;$
- (iii) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + xy \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{2x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{x}{2} \frac{\partial u}{\partial y} = 16\sqrt{|y|}, \quad x \neq 0;$
- (iv) $x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (x-1) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$

4. Riješiti jednađbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

za sljedeće funkcije f, g :

- (i) $f(x) = 3 \sin(\pi \frac{x}{L}) - \sin(4\pi \frac{x}{L}), \quad g(x) = \frac{1}{2} \sin(2\pi \frac{x}{L});$
- (ii) $f(x) = \sin^3(\frac{\pi x}{L}), \quad g(x) = 0;$
- (iii) $f(x) = 0, \quad g(x) = \sin(\pi \frac{x}{L}) \cos^2(\pi \frac{x}{L});$
- (iv) $f(x) = \sin^3(\frac{\pi x}{L}), \quad g(x) = \sin(\pi \frac{x}{L}) \cos^2(\pi \frac{x}{L}).$

5. Riješiti jednađbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), \end{aligned}$$

za sljedeće funkcije f, g :

- (i) $f(x) = x^2, \quad g(x) = x;$
- (ii) $f(x) = \exp(-x^2), \quad g(x) = 2ax \exp(-x^2);$
- (iii) $f(x) = 0, \quad g(x) = 1;$
- (iv) $f(x) = 1, \quad g(x) = 0;$
- (v) $f(x) = \sin x, \quad g(x) = a \cos x;$
- (vi) $f(x) = 0, \quad g(x) = \sin^2 x.$

6. Riješiti jednađbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \geq 0, \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \\ u(x, 0) &= x^3, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0. \end{aligned}$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

7. Neka je u rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

Koristeći princip maksimuma dokazati da vrijedi

$$\min_{y \in \mathbb{R}} f(y) \leq u(x, t) \leq \max_{y \in \mathbb{R}} f(y), \quad \forall x, t \in \mathbb{R}.$$

8. Dokazati da sljedeći problem sa početnim i rubnim uvjetima nema rješenja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x) = x(L - x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) = 0,\end{aligned}$$

Dokazati da rješenje postoji ukoliko zamijenimo funkcije f i g .

Uputstvo: Na osnovu datih uvjeta primijetiti da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(0, 0) \neq a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, 0).$$

9. Riješiti sljedeće jednadžbe

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \cos^2 x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \sin^2 x.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, \pi], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= -1, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, t) = 1, \\ u(x, 0) &= \frac{x^2}{\pi} - x + 2 \cos 3x, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \cos x.\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \cos x, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

(iv)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^{-t} \cos x, \quad x, t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x).\end{aligned}$$

(v)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos(\omega t) \sin(3x), \quad \omega > 0, \quad x \in [0, \frac{\pi}{2}], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(\frac{\pi}{2}, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.\end{aligned}$$

10. Naći formalno rješenje jednadžbi

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, L], \quad t \in \mathbb{R}, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(L, t) = \sin(\omega t), \\ u(x, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{\omega}{2L} x^2.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad x, y \in [0, 1], \quad t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 1, t) = 0, \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(1, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, y, 0) = x(x-1)y(y-1).\end{aligned}$$

11. Naći dvije harmonijske funkcije čiji proizvod nije harmonijska funkcija.

12. Provjeriti da li su realni i imaginarni dijelovi funkcije $(x+iy)^3$ harmonijske funkcije.

13. (i) Provjeriti da kompleksna funkcija $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ zadovoljava jednadžbu $\frac{\partial f}{\partial x} + i \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ ako i samo ako realne funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

- (ii) Dokazati da su svake funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y)$ iz $\mathcal{C}^2$ harmonijske ukoliko zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednačbe.
- (iii) Pretpostavimo da funkcije $u(x, y)$ i $v(x, y) \in \mathcal{C}^2$ zadovoljavaju Cauchy-Riemannove jednačbe. Dokazati da to vrijedi i za funkcije U i V gdje je

$$U(x, y) + iV(x, y) = (x + iy)(u + iv).$$

- (iv) Zaključiti da su realni i imaginarni dio funkcije $(x + iy)^n$ harmonijske funkcije za svaki prirodni broj n .

14. Riješiti jednačbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, L), \quad y \in (0, M), \\ u(x, 0) &= f(x), \quad u(x, M) = g(x), \quad x \in [0, L], \\ u(0, y) &= h(y), \quad u(L, y) = k(y), \quad y \in [0, M],\end{aligned}$$

za sljedeće funkcije f , g , h i k :

- (i) $f(x) = 9 \sin \frac{8\pi x}{L}$, $g(x) = h(y) = k(y) = 0$;
(ii) $f(x) = 0$, $g(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$, $h(y) = k(y) = 0$;
(iii) $f(x) = 9 \sin \frac{8\pi x}{L}$, $g(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$, $h(y) = k(y) = 0$;
(iv) $f(x) = g(x) = 0$, $h(y) = 9 \sin \frac{8\pi y}{M}$, $k(y) = \sin \frac{\pi y}{M}$.

15. Riješiti jednačbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y \in (0, \pi), \\ u(x, 0) &= \sin(x), \quad u(x, \pi) = \sin(x), \quad x \in [0, \pi], \\ u(0, y) &= \sin(y), \quad u(\pi, y) = \sin(y), \quad y \in [0, \pi].\end{aligned}$$

16. Riješiti jednačbu

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, 1), \quad y \in (0, 1), \\ u(x, 0) &= 3 \sin(\pi x) + x, \quad u(x, 1) = 3x - 1, \quad x \in [0, 1], \\ u(0, y) &= \sin(2\pi y) - y, \quad u(1, y) = y + 1, \quad y \in [0, 1].\end{aligned}$$

Uputstvo: Posmatrati funkciju U u obliku

$$U(x, y) = a + bx + cy + dxy,$$

takvu da je

$$U(0, 0) = 0, U(1, 0) = 1, U(0, 1) = -1, U(1, 1) = 2.$$

Napisati rješenje u u obliku $u(x, y) = v(x, y) + U(x, y)$ za odgovarajuću funkciju v .

4.6 Zadaci za samostalan rad

17. Dokazati da je formalno rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x \in (0, \pi), & y \in (0, \pi), \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, \pi) &= x(\pi - x), & x \in [0, \pi], \\ u(0, y) &= 0, & u(\pi, y) &= 0, & y \in [0, \pi],\end{aligned}$$

dato sa

$$u(x, y) = \frac{\pi}{8} \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)^{-3} \sin((2k+1)x) \frac{\sinh((2k+1)y)}{\sinh((2k+1)\pi)}.$$

18. Naći rješenje Neumannovog problema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x \in (0, \pi), & y \in (0, \pi), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= \cos x - 2 \cos^2 x + 1, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi) &= 0, & x \in [0, \pi], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y) &= 0, & y \in [0, \pi].\end{aligned}$$

19. Naći formalno rješenje Neumannovog problema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x \in (0, L), & y \in (0, M), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, M) &= g(x), & x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) &= 0, & y \in [0, M],\end{aligned}$$

gdje funkcija g zadovoljava $\int_0^L g(x) dx = 0$.

20. Dokazati de je svako rješenje Neumannovog problema:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, & x \in (0, L), & y \in (0, M), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial y}(x, M) &= 0, & x \in [0, L], \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y) &= 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(L, y) &= 0, & y \in [0, M],\end{aligned}$$

konstantna funkcija.

Uputstvo: Dokazati da rješenje u zadovoljava:

$$\frac{\partial(u \frac{\partial u}{\partial x})}{\partial x} + \frac{\partial(u \frac{\partial u}{\partial y})}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2.$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

Integriranjem dobija se

$$\int_0^M \int_0^L \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right) dx dy = \int_0^M (u(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}(x, y)) \Big|_{x=0}^{x=L} dy +$$
$$\int_0^L (u(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}(x, y)) \Big|_{y=0}^{y=M} dx = 0.$$

Potom, zaključiti da je

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

21. Riješiti Dirichletov problem u polarnim koordinatama:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r^{-1} \frac{\partial U}{\partial r} + r^{-2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} &= 0, r \in (1, 2), \\ U(2, \theta) &= f(\theta), \quad U(1, \theta) = g(\theta), \\ U(r, \theta) &= U(r, \theta + 2\pi), \end{aligned}$$

za sljedeće funkcije f i g :

- (i) $f(\theta) = 1 + 2 \cos \theta + \cos(2\theta)$, $g(\theta) = \sin(2\theta)$;
- (ii) $f(\theta) = \sin^2 \theta$, $g(\theta) = \sin \theta \cos \theta$;
- (iii) $f(\theta) = a$, $g(\theta) = b$;
- (iv) $f(\theta) = a \sin(3\theta)$, $g(\theta) = b \sin(3\theta)$;
- (v) $f(\theta) = 1 + \cos(\theta) - 17 \sin(8\theta)$, $g(\theta) = 0$.

22. Riješiti Dirichletov problem za vrijednosti funkcije f navedene u prethodnom zadatku

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x^2 + y^2 < 4, \\ U(2, \theta) &= f(\theta), \quad f(\theta + 2\pi) = f(\theta). \end{aligned}$$

23. Naći rješenja Neumannovog problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x^2 + y^2 < r_0^2, \\ \frac{\partial U}{\partial r}(r_0, \theta) &= f(\theta), \quad U(r, \theta + 2\pi) = U(r, \theta), \end{aligned}$$

gdje je

$$f(\theta) = \sum_{n=1}^N (a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)).$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

24. Dokazati da sljedeći Dirichletov problem ima više od jednog rješenja:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= 0, \quad x \in (0, \pi), \quad y > 0, \\ u(x, 0) &= 0, \quad u(0, y) = 0, \quad u(\pi, y) = 0, \quad x \in [0, \pi], \quad y \geq 0.\end{aligned}$$

Objasnite zašto rješenje nije jedinstveno.

25. Provjeriti da su funkcije:

$$u_1(x, y) = 1 + \log(x^2 + y^2), \quad u_2(x, y) = 1 - \log(x^2 + y^2)$$

harmonijske, jednake na kružnici, a različite unutar kruga. Da li je to suprotno principu maksimuma?

26. Riješiti jednačinu

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \quad x \in (0, 3\pi), \quad y \in (0, 2\pi), \quad z \in (0, 1), \\ u(x, y, 0) &= \sin x \sin y, \quad u(x, y, 1) = 0, \\ u(0, y, z) &= u(x, 0, z) = u(3\pi, y, z) = u(x, 2\pi, z) = 0.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \quad x, y, z \in (0, \pi), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi, y, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, 0, z) &= \frac{\partial u}{\partial y}(x, \pi, z) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, 0) &= \cos x \sin^2 y, \quad \frac{\partial u}{\partial z}(x, y, \pi) = 0.\end{aligned}$$

27. Riješiti jednačinu

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad x \in [0, 3], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= 0, \quad u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x),\end{aligned}$$

za sljedeće vrijednosti funkcije f :

(i) $f(x) = 5 \sin(4\pi x) + 2 \sin(10\pi x);$

(ii) $f(x) = \sin^3 \frac{\pi x}{3};$

4.6 Zadaci za samostalan rad

(iii) $f(x) = 9 \cos(\frac{\pi}{6}(2x + 3))$.

28. Neka je funkcija u data u obliku

$$u(x, t) = D \cdot b(t)f(b(t)^2x^2),$$

gdje je D pozitivna konstanta, a f i b pozitivne funkcije.

Pretpostavimo da vrijedi $\int_{-\infty}^{+\infty} D \cdot f(x^2)dx = 1$.

(i) Dokazati da je $\int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) = 1$, za svaki t .

(ii) Ako funkcija u zadovoljava jednadžbu $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ i ako $b(t) \rightarrow \infty$ kada $t \downarrow 0$, dokazati da funkcija u ima oblik

$$u(x, t) = (4\pi kt)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{4kt}}.$$

Uputstvo: Uvrstiti izraz funkcije $u(x, t) = D \cdot b(t)f(b(t)^2x^2)$ u jednadžbu $u_t = ku_{xx}$. Odrediti za $x = 0$ funkciju b kao rješenje odgovarajuće obične diferencijalne jednadžbe. To rješenje možemo napisati u obliku $b(t) = (4k\alpha t)^{-\frac{1}{2}}$, gdje je $\alpha = -\frac{f'(0)}{f(0)} > 0$. Koristiti smjenu $y = b(t)^2x^2$ za koju vrijedi $f'(y) + \alpha f(y) = -2y(f''(y) + \alpha f'(y))$. Tada, ako je funkcija g data sa $g(y) = f'(y) + \alpha f(y)$, onda je $g(y) = -2yg'(y)$. Odrediti funkciju g te zaključiti da je $f(y) = Ce^{-\alpha y}$.

29. Riješiti jednadžbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [-\pi, \pi], & t \geq 0, \\ u(-\pi, t) &= u(\pi, t), & \frac{\partial u(-\pi, t)}{\partial x} &= u_x(\pi, t), \\ u(x, 0) &= f(x), \end{aligned}$$

za sljedeće vrijednosti funkcije f :

(i) $f(x) = 5 \cos x + 3 \sin 8x$;

(ii) $f(x) = 4 + \cos^2(3x)$;

(iii) $f(x) = (\sin x + 2 \cos x)^2$.

30. (i) Neka je $u(x, t) = e^{rx+st}$ partikularno rješenje jednadžbe $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, gdje su r i s konstante. Dokazati da je $s = kr^2$.

(ii) Neka je $u(x, t) = u_1(x, t) + iu_2(x, t)$ kompleksno rješenje jednadžbe $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Dokazati da su realne funkcije $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ također rješenja iste jednadžbe.

4.6 Zadaci za samostalan rad

Zaključiti da su funkcije

$$u_1(x, t) = e^{\lambda x} \cos(\lambda x + 2k\lambda^2 t),$$

$$u_2(x, t) = e^{\lambda x} \sin(\lambda x + 2k\lambda^2 t),$$

rješenja jednačbe $\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. (Koristiti (i) za $r = \lambda(1 \pm i)$.)

31. Pomoću zadatka 4. (ii) odrediti rješenje jednačbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \geq 0, t \geq 0, \\ u(0, t) &= \cos(\omega t), \end{aligned}$$

koje zadovoljava sljedeće osobine

$$(i) \quad u(x, t) \rightarrow 0 \text{ kada } x \rightarrow \infty,$$

$$(ii) \quad u(x, t + \frac{2\pi}{\omega}) = u(x, t).$$

Dokazati da rješenje nije jedinstveno ako navedene osobine nisu istovremeno ispunjene.

32. Provjeriti da je $u(x, t) = e^{-ht}w(x, t)$, $h > 0$, rješenje jednačbe

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu,$$

ako je $\frac{\partial w}{\partial t} = k \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$.

Naći rješenje jednačbe

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu, & x \in [0, L], t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(L, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sum_n b_n \sin \frac{n\pi x}{L}. \end{aligned}$$

33. Neka je $v \in \mathcal{C}^2$ funkcija koja zadovoljava jednačbu

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, & x \in [0, L], t \geq 0, \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0. \end{aligned}$$

Dokazati da za svaka dva broja $t_2 \geq t_1 \geq 0$, vrijedi:

$$\int_0^L (v(x, t_2))^2 dx \leq \int_0^L (v(x, t_1))^2 dx. \quad (4.169)$$

4.6 Zadaci za samostalan rad

Uputstvo: Dokazati da je $F'(t) \leq 0$ gdje je $F(t) = \int_0^L (v(x, t))^2 dx$.

Dokazati da (4.169) vrijedi ako zamijenimo rubne uvjete sa:

- (i) $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = \frac{\partial v}{\partial x}(L, t) = 0$;
- (ii) $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = v(L, t) = 0$;
- (iii) $\frac{\partial v}{\partial x}(0, t) = h \cdot v(0, t)$; $h > 0$, $v(L, t) = 0$.

34. Koristeći princip maksimuma dokazati da rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, \pi], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= \sin x + \frac{1}{2} \sin(2x),\end{aligned}$$

zadovoljava nejednakosti $0 \leq u(x, t) \leq \frac{3\sqrt{3}}{4}$.

35. Ako je $u(x, t)$ rješenje jednadžbe

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, \pi], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 5 \sin(3x) - 3 \sin(5x),\end{aligned}$$

naći najveći broj C i najmanji broj D tako da je $C \leq u(x, t) \leq D$.

36. Neka je data jednadžba

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in [0, 2], \quad t \geq 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) &= -\alpha, & \frac{\partial u}{\partial x}(2, t) = 0, \\ u(x, 0) &= -\alpha x \left(1 - \frac{x}{4}\right),\end{aligned}$$

gdje je $\alpha > 0$ proizvoljan broj.

- (i) Provjeriti da je svako rješenje oblika $u(x, t) = Ax^2 + Bx + Ct$ dato sa $u(x, t) = -\alpha x(1 - \frac{x}{4})$.
- (ii) Neka su α_1 i α_2 različiti pozitivni brojevi. Neka su $u_1(x, t)$ i $u_2(x, t)$ odgovarajuća rješenja date jednadžbe respektivno za $\alpha = \alpha_1$ i $\alpha = \alpha_2$.

4.6 Zadaci za samostalan rad

Primijetiti da vrijedi:

$$\begin{aligned} |u_1(x, 0) - u_2(x, 0)| &\leq |\alpha_1 - \alpha_2|, \\ \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(0, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(0, t) \right| &\leq |\alpha_1 - \alpha_2|, \\ \left| \frac{\partial u_1}{\partial x}(2, t) - \frac{\partial u_2}{\partial x}(2, t) \right| &= 0 \leq |\alpha_1 - \alpha_2|. \end{aligned}$$

S druge strane,

$$|u_1(x, t) - u_2(x, t)| \rightarrow \infty, \quad t \rightarrow \infty.$$

Zaključiti da analogon principa maksimuma ne vrijedi ako su rubni uvjeti dati u obliku izvoda.

37. Neka je data jednačba

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad x \in [0, 3], \quad t \geq 0, \\ u(0, t) &= u(3, t) = 0, \\ u(x, 0) &= 6 \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) + 2 \sin(\pi x). \end{aligned}$$

- (i) Naći jedinstveni broj $t = t_0 > 0$ za kojeg $u\left(\frac{3}{2}, t\right)$ uzima najveću vrijednost.
- (ii) Za dati t_0 dokazati da $u(x, t_0)$ uzima najveću vrijednost samo za $x = \frac{3}{2}$.
- (iii) Koristeći princip maksimuma dokazati da za svaki $\varepsilon > 0$ postoje tačke $(x, t) \neq \left(\frac{3}{2}, t_0\right)$ iz $\left(\frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2} + \varepsilon\right) \times (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ za koje vrijedi $u(x, t) \geq u\left(\frac{3}{2}, t_0\right)$.
- (iv) Dokazati da $u\left(\frac{3}{2}, t_0\right)$ nije lokalni maksimum funkcije u .

Uputstvo: Za svaki $t < t_0$ označimo sa $x(t)$ najmanji broj u $[0, 3]$ za kojeg je $u_x(x(t), t) = 0$. Provjeriti da je

$$\frac{d}{dt}u(x(t), t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x(t), t)x'(t) + \frac{\partial u}{\partial t}(x(t), t) = 9 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x(t), t).$$

Dokazati da je

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x(t), t) < 0, \quad \forall t < t_0,$$

odakle slijedi da je

$$u(x(t), t) > u\left(\frac{3}{2}, t_0\right), \quad \forall t < t_0.$$

38. Riješiti sljedeće jednačbe

(i)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= 6 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad x \in [0, 2], \quad y \in [0, 3], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 3, t) = 0, \\ u(0, y, t) &= 0, \quad u(2, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= 4 \sin \frac{\pi x}{2} - 2 \sin(\pi x) \sin \frac{2\pi y}{3}.\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad u(x, 1, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(1, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= 2 \sin^2(2\pi x) \sin(\pi y).\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad x \in [0, 1], \quad y \in [0, 1], \quad t \geq 0, \\ u(x, 0, t) &= 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, 1, t) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) &= 0, \quad u(1, y, t) = 0, \\ u(x, y, 0) &= \sin \left(\pi \frac{3x + y}{2} \right) - \sin \frac{3\pi x}{2} \cos \frac{\pi y}{2}.\end{aligned}$$

Metoda konačnih razlika za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi

Numeričko rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednačbi igra ključnu ulogu u rješavanju stvarnih problema u različitim područjima, uključujući fiziku, različite probleme u inženjerstvu, finansijama i dr. Tačna analitička rješenja PDJ često nije moguće dobiti zbog njihove složenosti, oblika oblasti na kojoj se posmatraju i prirode uvjeta na rubovima oblasti posmatranja. Kao rezultat toga, numeričke metode, poput metode konačnih razlika, metode konačnih elemenata, metode konačnih volumena, spektralne metode, metode spektralnih elemenata i metode kolokacije, široko se primjenjuju za aproksimaciju rješenja.

U ovom poglavlju cilj nam je opisati metodu konačnih razlika kao jedan od najstarijih i često korištenih metoda i njegovu primjenu na različite vrste PDJ, uključujući eliptičke, paraboličke i hiperboličke jednačbe. Iako je ova metoda veoma stara i druge pobrojane metode su bolje u smislu oblika domena, općih koeficijenta i sl., ova metoda je i dalje korisna za posmatrati iz nekoliko razloga, od kojih su: jednostavnost za razumijevanje i implementaciju i pruža brzo numeričko rješenje i ideju kako bi rješenje moglo izgledati; još uvijek se koristi u (velikim) istraživačkim kodovima u industriji; količnici razlike, služe kao osnova u svim vrstama softverskih implementacija numeričkih metoda za izračunavanje običnih i parcijalnih diferencijalnih jednačbi u kojima se izvodi aproksimacija.

Osnovna ideja iza bilo koje numeričke metode za aproksimaciju rješenja PDJ, je da se zamijeni *neprekidni* PDJ problem sa *diskretnim* problemom. Neprekidni problem PDJ postavlja se na beskonačno-dimenzionalnom prostoru, tj. rješenje leži u nekom beskonačno-dimenzionalnom prostoru. S druge strane, diskretni

problem se postavlja na konačno-dimenzionalnom prostoru, tj. njegovo rješenje leži u nekom konačno-dimenzionalnom prostoru.

Kod metode konačnih razlika aproksimira se diferencijalni operator, a kod metode konačnih elemenata aproksimira se rješenje. U metodi konačnih volumena, jednačba se napiše u konzervacijskom obliku, zatim se aproksimira zakon konzervacije. Kod spektralne metode aproksimira se rješenje, kao i kod metode spektralnih elemenata. Ideja iza metode kolokacije je da se izabere konačno-dimenzionalni prostor (bazni prostor) kandidata za rješenja (obično su to polinomi odgovarajućeg stepena) i tačke u oblasti (domena), koje se obično zovu *kolokacijskim* tačkama, a zatim se bira rješenje koje zadovoljava datu jednačbu u kolokacijskim tačkama.

5.1 O metodi konačnih razlika

Najčešće korištena metoda za dobivanje aproksimativnih rješenja određenih PDJ je *metoda konačnih razlika*. U nastavku preciznije razmatramo njene osnovne pojmove: mrežu i diskretizaciju, aproksimaciju derivacija konačnim razlikama, te fundamentalne koncepte konzistentnosti, stabilnosti i konvergencije. Ova metoda se zato često zove i *metoda mreža*.

5.1.1 Mreža i diskretizacija

Da bismo primijenili metodu konačnih razlika, neprekidne nezavisne varijable $x, y, z, t, \dots$ zamjenjujemo diskretnim varijablama $x_i, y_j, z_m, t_n, \dots$

$$x_i = x_0 + ih, \quad i = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$y_j = y_0 + jk, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Skup svih ovih tačaka (x_i, y_j) nazivamo *mreža (grid)* i ona predstavlja diskretizaciju prostora $\mathbb{R}^2$. Brojeve h i k nazivamo *prostornim koracima mreže*, a tačke (x_i, y_j) nazivamo *čvorovi mreže*. Dva čvora mreže nazivamo *susjednim* ako se razlikuju za jedan korak u jednoj koordinati.

U praksi, domen Ω se najčešće aproksimira *pravilnom (uniformnom) mrežom* čvorova (slika 5.1). Na primjer, u ravni posmatramo mrežu

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j); x_{i+1} - x_i = h_x, y_{j+1} - y_j = h_y\},$$

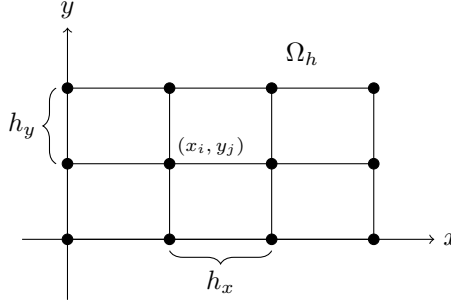
gdje su h_x i h_y koraci mreže duž koordinatnih osa. U posebnom slučaju $h_x = h_y = h$ dobivamo *kvadratnu mrežu*.

Ako parcijalna diferencijalna jednačba uključuje vrijeme t , uvodi se i diskretna vremenska mreža

$$t_n = t_0 + n \Delta t, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

5.1 O metodi konačnih razlika

gdje je $\Delta t > 0$ vremenski korak.



Slika 5.1: Pravougaona (uniformna) mreža Ω_h sa koracima h_x i h_y .

5.1.2 Konačne razlike kao aproksimacija derivacija

Označimo sa $u_{i,j}$, $u_{i-1,j}$, $u_{i,j-1}$, $u_{i+1,j}$, $u_{i,j+1}$ odgovarajuće vrijednosti za $u(x_i, y_j)$, $u(x_{i-1}, y_j)$, $u(x_i, y_{j-1})$, $u(x_{i+1}, y_j)$, $u(x_i, y_{j+1})$. Izvodi se zamjenjuju odgovarajućim količnicima:

- Diferenciranje unaprijed

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k};$$

- Diferenciranje unazad

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k};$$

- Centralno diferenciranje

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} \approx \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k};$$

- Centralno diferenciranje za drugi izvod

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}.$$

Kao što je uobičajeno, razmatramo sljedeću parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\begin{aligned} L(u) = & A(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + B(x, y) \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + C(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \\ & + D(x, y) \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + G(x, y) u(x, y) = F(x, y), \end{aligned}$$

5.1 O metodi konačnih razlika

gdje su A, B, C, D, G, F neprekidne funkcije na skupu $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, i na njegovom rubu $\partial\Omega$. Zamjenom svakog od izvoda odgovarajućim koeficijentom razlike, dobiva se *diferentna jednadžba* (koju često zovemo i jednadžba razlika) za $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ona predstavlja sistem algebarskih jednadžbi, čija se rješenja mogu smatrati aproksimativnim rješenjima razmatranog problema u čvorovima mreže.

Ako označimo sa $A_{i,j}, B_{i,j}, C_{i,j}, D_{i,j}, G_{i,j}, F_{i,j}$, za $i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, vrijednosti funkcija A, B, C, D, G i F u tačkama (x_i, y_j) , dobivamo sljedeću diferentnu (diskretnu) jednadžbu

$$L_{h,k}(u_{i,j}) \equiv A_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + B_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} + C_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} + D_{i,j} \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2k} + G_{i,j} u_{i,j} = F_{i,j}.$$

Aproksimacije derivacija konačnim razlikama imaju određeni *red lokalne tačnosti*. Neka je $u = u(x, y)$ dovoljno glatka funkcija u okolini tačke (x_i, y_j) (na primjer $u \in \mathcal{C}^4$ u okolini tačke (x_i, y_j) po varijabli x uz fiksno $y = y_j$). Razvijmo funkciju u u Taylorov red oko (x_i, y_j) u tačkama $x_{i+1,j} = (x_i + h, y_j)$ i $x_{i-1,j} = (x_i - h, y_j)$. Imamo:

$$u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h u_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4),$$

$$u(x_i - h, y_j) = u(x_i, y_j) - h u_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2} u_{xx}(x_i, y_j) - \frac{h^3}{6} u_{xxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4).$$

Oduzimanjem dobivamo

$$u_{i+1,j} - u_{i-1,j} = 2h u_x(x_i, y_j) + \frac{h^3}{3} u_{xxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^5).$$

Dijeljenjem sa $2h$ slijedi

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = u_x(x_i, y_j) + \frac{h^2}{6} u_{xxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4) = u_x(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2).$$

Dakle, centralna razlika za prvi izvod ima oblik

$$\frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2h} = u_x(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2),$$

što pokazuje da je njena lokalna greška reda $\mathcal{O}(h^2)$, pa je shema *drugog reda tačnosti*.

Red tačnosti centralne razlike za drugi izvod dobivamo razvijanjem $u(x_i \pm h, y_j)$ do reda h^4 :

$$u(x_i + h, y_j) = u + h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} + \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + \mathcal{O}(h^5),$$

$$u(x_i - h, y_j) = u - h u_x + \frac{h^2}{2} u_{xx} - \frac{h^3}{6} u_{xxx} + \frac{h^4}{24} u_{xxxx} + \mathcal{O}(h^5).$$

5.1 O metodi konačnih razlika

Sabranje posljednje dvije relacije i oduzimanje $2u$ daje:

$$u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} = h^2 u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^4}{12} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^6).$$

Dijeljenjem sa h^2 slijedi

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} = u_{xx}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} u_{xxxx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^4) = u_{xx}(x_i, y_j) + \mathcal{O}(h^2),$$

pa je lokalna greška opet reda $\mathcal{O}(h^2)$.

Analognim postupkom može se pokazati da su unaprijed i unazad razlike za prvi i drugi izvod (po x) samo prvog reda tačnosti ($\mathcal{O}(h)$). Slična razmatranje vrijede i za red lokalne greške po y . Napomenimo da izbor reda tačnosti aproksimacije direktno utiče na ukupnu tačnost numeričke metode i brzinu asimptotske konvergencije numeričkog rješenja.

5.1.3 Konzistentnost, stabilnost i konvergencija

U prethodnom dijelu vidjeli smo da različite sheme konačnih razlika imaju različit red lokalne tačnosti. Međutim, visoka lokalna tačnost sama po sebi ne garantuje da će numeričko rješenje zaista aproksimirati tačno rješenje polaznog diferencijalnog problema kada $h, k, \Delta t \rightarrow 0$. Drugim riječima, dobra aproksimacija derivacija ne znači automatski da je cjelokupna numerička metoda ispravna. Zbog toga je pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi numeričkim metodama nužno razmotriti širi okvir analize greške i ponašanja numeričke sheme. U nastavku uvodimo tri ključna pojma, a to su konzistentnost, stabilnost i konvergencija, te razmatramo njihovu međusobnu vezu, koja je formalizirana u Lax-Richtmyerovom teoremu.

Pri rješavanju parcijalnih diferencijalnih jednačbi numeričkim metodama, moramo se baviti sa tri fundamentalna izvora greške: greškom aproksimacije, greškom diskretizacije i greškom zaokruživanja. Greška aproksimacije pojavljuje se zbog toga što numerička shema rješava problem koji nije tačno isti kao problem koji pokušavamo riješiti. Aproksimativno rješenje naše PDJ, dobiveno numeričkom shemom, može se posmatrati kao tačno rješenje nekog drugog problema. Da bismo okarakterisali šta numerička shema zaista radi, potrebno je razmotriti tri osnovna pitanja:

1. **Konzistentnost.** Numerička shema se naziva *konzistentnom* ako reprezentacija konačnih razlika konvergira ka PDJ koju pokušavamo riješiti, kada prostorni i vremenski koraci teže nuli. Kada se prostorna i vremenska diskretizacija razmatraju odvojeno (što je najčešći slučaj), konzistentnost se ne čini relevantnom, ali se mora provjeriti kada se ove diskretizacije ne posmatraju odvojeno. Drugim riječima, diskretni operator $L_{h,k}$ aproksimira

5.1 O metodi konačnih razlika

diferencijalni operator L u smislu da lokalna greška odsjecanja, definirana kao

$$\tau_{i,j}(h, k) := L_{h,k}(u(x_i, t_j)) - L(u(x_i, t_j)),$$

teži nuli kada $h, k \rightarrow 0$.

Važno je spomenuti da se konzistentnost provjerava analitički, a ne numerički. Pretpostavimo da postoji dovoljno glatko tačno rješenje $u(x, t)$ datog problema. U diskretnu shemu $L_{h,k}(u_{i,j}) = 0$ uvrsti se funkcija $u(x_i, t_j)$, a razlike se razviju Taylorovim redom u okolini tačke (x_i, t_j) . Ako dobijemo da je

$$\tau_{i,j}(h, k) = L_{h,k}(u(x_i, t_j)) = \mathcal{O}(h^p + k^q),$$

pri čemu su p i q odgovarajući redovi tačnosti, onda $\tau_{i,j} \rightarrow 0$ kada $h, k \rightarrow 0$, pa je shema konzistentna.

2. **Stabilnost.** Numerička shema se naziva *stabilnom* ako male perturbacije (na primjer u početnim podacima, rubnim uvjetima ili usljed zaokruživanja) ne dovode do nekontrolisanog rasta greške kada broj vremenskih koraka teži beskonačnosti; ekvivalentno tome, razlika između numeričkog i tačnog rješenja ostaje ograničena kada broj koraka teži beskonačnosti.
3. **Konvergencija.** Numerička shema *konvergira* ako razlika između numeričkog rješenja u fiksnoj tački u domenu interesa i tačnog rješenja uniformno teži nuli, kada prostorni i vremenski koraci teže nuli (ne nužno nezavisno jedan od drugog). Drugim riječima, numeričko rješenje $u_{i,j}^n$ teži tačnom rješenju $u(x_i, y_j, t_n)$ kada prostorni i vremenski koraci teže nuli.

Pokazalo se relativno rano da za parcijalne diferencijalne jednačbe shema konačnih razlika ne konvergira uvijek. Poznati su primjeri Richardsona¹ i primjeri Courant, Friedrichs i Lewy².

Sljedeći primjer pokazuje da konzistentnost sama po sebi bez stabilnosti nije dovoljna za konvergenciju.

Primjer 5.1.1. Razmotrimo početni problem za linearnu transportnu jednačbu

$$u_t = u_x, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t \geq 0, \quad (5.1)$$

sa početnim uvjetom

$$u(x, 0) = \begin{cases} \cos^2 x, & |x| \leq \frac{\pi}{2}, \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2}. \end{cases} \quad (5.2)$$

¹L. F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge University Press, London 1922

²R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewy, "Über die partiellen Differenzengleichungen der mathematischen Physik," *Math. Annalen* 100 (1928), 32–74

5.1 O metodi konačnih razlika

Rješenje. Tačno rješenje ovog problema je jednostavno lijevo-propagirajući val

$$u(x, t) = u(x + t, 0).$$

Pretpostavimo da ovaj problem rješavamo numerički tzv. *leapfrog* shemom ³

$$\frac{u_{j,n+1} - u_{j,n-1}}{2k} = \frac{u_{j+1,n} - u_{j-1,n}}{2h}, \quad (5.3)$$

gdje je h prostorni korak, k vremenski korak. Stavimo $\lambda = \frac{k}{h}$. Primijetimo da se (5.3) uz ove oznake može napisati kao

$$u_{j,n+1} = u_{j,n-1} + \lambda(u_{j+1,n} - u_{j-1,n}). \quad (5.4)$$

Početne vrijednosti $u_{j,0}$ i $u_{j,1}$ uzimaju se iz tačnog rješenja $u(x, t)$ u trenucima $t = 0$ i $t = k$.

Ako je u dovoljno glatko tačno rješenje (na primjer $u \in \mathcal{C}^4$), tada je shema (5.4) konzistentna sa (5.1) za svaki λ , tj. lokalna greška odsjecanja $\tau_{j,n}$ teži nuli kada $h, k \rightarrow 0$. Naime,

$$\tau_{j,n} = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2k} - \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h}.$$

Razvijmo funkciju u pomoću Taylorove formule u okolini tačke (x_j, t_n) . Za $t_{n\pm 1} = t_n \pm k$ imamo

$$u(x_j, t_{n\pm 1}) = u \pm ku_t + \frac{k^2}{2}u_{tt} \pm \frac{k^3}{6}u_{ttt} + \mathcal{O}(k^4),$$

gdje su svi izvodi izračunati u (x_j, t_n) . Oduzimanjem slijedi

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_{n-1})}{2k} = u_t + \frac{k^2}{6}u_{ttt} + \mathcal{O}(k^4).$$

Za $x_{j\pm 1} = x_j \pm h$ vrijedi

$$u(x_{j\pm 1}, t_n) = u \pm hu_x + \frac{h^2}{2}u_{xx} \pm \frac{h^3}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4),$$

pa oduzimanjem dobivamo

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} = u_x + \frac{h^2}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4).$$

Uvrštavanjem prethodna dva razvoja u $\tau_{j,n}$ dobivamo

$$\tau_{j,n} = \left(u_t + \frac{k^2}{6}u_{ttt} + \mathcal{O}(k^4) \right) - \left(u_x + \frac{h^2}{6}u_{xxx} + \mathcal{O}(h^4) \right).$$

³U ovom slučaju, metod koristi centralnu razliku oko t_n (vrijeme), zato se pojavljuju nivoi $n+1$ i $n-1$. Također, koristi centralnu razliku oko x_j (prostor), zato se pojavljuju čvorovi $j+1$ i $j-1$. Dakle, metod "preskače", tj. da bismo izračunali $u_{j,n+1}$, trebamo $u_{j,n-1}$ i vrijednosti iz nivoa n .

5.1 O metodi konačnih razlika

Kako u zadovoljava (5.1), tj. $u_t = u_x$, vodeći članovi se poništavaju, pa je

$$\tau_{j,n} = \frac{k^2}{6} u_{ttt} - \frac{h^2}{6} u_{xxx} + \mathcal{O}(k^4 + h^4).$$

Iz jednadžbe $u_t = u_x$ diferenciranjem slijedi da je $u_{ttt} = u_{xxx}$, pa je

$$\tau_{j,n} = \frac{k^2 - h^2}{6} u_{xxx} + \mathcal{O}(k^4 + h^4).$$

Otuda posebno slijedi $\tau_{j,n} = \mathcal{O}(k^2 + h^2)$, pa $\tau_{j,n} \rightarrow 0$ kada $h, k \rightarrow 0$. Dakle, shema (5.4), a samim tim i shema (5.3), je konzistentna sa (5.1). Primijetimo da se u ovom zaključku ne nameće nikakav uvjet na odnos $\lambda = k/h$, tj. konzistentnost vrijedi za svaki λ .

Sada ćemo ispitati stabilnost u ovisnosti od izbora λ . Koristimo *von Neumannovu analizu* koja se sastoji u tome da pretpostavimo periodične (ili beskonačne) uvjete tako da je Fourierova dekompozicija smisljena i tražimo rješenje sheme u obliku

$$u_{j,n} = \xi^n e^{i\theta j}, \quad \theta \in [-\pi, \pi],$$

gdje je ξ *faktor pojačanja* (amplifikacije) po vremenskom koraku, a θ diskretni valni broj. Uvrštavanjem u (5.4), dijeljenjem sa $\xi^{n-1} e^{i\theta j}$, množenjem sa $2k$ i smjenom $\lambda = k/h$ dobivamo kvadratnu jednadžbu po ξ

$$\xi^2 - 2i\lambda \sin \theta \xi - 1 = 0.$$

čija su rješenja

$$\xi_{\pm} = i\lambda \sin \theta \pm \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta}.$$

Ako je $|\lambda| < 1$, onda je $1 - \lambda^2 \sin^2 \theta > 0$ za sve θ , pa je korijen realan i vrijedi

$$|\xi_{\pm}|^2 = (\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta})^2 + (\lambda \sin \theta)^2 = 1.$$

Dakle, za svaki Fourierov talas vrijedi $|\xi| = 1$, pa amplitude ne rastu sa n . Otuda (u standardnom von Neumann smislu) shema je stabilna za $|\lambda| < 1$ i imamo čistu propagaciju bez rasta amplitude.

U slučaju kada je $|\lambda| > 1$ postoji θ takav da je $|\sin \theta| > 1/|\lambda|$, pa je $1 - \lambda^2 \sin^2 \theta < 0$ i korijen u izrazu za $\xi_{\pm}$ je imaginaran,

$$\sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2 \theta} = i\sqrt{\lambda^2 \sin^2 \theta - 1}.$$

Tada je

$$\xi_{\pm} = i\lambda \sin \theta \pm i\sqrt{\lambda^2 \sin^2 \theta - 1} = i\left(\lambda \sin \theta \pm \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \theta - 1}\right),$$

pa je

$$|\xi_{\pm}| = \left|\lambda \sin \theta \pm \sqrt{\lambda^2 \sin^2 \theta - 1}\right|.$$

5.1 O metodi konačnih razlika

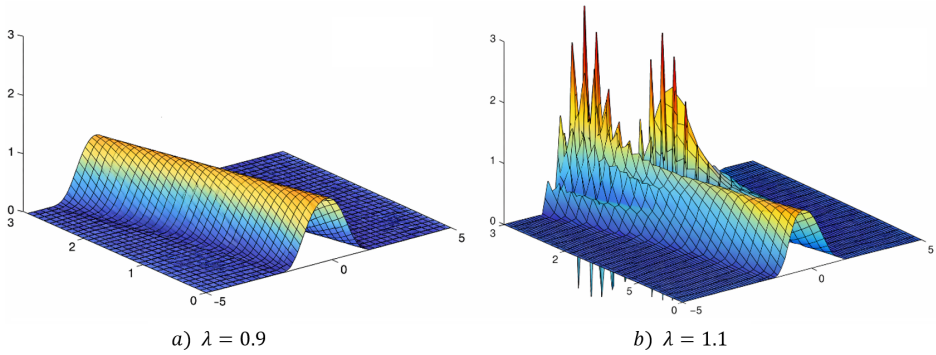
Za $a := |\lambda \sin \theta| > 1$ vrijedi

$$a + \sqrt{a^2 - 1} > 1,$$

pa je za odgovarajući izbor znaka jedan od faktora pojačanja veći od 1:

$$\max\{|\xi_+|, |\xi_-|\} = a + \sqrt{a^2 - 1} > 1.$$

Zato postoji Fourierov talas čija amplituda raste kao $|\xi|^n$, tj. eksponencijalno u broju koraka n , i shema je nestabilna za $|\lambda| > 1$. Nestabilnost je naročito vidljiva za visoke frekvencije. Na primjer, za $\theta = \pi/2$ (što odgovara oscilaciji sa periodom 4 tačke mreže, tj. $u_{j,n} \sim i^j$) dobivamo uvjet $|\lambda| > 1 \Rightarrow |\xi| > 1$, pa se takva brza oscilacija pobuđuje i brzo dominira numeričkim rješenjem, što se u praksi manifestuje kao “sawtooth” oscilacija.



Slika 5.2: Stabilne i nestabilne *leapfrog* aproksimacije jednađbe $u_t = u_x$.

Na granici $|\lambda| = 1$ vrijedi $|\xi_{\pm}| = 1$ za sve θ , pa je shema neutralno stabilna. Ipak, za $\theta = \pi/2$ (i slične visokofrekventne vrijednosti) karakteristična jednađba ima dvostruki korijen, što znači da je shema na ovoj granici osjetljivija na numeričke perturbacije i može razvijati neželjene oscilacije.

Dakle, iako je shema (5.4) konzistentna za svaki λ , ona konvergira ka tačnom rješenju problema (5.1)–(5.2) samo u slučaju $|\lambda| < 1$, tj. kada je ona stabilna. ♦

Za korektno postavljene linearne probleme početnih vrijednosti postoji precizna veza između konzistentnosti, stabilnosti i konvergencija sadržana u sljedećem fundamentalnom rezultatu, koji navodimo bez dokaza.

Teorem 5.1.1 (Lax-Richtmyerov teorem ekvivalencije⁴). *Za konzistentnu linearnu shemu konačnih razlika za korektno postavljen početni problem, stabilnost je ekvivalentna konvergenciji.*

⁴P. D. Lax and R. D. Richtmyer, “Survey of the stability of linear finite difference equations”, Comm. Pure Appl. Math. 9 (1956), 267–293

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Pretpostavimo da treba naći približno rješenje prvog rubnog problema za Laplaceovu jednađbu $\Delta u = 0$. Data je parcijalna diferencijalna jednađba

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.5)$$

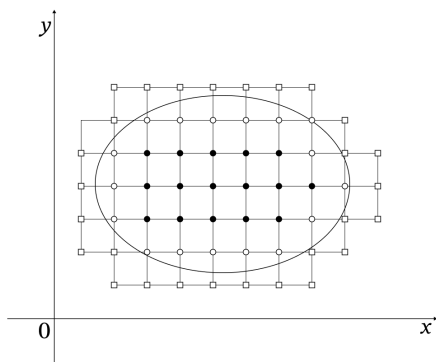
i rubni uvjeti

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (5.6)$$

gdje je $\varphi(x, y)$ zadana funkcija. Pretpostavimo da je oblast Ω ograničena prostom zatvorenim i dio po dio glatkom krivom $\partial\Omega$ (slika 5.3).

Aproksimirajmo oblast Ω kvadratnom mrežom Ω_h datom sa

$$\Omega_h = \{(x_i, y_j) : x_{i+1} - x_i = h, i = 0, 1, \dots, y_{j+1} - y_j = h, j = 0, 1, \dots; h > 0\}.$$



Slika 5.3: Unutrašnji i rubni čvorovi mreže.

Dva čvora mreže Ω_h su susjedni ako je rastojanje između njih duž koordinatnih osa Ox i Oy jednako koraku h .

Za čvor (x_i, y_j) kažemo da je *unutrašnji čvor* ako pripada oblasti Ω zajedno sa njemu susjedna 4 čvora. Na slici 5.3 takvi čvorovi su prikazani ispunjenim kružićima. Ako čvor mreže nije unutrašnji, onda kažemo da je to *rubni čvor*. Ako rubni čvor ima susjedni unutrašnji čvor, onda ga zovemo *rubni čvor prve vrste*. Na slici 5.3 rubni čvorovi prve vrste su prikazani neispunjenim (praznim) kružićima.

Ako rubni čvor nema niti jedan susjedni unutrašnji čvor, onda kažemo da je on *rubni čvor druge vrste*. Na slici 5.3 ti čvorovi su prikazani praznim kvadratićima. Unutrašnji čvorovi i rubni čvorovi prve vrste se uzimaju u obzir prilikom rješavanja

5.2 Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa

rubnog problema (5.5)–(5.6), a rubni čvorovi druge vrste se, po pravilu, ne uzimaju u obzir.

Označimo vrijednosti nepoznate funkcije $u = u(x, y)$ u čvorovima mreže (x_i, y_j) sa $u_{i,j}$. U unutrašnjim čvorovima mreže Ω_h aproksimirajmo druge parcijalne izvode centralnim količnicima konačnih razlika:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}. \quad (5.8)$$

Na taj način, za svaki unutrašnji čvor mreže Ω_h dobivamo diskretnu Laplaceovu jednadžbu

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (5.9)$$

a odgovarajuću shemu zovemo 5-tačkastom shemom.

Kod eliptičkih jednadžbi nema vremenske evolucije, pa se stabilnost ne ispituje von Neumannovom analizom. Umjesto toga, stabilnost i jedinstvenost rješenja 5-tačkaste sheme proizlaze iz diskretnog principa maksimuma.

Teorem 5.2.1 (Diskretni princip maksimuma). *Neka $u_{i,j}$ zadovoljava diskretnu Laplaceovu jednadžbu (5.9) u svim unutrašnjim čvorovima mreže Ω_h . Tada se maksimum i minimum funkcije $u_{i,j}$ na zatvorenoj mreži $\overline{\Omega}_h$ dostižu na rubnim čvorovima.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da $u_{i,j}$ postiže strogi maksimum u nekom unutrašnjem čvoru (x_i, y_j) . Tada je

$$u_{i,j} > u_{i\pm 1,j}, \quad u_{i,j} > u_{i,j\pm 1}.$$

S druge strane, iz diskretne Laplaceove jednadžbe (5.9) slijedi

$$u_{i,j} = \frac{1}{4}(u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}),$$

što je aritmetička sredina vrijednosti u susjednim čvorovima. To je moguće samo ako su sve susjedne vrijednosti jednake $u_{i,j}$, što je u suprotnosti s pretpostavkom da je maksimum strog. Analogno se isključuje i postojanje strogog minimuma u unutrašnjem čvoru. Dakle, ekstremi se mogu postići samo na rubnim čvorovima. $\square$

Kao neposredna posljedica diskretnog maksimum principa slijedi jedinstvenost rješenja sistema (5.9) uz zadane Dirichletove rubne uvjete.

Za svaki rubni čvor prve vrste uzimamo

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) \approx \varphi(x_i, y_j). \quad (5.10)$$

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Na taj način rubni problem (5.5)–(5.6) aproksimiramo *diferentnim problemom* (5.9)–(5.10). Ovaj sistem je nehomogen. Broj jednađbi i varijabli je jednak broju unutrašnjih čvorova mreže Ω_h . Sistem je saglasan i ima jedinstveno rješenje jer odgovarajući homogeni sistem jednađbi ima samo trivijalno rješenje. Rješavanjem sistema diferentnih jednađbi (5.9) dobivamo približne vrijednosti rješenja $u = u(x, y)$ rubnog problema (5.5)–(5.6) u unutrašnjim čvorovima mreže Ω_h .

Primjer 5.2.1. Metodom mreža naći približno rješenje jednađbe

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

koje na konturi kvadrata $ABCD$ s vrhovima $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ i $D(0, 1)$ zadovoljava uvjete:

$$u|_{AB} = 0, \quad u|_{BC} = y^2(1 - y), \quad u|_{CD} = x(x^2 - 1), \quad u|_{DA} = 0.$$

Za korak mreže uzeti $h = \frac{1}{3}$.

Rješenje. Vrijednosti rješenja $u(x, y)$ u čvorovima (x_i, y_j) označit ćemo sa $u_{i,j}$. Oblast Ω , tj. kvadrat $ABCD$ i odgovarajuća mreža Ω_h su prikazani na slici 5.4. Iz rubnih uvjeta nalazimo

$$u_{00} = u_{10} = u_{20} = u_{30} = u_{01} = u_{02} = u_{03} = 0,$$

$$u_{31} = u\left(1, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27},$$

$$u_{32} = u\left(1, \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{27},$$

$$u_{00} = u(1, 1) = 0,$$

$$u_{13} = u\left(\frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{3} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \right) = -\frac{8}{27},$$

$$u_{23} = u\left(\frac{2}{3}, 1\right) = \frac{2}{3} \left(\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1 \right) = -\frac{10}{27}.$$

Za unutrašnje čvorove mreže Ω_h imamo:

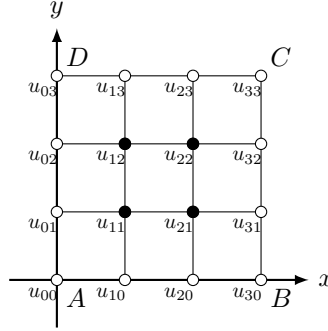
$$u_{11} = \frac{1}{4} (0 + 0 + u_{12} + u_{21}),$$

$$u_{21} = \frac{1}{4} \left(0 + u_{11} + u_{22} + \frac{2}{27} \right),$$

$$u_{12} = \frac{1}{4} \left(u_{11} + 0 + u_{22} - \frac{8}{27} \right),$$

$$u_{22} = \frac{1}{4} \left(u_{21} + u_{12} + \frac{4}{27} - \frac{10}{27} \right).$$

5.2 Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa

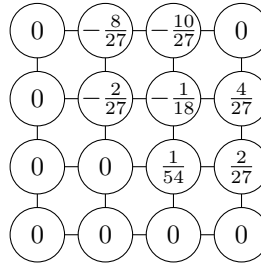


Slika 5.4: Mreža čvorova iz Primjera 5.2.1.

Sada jednostavno nalazimo:

$$u_{11} = 0 \quad u_{12} = -\frac{2}{27}, \quad u_{21} = \frac{1}{54}, \quad u_{22} = -\frac{1}{18}.$$

Dobiveno približno rješenje možemo shematski prikazati kao na slici 5.5.



Slika 5.5: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.1.



Ocijenimo tačnost aproksimacije izvoda pomoću formula (5.7) i (5.8). Pretpostavimo da je $u(x, y) \in \mathcal{C}^4(\Omega)$ i primijenimo Taylorovu formulu

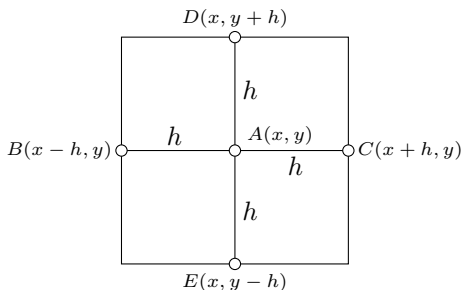
$$\begin{aligned} f(x+h, y+k) &= f(x, y) + \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right) f(x, y) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^2 f(x, y) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n!} \left(\frac{\partial}{\partial x}h + \frac{\partial}{\partial y}k \right)^n f(x+\theta h, y+\theta k), \end{aligned} \tag{5.11}$$

gdje je $0 < \theta < 1$.

Moguće je koristiti različite sheme. Ovdje ćemo uzeti da je $h = k$, tj. uzećemo da su koraci duž koordinatnih osa jednaki i posmatrati dvije najčešće primijenjivane sheme.

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Prva osnovna shema. Posmatrajmo kvadrat sa centrom u tački $A(x, y)$ i središtima stranica u tačkama $B(x - h, y)$, $C(x + h, y)$, $D(x, y + h)$ i $E(x, y - h)$ (slika 5.6).



Slika 5.6: Prva osnovna shema.

Izrazimo vrijednosti funkcije $u(x, y)$ u tačkama B, C, D i E preko vrijednosti te funkcije i njenih izvoda u centralnoj tački $A(x, y)$.

Primjenom Taylorove formule (5.11) redom nalazimo:

$$u(x - h, y) = u(x, y) - \frac{h}{1!} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x - \theta_1 h, y)}{\partial x^4}, \quad 0 < \theta_1 < 1;$$

$$u(x + h, y) = u(x, y) + \frac{h}{1!} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x + \theta_2 h, y)}{\partial x^4}, \quad 0 < \theta_2 < 1;$$

$$u(x, y - h) = u(x, y) - \frac{h}{1!} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, y - \theta_3 h)}{\partial y^4}, \quad 0 < \theta_3 < 1;$$

$$u(x, y + h) = u(x, y) + \frac{h}{1!} \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u(x, y + \theta_4 h)}{\partial y^4}, \quad 0 < \theta_4 < 1.$$

Ako saberemo ove četiri jednakosti, dobićemo

$$u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h) = 4u(x, y) + h^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) + R_h(x, y),$$

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

gdje je

$$R_h(x, y) = \frac{h^4}{4!} \left[\frac{\partial^4 u(x - \theta_1 h, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x + \theta_2 h, y)}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 u(x, y - \theta_3 h)}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 u(x, y + \theta_4 h)}{\partial y^4} \right],$$

pa imamo

$$u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h) = 4u(x, y) + h^2 \Delta u + O(h^4),$$

odnosno

$$\Delta u = \frac{1}{h^2} [u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h) - 4u(x, y)] + O(h^2). \quad (5.12)$$

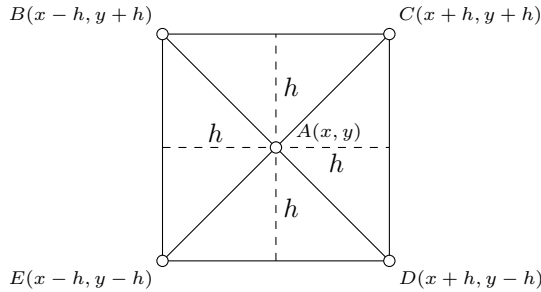
Jednakost (5.12) izražava Laplaceov operator Δu preko količnika konačnih razlika i naziva se *prvi osnovni konačnodiferentni oblik Laplaceovog diferencijalnog operatora*. Ako se zanemari ostatak $O(h^2)$, onda dobivamo približno predstavljanje Laplaceove jednađbe $\Delta u = 0$ pomoću sljedeće diferentne jednađbe

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x - h, y) + u(x + h, y) + u(x, y - h) + u(x, y + h)], \quad (5.13)$$

što je, u stvari, jednakost (5.9).

Druga osnovna shema. Posmatrajmo sada kvadrat sa centrom u tački $A(x, y)$ i vrhovima (slika 5.7):

$$\begin{aligned} B(x - h, y + h), & \quad C(x + h, y + h), \\ D(x + h, y - h), & \quad E(x - h, y - h). \end{aligned}$$



Slika 5.7: Druga osnovna shema.

Izrazimo vrijednosti funkcije $u(x, y)$ u tačkama B, C, D i E preko vrijednosti te funkcije i njenih izvoda u centralnoj tački $A(x, y)$. Primjenom Taylorove formule

(5.11) redom nalazimo:

$$\begin{aligned}
 u(x-h, y+h) = & u(x, y) - \frac{h}{1!} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] \\
 & - \frac{h^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_1, \eta_1);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x+h, y+h) = & u(x, y) + \frac{h}{1!} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{h^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} + 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_2, \eta_2);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x+h, y-h) = & u(x, y) + \frac{h}{1!} \left[\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{h^3}{3!} \left[\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} + 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_3, \eta_3);
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x-h, y-h) = & u(x, y) + \frac{h}{1!} \left[-\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} - \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right] \\
 & + \frac{h^2}{2!} \left[\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right] \\
 & + \frac{h^3}{3!} \left[-\frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^3} - 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x^2 \partial y} - 3 \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial x \partial y^2} - \frac{\partial^3 u(x, y)}{\partial y^3} \right] \\
 & + \frac{h^4}{4!} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_4, \eta_4);
 \end{aligned}$$

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Ako saberemo ove četiri jednakosti, dobićemo

$$u(x-h, y+h) + u(x+h, y+h) + u(x-h, y-h) + u(x+h, y-h) = 4u(x, y) + 2h^2 \left(\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} \right) + R_h(x, y),$$

gdje je

$$R_h(x, y) = \frac{h^4}{4!} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_1, \eta_1) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_2, \eta_2) + \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_3, \eta_3) + \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} \right)^4 u(\xi_4, \eta_4) \right],$$

pa imamo

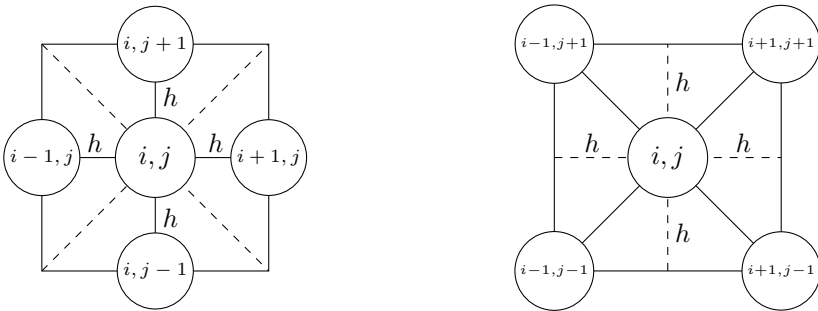
$$\Delta u = \frac{1}{2h^2} \left[u(x-h, y+h) + u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h) - 4u(x, y) \right] + O(h^2).$$

Ako se zanemari ostatak $O(h^2)$, onda dobivamo približno predstavljanje Laplaceove jednađbe $\Delta u = 0$ pomoću sljedeće diferentne jednađbe

$$u(x, y) = \frac{1}{4} [u(x-h, y+h) + u(x+h, y+h) + u(x+h, y-h) + u(x-h, y-h)], \quad (5.14)$$

što se može koristiti umjesto (5.13).

Na taj način zaključujemo da se za svaki unutrašnji čvor mreže Ω_h može koristiti jedna od sljedećih shema (slika 5.8).



Slika 5.8: Prva i druga osnovna shema.

Pretpostavka da su koraci mreže duž koordinatnih osa $h_x = h = x_{i+1} - x_i$ i $h_y = k = y_{j+1} - y_j$ jednaki, tj. da $h = k$ nije nikakvo ograničenje; formule analogne formulama (5.13) i (5.14) dobivaju se na sličan način.

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Iz prethodnih razmatranja lako zaključujemo da su i prva i druga osnovna shema konzistentne pod pretpostavkom da je $u \in \mathcal{C}^4(\Omega)$. Naime, iz (5.12) i (5.14) slijedi da je lokalna greška odsijecanja reda

$$\tau_{i,j}(h) = \mathcal{O}(h^2) \rightarrow 0 \quad \text{kada } h \rightarrow 0,$$

za sve unutrašnje čvorove (i, j) . Stoga su i prva osnovna (5-tačkasta) i druga osnovna (dijagonalna) shema konzistentne.

Ako su prostorni koraci h i k različiti, dobiva se analogno da je lokalna greška odsijecanja reda

$$\tau_{i,j}(h, k) = \mathcal{O}(h^2 + k^2) \rightarrow 0 \quad \text{kada } h, k \rightarrow 0,$$

pa su i u tom slučaju sheme konzistentne.

Metoda mreža primjenjuje se i za rješavanje rubnog problema za Poissonovu parcijalnu diferencijalnu jednađbu $\Delta u = f(x, y)$, tj.

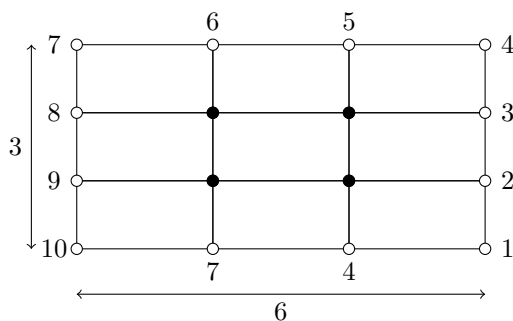
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y),$$

gdje je $f(x, y)$ zadana funkcija. Pokažimo to na sljedećem primjeru.

Primjer 5.2.2. Riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -1,$$

gdje su vrijednosti traženog rješenja na konturi zadate na slici 5.9.



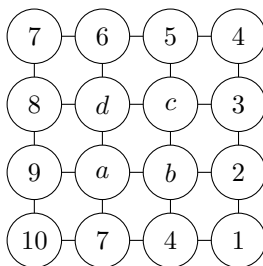
Slika 5.9: Rubne vrijednosti iz Primjera 5.2.2.

Rješenje. Označimo vrijednosti traženog rješenja $u(x, y)$ u unutrašnjim čvorovima mreže na sljedeći način: $u_{11} = a$, $u_{21} = b$, $u_{12} = c$, $u_{22} = d$. Koraci mreže su

$$h = h_x = \frac{6}{3} = 2, \quad k = h_y = \frac{3}{3} = 1.$$

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Vrijednosti rješenja u čvorovima mreže (rubnim i unutrašnjim) možemo prikazati kao na slici 5.10.



Slika 5.10: Vrijednosti u čvorovima mreže iz Primjera 5.2.2.

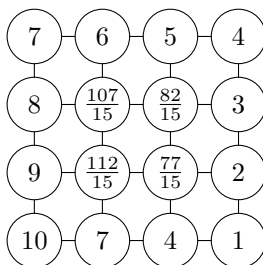
Odgovarajući diferentni problem svodi se na rješavanje sljedećeg sistema:

$$\begin{aligned}\frac{b-2a+9}{2^2} + \frac{d-2a+7}{1^2} &= -1, \\ \frac{2-2b+a}{2^2} + \frac{c-2b+4}{1^2} &= -1, \\ \frac{c-2d+8}{2^2} + \frac{6-2d+a}{1^2} &= -1, \\ \frac{3-2c+d}{2^2} + \frac{5-2c+b}{1^2} &= -1.\end{aligned}$$

Rješenje posljednjeg sistema je dato sa

$$d = \frac{107}{15}, \quad b = \frac{77}{15}, \quad c = \frac{82}{15}, \quad a = \frac{112}{15}.$$

Rješenje možemo prikazati i na sljedeći način (slika 5.11).



Slika 5.11: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.2.

◆

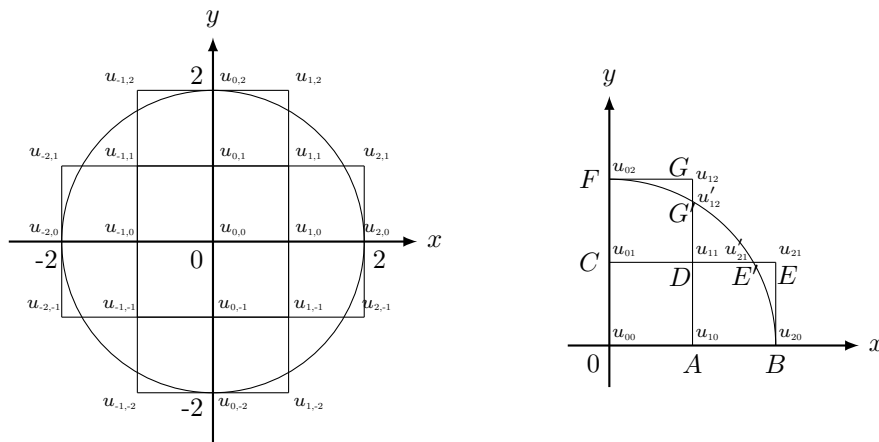
5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Primjer 5.2.3. Metodom mreža naći približne vrijednosti rješenja $u = u(x, y)$ jednađbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

u krugu $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$ koje na konturi (rubu) kruga, kružnici $k = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 4\}$, zadovoljava uvjet $u(x, y)|_k = x^2 y^2$.

Rješenje. Zbog simetričnosti dovoljno je posmatrati jednu četvrtinu kruga, na primjer četvrtinu kruga u prvom kvadrantu (slika 5.12). eka je korak mreže $h_x = h_y = 1$.



Slika 5.12: Mreža čvorova iz Primjera 5.2.3.

Označimo vrijednosti rješenja $u = u(x, y)$ u čvorovima $(x_i, y_j) = (i, j)$ sa $u_{i,j}$. U rubnim čvorovima je $u_B = u(2, 0) = u_{20} = 2^2 \cdot 0^2 = 0$ i $u_F = u(0, 2) = u_{02} = 0^2 \cdot 2^2 = 0$. Čvoru mreže E najbliža je tačka E' konture k , pa uzimamo

$$u_E = u_{21} \approx u'_E = u'_{21} = u(\sqrt{3}, 1) = (\sqrt{3})^2 \cdot 1 = 3,$$

i analogno

$$u_G = u_{12} \approx u'_G = u'_{12} = u(1, \sqrt{3}) = 1^2 \cdot (\sqrt{3})^2 = 3.$$

Za unutrašnje čvorove, vodeći računa o simetričnosti, imamo sljedeće diferentne jednađbe

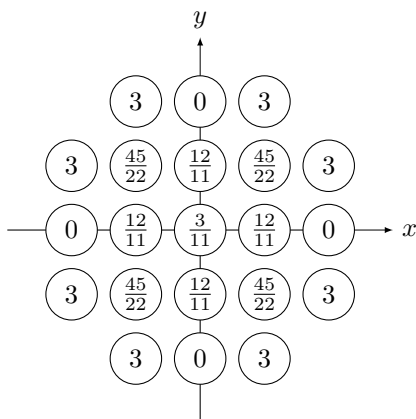
$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}).$$

Dakle,

5.2 Metoda mreža za jednačbe eliptičkog tipa

$$\begin{aligned}
 u_{00} &= \frac{1}{4}(u_{-1,0} + u_{10} + u_{0,-1} + u_{01}) \Rightarrow u_{00} = \frac{1}{4}u_{10}; \\
 u_{10} &= \frac{1}{4}(u_{00} + u_{20} + u_{1,-1} + u_{11}) \Rightarrow u_{10} = \frac{1}{4}(u_{00} + 0 + 2u_{11}); \\
 u_{11} &= \frac{1}{4}(u_{01} + u_{21} + u_{12} + u_{10}) \Rightarrow u_{11} = \frac{1}{4}(2u_{10} + 2 \cdot 3).
 \end{aligned}$$

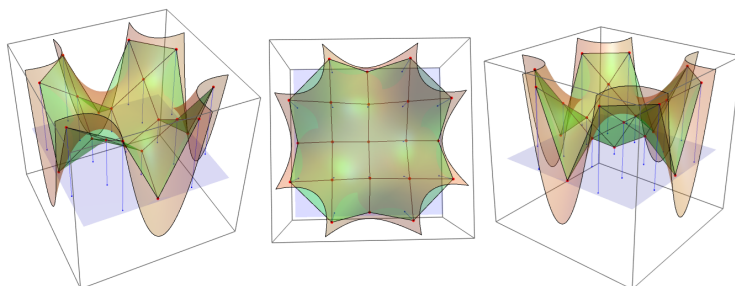
Odavde dobivamo $u_{00} = \frac{3}{11}$, $u_{10} = \frac{12}{11}$, $u_{11} = \frac{45}{22}$, pa rješenje možemo prikazati na način kao na slici 5.13.



Slika 5.13: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.3.

Nije teško provjeriti da je tačno rješenje postavljenog zadatka funkcija

$$u(x, y) = x^2 y^2 + \frac{1}{8} (16 - (x^2 + y^2)^2).$$



Slika 5.14: Tačno rješenje $u = u(x, y)$ (narandžasto), tačke $u_{i,j}$ (crveno), xy ravan (plavo), aproksimacija rješenja (zeleno) iz primjera 5.2.3.

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa



Primjer 5.2.4. Metodom mreža naći približno rješenje jednađbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(y - x)^3$$

koje na konturi $\triangle OAB$ sa vrhovima $O(0,0)$, $A(1,0)$ i $B(1,1)$ zadovoljava uvjete

$$u|_{OA} = 0, \quad u|_{AB} = x^2(1-x), \quad u|_{OB} = 0.$$

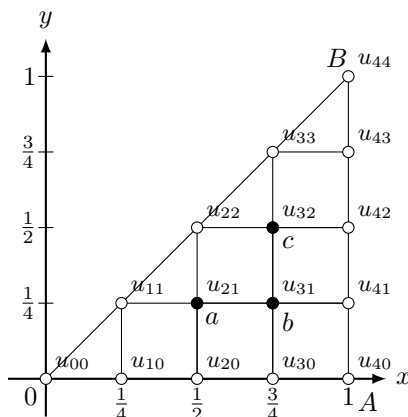
Za korake mreže uzeti $h_x = h_y = \frac{1}{4}$.

Rješenje. U rubnim čvorovima prve vrste (prazni kružići na slici 5.15) na osnovu rubnih uvjeta nalazimo:

$$u_{00} = u_{10} = u_{20} = u_{40} = 0,$$

$$u_{11} = u_{22} = u_{33} = u_{44} = 0,$$

$$u_{41} = u_{42} = u_{43} = 0.$$



Slika 5.15: Mreža čvorova iz Primjera 5.2.4.

Za unutrašnje čvorove (ispunjeni kružići) imamo sistem diferentnih jednađbi:

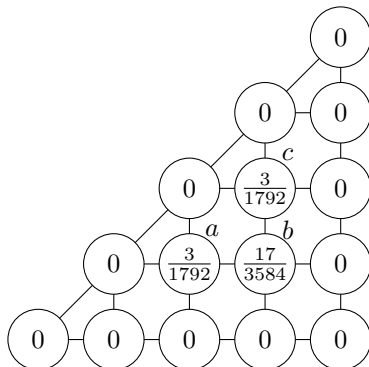
$$u_{21} = u\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right): \frac{u_{31} - 2u_{21} + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{0 - 2u_{21} + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right)^3,$$

$$u_{31} = u\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right): \frac{0 - 2u_{31} + u_{21}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{u_{32} - 2u_{31} + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 2\left(\frac{1}{4} - \frac{3}{4}\right)^3,$$

$$u_{32} = u\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{2}\right): \frac{0 - 2u_{32} + 0}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} + \frac{0 - 2u_{32} + u_{31}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right)^3.$$

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

Rješenje gornjeg sistema je $c = \frac{3}{1792}$, $b = \frac{17}{3584}$, $a = \frac{3}{1792}$ i rješenje je prikazano na slici 5.16.



Slika 5.16: Vrijednosti u čvorovima mreže iz Primjera 5.2.4.



Primjer 5.2.5. Metodom mreža sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{|xy|}, \quad (x, y) \in \Omega; \quad u = \cos(x^2 y^2), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

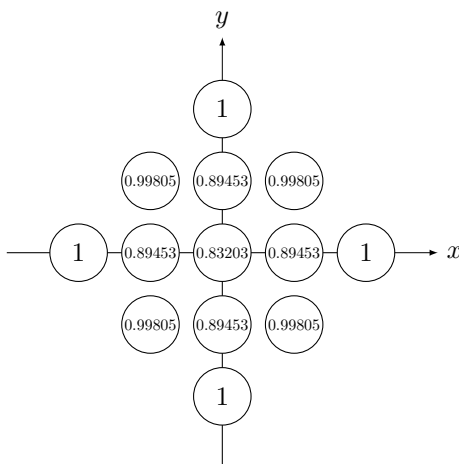
gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid |x| + |y| < 1\}$. Računati na četiri decimale.

Rješenje. Problem je simetričan u odnosu na koordinatne ose i pravu $y = x$, te se može računati samo u osmini kvadrata. Ako je u koordinatnom početku čvor $(0, 0)$, onda shemu pišemo u dva unutrašnja čvora $(0, 0)$ i $(1, 0)$,

$$4u_{10} - 4u_{00} = 0.25, \quad u_{00} + u_{20} + 2u_{11} - 4u_{10} = 0.25,$$

a vrijednosti rješenja u rubnim čvorovima u_{20} i u_{11} su zadate rubnim uvjetom. Rješenje zadatka je prikazano na sljedećoj slici.

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa



Slika 5.17: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.2.5.

Dobiveno rješenje možemo prikazati i tabelarno na sljedeći način:

$x_i \backslash y_j$	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
-1.0			1		
-0.5		0.99805	0.89453	0.99805	
0.0	1	0.89453	0.83203	0.89453	1
0.5		0.99805	0.89453	0.99805	
1.0			1		



Primjer 5.2.6. Neka je Ω oblast ograničena pravim $x = 0$, $y = 0$, $x = 1.5$, $y = 1.5$, $y = x - 1$, $y = x + 1$, i neka je $\partial\Omega$ njen rub. Aproksimirati rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = |x - y|, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = 5, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

diferentnom shemom na kvadratnoj mreži sa korakom $h = 0.5$. Zadatak riješiti računajući sa četiri decimale.

Rješenje. Slobodni član jednađbe, rubni uvjeti i oblast Ω su simetrični u odnosu na pravu $y = x$, te se zadatak može rješavati samo u polovini šestougaone oblasti i rješenje simetrično preslikati u ostatak oblasti. Vrijednosti rješenja u

5.2 Metoda mreža za jednađbe eliptičkog tipa

rubnim čvorovima mreže $u_{10} = u_{20} = u_{31} = u_{32} = 2$, pri čemu je koordinatni početak označen kao čvor $(0, 0)$, su date tačno. Za unutrašnje čvorove imamo sistem diferentnih jednađbi:

$$u_{21} - 2u_{11} = -5, \quad u_{11} - 4u_{12} + u_{22} = -\frac{79}{8}, \quad u_{21} - 2u_{22} = -5.$$

Rješavanjem sistema dobivamo približne vrijednosti rješenja u unutrašnjim čvorovima

$y_j \backslash x_i$	0.0	0.5	1.0	1.5
0.0	5	5	5	
0.5	5	4.9792	4.9583	5
1.0	5	4.9583	4.9792	5
1.5		5	5	5



Primjer 5.2.7. Metodom mreža sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = |x| + |y|, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1\}$.

Rješenje. Problem je simetričan u odnosu na koordinatne ose te se može rješavati samo u prvom kvadrantu. Ako je u koordinatnom početku čvor sa indeksima $(0, 0)$, onda shemu pišemo u unutrašnjim čvorovima sa indeksima $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ i $(1, 1)$, a u rubnim čvorovima $(2, 0)$, $(2, 1)$, $(1, 2)$ i $(0, 2)$ vrijednosti rješenja su zadate rubnim uvjetom. Rješenje zadatka je

$y_j \backslash x_i$	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
-1.0	2	1.5	1	1.5	2
-0.5	1.5	1.375	1.25	1.375	1.5
0.0	1	1.25	1.25	1.25	1
0.5	1.5	1.375	1.25	1.375	1.5
1.0	2	1.5	1	1.5	2



5.2 Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa

Primjer 5.2.8. Metodom mreža sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = x^2 y^2, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = \cos^2(xy), \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid |x| < 1, |y| < 1, |x - y| < 1\}$.

Rješenje. Problem je simetričan u odnosu na prave $y = x$ i $y = -x$, te se može rješavati samo u četvrtini šestougaone oblasti. Ako je u koordinatnom početku čvor $(0, 0)$, onda shemu pišemo u unutrašnjim čvorovima $(0, 0)$, $(1, 0)$ i $(1, 1)$, a u rubnim čvorovima $(1, -1)$, $(2, 0)$, $(2, 1)$ i $(2, 2)$ vrijednosti rješenja su zadate rubnim uvjetom. Rješenje zadatka je

$\begin{matrix} x_i \\ y_j \end{matrix}$	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0
-1.0	0.29193	0.77015	1		
-0.5	0.77015	0.73969	0.8095	0.93879	
0.0	1	0.8095	0.76188	0.8095	1
0.5		0.93879	0.8095	0.73969	0.77015
1.0			1	0.77015	0.29193



Primjer 5.2.9. Diferentnom shemom sa korakom $h = 0.25$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - u = 1, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = \cos x + \cos y, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid |x| < 1, |x| - 1 < y < 1 - |x|\}$. Računati sa pet decimala.

Rješenje. Problem je simetričan u odnosu na koordinatne ose i prave $y = x$ i $y = -x$, te se može rješavati samo u osmini kvadratne oblasti. Ako je u koordinatnom početku čvor $(0, 0)$, onda shemu pišemo u unutrašnjim čvorovima $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(0, 3)$, $(1, 1)$ i $(2, 1)$, a u rubnim čvorovima $(0, 4)$, $(1, 3)$ i $(2, 2)$ vrijednosti rješenja su zadate rubnim uvjetom. Rješenje zadatka u prvom kvadrantu je

5.2 Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa

$y_j \backslash x_i$	0	0.25	0.5	0.75	1
0	1.3426	1.3792	1.4712	1.5631	1.5403
0.25	1.3792	1.4259	1.5484	1.7006	
0.5	1.4712	1.5484	1.7552		
0.75	1.5631	1.7006			
1	1.5403				

Dobivene vrijednosti rješenja treba simetrično preslikati u ostatak oblasti saglasno uočenoj simetriji. ♦

Primjer 5.2.10. Metodom mreže sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (x-9)^2 + (y-9)^2, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = 1, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid (x-9)^2 + (y-9)^2 < 1\}$. Sve čvorove unutar oblasti Ω tretirati kao unutrašnje, a u spoljašnjim čvorovima rješenje aproksimirati *interpolacijom*.
9

Rješenje. Pošto je Laplaceov operator invarijantan u odnosu na smjenu $\xi = x - 9$, $\eta = y - 9$, problem ćemo zbog jednostavnosti rješavati u $\xi\eta$ koordinatnom sistemu.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \xi^2 + \eta^2, \quad (\xi, \eta) \in \Omega_1,$$

$$u = 1, \quad (\xi, \eta) \in \partial\Omega_1,$$

gdje je $\Omega_1 = \{(\xi, \eta) \mid \xi^2 + \eta^2 < 1\}$. Problem je simetričan u odnosu na prave $\xi = 0$, $\eta = 0$ i $\eta = \xi$, te ćemo ga rješavati u jednoj osmini kruga Ω_1 . Približnu vrijednost rješenja u rubnom čvoru $(2, 1)$ (centar kruga je čvor $(0, 0)$) nalazimo linearnom interpolacijom pomoću vrijednosti u čvoru $(1, 1)$ i tački na rubu $A(\sqrt{3}/2, 1/2)$

$$\frac{1}{h}(u_{21} - u_{11}) = \frac{1}{\delta}(u_A - u_{11}), \quad \delta = \sqrt{3}/2 - 1/2.$$

Tačka A pripada rubu pa je $u_A = 1$. Stoga je

$$u_{21} = -0.36603u_{11} + 1.36603.$$

Rubni čvor $(2, 0)$ pripada rubu, pa je $u_{20} = 1$. U unutrašnjim tačkama mreže jednadžbu aproksimiramo shemom

$$\begin{aligned} 4u_{10} - 4u_{00} &= 0, \\ u_{00} + u_{20} + 2u_{11} - 4u_{10} &= 0.0625, \\ 2u_{10} + 2u_{21} - 4u_{11} &= 0.125. \end{aligned}$$

5.2 Metoda mreža za jednadžbe eliptičkog tipa

Rješenje sistema linearnih jednadžbi je približno rješenje zadatka

$x_i \backslash y_j$	8.0	8.5	9.0	9.5	10.0
8.0		1.01795	1	1.01795	
8.5	1.01795	0.95097	0.94648	0.95097	1.01795
9.0	1	0.94648	0.94648	0.94648	1
9.5	1.01795	0.95097	0.94648	0.95097	1.01795
10.0		1.01795	1	1.01795	



Primjer 5.2.11. Riješiti rubni problem

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = 1, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid \frac{5}{4}x^2 - xy + y^2 < 1\}$ sa korakom $h = 0.5$. Za vrijednosti rješenja u rubnim čvorovima uzeti vrijednosti rješenja u najbližim tačkama na rubu.

Rješenje. Smjenom $\xi = x - 2y$ i $\eta = x$ dati problem se svodi na rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0, \quad (\xi, \eta) \in \overline{\Omega},$$

$$u = 1, \quad (\xi, \eta) \in \partial\overline{\Omega},$$

definiran u elipsi $\overline{\Omega} = \{(\xi, \eta) \mid (\frac{\xi}{2})^2 + \eta^2 < 1\}$ sa rubom $\partial\overline{\Omega}$. Simetrija oblasti i parametara problema u odnosu na ose $\xi = 0$ i $\eta = 0$ omogućava rješavanje problema samo u prvom kvadrantu. Ako je centar elipse čvor $(0, 0)$, onda su rubni čvorovi $(4, 0)$, $(3, 1)$, $(2, 2)$, $(1, 2)$ i $(0, 2)$ i vrijednost rješenja u njima prema postavci zadatka jednaka 1. Diskretizacija jednadžbe u unutrašnjim čvorovima daje sljedeći sistem linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2u_{10} + 2u_{01} - 4u_{00} &= 0, \\ u_{00} + u_{20} + 2u_{11} - 4u_{10} &= 0, \\ u_{10} + u_{30} + 2u_{21} - 4u_{20} &= 0, \\ u_{20} + u_{40} + 2u_{31} - 4u_{30} &= 0, \\ 2u_{11} + u_{02} + 2u_{00} - 4u_{01} &= 0, \\ u_{01} + u_{21} + u_{12} + u_{10} - 4u_{11} &= 0, \\ u_{11} + u_{31} + u_{22} + u_{20} - 4u_{21} &= 0. \end{aligned}$$

5.3 Rješavanje Dirichletovog rubnog problema metodom iteracije

čije je rješenje

$$u_{00} = u_{10} = u_{20} = u_{30} = u_{40} = u_{01} = u_{11} = u_{21} = u_{31} = u_{02} = u_{12} = u_{22} = 1.$$



Za ocjenu tačnosti približnog rješenja, dobivenog metodom mreža, postoje teorijske ocjene ili formule za izračunavanje greške – razlike između tačnog i približnog rješenja. Međutim, te formule su vrlo složene i njihova primjena je praktično vrlo teška. Zbog toga se približno rješenje nalazi uzimajući za korake mreže h i $2h$. Ako se te vrijednosti poklapaju u granicama tražene tačnosti, onda se smatra da je dobiveno približno rješenje korakom h zadovoljavajuće.

U suprotnom slučaju treba izračunati približno rješenje sa korakom $\frac{h}{2}$ i uporediti ga sa prethodnim približnim rješenjem koje je dobiveno korakom h . Ovaj postupak se nastavlja sve dok se ne dobije zadovoljavajuće približno rješenje.

5.3 Rješavanje Dirichletovog rubnog problema metodom iteracije

Sada se bavimo problemom traženja približnog rješenja $u = u(x, y)$ parcijalne diferencijalne jednačbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega, \quad (5.15)$$

u oblasti Ω koje na rubu $\partial\Omega$ posmatrane oblasti zadovoljava rubne uvjete

$$u(x, y) = \varphi(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega, \quad (5.16)$$

pri čemu je $\varphi(x, y)$ zadana funkcija. Kao što smo vidjeli, koristeći metodu mreža, rubni problem (5.15) – (5.16) svodi se na sistem diferentnih jednačbi

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}), \quad (5.17)$$

za svaki unutrašnji čvor mreže Ω_h , a za svaki rubni čvor uzimamo

$$u_{i,j} = u(x_i, y_j) \approx \varphi(x_i, y_j). \quad (5.18)$$

Rješavanjem diferentnog zadatka (5.17) – (5.18) dobivamo vrijednosti približnog rješenja rubnog problema (5.15) – (5.16).

Ako je broj čvorova Ω_h velik, onda je rješavanje sistema (5.17) vrlo teško zbog obimnog računanja. Osim toga, ako je rub $\partial\Omega$ oblasti Ω kriva linija (kružnica, elipsa i slično), onda u rubnim čvorovima imamo, prema (5.18), približne vrijednosti male tačnosti. Zbog toga se sistem jednačbi rješava nekom iterativnom

5.3 Rješavanje Dirichletovog rubnog problema metodom iteracije

metodom. Dakle, za unutrašnje čvorove (x_i, y_j) mreže Ω_h koristi se iterativni proces definiran formulom

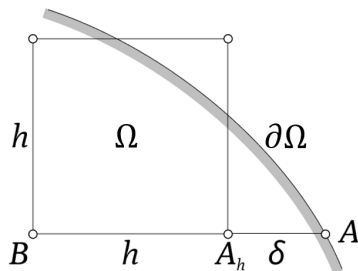
$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{4} \left(u_{i-1,j}^{(k)} + u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i,j-1}^{(k)} + u_{i,j+1}^{(k)} \right), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje se za početne vrijednosti $u_{i-1,j}^{(0)}$, $u_{i+1,j}^{(0)}$, $u_{i,j-1}^{(0)}$, $u_{i,j+1}^{(0)}$ obično uzimaju vrijednosti dobivene metodom mreža, linearnom interpolacijom ili nekom drugom aproksimacijom. Ovaj iterativni postupak poznat je kao *Jacobijeva metoda*. Za rubne čvorove A_h mreže Ω_h vrijednosti se u svakoj iteraciji koriguju linearnom interpolacijom (slika 5.18),

$$u^{(0)}(A_h) = u(A) = \varphi(A),$$

$$u^{(k+1)}(A_h) = u(A) + \frac{u^{(k)}(B) - u(A)}{h + \delta} \cdot \delta, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

gdje je A tačka na rubu $\partial\Omega$ koja je najbliža unutrašnjem čvoru A_h mreže Ω_h , a $\delta > 0$ je udaljenost tačke A od čvora A_h .



Slika 5.18: Korekcija rubnih čvorova mreže metodom linearne interpolacije.

Potpuno je jasno da je $\delta = 0$ ako je $A_h = A$ i tada je

$$u^{(k+1)}(A_h) = u(A) = \varphi(A).$$

Jasno je da se metoda iteracije može primijeniti i za rješavanje rubnih problema drugih parcijalnih diferencijalnih jednačbi, ne samo za posmatrane Laplaceove jednačbe.

Za Dirichletov problem za Laplaceovu jednačbu ovaj iterativni postupak konvergira prema rješenju diferentnog sistema.

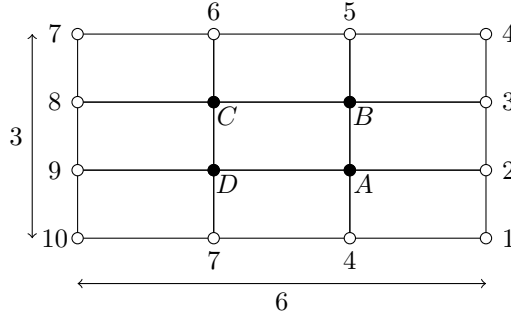
Primjenu opisane iterativne metode ilustrujemo u sljedećem primjeru.

Primjer 5.3.1. Riješiti rubni problem metodom iteracije za sljedeću Poissonovu jednačbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 1$$

5.4 Metoda mreža za jednađbe paraboličkog tipa

u oblasti prikazanoj na slici 5.19, gdje su zadane vrijednosti rješenja na rubu.



Slika 5.19: Rubne vrijednosti iz Primjera 5.3.1.

Rješenje. Približne vrijednosti rješenja za unutrašnje čvorove mreže nalazimo primjenom linearne interpolacije i te vrijednosti uzimamo za početne vrijednosti iteracije:

$$u_A = u_{11}^{(0)} = 4.3; \quad u_B = u_{12}^{(0)} = 4.6; \quad u_C = u_{22}^{(0)} = 7.6; \quad u_D = u_{21}^{(0)} = 7.3.$$

Koristeći formule

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2},$$

gdje je $h_x = 2$ i $h_y = 1$, dobivamo, poslije sređivanja, za unutrašnje čvorove:

$$u_{i,j} = \frac{1}{20} (u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + 9u_{i,j+1} + 9u_{i,j-1} - 9).$$

Primjenom iterativnog procesa

$$u_{i,j}^{(k+1)} = \frac{1}{20} (u_{i+1,j}^{(k)} + u_{i-1,j}^{(k)} + 9u_{i,j+1}^{(k)} + 9u_{i,j-1}^{(k)} - 9), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

dobivamo da je:

$$u_{11}^{(7)} = 3.44; \quad u_{12}^{(7)} = 3.68; \quad u_{22}^{(7)} = 5.44; \quad u_{21}^{(7)} = 5.78.$$

◆

5.4 Metoda mreža za jednađbe paraboličkog tipa

Primjenu metoda mreža za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednađbi paraboličkog tipa razmotrićemo na primjeru jednađbe provođenja toplote u homogenom tankom štapu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.19)$$

5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolickog tipa

gdje je l dužina štapa, $u = u(x, t)$ temperatura, a t vrijeme. Neka je u početnom trenutku $t = 0$ zadana raspodjela temperature (*početni uvjet*)

$$u(x, 0) = f(x), \quad (5.20)$$

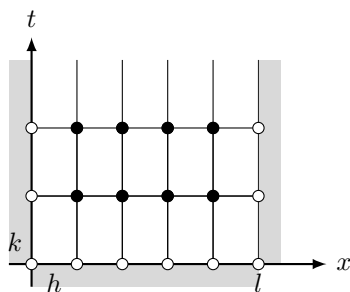
gdje je $f(x)$ zadana funkcija, i neka je zadan zakon promjene temperature u zavisnosti od vremena (toplotni režim) na krajevima štapa $x = 0$ i $x = l$ (*rubni uvjeti*)

$$u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t), \quad (5.21)$$

gdje su $g(t)$ i $h(t)$ zadate funkcije. Problem (5.19)–(5.21) je *mješoviti problem*.

Treba naći raspodjelu temperature $u = u(x, t)$ duž štapa u proizvoljnom trenutku vremena t . Zadatak ćemo riješiti metodom mreža. Za $t \geq 0$ i $0 \leq x \leq l$ konstruisaćemo pravougaonu mrežu (slika 5.20):

$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = \overline{0, n}, \quad h = \frac{l-0}{n} = \frac{l}{n}, \quad (h \text{ je korak duž prostorne ose } Ox), \\ t_j &= jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad (k \text{ je korak duž vremenske ose } Ot). \end{aligned}$$



Slika 5.20: Pravougaona mreža.

Neka je $k = \sigma h^2$, gdje je σ konstanta. Dakle, koraci duž prostorne i vremenske ose mogu biti različiti, ali njihov odnos je kontrolisan veličinom σ . Ako uvedemo oznaku $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, onda jednađbu (5.19) možemo aproksimirati odgovarajućom diferentnom jednađbom

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}, \quad (5.22)$$

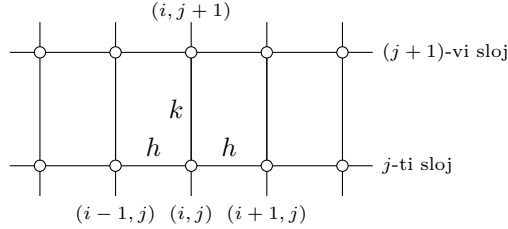
pri čemu je aproksimacija izvoda po vremenu rađena diferencijom unaprijed, a po prostoru centralnom diferencijom. Jednađbu (5.22) možemo napisati u obliku

$$u_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}). \quad (5.23)$$

Iz formule (5.23) zaključujemo da, ako znamo vrijednosti rješenja $u(x, t)$ u tačkama j -tog sloja mreže $t_j = jk$, onda možemo izračunati vrijednost rješenja $u(x, t)$ u

5.4 Metoda mreža za jednadžbe parabolikog tipa

tačkama sljedećeg, $(j+1)$ -vog sloja $t_{j+1} = (j+1)k$. Ova shema se naziva *eksplicitnom* jer se vrijednosti u sloju $j+1$ računaju direktno iz već poznatih vrijednosti u sloju j , bez rješavanja sistema jednadžbi. U formuli (5.23) sadržana su četiri susjedna čvora. Odgovarajuća eksplicitna shema prikazana je na slici 5.21.



Slika 5.21: Eksplicitna shema za PDJ parabolikog tipa.

Dakle, iz početnog uvjeta (5.20) izračunavamo početne vrijednosti

$$u_{i0} = u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n},$$

a iz rubnih uvjeta (5.21) izračunavamo vrijednosti na rubu

$$u_{0j} = u(0, t_j) = g(t_j), \quad u_{nj} = u(l, t_j) = h(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Dalje, primjenom formule (5.23) izračunavamo vrijednosti $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$ u unutrašnjim čvorovima, sloj po sloj.

Parametar $\sigma = \frac{k}{h^2}$ je bezdimenzioni parametar i povezuje vremenski i prostorni korak. Analogno onome što smo vidjeli kod *leapfrog* sheme (vidjeti Primjer 5.1.1), stabilnost se i ovdje ispituje pomoću faktora pojačanja u von Neumannovoj analizi: pretpostavlja se Fourierov oblik rješenja $u_{i,j} = \xi^j e^{i\theta i}$ i analizira se veličina $|\xi(\theta, \sigma)|$. U eksplicitnoj shemi to dovodi do ograničenja $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, jer za veće vrijednosti σ postoji valni broj θ za koji $|\xi(\theta, \sigma)| > 1$, pa se visoke frekvencije eksponencijalno pojačavaju, slično pojavi koju smo uočili kod nestabilne *leapfrog* sheme. Nasuprot tome, za shemu u kojoj je izvod po vremenu aproksimiran diferencijom unazad (tzv. *implicitnu shemu*) vrijedi $|\xi(\theta, \sigma)| < 1$ za sve θ i sve $\sigma > 0$, zbog čega je ona bezuslovno stabilna.⁵

Primjer 5.4.1. Riješiti mješoviti problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u(0, t) = 2t, \quad u(1, t) = 2t + 1, \quad t \geq 0.$$

a) Za korake mreže uzeti $h = h_x = \frac{1}{4}$ i $k = h_t = \frac{1}{32}$.

b) Za korake mreže uzeti $h = h_x = \frac{1}{4}$ i $k = h_t = \frac{1}{2}$.

⁵Dokaze i diskusiju vidjeti na primjer u [26, Sekcija 5.2] za eksplicitnu, te u [28, Poglavlje 7] za implicitnu shemu.

5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolikog tipa

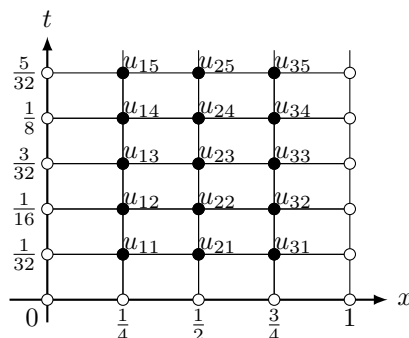
Rješenje.

a) Oblast $\Omega = \{(x, t) \mid 0 \leq x \leq 1, t \geq 0\}$ ćemo aproksimirati mrežom (slika 5.22)

$$\Omega_h = \{(x_i, t_j); x_i = ih, h = 0.25, i = \overline{0, 4}, t_j = jk, k = 0.03125, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

i primijeniti formulu (5.23) birajući za $\sigma = \frac{1}{2}$. Odgovarajuće diferentne jednađbe su date sa

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}. \quad (5.24)$$



Slika 5.22: Mreža čvorova iz Primjera 5.4.1 a).

Iz početnog uvjeta $u(x, 0) = x^2$, $0 \leq x \leq 1$ dobivamo:

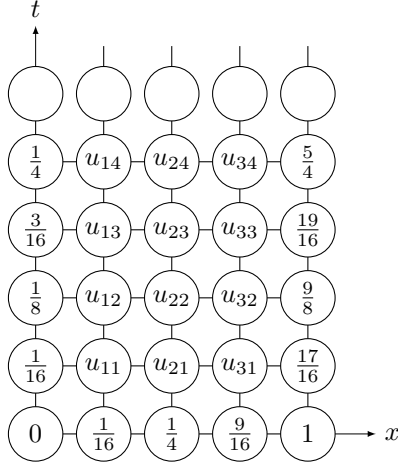
$$\begin{aligned} u_{00} = u(0, 0) &= 0, & u_{10} = u\left(\frac{1}{4}, 0\right) &= \frac{1}{16}, & u_{20} = u\left(\frac{1}{2}, 0\right) &= \frac{1}{4}, \\ u_{30} = u\left(\frac{3}{4}, 0\right) &= \frac{9}{16}, & u_{40} = u(1, 0) &= 1. \end{aligned}$$

Iz rubnih uvjeta slijedi:

$$\begin{aligned} u_{00} = u(0, 0) &= 0, & u_{01} = u\left(0, \frac{1}{32}\right) &= \frac{1}{16}, & u_{02} = u\left(0, \frac{1}{16}\right) &= \frac{1}{8}, \\ u_{03} = u\left(0, \frac{3}{32}\right) &= \frac{3}{16}, & u_{04} = u\left(0, \frac{1}{8}\right) &= \frac{1}{4}, & \dots & \\ u_{40} = u(1, 0) &= 1, & u_{41} = u\left(1, \frac{1}{32}\right) &= \frac{17}{16}, & u_{42} = u\left(1, \frac{1}{16}\right) &= \frac{9}{8}, \\ u_{43} = u\left(1, \frac{3}{32}\right) &= \frac{19}{16}, & u_{44} = u\left(1, \frac{1}{8}\right) &= \frac{5}{4}, & \dots & \end{aligned}$$

5.4 Metoda mreža za jednačbe paraboličkog tipa

Izračunate vrijednosti rješenja $u = u(x, t)$ na rubu oblasti Ω u rubnim čvorovima mreže Ω_h možemo prikazati kao što je to učinjeno na slici 5.23.



Slika 5.23: Rubne vrijednosti iz Primjera 5.4.1 a).

Primjenom formule (5.24) redom računamo:

za $j = 0$

$$u_{11} = \frac{u_{00} + u_{20}}{2} = \frac{0 + \frac{1}{4}}{2} = \frac{1}{8},$$

$$u_{21} = \frac{u_{10} + u_{30}}{2} = \frac{\frac{1}{16} + \frac{9}{16}}{2} = \frac{5}{16},$$

$$u_{31} = \frac{u_{20} + u_{40}}{2} = \frac{\frac{1}{4} + 1}{2} = \frac{5}{8};$$

za $j = 1$

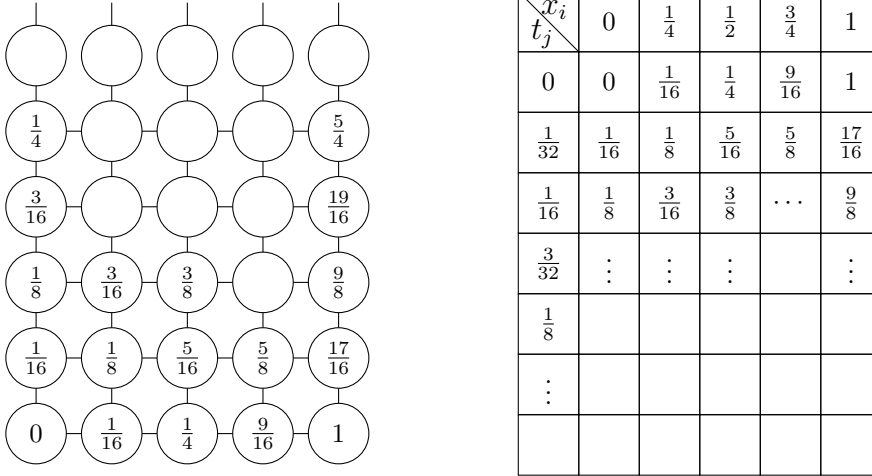
$$u_{12} = \frac{u_{01} + u_{21}}{2} = \frac{\frac{1}{16} + \frac{5}{16}}{2} = \frac{3}{16},$$

$$u_{22} = \frac{u_{11} + u_{31}}{2} = \frac{\frac{1}{8} + \frac{5}{8}}{2} = \frac{3}{8},$$

...

Rezultate računanja možemo zapisati, na primjer, na jedan od načina prikazanih na slici 5.24:

5.4 Metoda mreža za jednađbe paraboličkog tipa



Slika 5.24: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.4.1 a).

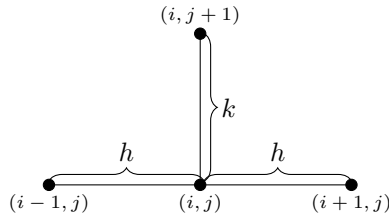
b) Oblast $\Omega = \{(x, t); 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t < \infty\}$ ćemo aproksimirati mrežom

$$\Omega_h = \{(x_i, t_j); x_i = 0.25 \cdot i, i = \overline{0, 4}, t_j = 0.50 \cdot j, j = 0, 1, 2, \dots\}$$

i primijenit ćemo formulu

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}$$

za $\sigma = 8$.

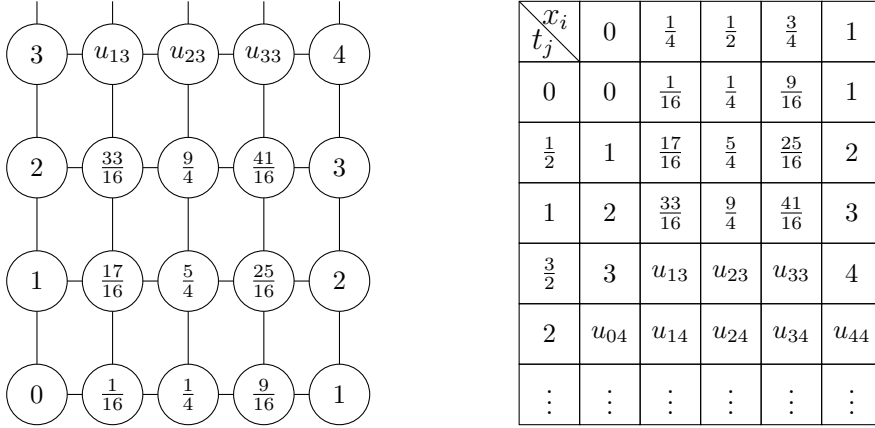


Dakle,

$$u_{i,j+1} = 8u_{i-1,j} - 15u_{i,j} + 8u_{i+1,j}.$$

Numeričko rješenje je dato sa

5.4 Metoda mreža za jednađbe paraboličkog tipa



Slika 5.25: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.4.1 b).

Nije teško provjeriti da je funkcija

$$u(x, t) = 2t + x^2$$

tačno rješenje postavljenog zadatka. ◆

Primjedba 5.4.1. Posmatrana eksplicitna shema u prethodnom primjeru je konzistentna sa toplotnom jednađbom za sve $\sigma = \frac{k}{h^2}$, jer njena lokalna greška odsijecanja teži nuli kada $h, k \rightarrow 0$. Zaista, za shemu (5.22) lokalna greška odsijecanja je

$$\tau_{i,j} = \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} - \frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2}.$$

Za $u(x, t) = 2t + x^2$ lako se uvjeravamo da je

$$\frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{k} = 2,$$

i

$$\frac{u(x_{i+1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i-1}, t_j))}{h^2} = \frac{2h^2}{h^2} = 2,$$

pa je

$$\tau_{i,j} = 2 - 2 = 0 \quad \text{za sve } i, j.$$

Dakle, shema je tačna na mreži za ovo specifično rješenje, pa se numeričke vrijednosti poklapaju sa tačnim rješenjem sve dok nema utjecaja grešaka zaokruživanja. U primjeru pod b), gdje je $\sigma = 8$, korišten je mali broj vremenskih koraka, pa početne greške zaokruživanja nisu imale vremena da se značajno pojačaju i pokažu nestabilnost numeričkog rješenja. Kao što smo ranije naveli, shema je

5.4 Metoda mreža za jednadžbe paraboličkog tipa

stabilna samo za $0 < \sigma \leq \frac{1}{2}$, a za $\sigma > \frac{1}{2}$ je nestabilna. Međutim, nestabilnost se pokaže čim se poveća broj koraka ili kada se pojave i vrlo male numeričke perturbacije. Za grešku

$$e_{i,j} = u_{i,j} - u(x_i, t_j),$$

iz linearnosti sheme, slijedi da ona zadovoljava istu rekurziju kao i u . Za eksplisitnu shemu je

$$e_{i,j+1} = (1 - 2\sigma)e_{i,j} + \sigma(e_{i-1,j} + e_{i+1,j}).$$

Za $\sigma = 8$ dobivamo

$$e_{i,j+1} = -15e_{i,j} + 8(e_{i-1,j} + e_{i+1,j}). \quad (5.25)$$

Uzmimo da je greška oblika

$$e_{i,j} = A_j (-1)^i,$$

(znak greške oscilira, tj. mijenja se od čvora do čvora). Tada je

$$e_{i-1,j} = -A_j (-1)^i, \quad e_{i+1,j} = -A_j (-1)^i,$$

pa iz (5.25) slijedi:

$$A_{j+1} = -15A_j + 8(-A_j - A_j) = -15A_j - 16A_j = -31A_j.$$

Znači, amplituda greške u svakom narednom koraku raste prema formuli

$$|A_{j+1}| = 31 |A_j|,$$

što je ogromno. Ako na početku imamo samo grešku reda 10^{-12} (što je tipična greška zaokruživanja), nakon 10 koraka dobivamo da greška postaje reda

$$31^{10} \cdot 10^{-12} \approx 8.2 \times 10^{14} \cdot 10^{-12} = 8.2 \times 10^2.$$

U slučaju kada je $h = \frac{1}{10}$, $k = \frac{1}{100}$ imamo $\sigma = 1$, što je izvan stabilnog područja sheme. Iako je lokalna greška odsijecanja i dalje nula, svaka (pa i minimalna) greška zaokruživanja u podacima ili računanju se eksponencijalno pojačava (povećava). Tačno rješenje u tački $(x_9, t_{50}) = (0.9, 0.5)$ je $u(0.9, 0.5) = 1.81$, dok numerička shema daje

$$u_{9,50} = -1.489051657912 \cdot 10^6.$$

Vidimo da nakon 50 koraka greška postaje dominantna, što objašnjava zašto se dobije numerička vrijednost reda 10^6 iako je tačna vrijednost 1.81.

Primjer 5.4.2. Odrediti približno rješenje za sljedeći problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1),$$

uz rubne uvjete

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad (t > 0), \\ u(x, 0) &= x^2, \quad (0 < x < 1), \end{aligned}$$

koristeći metodu konačnih razlika i mrežu sa $h = \frac{1}{5}$ i $k = \frac{1}{50}$.

5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolikog tipa

Rješenje. Uzimajući $x_i = ih$, $t_j = jk$, $h = \frac{1}{5}$, $k = \frac{1}{50}$, imamo da je $\sigma = \frac{1}{2}$, te diferentna jednađba koja odgovara ovom problemu glasi

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}.$$

Iz uvjeta dobivamo

$$\begin{aligned} u_{0,j} &= x_{5,j} = 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \\ u_{i,0} &= \frac{i^2}{25}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5. \end{aligned}$$

Prema tome, dobivamo da je

$$\begin{aligned} u_{11} &= \frac{u_{00} + u_{20}}{2} = \frac{2}{25}, & u_{21} &= \frac{u_{10} + u_{30}}{2} = \frac{1}{5}, & u_{31} &= \frac{u_{20} + u_{40}}{2} = \frac{2}{5}, \\ u_{41} &= \frac{u_{30} + u_{50}}{2} = \frac{17}{25}, & u_{12} &= \frac{u_{01} + u_{21}}{2} = \frac{1}{10}, & u_{22} &= \frac{u_{11} + u_{31}}{2} = \frac{6}{25}, \\ u_{32} &= \frac{u_{21} + u_{41}}{2} = \frac{11}{25}, & u_{42} &= \frac{u_{31} + u_{51}}{2} = \frac{1}{5}, & u_{13} &= \frac{u_{02} + u_{22}}{2} = \frac{3}{25}, \\ u_{23} &= \frac{u_{12} + u_{32}}{2} = \frac{27}{100}, & u_{33} &= \frac{u_{22} + u_{42}}{2} = \frac{11}{50}, & u_{43} &= \frac{u_{32} + u_{52}}{2} = \frac{11}{50}. \end{aligned}$$

◆

Primjer 5.4.3. Odrediti približno rješenje za sljedeći problem:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1),$$

uz početni uvjet

$$u(x, 0) = x, \quad (0 < x < 1),$$

i rubne uvjete

$$\frac{\partial u(0, t)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial u(1, t)}{\partial t} = 0, \quad (t > 0).$$

Rješenje. Ako je $h = \frac{1}{5}$, $k = \frac{1}{50}$, tada je $\sigma = \frac{1}{2}$ i stoga imamo

$$u_{i,j+1} = \frac{u_{i-1,j} + u_{i+1,j}}{2}.$$

Iz datih uvjeta dobivamo

$$\frac{u_{01} - u_{1,j}}{h} = 0, \quad \frac{u_{41} - u_{5,j}}{h} = 0,$$

odakle slijedi

$$u_{0,j} = u_{1,j}, \quad u_{4,j} = u_{5,j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, \quad u_{i,0} = \frac{i}{5}, \quad i = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolickog tipa

Stoga dobivamo

$$\begin{aligned}
 u_{11} &= \frac{u_{00} + u_{20}}{2} = u_{01} = \frac{1}{5}, & u_{21} &= \frac{u_{10} + u_{30}}{2} = \frac{2}{5}, \\
 u_{31} &= \frac{u_{20} + u_{40}}{2} = \frac{3}{5}, & u_{41} &= \frac{u_{30} + u_{50}}{2} = u_{51} = \frac{4}{5}, \\
 u_{02} &= u_{12} = \frac{u_{01} + u_{21}}{2} = \frac{3}{10}, & u_{22} &= \frac{u_{11} + u_{31}}{2} = \frac{2}{5}, \\
 u_{32} &= \frac{u_{21} + u_{41}}{2} = \frac{3}{5}, & u_{42} &= u_{52} = \frac{u_{31} + u_{51}}{2} = \frac{7}{10}, \\
 u_{03} &= u_{13} = \frac{u_{02} + u_{22}}{2} = \frac{7}{20}, & u_{23} &= \frac{u_{12} + u_{32}}{2} = \frac{9}{20}, \\
 u_{33} &= \frac{u_{22} + u_{42}}{2} = \frac{11}{20}, & u_{43} &= u_{53} = \frac{u_{32} + u_{52}}{2} = \frac{13}{20}.
 \end{aligned}$$

◆

Razmotrimo problem izbora konstante σ u relaciji (5.23), odnosno (5.22), i ocjene greške aproksimacije Cauchyevog problema (5.19)–(5.21) odgovarajućim diferentnim problemom (5.23), tj. zamjene diferencijalnog operatora

$$L[u] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial t}$$

konačnodiferentnim operatorom

$$L_h[u] = \frac{1}{h^2} \left[(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) - \frac{1}{\sigma} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) \right].$$

Prirodno je da konstantu, parametar σ , treba birati tako da greška aproksimacije

$$R_h[u] = L_h[u] - L[u]$$

bude najmanja. Izračunajmo grešku u čvorovima (x_i, t_j) mreže za funkciju $u = u(x, t)$ – rješenje jednađbe (5.19). Uzimaću u obzir da je:

$$u_{i+1,j} = u(x_i + h, t_j), \quad u_{i-1,j} = u(x_i - h, t_j), \quad u_{i,j+1} = u(x_i, t_j + \sigma h^2).$$

i razvijanjem $L_h[u]$ po Taylorovoj formuli oko tačke (x_i, t_j) ograničavajući se članovima koji sadrže h^6 , zaključujemo da dobivamo

$$\begin{aligned}
 L_h[u] = & \frac{1}{h^2} \left\{ u_{i,j} + \left(\frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} \right. \right. \\
 & + \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} + \frac{\partial^5 u(x_i, t_j)}{\partial x^5} \frac{h^5}{5!} + \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} \frac{h^6}{6!} - 2u_{i,j} \\
 & + u_{i,j} - \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial x} \frac{h}{1!} + \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} \frac{h^2}{2!} - \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial x^3} \frac{h^3}{3!} + \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial x^4} \frac{h^4}{4!} \\
 & - \frac{\partial^5 u(x_i, t_j)}{\partial x^5} \frac{h^5}{5!} + \left. \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} \frac{h^6}{6!} \right) - \frac{1}{\sigma} \left[u_{i,j} + \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \frac{\sigma h^2}{1!} \right. \\
 & + \left. \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} \frac{(\sigma h^2)^2}{2!} + \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3} \frac{(\sigma h^2)^3}{3!} - u_{i,j} \right] \left. \right\} + O(h^6).
 \end{aligned}$$

Poslije sređivanja imamo

$$\begin{aligned}
 L_h[u] = & \left(\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t} \right) + h^2 \left(\frac{1}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial x^4} - \frac{\sigma}{2} \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2} \right) \\
 & + h^4 \left(\frac{1}{360} \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} - \frac{\sigma^2}{6} \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3} \right) + O(h^6). \quad (5.26)
 \end{aligned}$$

Budući da je $u(x, t)$ rješenje jednadžbe (5.19), to je

$$\frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x_i, t_j)}{\partial t}, \quad \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial x^4} = \frac{\partial^2 u(x_i, t_j)}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} = \frac{\partial^3 u(x_i, t_j)}{\partial t^3},$$

pa zamjenom u (5.26) dobivamo

$$L_h[u] = h^2 \left(\frac{1}{12} - \frac{\sigma}{2} \right) \frac{\partial^4 u(x_i, t_j)}{\partial x^4} + h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{\sigma^2}{6} \right) \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} + O(h^6). \quad (5.27)$$

Izaberemo li σ tako da prvi sabirak u (5.27) bude jednak nuli, tj. ako izaberemo da je

$$\frac{1}{12} - \frac{\sigma}{2} = 0,$$

imamo $\sigma = \frac{1}{6}$. Tada ćemo imati

$$L_h[u] = h^4 \left(\frac{1}{360} - \frac{1}{6^3} \right) \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} + O(h^6) = -\frac{h^4}{540} \frac{\partial^6 u(x_i, t_j)}{\partial x^6} + O(h^6),$$

i ocjena greške je $R_h[u] = O(h^4)$. Za druge vrijednosti σ greška je $R_h[u] = O(h^2)$. Optimalni izbor za σ je $\frac{1}{6}$. Za $\sigma = \frac{1}{6}$ formula (5.23) je sljedećeg oblika

$$u_{i,j+1} + \frac{1}{6}(u_{i-1,j} + 4u_{i,j} + u_{i+1,j}).$$

5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolickog tipa

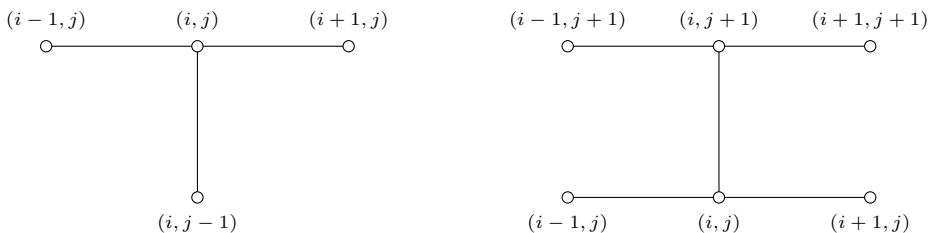
Osim eksplicitne sheme (5.23), koriste se i sheme drugačijeg oblika. Za parabolicku jednađbu oblika

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f$$

često se koristi i shema

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{\zeta(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + f_{i,j+1}) + (1 - \zeta)(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j} + f_{i,j})}{h^2}, \quad (5.28)$$

gdje je $0 \leq \zeta \leq 1$ težina. Za $\zeta = 0$ u formuli (5.28) dobivamo eksplicitnu shemu. Za $\zeta = \frac{1}{2}$ u formuli (5.28) shema se naziva *Crank-Nicholsonova* shema. Za $\zeta = 1$ u formuli (5.28) dobiva se implicitna shema.



Primjer 5.4.4. Crank-Nicholsonovom shemom naći približno rješenje mješovitog problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.02,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 4x, & 0 \leq x \leq 1/2, \\ 4(1 - x), & 1/2 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Uzeti korake mreže $h = 0.1$ i $k = 0.01$.

Rješenje. Kako su početni i rubni uvjeti simetrični u odnosu na pravu $x = \frac{1}{2}$, i rješenje zadatka je simetrično u odnosu na tu pravu. Stoga ćemo problem rješavati u oblasti $[0, 0.5] \times [0, 0.02]$. Diskretizacija jednađbe u unutrašnjim čvorovima mreže shemom sa težinama daje

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}),$$

gdje je $i = 1, \dots, 5$, $j = 0, 1$. Uzimajući u obzir zadate početne i rubne uvjete, diferentna shema kojom se aproksimira dati problem je

$$u_{i,0} = 4ih, \quad i = 1, \dots, 5, \quad u_{0,j} = 0, \quad j = 1, 2.$$

5.4 Metoda mreža za jednađbe paraboličkog tipa

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j}, \quad i = 1, \dots, 5, \quad j = 0, 1.$$

Pri tome treba imati u vidu da je zbog simetrije zadatka $u_{6,j} = u_{4,j}$, $j = 0, 1, 2$. Rješavanjem na svakom vremenskom koraku (za svako j) odgovarajućeg sistema, dobivamo vrijednosti rješenja koje su prikazane u sljedećoj tabeli.

$\begin{matrix} x_i \\ t_j \end{matrix}$	0.0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
0.00	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2.0	1.6	1.2	0.8	0.4	0
0.01	0	0.398	0.791	1.167	1.476	1.538	1.476	1.167	0.791	0.398	0
0.02	0	0.387	0.758	1.079	1.292	1.384	1.292	1.079	0.758	0.387	0



Primjer 5.4.5. Implicitnom shemom odrediti približno rješenje mješovitog problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x, \quad 0 < x < 2, \quad 0 < t \leq 0.2,$$

$$u(0, t) = t, \quad u(2, t) = 0, \quad u(x, 0) = 0.$$

Uzeti korake mreže $h = 0.25$ i $k = 0.1$. Računati sa četiri decimale.

Rješenje. Implicitna shema je oblika

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + \sin x_i, \quad i = 1, \dots, 7, \quad j = 0, 1.$$

Uzimajući u obzir zadate početne i rubne uvjete, diferentna shema kojom se aproksimira dati problem je

$$u_{i,0} = 0, \quad i = 0, \dots, 8, \quad u_{0,1} = j, \quad u_{8,j} = 0, \quad j = 1, 2,$$

$$-u_{i-1,j+1} + 2.625u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = 0.0625(2u_{i,j} + \cos x_i), \quad i = 1, \dots, 7, \quad j = 0, 1.$$

Rješavanjem za $j = 0$ i $j = 1$ odgovarajućih sistema dobivamo rješenje prikazano u sljedećoj tabeli.

$\begin{matrix} x_i \\ t_j \end{matrix}$	0.0	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75	2.0
0.1	0.1	0.0924	0.0821	0.0682	0.0513	0.0326	0.0146	0.0013	0
0.2	0.2	0.1826	0.1609	0.1336	0.1015	0.0669	0.0341	0.0091	0



5.4 Metoda mreža za jednađbe parabolickog tipa

Primjer 5.4.6.

a) Data je parcijalna diferencijalna jednađba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

i diferentna shema

$$\frac{1}{k}(u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{\zeta}{h^2}(u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}) + \frac{1-\zeta}{h^2}(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}).$$

Odrediti parametar ζ tako da red aproksimacije bude četiri po h i dva po k .

b) Koristeći shemu dobivenu u tački a), odrediti približno rješenje mješovitog problema

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 3, \quad 0 < t \leq 0.3.$$

$$u(x, 0) = \tan(\pi x), \quad u(0, t) = t, \quad u(3, t) = 0.$$

Za $t = 0.3$, uzeti da je $h = 0.6$, a k izabrati tako da korištena shema bude eksplisitna.

Rješenje.

a) Korištenjem Taylorovog razvoja funkcije $u(x, t)$ u okolini tačke $(x, t + k/2)$, pod pretpostavkom da je funkcija u dovoljno glatka, dobivamo da je greška aproksimacije

$$\begin{aligned} R(u) &= \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{k}(u(x, t+k) - u(x, t)) \\ &\quad + \frac{\zeta}{h^2}(u(x+h, t+k) - 2u(x, t+k) + u(x-h, t+k)) \\ &\quad + \frac{1-\zeta}{h^2}(u(x+h, t) - 2u(x, t) + u(x-h, t)) \\ &= \left(\frac{h^2}{12} - (1-2\zeta)\frac{k}{2} \right) \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \left(x, t + \frac{k}{2} \right) + O(h^4 + k^2), \end{aligned}$$

jer je iz jednađbe

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}.$$

Schema će biti traženog reda tačnosti ako je

$$\zeta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{h^2}{6k} \right).$$

5.5 Metoda mreža za jednadžbe hiperboličkog tipa

- b) Shema je eksplicitna ako je $\zeta = 0$, a to je za $k = h^2/6$. Za zadatu vrijednost koraka h eksplicitna diferentna shema je

$$u_{i,j+1} = \frac{1}{6}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) + \frac{2}{3}u_{i,j}.$$

Približne vrijednosti rješenja datog mješovitog problema određene primjenom ove sheme date su sljedećom tabelom

$\begin{matrix} x_i \\ t_j \end{matrix}$	0.0	0.6	1.2	1.8	2.4	3.0
0.00	0.00	-3.0777	0.7265	-0.7265	3.0777	0
0.06	0.06	-2.2718	0.2321	-0.2310	2.2794	0
0.12	0.12	-1.6929	-0.0330	0.0369	1.7142	0
0.18	0.18	-1.2674	-0.1618	0.1708	1.3070	0
0.24	0.24	-0.9470	-0.2112	0.2278	1.0087	0
0.30	0.30	-0.6997	-0.2156	0.2423	0.7868	0

◆

5.5 Metoda mreža za jednadžbe hiperboličkog tipa

Primjenu metoda mreža za rješavanje parcijalnih diferencijalnih jednadžbi hiperboličkog tipa razmotrićemo na primjeru jednadžbe slobodne oscilacije homogene ograničene žice ili jednadžbe žice koja treperi. Dakle, posmatramo jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (5.29)$$

gdje je a konstanta, $u = u(x, t)$ nepoznata funkcija, x prostorna, a t vremenska nezavisna varijabla. Potražićemo funkciju $u = u(x, t)$ koja je rješenje jednadžbe (5.29) i koja zadovoljava *početne uvjete*

$$u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = F(x), \quad 0 \leq x \leq l, \quad (5.30)$$

gdje je l dužina žice, i *rubne uvjete*

$$u(0, t) = g(t), \quad u(l, t) = h(t), \quad 0 \leq t < \infty, \quad (5.31)$$

gdje su $f(x)$, $F(x)$, $g(t)$ i $h(t)$ realne funkcije svojih argumenata na zadatim intervalima. Da bismo našli približno rješenje *mješovitog problema* (5.29) – (5.31), oblast

$$\Omega = \{(x, t); 0 \leq x \leq l, \quad 0 \leq t < \infty\}$$

5.5 Metoda mreža za jednadžbe hiperboličkog tipa

ćemo aproksimirati pravougaonom mrežom

$$\Omega_h = \{(x_i, t_j); x_i = ih_x, \quad i = \overline{0, n}, \quad t_j = jh_t, \quad j = 0, 1, 2, \dots\},$$

gdje je $h_x = \frac{l-0}{n}$, $x_{i+1} - x_i = h_x$, $i = \overline{0, n-1}$ i $h_t = t_{j+1} - t_j$, $j = 0, 1, 2, \dots$

U svakom unutrašnjem čvoru mreže Ω_h , čvoru (x_i, t_j) , odnosno (i, j) , jednadžbu (5.29) aproksimiramo *diferentnom jednadžbom*

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_t^2} = a^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2}.$$

Kao i u prethodnim potpoglavljima, lako se pokazuje da je i ova shema konzistentna.

U posljednjoj aproksimaciji prirodno je uvesti bezdimenzioni parametar

$$\lambda = \frac{a h_t}{h_x},$$

koji se naziva *Courantov broj*. Uz ovu oznaku, shema se može zapisati u eksplicitnom obliku:

$$u_{i,j+1} = 2(1 - \lambda^2) u_{i,j} + \lambda^2 (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1}. \quad (5.32)$$

Za stabilnost ove klasične eksplicitne sheme (u smislu von Neumannove analize) neophodno je da važi tzv. *CFL uvjet*⁶

$$0 < \lambda \leq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad a \frac{h_t}{h_x} \leq 1.$$

Specijalno, u slučaju $\lambda = 1$, tj. kada je $h_t = \frac{h_x}{a}$, shema (5.32) se pojednostavljuje u oblik

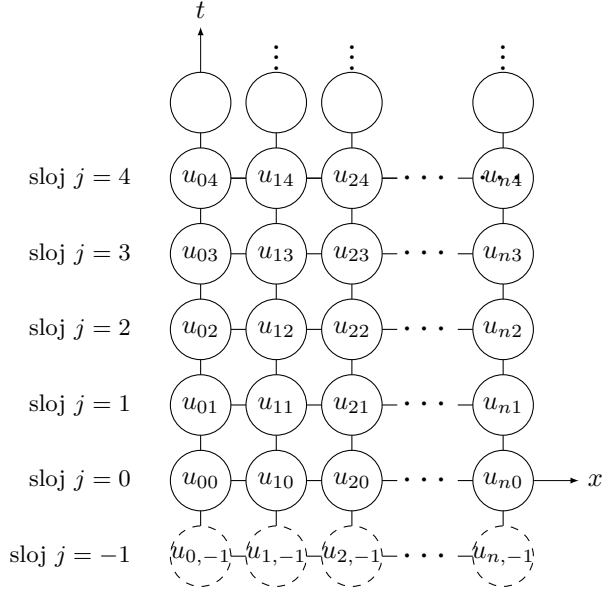
$$u_{i,j+1} = u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - u_{i,j-1}, \quad (5.33)$$

koji ćemo koristiti u nastavku.

Dakle, da bismo izračunali približne vrijednosti rješenja $u(x, t)$ na $(j+1)$ -vom sloju, vrijednosti $u_{i,j+1}$, potrebno je poznavanje vrijednosti tog rješenja na prethodna dva sloja mreže, vrijednosti $u_{i+1,j}$, $u_{i-1,j}$ i $u_{i,j-1}$ na j -tom i $(j-1)$ -vom sloju (slika 5.26). Ako iskoristimo oznake $u_{i,j} = u(x_i, t_j)$, onda vrijednost rješenja $u = u(x, t)$ u čvorovima mreže Ω_h možemo pregledno prikazati kao što je učinjeno na sljedećoj slici.

⁶Courant–Friedrichs–Lewy uvjeti, vidjeti [26, Sekcije 5.3 i 5.4].

5.5 Metoda mreža za jednažbe hiperboličkog tipa



Slika 5.26: Shema za PDJ hiperboličkog tipa.

Da bismo izračunali vrijednosti rješenja na prvom sloju ($j = 1$), potrebno je znati vrijednosti rješenja na prethodna dva sloja. Koristeći prvi početni uvjet nalazimo vrijednosti na 0-tom sloju:

$$u_{i0} = u(x_i, 0) = f(x_i), \quad i = \overline{0, n}.$$

Na osnovu drugog početnog uvjeta na fiktivnom sloju $j = -1$ (sloju koji "ne pripada" mreži) imamo

$$u_{i,-1} = u_{i0} - h_t \cdot \mathcal{F}(x_i), \quad i = \overline{0, n}, \quad (5.34)$$

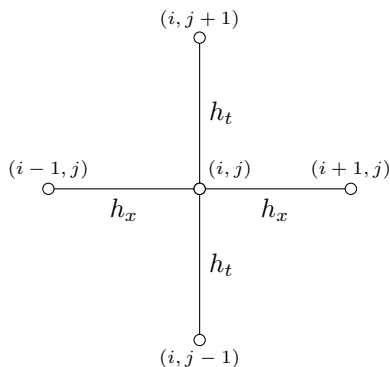
gdje smo iskoristili formulu

$$\frac{\partial u(x_i, 0)}{\partial t} = \mathcal{F}(x_i) = \frac{u_{i,-1} - u_{i0}}{-h_t}.$$

Iz rubnih uvjeta (5.31) nalazimo:

$$u_{0j} = u(0, t_j) = g(t_j), \quad u_{nj} = u(l, t_j) = h(t_j), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Sada, koristeći formulu (5.33), izračunavamo, po shemi koja je prikazana na narednoj slici, približne vrijednosti $u_{i,j+1}$ rješenja $u = u(x, t)$ na sloju $j + 1$ na osnovu već izračunatih vrijednosti $u_{i-1,j}$, $u_{i+1,j}$ i $u_{i,j-1}$ na slojevima j i $j - 1$. Ovaj postupak nastavljamo dalje, sloj po sloj.



Primjer 5.5.1. Metodom mreža naći približno rješenje jednađbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

koje zadovoljava:

- početne uvjete $u(x, 0) = x^2 + 2x + 1$, $\frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = -4$, $0 \leq x \leq 1$,
- rubne uvjete $u(0, t) = t^2 - t + 1$, $u(1, t) = t^2 - 4t + 4$, $0 \leq t < \infty$.

Za korak mreže uzeti $h_x = h_t = \frac{1}{4}$.

Rješenje. Na osnovu prvog rubnog uvjeta nalazimo:

$$\begin{aligned} u_{00} &= u(0, 0) = 1, & u_{01} &= u\left(0, \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{16}, \\ u_{02} &= u\left(0, \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, & u_{03} &= u\left(0, \frac{3}{4}\right) = \frac{13}{16}, \dots \end{aligned}$$

a na osnovu drugog rubnog uvjeta:

$$\begin{aligned} u_{40} &= u(1, 0) = 4, \\ u_{41} &= u\left(1, \frac{1}{4}\right) = \frac{49}{16}, \\ u_{42} &= u\left(1, \frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}, \dots \end{aligned}$$

Na osnovu prvog početnog uvjeta imamo:

$$\begin{aligned} u_{00} &= u(0, 0) = 1, & u_{10} &= u\left(\frac{1}{4}, 0\right) = \frac{25}{16}, \\ u_{20} &= u\left(\frac{1}{2}, 0\right) = \frac{9}{4}, & u_{30} &= u\left(\frac{3}{4}, 0\right) = \frac{49}{16}, \\ u_{40} &= u(1, 0) = 4. \end{aligned}$$

5.5 Metoda mreža za jednadžbe hiperboličkog tipa

Da bismo mogli primijeniti formulu (5.33), potrebno je izračunati vrijednosti $u_{i,-1}$, $i = \overline{0,4}$, vrijednosti na fiktivnom sloju $j = -1$. Za to ćemo koristiti drugi početni uvjet

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \mathcal{F}(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

gdje je $\mathcal{F}(x) = -4$.

Parcijalni izvod ćemo aproksimirati odgovarajućim količnikom konačnih razlika, dakle

$$\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \frac{u_{i,-1} - u_{i,0}}{-h_t},$$

pa je:

$$u_{i,-1} - u_{i,0} = \mathcal{F}(x_i)h_t,$$

odnosno, koristimo formulu (5.34):

$$u_{i,-1} = u_{i,0} - h_t \mathcal{F}(x_i) = u_{i,0} - \frac{1}{4}(-4) = u_{i,0} + 1, \quad i = \overline{0,4}.$$

Na taj način dobivamo:

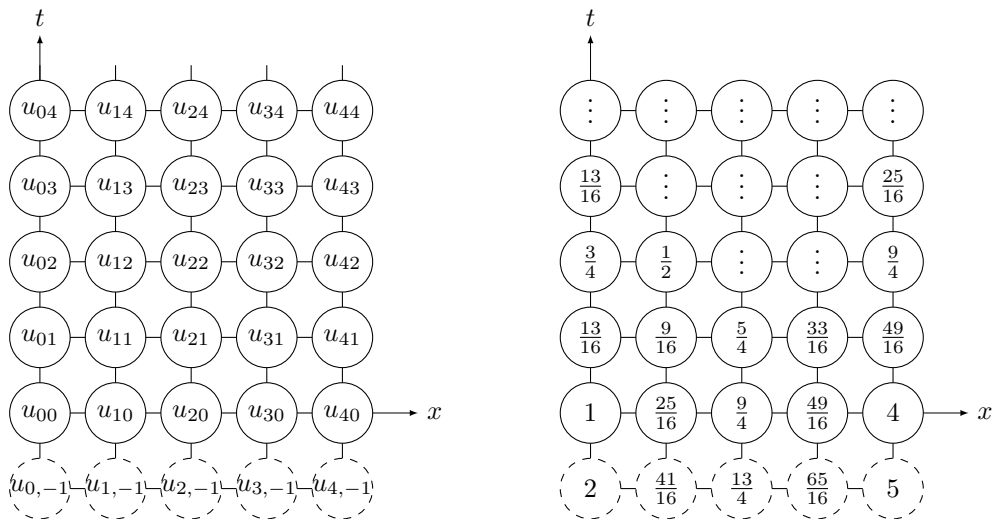
$$\begin{aligned} u_{0,-1} &= 1 + 1 = 2, & u_{1,-1} &= \frac{25}{16} + 1 = \frac{41}{16}, \\ u_{2,-1} &= \frac{9}{4} + 1 = \frac{13}{4}, & u_{3,-1} &= \frac{49}{16} + 1 = \frac{65}{16}, \\ u_{4,-1} &= 4 + 1 = 5. \end{aligned}$$

Dalje, primjenom formule (5.33) nalazimo:

$$\begin{aligned} u_{11} &= 1 + \frac{9}{4} - \frac{41}{16} = \frac{9}{16}, & u_{21} &= \frac{25}{16} + \frac{49}{16} - \frac{13}{4} = \frac{5}{4}, \\ u_{31} &= \frac{9}{4} + 4 - \frac{65}{16} = \frac{33}{16}, & u_{12} &= \frac{13}{16} + \frac{5}{4} - \frac{25}{16} = \frac{1}{2}, \dots \end{aligned}$$

Radi preglednosti, rezultate računanja možemo prikazati grafički (slika 5.5.1).

5.5 Metoda mreža za jednađbe hiperboličkog tipa



Slika 5.27: Shematski prikaz rješenja Primjera 5.5.1.



Primjer 5.5.2. Riješiti mješoviti problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2 + t^2, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq 0.15,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \sin^2(\pi x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = 0.$$

eksplicitnom diferentnom shemom tačnosti $O(h_x^2 + h_t^2)$. Uzeti za $h_x = 0.25$ i $h_t = 0.05$.

Rješenje. Da bi se konstruisala shema tražene tačnosti, potrebno je drugi početni uvjet na odgovarajući način aproksimirati. Polazeći od količnika konačnih razlika

$$u_t(x, 0) = \frac{1}{h_t}(u(x, h_t) - u(x, 0)) = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{h_t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right) \Big|_{(x, 0)} + O(h_t^2),$$

i uzimajući u obzir jednađbu i oba zadana početna uvjeta, dobivamo da je

$$u_t(x, 0) = \frac{h_t}{2} (-\pi^2 \sin^2(\pi x) + x^2) + O(h_t^2).$$

Zanemarivanjem člana $O(h_t^2)$ nalazimo da je tražena aproksimacija

$$u_{i,1} = \sin^2(\pi x_i) + \frac{h_t^2}{2} (x_i^2 - \pi^2 \sin^2(\pi x_i)).$$

5.6 Zadaci za samostalan rad

Koristeći standardne količnike konačnih razlika za aproksimaciju izvoda drugog reda u jednadžbi, konačno dobivamo traženu shemu

$$u_{i,0} = \sin^2(\pi x_i), \quad u_{i,1} = \sin^2(\pi x_i) + 0.00125(x_i^2 - \pi^2 \sin^2(\pi x_i)), \quad i = 0, \dots, 4,$$

$$u_{i,j+1} = 1.92u_{i,j} + 0.04(u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) - u_{i,j-1} + 0.0025(x_i^2 + t_j^2), \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2,$$

$$u_{0,j} = u_{4,j} = 0, \quad j = 2, 3.$$

Rezultati izračunavanja ovom shemom prikazani su tabelom

$t_j \backslash x_i$	0.00	0.25	0.50	0.75	1.00
0.00	0	0.5	1.0	0.5000	0
0.05	0	0.4939	0.9880	0.4945	0
0.10	0	0.4880	0.9371	0.4904	0
0.15	0	0.4807	0.8510	0.4860	0

◆

5.6 Zadaci za samostalan rad

1. Odrediti približno rješenje koristeći metodu konačnih razlika za $n = 4$, $h = k = \frac{1}{4}$, za parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (0 < x < 1, \quad 0 < y < 1),$$

uz rubne uvjete:

$$\begin{aligned} u(0, y) &= 0, & u(1, y) &= 0, & (0 < y < 1), \\ u(x, 0) &= 0, & u(x, 1) &= 10, & (0 < x < 1). \end{aligned}$$

2. Metodom mreža riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2$$

ako su zadate vrijednosti rješenja $u = u(x, y)$ na konturi kvadrata $OABC$

5.6 Zadaci za samostalan rad

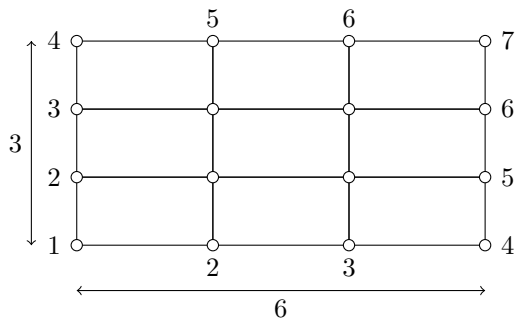
s vrhovima $O(0,0)$, $A(1,0)$, $B(1,1)$ i $C(0,1)$:

$$\begin{aligned} u_{00} = u(0,0) &= 0, & u_{10} = u\left(\frac{1}{3}, 0\right) &= \frac{1}{9}, & u_{20} = u\left(\frac{2}{3}, 0\right) &= \frac{4}{9}, \\ u_{30} = u(1,0) &= 1, & u_{01} = u\left(0, \frac{1}{3}\right) &= \frac{1}{9}, & u_{02} = u\left(0, \frac{2}{3}\right) &= \frac{4}{9}, \\ u_{03} = u(0,1) &= 1, & u_{31} = u\left(1, \frac{1}{3}\right) &= \frac{10}{9}, & u_{32} = u\left(1, \frac{2}{3}\right) &= \frac{13}{9}, \\ u_{13} = u\left(\frac{1}{3}, 1\right) &= \frac{10}{9}, & u_{23} = u\left(\frac{2}{3}, 1\right) &= \frac{13}{9}, & u_{33} = u(1,1) &= 2. \end{aligned}$$

3. Riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2,$$

gdje su vrijednosti traženog rješenja jednadžbe na konturi zadate kao što je učinjeno na slici 5.28.



Slika 5.28: Rubne vrijednosti iz Zadatka 3.

4. Metodom mreže sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \cos x \cos y, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = x^2 + y^2, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Sve čvorove unutar oblasti Ω tretirati kao unutrašnje, a u spoljašnjim čvorovima rješenje aproksimirati interpolacijom. Računati sa četiri decimale.

5. Riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

5.6 Zadaci za samostalan rad

$$u = |x| + |y|, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid (|x| + 2)(|y| + 2) < 12\}$. sa korakom $h = 1$. Za aproksimaciju vrijednosti rješenja u rubnim čvorovima koristiti linearnu interpolaciju. Računati sa pet decimala.

Uputstvo: Oblast Ω je ograničena hiperbolama i simetrična je u odnosu na koordinatne ose i pravu $y = x$. Kako je i funkcija kojom je zadan početni uvjet također simetrična u odnosu na ove prave, zadatak se može rješavati u jednoj osmini oblasti i rješenje simetrično preslikati u ostatak oblasti. Čvorovi $(4, 0)$ i $(2, 1)$ pripadaju rubu te je u njima vrijednost rješenja zadana tačno. U rubnom čvoru $(3, 1)$ rješenje se aproksimira linearnom interpolacijom pomoću vrijednosti u čvoru $(3, 0)$ i tački na rubu $A(3, 4)$:

$$u_A + 1.5u_{30} = 8.5.$$

6. Metodom mreža riješiti rubni problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u(x, 0) = x^2, \quad 0 \leq x \leq 2, \quad u(0, t) = 2t, \quad u(2, t) = 2t + 4, \quad t \geq 0$$

Za korake mreže uzeti $h = h_x = k = h_t = 0.5$. Izračunati približne vrijednosti rješenja na prva tri sloja.

Uputstvo: Koristiti, na primjer, diferentnu jednadžbu:

$$u_{i,j+1} = \sigma u_{i-1,j} + (1 - 2\sigma)u_{i,j} + \sigma u_{i+1,j}, \quad k = \sigma h^2.$$

7. Metodom mreža naći približno rješenje parcijalne diferencijalne jednadžbe

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2(x + y)$$

u kvadratu $OABC$ ($O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(1, 1)$, $C(0, 1)$), koje na njegovoj konturi zadovoljava uvjete:

$$\begin{aligned} u(x, y)|_{OA} &= 0, & u(x, y)|_{AB} &= y(y + 1), \\ u(x, y)|_{BC} &= x(x + 1), & u(x, y)|_{OC} &= 0. \end{aligned}$$

Za korake mreže uzeti $h_x = h_y = \frac{1}{4}$. Računati sa četiri decimale.

8. Metodom mreža sa korakom $h = 0.5$ riješiti rubni problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \quad (x, y) \in \Omega,$$

$$u = x^4 y^4, \quad (x, y) \in \partial\Omega,$$

gdje je $\Omega = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Sve čvorove unutar oblasti Ω tretirati kao unutrašnje, a u spoljašnjim čvorovima rješenje aproksimirati *interpolacijom*. Računati sa pet decimala.

5.6 Zadaci za samostalan rad

9. Odrediti približno rješenje za sljedeći problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1),$$

uz rubne uvjete

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(1, y, t) = u(x, 1, t) = 0,$$

i početni uvjet

$$u(x, y, 0) = xy.$$

Koristiti mrežu $h = k = \frac{1}{5}$, $\Delta t = \frac{1}{125}$.

10. Odrediti diferentnu jednačbu za trodimenzionalnu Laplaceovu jednačbu

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1),$$

koristeći metodu konačnih razlika.

11. Odrediti diferentnu jednačbu za trodimenzionalnu jednačbu toplotne provodljivosti

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < z < 1),$$

koristeći metodu konačnih razlika.

12. Odrediti približno rješenje za problem

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = x + t, \quad (t > 0, \quad 0 < x < 1),$$

uz početne uvjete

$$u(x, 0) = x^2, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = x, \quad (0 < x < 1),$$

i rubne uvjete

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (t > 0),$$

uzimajući da je $h = k = \frac{1}{10}$.

13. Pomoću diferentne sheme riješiti probleme:

(i)

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$u(x, 0) = 0.2 \cdot x(1 - x) \sin \pi x, \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1,$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0;$$

5.6 Zadaci za samostalan rad

(ii)

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x(\pi - x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(\pi, t) = 0, \quad t > 0; \end{aligned}$$

(iii)

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad 0 < x < 1, \\ u(0, t) &= u(1, t) = 0, \quad t > 0. \end{aligned}$$

gde je

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ 1 - x, & \frac{1}{2} < x \leq 1; \end{cases}$$

(iv)

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 < x < 1;$$

(v)

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$u(0, t) = 1, \quad u(1, t) + u_x(1, t) = 0, \quad t > 0, \quad u(x, 0) = 1, \quad 0 < x < 1;$$

(vi)

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = x(1 - x);$$

(vii)

$$u_{xx} = u_t, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0,$$

sa uvjetima:

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = e^{-2} \sin \frac{\pi}{4}, \quad u(x, 0) = e^{-2x} \sin \frac{\pi}{4} x.$$

14. Pomoću diferentne sheme odrediti rješenje Dirichletovog problema na kvadratu

$$u_{xx} + u_{yy} = 0, \quad 0 < x < \frac{1}{2}, \quad 0 < y < \frac{1}{2},$$

sa uvjetima:

$$\begin{cases} u(0, y) = 0, & u\left(\frac{1}{2}, y\right) = 200y, \\ u(x, 0) = 0, & u\left(x, \frac{1}{2}\right) = 200x. \end{cases}$$

Bibliografija

- [1] I. Aganović, *Uvod u rubne zadaće mehanike kontinuuma*, Element, Zagreb, 2001.
- [2] I. Aganović, *Uvod u rubne probleme*, Element, Zagreb, 1997.
- [3] I. Aganović and K. Veselić, *Linearne diferencijalne jednačbe*, Element, Zagreb, 1997.
- [4] R. P. Agarwal and D. O'Regan, *Ordinary and Partial Differential Equations with Special Functions, Fourier Series, and Boundary Value Problems*, Springer, New York, 2009.
- [5] G. B. Arfken, H. J. Weber, and F. E. Harris, *Mathematical Methods for Physicists*, 7th ed., Academic Press, Boston, 2013.
- [6] N. H. Asmar, *Partial Differential Equations with Fourier Series and Boundary Value Problems*, 2nd ed., Pearson, Boston, 2004.
- [7] D. Bleecker and G. Csordas, *Basic Partial Differential Equations*, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [8] T. B. Co, *Methods of Applied Mathematics for Engineers and Scientists*, Cambridge University Press, Cambridge, 2013.
- [9] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. I: Partial Differential Equations*, Wiley–Interscience, New York, 1989.
- [10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 19, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [11] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.
- [12] M. S. Gockenbach, *Partial differential equations: analytical and numerical methods*, Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, PA, 2002.

- [13] Q. Han, *A Basic Course in Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011.
- [14] IGNOU, *Unit 12: Partial Differential Equations*, Study Material, Indira Gandhi National Open University, New Delhi. Available at <https://egyankosh.ac.in/bitstream/123456789/18014/1/Unit-12.pdf>.
- [15] V. Ivrii, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of Toronto, 2026. Available at <https://www.math.utoronto.ca/ivrii/PDE-textbook/PDE-textbook.pdf>.
- [16] S. Kalabušić, N. Memić, E. Pilav, *Parcijalne diferencijalne jednačbe*, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Sarajevu, 2015.
- [17] J. Knežević–Miljanović, S. Janković, J. Manojlović, and V. Jovanović, *Parcijalne diferencijalne jednačbe: Teorija i zadaci*, Univerzitetska štampa, Beograd, 2000.
- [18] N. S. Koshljakov, M. M. Smirnov, and E. B. Gliner, *Differential Equations of Mathematical Physics*, North–Holland, Amsterdam, 1964.
- [19] A. Kostić, *Viša matematika za inženjere*, Univerzitet u Sarajevu–Prirodno-matematički fakultet, Sarajevo, 2015.
- [20] P. K. Kythe, *Fundamental Solutions for Differential Operators and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1996.
- [21] J. D. Logan, *Applied Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2004.
- [22] S. V. Meleshko, *Methods for Constructing Exact Solutions of Partial Differential Equations*, Springer, New York, 2005.
- [23] G. Micula and P. Pavel, *Differential and Integral Equations through Practical Problems and Exercises*, Springer, Dordrecht, 1992.
- [24] T. Myint–U and L. Debnath, *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, 4th ed., Birkhäuser, Boston, 2007.
- [25] G. S. Nelson, *A User-Friendly Introduction to Lebesgue Measure and Integration*, Student Mathematical Library, Vol. 78, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.
- [26] P. J. Olver, *Introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 2014.
- [27] E. Pap, *Parcijalne diferencijalne jednačbe*, Naučna knjiga, Beograd, 1990.
- [28] E. Pap, A. Takači, and Dj. Takači, *Partial Differential Equations through Examples and Exercises*, Springer, Dordrecht, 1997.

- [29] Y. Pinchover and J. Rubenstein, *An Introduction to Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [30] D. Radunović and A. Samardžić, *Numeričke metode*, Akademska misao, Beograd, 2002.
- [31] H.-K. Rhee, R. Aris, and N. R. Amundson, *First-Order Partial Differential Equations*, Vol. I, Dover Publications, New York, 2001.
- [32] I. P. Stavroulakis and S. A. Tersian, *Partial Differential Equations: Introduction with Mathematica and MAPLE*, World Scientific, Singapore, 2004.
- [33] V. V. Stepanov, *Kurs differentsialnykh uravnenii*, 8th ed., Editorial URSS, Moscow, 2004.
- [34] W. A. Strauss, *Partial Differential Equations: An Introduction*, Wiley, 1992.
- [35] J. C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, 2nd ed., Society for Industrial and Applied Mathematics SIAM, Philadelphia, PA, 2004.
- [36] K. R. Unni, *Pfaffian Differential Expressions and Equations*, M.Sc. Thesis, Utah State University, Logan, UT, 1961.
- [37] F. Verhulst, *Nonlinear Differential Equations and Dynamical Systems*, 2nd ed., Springer, New York, 1996.
- [38] J. Wloka, *Partial Differential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.
- [39] E. C. Zachmanoglou and D. W. Thoe, *Introduction to Partial Differential Equations with Applications*, Dover Publications, New York, 1987.

Indeks pojmova

- Cauchy
 generalizirani problem početnih vrijednosti, 78, 94
 metoda karakteristika, 143, 168
 problem, 45, 134
 problem početnih vrijednosti, 68, 90
- Cauchy–Riemannove jednačbe, 41
- CFL uvjet, 414
- Courantov broj, 414
- D’Alembertova formula, 259
- difeomorfizam, 24
- diferencijabilnost vektorske funkcije, 17
- diferenciranje
 centralno, 371
 unaprijed, 371
 unazad, 371
- diferentna jednačba, 372
- Diracova δ funkcija, 299
- funkcija
 n realnih varijabli, 4
 analitička, 8
 harmonijska, 41, 296, 313
 Hölder neprekidna, 45
 klase C^k , 7
 konjugirana, 41
 Lipschitz neprekidna, 45
 parcijalni izvod, 5
 regularna, 296
 skalarna, 4
 vektorska, 4
- gradijent, 13
- Green
 druga formula, 298
 funkcija, 299, 307
 funkcija za poluloptu, 311
 funkcija za poluprostor, 311
 prva formula, 297
- Heavisideova funkcija, 302
- homeomorfizam, 24
- Jacobi-Mayerove zgrade, 164
- Jacobijan, 18
- Jacobijeva matrica, 17
- karakteristična jednačba, 248
- karakteristične krive, 146
- karakteristika, 170
- Kirchhoffova formula, 272
- konačnodiferentni operator, 408
- konus
 budućnosti, 269
 Mongeov, 144
 prošlosti, 269
- kriva
 dvoparametarska familija, 22
 glatka, 22
 u $\mathbb{R}^3$, 19
- Lebesgue-izmjerivost, 336
- metoda
 Fourierova, 279, 315, 340
 iteracije, 397

- karakteristika, 143, 168
- konačnih razlika, 370
- Lagrange-Charpita, 124, 163
- mreža, 370
- mreža za PDJ eliptičkog tipa, 378
- mreža za PDJ hiperboličkog tipa, 413
- mreža za PDJ paraboličkog tipa, 399
- numerička, 369
- operatorska, 233
- refleksije, 265
- spuštanja, 274
- zrcaljenja, 307
- metrika, 2
- mnogostrukost
 - diferencijabilna, 23
 - topološka, 24
- Mongeove oznake, 36
- mreža, 370
 - kvadratna, 370
 - prostorni korak, 370
 - vremenski korak, 371
 - čvor, 370
- multiindex, 10
- oblast, 3
- obvojnica, 115, 162
- okolina tačke, 3
- operator, 4
 - Laplaceov, 41
 - nabla ili Hamiltonov, 13
- opći integral, 162
- parcijalna diferencijalna jednačnja, 27
 - Airyova, 44
 - Burgesova, 48
 - Clairautova, 168
 - Eikonalova, 229
 - eliptičnog tipa, 246, 250
 - Fokker-Planckova, 43
 - generalna talasna, 43
 - grede, 44
 - Hamilton-Jacobijeva, 229
 - Helmholtzova, 42
 - hiperboličnog tipa, 246, 248
 - homogena, 39
 - Kologorovljeva, 42
 - Korteweg-de Vriesa, 45
 - kvazilinearna, 39, 246
 - Laplaceova, 41, 295
 - linearna, 39
 - linearna homogena, 58
 - linearna transportna, 42
 - Liouvilleova, 42
 - minimalne površi, 44
 - mješovitog tipa, 246
 - Navier-Stokesova, 44
 - nehomogena, 39
 - nelinearna, 40
 - opće rješenje, 61
 - paraboličnog tipa, 246, 249
 - Poissonova, 41, 295
 - provođenja toplote, 41, 327
 - prvog reda, 55
 - red, 27
 - rješenje, 28
 - Schrödingerova, 42
 - semilinearna, 39
 - talasna (valna), 41, 256
 - telegrafska, 43
- Pfaffova diferencijalna forma, 177
- Pfaffova diferencijalna jednačnja, 177
 - metoda homogenih funkcija, 203
 - metoda kvazi-homogenih funkcija, 209
 - metoda pogađanja rješenja, 187
 - metoda pomoćnih jednačnji, 197
 - metoda razdvajanja, 193
 - metoda razdvojenih varijabli, 191
 - metoda redukcije, 196
 - Natanijeva metoda, 199
- Poissonova formula, 272, 275, 309, 334
- Poissonovo jezgro, 309
- potpuni integral, 110, 115, 161
- površ
 - dvoparametarska familija, 36
 - integralna, 103
 - jednoparametarska familija, 13
 - nivo, 13

- u $\mathbb{R}^3$, 12
- primjer Tychonova, 337
- princip
 - maksimuma, 296, 315, 328
 - diskretni, 379
 - refleksije, 311
- problem
 - korektno postavljen, 46
 - mješoviti (početno-rubni), 46
 - rubni (granični), 46
- proizvod
 - skalarni, 3
 - vektorski, 3
- prvi integral, 59
- red lokalne tačnosti, 372
- rješenje
 - eqzistencija, 46
 - fundamentalno, 300
 - jedinstvenost, 46
 - klasično, 46
 - numeričko, 369
 - opće, 82, 109, 113, 161
 - singularno, 113, 115, 161
 - stabilnost, 46
 - Tychonova, 338
- rubni problem
 - Dirichletov, 295
 - Neumannov, 295
 - Robinov, 295
- rubni uvjet
 - Dirichletov, 257
 - Neumannov, 257
- Schrödingerova jednadžba, 42
- shema
 - Crank-Nicholsonova, 410
 - druga osnovna, 383
 - eksplicitna, 401
 - implicitna, 401
 - konvergencija, 374
 - konzistentnost, 373
 - leapfrog, 375
 - prva osnovna, 382
 - stabilnost, 374
- singularni integral, 115, 162
- skup
 - ograničen, 3
 - povezan, 3
- svojstva srednje vrijednosti, 313
- tangentna ravan, 14
- Taylor
 - formula, 8
 - red, 8
- teorem
 - Cauchy-Kovalevsky, 214, 218
 - Clairaut–Schwarzov, 7
 - Lax-Richtmyerov, 377
 - o implicitno datim funkcijama, 15
 - o jednakosti mješovitih parcijalnih izvoda, 7
- trajektorija, 37
 - izogonalna, 37
 - ortogonalna, 37
- vektorsko polje
 - divergencija, 18
 - rotor, 18