



UNIVERZITET U SARAJEVU
PRIRODNO-MATEMATIČKI
FAKULTET

Mehanika kroz primjere i zadatke

Elvedin Hasović

Dijana Dujak

Elvedin Hasović

Dijana Dujak

Mehanika kroz primjere i zadatke

Autori	prof. dr. Elvedin Hasović prof. dr. Dijana Dujak
Izdavač	Univerzitet u Sarajevu – Prirodno-matematički fakultet
Za izdavača	prof. dr. Nusret Drešković
Recenzenti	prof. dr. Vanes Mešić, redovni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu prof. dr. Hedim Osmanović vanredni profesor Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Tuzli
DTP	Dr. Elvedin Hasović
Ilustracije	Dr. Dijana Dujak
Dizajn korica	Haris Delimustafić

CIP - Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka Bosne i Hercegovine, Sarajevo

HASOVIĆ, Elvedin

Mehanika kroz primjere i zadatke / Elvedin Hasović, Dijana Dujak - Sarajevo: Prirodno-matematički fakultet, 2023. - 337 str.: ilustr.; elektronsko izdanje

ISBN 978-9926-453-70-1

COBISS.BH-ID 57226246

Odlukom Vijeća Univerziteta u Sarajevu - Prirodno-matematički fakultet broj 01/06-2168/4-2023 od 9.11.2023. godine ovaj udžbenik je dobio saglasnost Univerziteta u Sarajevu - Prirodno-matematički fakultet za izdavanje.

Predgovor

Ova knjiga je nastala kao rezultat skoro dvodecenijskog rada autora sa studentima i nadarenim učenicima. Svojim sadržajem knjiga je bazirana na predavanjima iz predmeta Mehanika, koji jedan od autora već dugi niz godina izvodi na Odsjeku za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Pored toga, drugi autor dugi niz godina izvodi nastavu iz Fizike na tehničkim fakultetima te je dragocjeno iskustvo u radu sa studentima tehničkih fakulteta inkorporirano u sadržaj knjige. Stoga možemo s pravom kazati da je knjiga namijenjena studentima Fizike, studentima tehničkih fakulteta, ali i studentima drugih fakulteta na kojim se izučava fizika, a posebno mehanika. Pored toga, knjigu mogu koristiti i učenici koji su nadareni za fiziku prevashodno u pripremama za razna domaća i međunarodna takmičenja.

Upoznati se s osnovnim pojmovima, zakonima i konceptima unutar jedne oblasti fizike nije dovoljno da bi se uspješno obrazovao jedan fizičar ili inženjer. Naime, jedna od osnovnih vještina koja se razvija kroz studije fizike i tehničkih nauka jeste vještina rješavanja problema (eng. problem solving skill). Upravo je razvijanje vještine rješavanja problema kod studenata i učenika bila nit vodilja u nastanku ove knjige. Stoga je knjiga koncipirana tako da svako poglavlje započinje teorijskim uvodom, nakon kojeg slijede detaljno riješeni računski primjeri (tipično, između 10 i 15 primjera), a zatim i računski zadaci za samostalnu vježbu. Na ovaj način, student najprije savladava relevantnu konceptualnu osnovu, zatim analizirajući detaljno riješene računске primjere usvaja strategiju rješavanja problema iz date oblasti mehanike, te napokon kroz zadatke za samostalnu vježbu dodatno nadograđuje sposobnost rješavanja problema iz mehanike.

U teorijskom uvodu svakog poglavlja nastojali smo prezentirati onoliko teorijskih osnova koliko je neophodno za savladavanje i rješavanje veoma širokog spektra problema iz datih oblasti mehanike. Objašnjenja fizikalnih pojmova, koncepata i pojava popraćena su velikim brojem originalnih ilustracija. S ciljem vizualizacije i jednostavnosti

jeg prikaza pojedinih fizikalnih situacija, kroz 12 poglavlja ove knjige prikazano je preko 320 ilustracija.

Postavke samih zadataka koji su detaljno riješeni ili su ostavljeni za samostalan rad, prilagođeni su na osnovu tekstova iz drugih udžbenika i zbirki zadataka. Rješenja ovih zadataka su originalna i imaju za cilj da studentima i učenicima približi strategije rješavanja problema. Stoga se u velikom broju zadataka diskutuje o izboru posmatranog mehaničkog sistema, uslovima pod kojim se mogu primijeniti zakoni mehanike, ograničenjima u primjeni zakona mehanike itd. Ova diskusija se nerijetko ponavlja kroz više primjera kako bi se na taj način korisnik ovog udžbenika navikao da pri rješavanju fizikalnih problema razmišlja što je moguće šire i dublje. Imajući u vidu da, prema iskustvu autora, nove generacije studenata nastoje savladati određenu oblast fizike sa što je moguće manje uloženog vremena, nastojali smo pažljivo odabrati primjere tako da oni pokriju širok spektar problemskih situacija iz mehanike a da se pri tome konceptualno nadovezuju i ne preklapaju.

Veliku zahvalnost autori duguju recenzentima ovog udžbenika, prof. dr. Vanesu Mešiću i prof. dr. Hedimu Osmanoviću na pažljivom čitanju rukopisa i svim sugestijama, primjedbama i prijedlozima za unapređenje.

Sarajevo, novembar 2023. godine

Elvedin Hasović
Dijana Dujak

Sadržaj

Predgovor	I
1 FIZIKALNE VELIČINE I JEDINICE	1
1.1 Fizika kao fundamentalna nauka	1
1.2 Fizikalni modeli	2
1.3 Fizikalne veličine i fizikalne jedinice	3
2 FIZIKA I MATEMATIKA	15
2.1 Definicija vektora i operacije nad vektorima	16
2.2 Koordinatni sistem i komponente vektora	18
2.3 Jedinični vektori koordinatnog sistema	21
2.4 Skalarni proizvod vektora	22
2.5 Vektorski proizvod vektora	23
2.6 Definicija i osnovne osobine trigonometrijskih funkcija	25
2.7 Elementi diferencijalnog računa	29
2.8 Elementi integralnog računa	34
3 KRETANJE DUŽ PRAVCA	41
3.1 Opisivanje kretanja	41
3.2 Položaj tijela, put i pomak	44
3.3 Srednja i trenutna brzina	46
3.4 Ubrzanje	48
3.5 Ravnomjerno kretanje	48
3.6 Jednakoubrzano kretanje	49
3.7 Riješeni zadaci	51
3.8 Zadaci za vježbu	71
4 KRETANJE U RAVNI	73
4.1 Položaj, brzina i ubrzanje	73
4.2 Relativno kretanje	76
4.3 Riješeni zadaci	77
4.4 Zadaci za vježbu	100

5	NEWTONOVI ZAKONI	103
5.1	Koncept sile	103
5.2	Prvi Newtonov zakon	107
5.3	Drugi Newtonov zakon	109
5.4	Treći Newtonov zakon	110
5.5	Riješeni zadaci	111
5.6	Zadaci za vježbu	129
6	KRUŽNO KRETANJE	133
6.1	Uniformno kružno kretanje	133
6.2	Centripetalno ubrzanje	136
6.3	Neuniformno kružno kretanje	137
6.4	Dinamika kružnog kretanja materijalne tačke	138
6.5	Riješeni zadaci	141
6.6	Zadaci za vježbu	153
7	ENERGIJA I RAD	157
7.1	Kinetička energija	158
7.2	Rad	159
7.3	Teorem o energiji i radu	161
7.4	Potencijalna energija	161
7.5	Mehanička energija	163
7.6	Snaga	165
7.7	Riješeni zadaci	166
7.8	Zadaci za vježbu	183
8	KOLIČINA KRETANJA I DINAMIKA SISTEMA ČESTICA	187
8.1	Količina kretanja	187
8.2	Centar masa sistema čestica	188
8.3	Teorem o kretanju centra masa	189
8.4	Zakon očuvanja količine kretanja	191
8.5	Gravitaciona potencijalna energija sistema čestica	192
8.6	Sudari	192
8.7	Riješeni zadaci	195
8.8	Zadaci za vježbu	211
9	GRAVITACIONO MEĐUDJELOVANJE	213
9.1	Sila gravitacije	213
9.2	Gravitaciona potencijalna energija	214
9.3	Kretanje tijela u gravitacionom polju Zemlje	215

9.4	Gravitaciono polje	219
9.5	Riješeni zadaci	220
9.6	Zadaci za vježbu	234
10	DINAMIKA KRUTOG TIJELA	237
10.1	Rotaciona kinetička energija	238
10.2	Moment inercije	239
10.3	Moment sile	242
10.4	Kretanje oko pokretne ose rotacije	245
10.5	Riješeni zadaci	248
10.6	Zadaci za vježbu	269
11	MOMENT IMPULSA	273
11.1	Moment impulsa jedne čestice	273
11.2	Moment impulsa sistema čestica	275
11.3	Moment impulsa krutog tijela	277
11.4	Riješeni zadaci	278
11.5	Zadaci za vježbu	297
12	MEHANIKA FLUIDA	301
12.1	Svojstva fluida	301
12.2	Statika fluida	306
12.3	Kinematika fluida	312
12.4	Realni fluidi	316
12.5	Riješeni zadaci	318
12.6	Zadaci za vježbu	335

FIZIKALNE VELIČINE I JEDINICE

1.1	Fizika kao fundamentalna nauka	1
1.2	Fizikalni modeli	2
1.3	Fizikalne veličine i fizikalne jedinice	3

1.1 Fizika kao fundamentalna nauka

Fizika je fundamentalna naučna disciplina u okviru koje se nastoje istražiti, opisati i objasniti osnovni principi funkcionisanja cjelokupnog univerzuma. Ona je temelj drugih naučnih disciplina kao što su hemija, astronomija i geologija, te predstavlja temelj velikom broju inženjerskih i tehnoloških dostignuća. U osnovi je eksperimentalna disciplina gdje naučnici proučavaju i analiziraju prirodne pojave te nastoje pronaći pravilnosti u njihovom pojavljivanju ili odvijanju. Ove pravilnosti se onda iskazuju kroz fizikalne zakone, a skup srodnih fizikalnih zakona čini jednu fizikalnu teoriju.

Da bi se razvila fizikalna teorija, jedan fizičar mora da zna kako smisleno postaviti istraživačko pitanje i hipotezu, kako dizajnirati eksperiment i izvršiti mjerenja, kako interpretirati rezultate mjerenja i naposljetku kako izvući odgovarajuće zaključke i pretočiti ih u teoriju. Svaka fizikalna teorija je predmet kontinuiranog provjeravanja i ispitivanja i nikada se ne može uzeti kao apsolutna istina. Naime, uvijek postoji mogućnost da zapažanja i mjerenja neće biti u skladu s teorijom. Tada je neophodno ili preispitati sama zapažanja i mjerenja ili naći nove zakone fizike i postaviti novu teoriju. To, međutim, ne mora značiti da stara teorija nije upotrebljiva, već da ona posjeduje granice svoje validnosti. Na primjer, Newtonova mehanika ne može korektno opisati kretanje mikroskopskih tijela brzinama koje su uporedive s brzinom svjetlosti, ali dobro opisuje kretanje tijela čija

je brzina mnogo manja od brzine svjetlosti. Zbog toga kažemo da je Newtonova mehanika validna samo za kretanje tijela s brzinama koje su neuporedivo manje od brzine svjetlosti.

Postoji više načina kako se može opisati neka fizikalna pojava. Najjednostavniji je verbalni način gdje se riječima nastoji objasniti, približiti ili predvidjeti određena pojava. Drugi način je upotreba matematičkog jezika, koji se najčešće i koristi, u okviru kojeg se zakoni fizike iskazuju matematičkim relacijama. Način na koji je prikazana neka fizikalna pojava naziva se reprezentacija. Tako imamo npr. verbalnu, algebarsku, grafičku ili slikovnu reprezentaciju jedne te iste pojave.

1.2 Fizikalni modeli

Fizika izučava kompleksni svijet koji nas okružuje i nastoji opisati prirodne pojave i procese, strukturu materije i međudjelovanje materije što je moguće preciznije i tačnije. Nekada je međutim i naizgled jednostavne pojave teško fizikalno opisati. Ako posmatramo padanje jednog lista papira kroz vazduh uočićemo da je njegova putanja poprilično kompleksna. Ako uzmemo drugi list i pustimo, on će imati različitu putanju od prvog. Isto će vrijediti i za bilo koji naredni list. Prema tome, možemo zaključiti da ako želimo istraživati padanje tijela, onda za početak, list papira nije nimalo pogodno tijelo. Mnogo jednostavnije je posmatrati padanje jedne male kuglice, kod koje se sve njene tačke kreću na isti način. Putanja svake druge kuglice će biti ista, pa možemo uočiti pravilnosti i eventualno formulirati zakone. Nakon što se izuče jednostavna kretanja, kao što je padanje kuglice, može se onda pristupiti analizi složenijih kretanja, kao što je padanje lista papira.

Kako bi uspjeli opisati pojedine prirodne pojave, fizičari često prave smislenu pojednostavljena datih situacija. Ta pojednostavljena se nazivaju fizikalni modeli. Konkretno, model je pojednostavljena reprezentacija (predstavljanje) nekog tijela, sistema (grupe tijela), međudjelovanja ili procesa. Jedan od često korištenih modela, pogotovo u mehanici, je tzv. model materijalne tačke. Naime, pri opisivanju kretanja datog tijela nekada je moguće pojednostaviti realnu situaciju tako da se zanemare dimenzije odnosno oblik tijela kao i njegova struktura. Ovakva tijela onda nazivamo tačkastim tijelima.

Proces u kojem jedan fizičar odlučuje kada i pod kojim uslovima može koristiti pojednostavljene situacije (kreira fizikalne modele) naziva se modeliranje. Modeliranje je obično prvi korak u istraživanju bilo koje fizikalne pojave. Recimo da želimo opisati kretanje jednog atletičara na utrci od 100 metara. Jasno je da je kretanje njegovog

ZAPAMTI! Model je pojednostavljena reprezentacije (predstavljanje) nekog tijela, sistema (grupe tijela), međudjelovanja ili procesa. Modeliranje je proces u kojem se odlučuje koja svojstva datog tijela, sistema ili procesa se mogu zanemariti, a koja su relevantna za datu situaciju.

Materijalna tačka ili tačkasto tijelo je pojednostavljena reprezentacija realnih tijela. Model materijalne tačke se može koristiti ako je ispunjen jedan od ova dva uslova:

- a) svi dijelovi realnog tijela se kreću na isti način,
- b) dimenzije tijela su mnogo manje nego dužine koje su relevantne za datu situaciju.

Jedno te isto tijelo se u određenim situacijama može modelirati kao materijalna tačka dok u drugim ne može.

tijela kompleksno i da bi bilo teško opisati kretanje njegovih nogu, stopala ili ruku ponaosob. Ako želimo da znamo za koje vrijeme će jedan atletičar pretrčati stazu od 100 metara onda nije ni potrebno da precizno opišemo kretanje pojedinih dijelova njegovog tijela. U tom slučaju kretanje atletičara možemo posmatrati u okviru modela materijalne tačke, jer je dužina od 100 metara znatno veća od dimenzija ljudskog tijela, a za mjerenje vremena je relevantan položaj prsa atletičara. Ako bismo htjeli znati npr. koji dio tijela atletičara je prvo prešao ciljnu liniju, model materijalne tačke ne bismo mogli koristiti jer se različiti dijelovi tijela kreću na različit način, s jedne strane, i jer je dužina relevantna za određivanje koji dio tijela je prošao prvi (obično je to dužina od nekoliko centimetara), znatno manja od dimenzija tijela.

1.3 Fizikalne veličine i fizikalne jedinice

Kako bi se fizikalne pojave mogle opisati kvantitativno, neophodno je konstruisati odnosno definisati odgovarajući skup fizikalnih veličina. Fizikalne veličine nam omogućavaju da zakone fizike dovedemo u direktnu vezu s našim iskustvom baziranim na mjerenju. Neke od fizikalnih veličina su dužina, vrijeme, temperatura i pritisak, a da bismo ih mogli mjeriti i upoređivati neophodno je definisati odgovarajuće standarde. Svaku fizikalnu veličinu mjerimo u njima odgovarajućim jedinicama tako što je poredimo s odgovarajućim standardom. Tako je 1960. godine jedan međunarodni komitet uspostavio skup standarda za određeni broj fundamentalnih fizikalnih veličina, koji se naziva SI (Système International) odnosno međunarodni sistem. Ovaj sistem, između ostalog, definiše standarde odnosno jedinice za tri osnovne mehaničke veličine: dužinu, masu i vrijeme, kao i za još četiri fizikalne veličine: temperaturu, jačinu električne struje, intenzitet svjetlosti i količinu tvari.

Fizikalne jedinice

Osnovne tri mehaničke veličine su dužina, masa i vrijeme. Dužina kao fizikalna veličina se, u najopštijem smislu, može predstaviti kao udaljenost između dvije tačke u prostoru. SI jedinica za dužinu je metar i označava se s "m". Historijski gledano, pokušaji definisanja standarda za dužinu, često su vezani za dimenzije pojedinih dijelova ljudskog tijela. Tako je npr. u 12. stoljeću engleski kralj dekretom naredio da se jedinica za dužinu naziva jard i da je jednaka uda-

VAŽNO! Sticanje dojma o tipičnoj vrijednosti neke fizikalne veličine izrazito je važno prilikom rješavanja fizikalnih problema. Naime, uvijek je neophodno provjeriti da li dobijeni rezultat ima fizikalno smislenu vrijednost. Ako npr. dobijete rezultat u kome će svemirska letjelica preći put od Zemlje do Marsa za dvije minute, možete biti sigurni da taj rezultat nije tačan jer bi to značilo da se svemirska letjelica kretala brzinom koja je veća od brzine svjetlosti, što je nemoguće.

Tabela 1.1: Lista približnih vrijednosti nekih mjerenih dužina.



Slika 1.1: Etalon mase koji se čuva u Parizu.

ljenosti između vrha njegovog nosa i vrha njegove ispružene ruke. Jasno je da ovako definisan standard nije održiv u vremenu, jer dolaškom novog kralja neophodno je mijenjati i jedinicu za dužinu. Krajem 18. stoljeća, tačnije 1799. godine u Francuskoj je uveden metrički sistem koji je vremenom prihvaćen u kontinentalnom dijelu Evrope. Metar je definisan kao jedan desetomilioniti dio dužine od ekvatora do sjevernog pola duž odgovarajućeg meridijana koji prolazi kroz Pariz. Ova definicija je vezana za osobine same Zemlje pa nije univerzalna. Ona je zamijenjena 1889. godine kada je prihvaćeno da se definicija metra temelji na dužini platinoiridijumskog etalona koji je pri kontrolisanim uslovima čuvan u Francuskoj. Uvođenjem međunarodnog sistema 1960. godine metar je definisan kao dužina koja sadrži 1 650 763,73 talasne dužine određene spektralne linije izotopa atoma kriptona. Kada je i ova definicija postala neprikladna, 1983. godine, odlučeno je da se metar definiše kao dužina koju pređe svjetlost u vakuumu u vremenskom intervalu od $1/299\,792\,458$ sekundi.

Približna vrijednost nekih mjerenih dužina	Dužina (m)
Udaljenost od Zemlje do galaksije GN-z11	$4,13 \cdot 10^{26}$
Udaljenost Sunca do najbliže zvijezde	$4 \cdot 10^{16}$
Srednji radijus Zemljine orbite oko Sunca	$1,5 \cdot 10^{11}$
Srednja udaljenost Mjeseca od Zemlje	$3,84 \cdot 10^8$
Srednji radijus Zemlje	$6,37 \cdot 10^6$
Veličina sitnih čestica prašine	$1 \cdot 10^{-4}$
Veličina virusa	$1 \cdot 10^{-8}$
Radijus atoma vodika	$5 \cdot 10^{-11}$
Radijus protona	$1 \cdot 10^{-15}$

U tabeli 1.1 prikazane su približne vrijednosti nekih mjerenih dužina. ¹ Naime, ovo je navedeno iz razloga što je neophodno da se stekne dojam o tome šta znači da je neka dužina npr. 20 cm, a neka druga 1000 km. Iz istog razloga su navedene neke približne vrijednosti izmjerene mase i vremenskih intervala u tabelama 1.2, 1.3.

SI jedinica za masu je kilogram (kg) i od 1887. do 2019. godine bila je definisana na osnovu međunarodnog etalona mase. Masa od jednog kilograma odgovarala je masi tačno određenog cilindra napravljenog od legure platine i iridija koji se čuva u Međunarodnom birou za težine i mjere u Parizu. Na slici 1.1 prikazan je etalon mase koji se još uvijek čuva pod tačno određenim vanjskim uslovima. Od 2019. godine jedinica za masu je definisana preko numeričke vrijednosti Planckove konstante (vidjeti tabelu 1.4).

Približna vrijednost nekih mjerenih masa	Masa (kg)
Najmasivnije galsije	$1 \cdot 10^{42}$
Sunce	$2 \cdot 10^{32}$
Zemlja	$6 \cdot 10^{24}$
Airbus A380	$5 \cdot 10^5$
Ljudsko tijelo	$1 \cdot 10^2$
Pahuljica snijega	$1 \cdot 10^{-6}$
DNA molekula	$1 \cdot 10^{-17}$
Proton, neutron	$1,67 \cdot 10^{-27}$
Elektron	$9,11 \cdot 10^{-31}$

Tabela 1.2: Lista približnih vrijednosti nekih mjerenih masa.

Približna vrijednost nekih mjerenih vremenskih intervala	Vrijeme (s)
Starost svemira	$4 \cdot 10^{17}$
Starost Zemlje	$1 \cdot 10^{17}$
Srednji ljudski životni vijek	$2,5 \cdot 10^9$
Jedna godina	$3,2 \cdot 10^7$
Jedan dan	$8,6 \cdot 10^4$
Vrijeme života miona	$2 \cdot 10^{-6}$
Period oscilovanja atoma u kristalnoj rešeci	$1 \cdot 10^{-13}$
Vrijeme života Z^0 bozona	$1 \cdot 10^{-25}$

Tabela 1.3: Lista približnih vrijednosti nekih mjerenih vremenskih intervala.

SI jedinica za vrijeme je sekunda (s) i prvobitno je definisana na osnovu perioda rotacije Zemlje oko svoje ose, odnosno kao $\frac{1}{60} \frac{1}{60} \frac{1}{24}$ solarnog dana. Kada je primijećeno da se period rotacije Zemlje smanjuje, izvršena je redefinicija jedinice za vrijeme i danas je definisana na osnovu frekvencije svjetlosti emitovane pri tačno određenom prijelazu u atomu cezija. Naime, atom pri prelasku iz stanja više energije u stanje niže energije emituje svjetlost koja ima tačno određene vrijednosti talasne dužine, frekvencije i perioda. Do sada nije zabilježena nikakva promjena ovih vrijednosti tokom vremena pa se one mogu smatrati univerzalnim i time mogu služiti za definiciju sekunde. Sekunda je definisana kao trajanje od 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dva hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma cezija 133.

Međunarodni sistem jedinica

Fizika kao fundamentalna prirodna nauka opisuje prirodne pojave time što nastoji mjerenjem odrediti njihove osobine. Bilo koja osobina nekog fizikalnog sistema može biti kvantificirana (izmjerena) samo ako je definisana odgovarajuća fizikalna veličina koja je opisuje. Da bismo mogli mjeriti i porediti vrijednosti fizikalnih veličina neophodno je svakoj od njih pridružiti odgovarajuću jedinicu. Razvojem nauke kroz historiju nerijetko se dešavalo da se iste fizikalne veličine mjere u različitim jedinicama. Tako možemo npr. brzinu mjeriti u metrima u sekundi ili kilometrima na sat, temperaturu u stepenima celsijusa ili kelvinima, energiju u džulima, ergima, elektronvoltima ili kalorijama itd. Obično su se neke od jedinica koristile lokalno, na određenom prostoru, neke druge na drugom prostoru, ali da bi se kroz jasnije sporazumijevanje dodatno unaprijedila nauka uopšte, javila se potreba unifikacije mjernih jedinica u cijelom svijetu odnosno definisanja sistema jedinica koji bi bio opšteprihvaćen.

Sistem koji je danas prihvaćen u nauci naziva se međunarodni sistem (SI) i uveden je na 11. generalnoj konferenciji za tegove i mjere 1960. godine. Sve jedinice, koje su definisane unutar SI, mogu se podijeliti u dvije grupe: osnovne i izvedene jedinice, s tim da izvedene dodatno možemo podijeliti na one koje imaju poseban naziv i one koje nemaju. Odgovarajuće veličine se sukladno odgovarajućim jedinicama dijele na osnovne i izvedene. Međunarodni sistem zasnovan je na sedam osnovnih veličina: dužina, masa, vrijeme, temperatura, jačina električne struje, intenzitet svjetlosti i količina tvari, a njima odgovarajuće jedinice su metar, kilogram, sekunda, kelvin, amper, kandela i mol, respektivno.

U novembru 2018. godine na 26. generalnoj konferenciji za tegove i mjere (CGPM), odobrena je nadogradnja međunarodnog sistema jedinica, odnosno redefinicija SI. U revidiranom SI su navedene nove definicije četiri osnovne jedinice: kilogram, amper, kelvin i mol, koje su zasnovane na utvrđenim vrijednostima četiri prirodne konstante: Planckove konstante (h), elementarnog naboja (e), Boltzmann-ove konstante (k) i Avogadrove konstante (N_A), respektivno. Definicije svih sedam osnovnih SI jedinica su od maja 2019. godine (kada su stupile na snagu nove definicije za kg, amper, kelvin i mol), jedinstveno izražene preko numeričkih vrijednosti fundamentalnih konstanti prirode, te je dato objašnjenje za realizaciju definicije svake od osnovnih jedinica u praksi. Revizijom SI uspostavlja se set od sedam fundamentalnih konstanti, koje su poznate kao "definiirajuće konstante SI":

1. frekvencija prijelaza između dva neperturbovana hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma Cezijuma $133 \Delta\nu_{Cs}$ od $9\,192\,631\,770$ Hz (herc),
2. brzina svjetlosti u vakuumu c je $299\,792\,458$ m s⁻¹ (metar u sekundi),
3. Planckova konstanta h je $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ Js (džul sekunda),
4. elementarno naelektrisanje e je $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ C (kulon),
5. Boltzmannova konstanta k je $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ JK⁻¹ (džul po kelvinu),
6. Avogadrova konstanta N_A je $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ mol⁻¹ (po molu),
7. svjetlosna efikasnost K_{cd} monohromatskog zračenja frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz je 683 lmW⁻¹ (lumen po vatu).

U tabeli 1.4 su dati nazivi osnovnih veličina i jedinica, njihovi simboli i definicije.

Sve druge fizikalne veličine, koje se koriste u nauci i tehnici su izvedene veličine. Izvedene fizikalne veličine se mogu prikazati preko osnovnih veličina koristeći njihove definicione izraze ili zakone koje ih povezuju. Tako npr. definicioni izraz srednje putne brzine ($v = s/t$) služi kako bi se izvedena jedinica za brzinu mogla prikazati preko osnovnih jedinica na način $[v] = \frac{m}{s}$. Na ovom jednostavnom primjeru vidimo da bilo koju izvedenu jedinicu možemo prikazati kao proizvod odgovarajućih potencija osnovnih jedinica (u ovom primjeru to je proizvod od m¹ i s⁻¹).

Jasno je da u nauci i tehnici postoji veoma veliki broj veličina koje se koriste, pa je i broj odgovarajućih izvedenih jedinice izrazito veliki. Kako bi se jednostavnije mogao koristiti sistem jedinica, neke od izvedenih jedinica su dobile posebno ime i posebnu oznaku. U međunarodnom sistemu postoje 22 takve jedinice, a neke od njih su njutn (jedinica za silu), džul (jedinica za energiju) i paskal (jedinica za pritisak). Izvedene jedinice koje imaju posebno ime se mogu koristiti kako bi se preko njih i osnovnih jedinica definisale i druge izvedene jedinice. Neke od ovih jedinica su jedinica za viskoznost (paskalsekunda) ili jedinica za moment sile (njutnmetar). Treba napomenuti da su neke od fizikalnih veličina definisane kao količnik veličina istog tipa. Za ove veličine kažemo da su bezdimenzione. To su npr. koeficijent trenja, indeks loma ili relativna dielektrička permeabilnost. Treba naglasiti da postoji i niz fizikalnih veličina čije jedinice ne pripadaju SI, ali su prihvaćene za širu upotrebu ili su prihvaćene u nekim užim poljima nauke. Takve jedinice su npr. minuta, sat, stepen, hektar, litar, tona, bar, angstrom, elektronvolt itd.

Nekada se koriste vrijednosti fizikalnih veličina koje su mnogo puta manje ili veće od standarda te iste veličine. Tako je npr. masa elektrona oko 10^{30} puta manja od standarda mase (tj. kilograma), srednji radijus Zemlje je preko milion puta veći od standarda duži-

8 Mehanika kroz primjere i zadatke

Veličina	Jedinica	Simbol	Definicija jedinice
Dužina	metar	m	Definiše se na osnovu fiksne brojne vrijednosti brzine svjetlosti u vakuum kao 299 792 458 izražene u jedinici m s^{-1} , gdje je sekunda definisana na osnovu frekvencije cezija $\Delta\nu_{\text{Cs}}$: $1 \text{ m} = (c/299\,792\,458) \text{ s} = 30,663\,318\dots c/\Delta\nu_{\text{Cs}}.$
Vrijeme	sekunda	s	Definiše se na osnovu fiksne brojne vrijednosti frekvencije Cezijuma $\Delta\nu_{\text{Cs}}$, frekvencije prijelaza između dva neperturbovana hiperfina nivoa osnovnog stanja atoma Cezijuma-133 kao 9 192 631 770, izražene u jedinici Hz pri čemu je $\text{Hz} = \text{s}^{-1}$: $1 \text{ s} = 9\,192\,631\,770/\Delta\nu_{\text{Cs}}.$
Masa	kilogram	kg	Definiše se na osnovu fiksne brojčane vrijednosti Planckove konstante h , koja iznosi $6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}$ izražena u jedinici Js, koja je jednaka $\text{kgm}^2\text{s}^{-1}$, pri čemu su metar i sekunda definisani na osnovu c i $\Delta\nu_{\text{Cs}}$: $1 \text{ kg} = (h/6,626\,070\,15 \cdot 10^{-34}) \text{ m}^{-2} \text{ s} = 1,475\,52\dots \cdot 10^{-40} h \Delta\nu_{\text{Cs}}/c^2.$
Temperatura	kelvin	K	Definiše na osnovu fiksne brojne vrijednosti Boltzmannove konstante k koja iznosi $1,380\,649 \cdot 10^{-23}$ izražena u jedinicama JK^{-1} (džul po kelvinu), odnosno $\text{kgm}^2\text{s}^{-2}\text{K}^{-1}$, gdje su kilogram, metar i sekunda definisani preko h , c i $\Delta\nu_{\text{Cs}}$: $1 \text{ K} = (1,380\,649 \cdot 10^{-23}/k) \text{ kgm}^2\text{s}^{-2} = 2,266\,665\dots \Delta\nu_{\text{Cs}}h/k.$
Jačina električne struje	amper	A	Definiše se na osnovu fiksne vrijednosti elementarnog naboja e od $1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}$ kada je izražen u kulonima C, što odgovara As, gdje je sekunda s osnovna SI jedinica i definisana s $\Delta\nu_{\text{Cs}}$: $1 \text{ A} = (e/1,602\,176\,634 \cdot 10^{-19}) \text{ s}^{-1} = 6,789\,686 \cdot 10^8 \Delta\nu_{\text{Cs}}.$
Intenzitet svjetlosti	kandela	cd	Definiše se na osnovu fiksne brojne vrijednosti svjetlosne efikasnosti monohromatskog zračenja frekvencije $540 \cdot 10^{12}$ Hz, K_{cd} kao 683 izražene u jedinici l mW^{-1} , što je jednako cd sr W^{-1} ili $\text{cd sr kg}^{-1} \text{m}^{-2} \text{s}^3$ gdje su kilogram, metar i sekunda definisani na osnovu h , c i $\Delta\nu_{\text{Cs}}$: $1 \text{ cd} = (K_{\text{cd}}/683) \text{ kgm}^2\text{s}^{-3} \text{sr}^{-1} = 2,614\,830\dots \cdot 10^{10} (\Delta\nu_{\text{Cs}})^2 h K_{\text{cd}}$
Količina tvari	mol	mol	Mol je ona količina supstance koja sadrži tačno $6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}$ elementarnih entiteta. Ovaj broj je fiksna brojna vrijednost Avogadrove konstante, N_A , koja se u slučaju izražavanja u jedinici mol^{-1} zove Avogadrova konstanta (N_A ili L). Količina supstance, sa simbolom n , je mjera za broj specifičnih elementarnih entiteta. Pomenuti elementarni entiteti mogu biti atomi, molekule, joni, elektroni i druge čestice ili grupe čestica $1 \text{ mol} = 6,022\,140\,76 \cdot 10^{23}/N_A.$

Tabela 1.4: Definicija osnovnih jedinica SI.

ne (tj. metra), itd. U ovim situacijama je pogodno koristiti jedinice koje se dobiju množenjem odgovarajućih SI jedinica faktorom koji je potencija broja 10, a pri tome se potencije broja 10 zamjenjuju odgovarajućim prefiksom kao što je "mili", "mikro", "kilo" itd.

Faktor	Prefiks	Oznaka	Faktor	Prefiks	Oznaka
10^1	deka	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hekto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	mili	m
10^6	mega	M	10^{-6}	mikro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	piko	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	eksa	E	10^{-18}	ato	a
10^{21}	zeta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	jota	Y	10^{-24}	jokto	y

Svi prefiksi dozvoljeni unutar SI prikazani su zajedno s odgovarajućom oznakom i multiplikativnim faktorom u tabeli 1.5. Prefiksi se koriste na način da ispred jedinice dodamo oznaku datog prefiksa. Tako npr. pm označava pikometar ili 10^{-12} metara, MJ označava megadžul ili 10^6 džula, μ s označava mikrosekundu ili 10^{-6} sekundi itd.

Tabela 1.5: Nazivi i oznake prefiksa koji se koriste kao multiplikativni faktori jedinica SI.

Pretvaranje jedinica

Kao što je ranije navedeno, često se u nauci koriste jedinice koje nisu dio sistema SI, kao što su minuta, litar ili tona. Nekada je neophodno pretvoriti vrijednosti fizikalne veličine izražene u SI jedinicama u one jedinice koje nisu dio SI i obratno. Kada vršimo bilo kakvu algebarsku operaciju nad fizikalnim veličinama, onda se fizikalne jedinice ponašaju kao i svaki drugi algebarski element, tj. one se sabiraju, množe ili dijele na isti način kao i same fizikalne veličine. Ako npr. želimo odrediti rastojanje koje će preći automobil krećući se brzinom od 60 km h^{-1} u vremenskom intervalu od 4 sata onda ćemo pisati

$$x = vt = 60 \frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot 4\text{h} = 240 \text{ km},$$

gdje se sat, kao jedinica za vrijeme, pokrati u brojniku i nazivniku. Ako želimo brzinu od 60 km h^{-1} pretvoriti u SI jedinicu za brzinu, tj. m s^{-1} onda jednostavno kilometre treba pretvoriti u metre, a sate u

sekunde, pa ćemo dobiti

$$60 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = \frac{600 \text{ m}}{36 \text{ s}} = 16,67 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Nekada je neophodno izvršiti pretvaranje jedinica koje su dio SI, ali su date preko odgovarajućih prefiksa. Ukoliko postoji linearna veza između veličina, onda se pretvaranje jedinica vrši u skladu s odgovarajućim multiplikativnim faktorima datim u tabeli 1.5. Ako npr. želimo pretvoriti femtosekunde u milisekunde onda ćemo prvo femtosekunde pretvoriti u sekunde tj. osnovne jedinice, a zatim sekunde iskazati u milisekundama. Ako jedna milisekunda ima 10^{-3} sekundi onda jedna sekunda ima 10^3 milisekundi, pa možemo pisati

$$1 \text{ fs} = 10^{-15} \text{ s} = 10^{-15} \cdot 10^3 \text{ ms} = 10^{-12} \text{ ms}.$$

Ako je veza između fizikalnih veličina kvadratna, onda je neophodno i odgovarajući faktor, određen prefiksom, kvadrirati. Ako npr. želimo kvadratne kilometre pretvoriti u kvadratne metre prvo ćemo naći linearnu vezu između ovih jedinica, a onda cijelu relaciju kvadrirati i dobiti

$$1 \text{ km} = 10^3 \text{ m}, \quad \rightarrow \quad 1^2 \text{ km}^2 = (10^3)^2 \text{ m}^2 \quad \rightarrow \quad 1 \text{ km}^2 = (10^6) \text{ m}^2.$$

Dimenziona analiza

Svaka fizikalna veličina je napisana kao proizvod broja i odgovarajuće jedinice. Jedinica nam govori koji standard je korišten pri mjerenju fizikalne veličine, a brojna vrijednost koliko je vrijednost te veličine veća od standarda. Međutim, da bismo nešto znali o prirodi fizikalne veličine, neophodno je uvesti pojam dimenzije fizikalne veličine. Tako su npr. rastojanje, radijus, pređeni put ili obim različite veličine koje imaju istu dimenziju, a to je dimenzija dužine. Dimenziju neke fizikalne veličine označavat ćemo tako što fizikalnu veličinu pišemo u uglastim zagradama. Za osnovne veličine SI dimenzija će biti označena velikim slovima latinice tako da L , T , M označavaju dimenzije dužine, vremena i mase, respektivno. Sve druge, izvedene, fizikalne veličine se mogu prikazati preko proizvoda različitih potencija osnovnih fizikalnih veličina. Tako je npr. srednja putna brzina definisana kao odnos pređenog puta i vremenskog intervala u kome se taj put pređe, odnosno, $v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ pa je dimenzija brzine $[v] = \frac{L}{T}$. Kasnije ćemo vidjeti da se sila može prikazati kao proizvod mase i ubrzanja, a ubrzanje je jednako odnosu promjene brzine i vremenskog intervala u kome se brzina promijeni. Prema tome, možemo

VAŽNO! Dimenziju odgovarajuće fizikalne veličine prikazivat ćemo tako što fizikalnu veličinu pišemo u uglastim zagradama. Ako npr. s F prikažemo intenzitet sile, onda će $[F]$ označavati dimenziju sile.

pisati

$$[F] = [m][a] = [m] \frac{[v]}{[t]} = M \frac{L}{T} = M \frac{L}{T^2} = MLT^{-2}.$$

Prethodni izraz, u kome je dimenzija sile ili bilo koje druge fizikalne veličine prikazana preko dimenzija osnovnih veličina SI naziva se dimenziona formula.

Fizikalni zakoni mogu biti iskazani jednačinama koje u opštem slučaju sadrže više aditivnih članova. Dimenzije svakog člana u ovakvim jednačinama moraju biti međusobno identične. Ovaj zahtjev se naziva princip homogenosti dimenzija i ekvivalentan je činjenici da ne možemo sabirati fizikalne veličine različitih dimenzija. Nije moguće međusobno sabirati silu i brzinu jer su dimenzije tih veličina različite.

Ako pravilno želimo sabirati dvije fizikalne veličine nije dovoljno samo da dimenzije obje veličine budu jednake već i same jedinice moraju biti jednake. Ako pretpostavimo da automobil ubrzava u vremenskom intervalu od 6 sekundi, a onda se kreće konstantnom brzinom dodatnih 12 minuta, da bismo našli ukupno vrijeme kretanja automobila neophodno je pretvoriti sekunde u minute ili minute u sekunde, pa onda sabirati ova dva vremenska intervala.

Pošto svi sabirci u jednoj relaciji, bez obzira da li se nalazili na lijevoj ili desnoj strani, moraju imati istu dimenziju, sama provjera dimenzija neke relacije može nam poslužiti kao indikator ispravnosti date relacije. Ako su dimenzije na lijevoj i desnoj strani jednačine različite ili ako jedan od članova ima različitu dimenziju od drugih, možemo biti sigurni da je ta jednačina pogrešna. Međutim, sama provjera dimenzija na obje strane jednačine nam ne omogućava da zaključimo da je jednačina korektna zbog toga što uz svaki od članova može stajati određeni bezdimenzioni faktor.

Ponekada je moguće koristiti dimenzionu analizu da se dođe do pravilne veze između fizikalnih veličina. Razmotrimo situaciju u kojoj posmatramo oscilatorno kretanje kuglice okačene o nit u gravitacionom polju Zemlje (tzv. matematičko klatno). Vrijeme za koje se napravi jedna puna oscilacija, odnosno period oscilovanja klatna, može zavistiti od dužine klatna l , mase kuglice m i ubrzanja Zemljine teže g . Pretpostavimo da je zavisnost perioda od ovih veličina data preko proizvoda

$$t = kl^x m^y g^z,$$

gdje je k bezdimenzioni multiplikativni faktor, a x , y i z brojevi koje trebamo odrediti na osnovu dimenzione analize. Dimenzije lijeve i desne strane prethodne jednačine možemo pisati kao

$$T = L^x M^y (LT^{-2})^z = L^{x+z} M^y T^{-2z}.$$

VAŽNO! Provjera dimenzija unutar neke relacije nam može dati informaciju samo da li je ta relacija pogrešna. Ako se dimenzije na lijevoj i desnoj strani jednačine ne podudaraju onda možemo biti sigurni da je data jednačina pogrešna. Međutim, ako se dimenzije u jednoj relaciji podudaraju, to ne mora značiti da je ona tačna. Na primjer, položaj tijela koje se kreće ubrzano bez početne brzine možemo prikazati kao $x = \frac{1}{2}at^2$ i dimenzije lijeve i desne strane se podudaraju. Relacija $x = at^2$ je također dimenziono korektna, međutim ona ne sadrži odgovarajući faktor $\frac{1}{2}$.

Pošto obje strane moraju imati istu dimenziju zaključujemo da je

$$\begin{aligned}x + z &= 0, \\ y &= 0, \\ -2z &= 1.\end{aligned}$$

Rješavanjem prethodnog sistema dobijamo $x = \frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = -\frac{1}{2}$ pa zaključujemo da period klatna ne zavisi od mase kuglice, a da je zavisnost od dužine klatna i ubrzanja Zemljine teže data kao

$$t = k\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Iako dimenziona analiza može voditi ka ispravnim relacijama koje povezuju određen broj fizikalnih veličina, treba naglasiti da ona ima ozbiljna ograničenja. Naime, da bismo mogli primijeniti dimenzionu analizu moramo na samom početku poznavati od kojih veličina zavisi tražena fizikalna veličina. Pored toga, ovaj metod je ograničen samo na slučajeve gdje je zavisnost od poznatih fizikalnih veličina multiplikativnog karaktera, tj. gdje nemamo aditivnih članova u traženoj relaciji. Tako npr. put koji pređe neko tijelo krećući se konstantnim ubrzanjem zavisi od početne brzine, ubrzanja i vremenskog intervala u kome se taj put prevali. Dimenzionom analizom se ne može dobiti ispravna relacija jer ona sadrži dva sabirka v_0t i $\frac{1}{2}at^2$. Čak da je početna brzina jednaka nuli i da postoji samo jedan sabirak, ne bismo mogli dobiti korektnu relaciju jer se u njoj javlja bezdimenzi-
oni faktor $\frac{1}{2}$. Još jedno ograničenje dimenzione analize je uvjetovano činjenicom da se sve izvedene jedinice u mehanici mogu prikazati preko tri osnovne (metar, sekunda i kilogram). Ukoliko bismo imali zavisnost tražene fizikalne veličine od četiri ili više drugih, onda bismo dobili sistem od tri jednačine s četiri ili više nepoznatih veličina koji ne bismo mogli jednoznačno riješiti.

Značajne cifre

Svaka fizikalna veličina može se izmjeriti samo do određene preciznosti. Neodređenost pri mjerenju fizikalnih veličina uzrokovana je nizom faktora kao što su nepreciznost mjernog instrumenta, nedovoljna pažnja osobe koja vrši mjerenje ili nedovoljan broj izvršenih mjerenja. Pretpostavimo da želimo izvršiti mjerenje srednje brzine kuglice koja se kotrlja po horizontalnoj podlozi tako što mjerimo vremenski interval i pređeni put u tom vremenskom intervalu. Ne-
ka je kuglica prešla put od 4,0 metra za vrijeme od 2,82 sekundi.

Kada izračunamo srednju vrijednost brzine tako što podijelimo pređeni put od 4,0 m s vremenskim intervalom od 2,82 s, dobijamo $v = \frac{s}{t} = \frac{4,0\text{m}}{2,8\text{s}} = 1,418\,439\,716\,31 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Postavlja se pitanje da li ćemo dobijeni rezultat napisati baš u ovoj formi ili npr. $v = 1,4184 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, ili možda $v = 1,42 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Da bismo odgovorili na ovo pitanje neophodno je uvesti pojam značajne cifre. Naime, pri zapisivanju rezultata mjerenja, značajne cifre nam mogu poslužiti kao indikator preciznosti mjerenja. Izmjerena dužina od 4,0 m ima dvije značajne cifre dok je vremenski interval od 2,82 s određen s tri značajne cifre.

Ako množimo ili dijelimo dvije veličine, kao što je to slučaj u prethodnom primjeru, broj značajnih cifri koje zapisujemo u rezultatu mora odgovarati broju značajnih cifri najmanje preciznog mjerenja koje smo koristili pri proračunu. To konkretno znači da brzinu u prethodnom primjeru možemo odrediti do na dvije značajne cifre (jer je dužina veličina koja je izmjerena manje precizno od vremenskog intervala) i zapisati kao $v = 1,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Slično pravilo vrijedi i za sabiranje, odnosno oduzimanje fizikalnih veličina. Kada sabiramo ili oduzimamo fizikalne veličine, broj decimalnih mjesta u rezultatu mora odgovarati sabirku s najmanjim brojem decimalnih mjesta.

Pri određivanju broja značajnih cifara mora se posebno voditi računa kada rezultat sadrži na samom kraju ili početku jednu ili više nula. Da li npr. broj 2500 ima dvije ili četiri značajne cifre i koliki je broj značajnih cifri broja 0,0124? Odgovori na ova pitanja se mogu dati ako rezultate prikažemo u tzv. naučnoj notaciji, odnosno preko potencija broja 10. Tako broj 2500 možemo prikazati kao $2,5 \cdot 10^3$ pa zaključujemo da on ima dvije značajne cifre, dok bi npr. isti taj broj napisan kao $2,50 \cdot 10^3$ imao tri značajne cifre. Broj 0,0124 se može napisati kao $1,24 \cdot 10^{-2}$ i prema tome ima tri značajne cifre. Važno je napomenuti da ako se koriste različiti prefiksi u pisanju jedinica, oni neće promijeniti broj značajnih cifara. Dužina napisana kao 4,0 m ili $4,0 \cdot 10^3$ mm ima isti broj značajnih cifara.

VAŽNO!

- Broj značajnih cifara nije jednak broju decimalnih mjesta.
- Kod cijelih brojeva, nule koje se nađu na samom kraju ne doprinose broju značajnih cifara. Tako broj 560 koji se može pisati kao $5,6 \cdot 10^2$ ima dvije, a ne tri značajne cifre.
- Promjena jedinica mijenja broj decimalnih mjesta, ali ne mijenja broj značajnih cifara.

Zaokruživanje brojeva

Kako bi preciznost rezultata bila ista kao preciznost podataka datih u nekom problemu, potrebno je neke brojeve zaokružiti, tj. smanjiti broj decimalnih mjesta. Primjenjuje se opšte pravilo koje kaže da ako je cifra koja se odbacuje veća ili jednaka 5 (a iza te cifre slijede cifre različite od nule) broj ispred te cifre se povećava za jedan, a ako je cifra koja se odbacuje manja od pet, broj ispred te cifre se ne mijenja.

Pravila zaokruživanja brojeva najbolje ćemo objasniti na konkret-

nim primjerima. Pretpostavimo da broj 4,5596 treba zaokružiti na tri značajne cifre. Budući da je četvrta cifra (9) veća od 5, treća cifra se povećava za jedan te dobijamo 4,56. Isto tako 1,4876 postaje 1,49. Ako zaokružimo 8,321 na tri značajne cifre, s obzirom na to da je četvrta cifra (1) manja od 5, dobićemo 8,32. Isto tako 0,7562 postaje 0,756.

Poseban slučaj je kada je cifra koja se odbacuje jednaka 5, a iza nje nema drugih cifara (različitih od nule). Općenito je pravilo, ako je cifra koja prethodi petici paran broj, onda se ova cifra ne mijenja. Ako je cifra koja prethodi petici neparan broj, onda se ona povećava za jedan. Na primjer, zaokruživanjem na tri značajne cifre broj 48,25 postaje 48,2, broj 0,6875 postaje 0,688, a 0,2545 postaje 0,254.

FIZIKA I MATEMATIKA

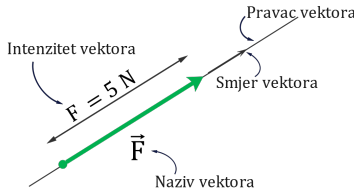
2.1	Definicija vektora i operacije nad vektorima	16
2.2	Koordinatni sistem i komponente vektora	18
2.3	Jedinični vektori koordinatnog sistema	21
2.4	Skalarni proizvod vektora	22
2.5	Vektorski proizvod vektora	23
2.6	Definicija i osnovne osobine trigonometrijskih funkcija	25
2.7	Elementi diferencijalnog računa	29
2.8	Elementi integralnog računa	34

Da bi se opisale prirodne pojave zakonima fizike uobičajeno je da se definiše određeni skup fizikalnih veličina. U fizici postoje dvije grupe fizikalnih veličina, koje se znatno razlikuju po svojim osobinama. To su skalarne i vektorske fizikalne veličine¹. Skalarne fizikalne veličine su određene brojnomo vrijednošću i mjernom jedinicom. To su npr. masa, temperatura, vrijeme, gustoća itd. Njih označavamo kurzivnim (*italic*) slovima i pišemo npr. $m = 5 \text{ kg}$, $T = 300 \text{ K}$ itd. Nasuprot tome postoje fizikalne veličine za čije određivanje nije dovoljna samo brojna vrijednost. Ako se krećemo u prostoru i napravimo određeni pomak, onda nije dovoljno da znamo kolika je vrijednost tog pomaka (da li je to 5 m ili 250 m) već je neophodno poznavati i u kojem pravcu i smjeru se napravio taj pomak. Veličine koje su pored svoje brojne vrijednosti određene pravcem i smjerom nazivaju se vektorske veličine. To su npr. sila, brzina, ubrzanje, impuls itd. Ove veličine ćemo označavati podebljanim kurzivnim slovima sa strelicom iznad: \vec{F} , \vec{v} , \vec{a} . Da bismo mogli koristiti vektorske fizikalne veličine, neophodno je poznavati osnovne osobine vektora i operacije nad njima.

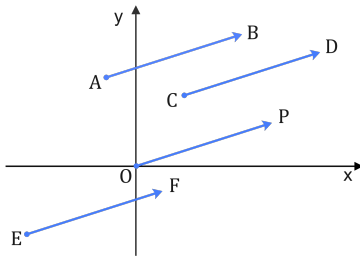
¹ U fizici se koriste još i tenzorske veličine, ali one nisu predmet interesovanja u okviru ove knjige.

2.1 Definicija vektora i operacije nad vektorima

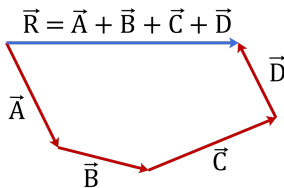
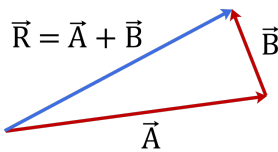
Grafički prikaz vektora



Slika 2.1: Grafički prikaz vektora, njegovog naziva, oznake, pravca, smjera i intenziteta.



Slika 2.2: Svi vektori prikazani na slici imaju isti pravac, smjer i intenzitet pa su oni, prema tome, identični.



Slika 2.3: Gore: grafičko sabiranje dva vektora. Dolje: grafičko sabiranje četiri vektora.

Vektor se najjednostavnije može definisati kao duž kod koje je jedna tačka proglašena početkom, a druga krajem. Grafički ga predstavljamo na način prikazan na slici 2.1.

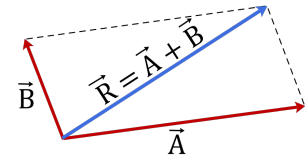
Početak vektora je nekad predstavljen tačkom ili crticom okomitom na pravac vektora, a kraj vektora obavezno strelicom. Udaljenost između početka i kraja vektora predstavlja dužinu vektora koju često nazivamo i intenzitet. Naime, vektorske fizikalne veličine su pored pravca i smjera vektora određene i brojnomo vrijednošću, a nju ćemo upravo pridružiti dužini vektora. Tako ćemo npr. vektor sile, intenziteta 5 N, predstaviti vektorom veće dužine nego vektor sile intenziteta 3 N. Intenzitet vektora predstavljamo korištenjem oznaka za apsolutnu vrijednost kao npr. $|\vec{F}| = 5 \text{ N}$ ili na način da se izostavi strelica iznad vektorske veličine kao npr. $F = 5 \text{ N}$. Intenzitet vektora je skalarna veličina koja je uvijek pozitivna. Ukoliko je intenzitet vektora jednak nuli kažemo da je taj vektor nulvektor, a ako je jednak jedinici nazivamo ga jediničnim vektorom.

Pravac vektora je određen pravom na kojoj on leži, a smjer samom strelicom. Treba naglasiti razliku između pravca i smjera. Naime, u prostoru postoji beskonačno mnogo pravaca dok se svakom od tih pravaca mogu pridružiti samo dva smjera. Jasno je da ukoliko vektor pomjeramo na način da se ne mijenja njegov pravac, smjer i intenzitet, neće se promijeniti ni sam vektor. Svi vektori prikazani na slici 2.2 imaju isti pravac, smjer i intenzitet pa kažemo da su ovi vektori identični. Prema tome, ukoliko bilo koji vektor pomjeramo paralelno on se pri tome neće promijeniti. Svi vektori koji pripadaju istom ili paralelnim pravcima nazivaju se kolinearni vektori.

Sabiranje i oduzimanje vektora

Sabiranje vektora je najjednostavnije definisati predstavljajući vektore grafički. Da bismo sabrali vektor \vec{B} s vektorom \vec{A} , neophodno je paralelnim pomjeranjem vektora \vec{B} , njegov početak dovesti na kraj vektora \vec{A} . Tada je rezultujući vektor \vec{R} , koji je jednak sumi vektora \vec{A} i \vec{B} , tj. $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$, vektor čiji je početak u početku vektora \vec{A} , a kraj u kraju vektora \vec{B} . Ovo pravilo sabiranja, koje se naziva i pravilo nadovezivanja, ilustrovano je u gornjem panelu slike 2.3. Ako želimo

sabrati više vektora onda početak svakog narednog treba dovesti na kraj prethodnog vektora. Dobijeni vektor $\vec{R} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C} + \vec{D} + \dots$ je vektor koji ima početak u početku prvog, a kraj u kraju zadnjeg vektora u sumi. Grafičko sabiranje više vektora ilustrirano je u donjem panelu slike 2.3. Dva vektora se mogu sabrati i tako da se počeci oba vektora dovedu u istu tačku, a zatim konstruiše paralelogram kao na slici 2.4. Rezultujući vektor tada ima početak u početku oba vektora, a kraj u suprotnom uglu paralelograma.

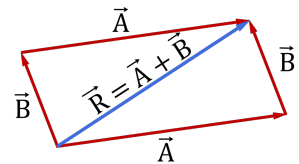


Slika 2.4: Sabiranje vektora metodom paralelograma.

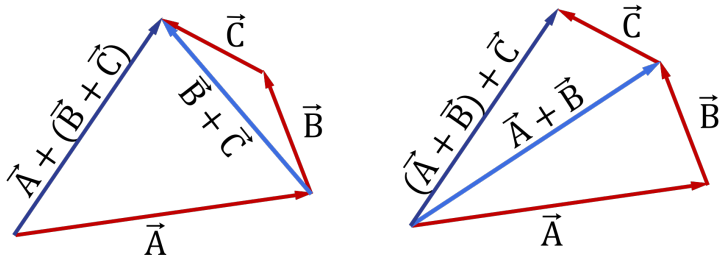
Sabiranje vektora je komutativna operacija, tj. svejedno je koji je vektor prvi, a koji drugi u sumi. Validnost zakona komutativnosti $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ ilustrirana je na slici 2.5. Pored osobine komutativnosti, sabiranje vektora je također asocijativno, tj. potpuno je svejedno da li ćemo prvo sabrati vektore \vec{A} i \vec{B} pa onda njihovom zbiru dodati vektor \vec{C} ili ćemo vektor \vec{A} dodati zbiru vektora \vec{B} i \vec{C} . Osobinu asocijativnosti zapisujemo kao

$$(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C}), \quad (2.1)$$

a njena validnost je ilustrirana na slici 2.6. Kada su u pitanju vektorske fizikalne veličine, jasno je da, slično kao i kod skalarnih, možemo sabirati samo fizikalne veličine istog tipa. Bez obzira što svaki vektor možemo predstaviti grafički, nema nikakvog smisla sabirati vektor brzine s npr. vektorom sile.



Slika 2.5: Grafička ilustracija zakona komutativnosti pri sabiranju dva vektora.



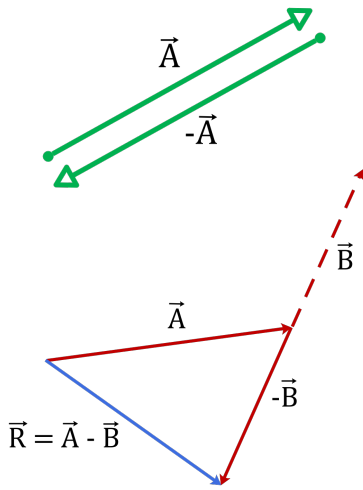
Slika 2.6: Grafička ilustracija zakona asocijativnosti pri sabiranju dva vektora.

Da bismo definisali operaciju oduzimanja vektora neophodno je prvo definisati negativni (suprotni) vektor. Vektor $-\vec{A}$ je vektor koji ima isti pravac i isti intenzitet kao i vektor \vec{A} , ali mu je smjer suprotan u odnosu na smjer vektora \vec{A} (gornji panel slike 2.7). Sada razliku $\vec{A} - \vec{B}$ vektora \vec{A} i \vec{B} možemo definisati kao zbir vektora \vec{A} i vektora $-\vec{B}$, tj.

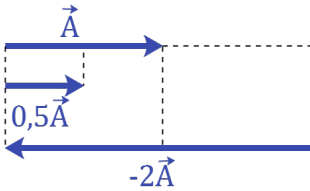
$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}). \quad (2.2)$$

Pravilo oduzimanja vektora ilustrirano je na donjem panelu slike 2.7.

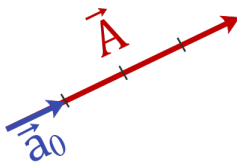
Pored sabiranja i oduzimanja vektora, možemo definisati i operaciju množenja vektora skalarom. Ako vektor \vec{A} pomnožimo s pozi-



Slika 2.7: Gore: prikaz vektora \vec{A} i vektora $-\vec{A}$. Dolje: ilustracija grafičkog oduzimanja dva vektora.



Slika 2.8: Množenje vektora pozitivnim i negativnim skalarom.



Slika 2.9: Svaki vektor se može predstaviti proizvodom skalara i odgovarajućeg jediničnog vektora.

tivnim skalarom s dobićemo vektor koji ima isti pravac i smjer kao i vektor \vec{A} , ali mu je intenzitet jednak sA . Ako pak vektor \vec{A} pomnožimo s negativnim skalarom $-s$ dobićemo vektor koji će imati isti pravac, ali suprotan smjer u odnosu na vektor \vec{A} , a intenzitet će mu biti sA . Na slici 2.8 je prikazano množenje vektora pozitivnim skalarom $s = 0,5$ i negativnim skalarom $s = -2$. Vektor $0,5\vec{A}$ ima isti smjer i pravac kao i vektor \vec{A} , ali mu je intenzitet jednak $0,5A$, tj. jednak jednoj polovini intenziteta A , dok je $-2\vec{A}$ vektor koji ima suprotan smjer u odnosu na smjer vektora \vec{A} i intenzitet $2A$, tj. dva puta veću dužinu.

Ako neki vektor \vec{a}_0 čiji je intenzitet jednak jedinici, pomnožimo proizvoljnim pozitivnim skalarom $s = A$, dobit ćemo vektor $\vec{A} = A\vec{a}_0$ koji ima pravac i smjer kao i vektor \vec{a}_0 , a intenzitet jednak A (slika 2.9). U tom slučaju kažemo da je vektor \vec{a}_0 jedinični vektor vektora \vec{A} .

2.2 Koordinatni sistem i komponente vektora

Način sabiranja i oduzimanja vektora predstavljen u prethodnom odjeljku je čisto grafički. Iako ćemo koristiti ovaj način da ilustriramo pojedine osobine fizikalnih sistema ili da opišemo određene fizikalne situacije, upotreba grafičkog metoda je znatno limitirana. To proizilazi iz činjenice da je grafički teško precizno odrediti dužinu vektora ili ugao između dva vektora. Kako bi se rezultati sabiranja ili oduzimanja vektora mogli izraziti kvantitativno neophodno je uvesti način predstavljanja (reprezentaciju) baziranu na algebri (algebarska reprezentacija).

Prvi korak pri uvođenju algebarske reprezentacije vektora jeste njegova definicija u koordinatnom sistemu. Ovdje ćemo se po potrebi ograničiti na predstavljanje vektora u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu, a sve rezultate je lako poopćiti na trodimenzionalni slučaj. Dvodimenzionalni koordinatni sistem je sastavljen od dva skalirana međusobno okomita pravca koje nazivamo ose koordinatnog sistema. Obično ih označavamo s x i y . Koordinatne ose imaju svoj pozitivni i negativni dio odvojen tačkom presjeka dvije ose koju nazivamo ishodište koordinatnog sistema. Pozitivni smjer koordinatne ose određen je strelicom na njenom kraju.

Neophodno je naglasiti da je pri rješavanju fizikalnih problema izbor koordinatnog sistema potpuno proizvoljan. Možemo izabrati bilo koju tačku prostora kao ishodište koordinatnog sistema i njegove ose usmjeriti u proizvoljnom pravcu. Pri rješavanju jednog te istog fizikalnog problema možemo koordinatni sistem birati na više načina.

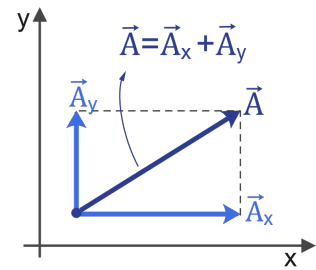
Međutim, često će izbor koordinatnog sistema povećati ili smanjiti stepen složenosti pri rješavanju nekog problema.

Na slici 2.10 prikazan je vektor \vec{A} i pravougli dvodimenzionalni koordinatni sistem. Prema prethodno uvedenoj definiciji vektorskog zbira, vektor \vec{A} možemo napisati kao sumu vektora \vec{A}_x i vektora \vec{A}_y , pri čemu vektor \vec{A}_x ima pravac x -ose, a vektor \vec{A}_y ima pravac y -ose. Vektore \vec{A}_x i \vec{A}_y nazivamo komponentnim vektorima vektora \vec{A} .

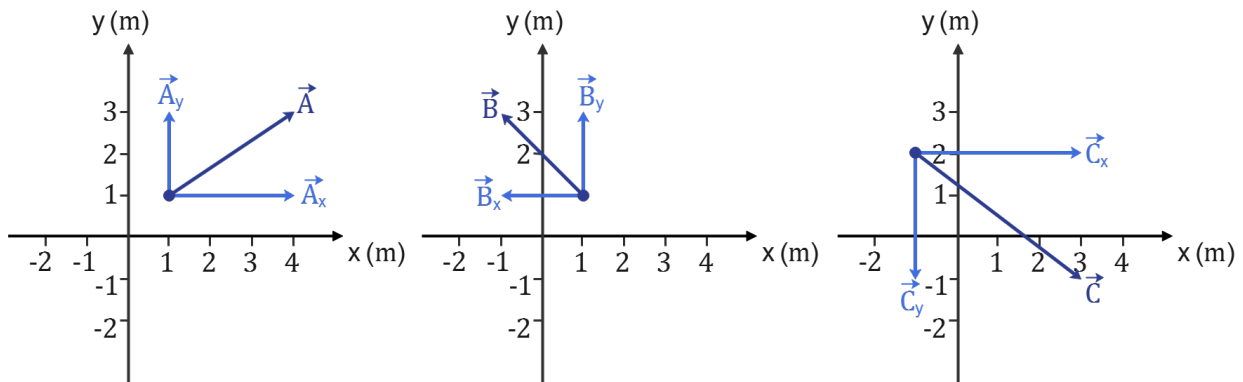
Pravac komponentnih vektora \vec{A}_x i \vec{A}_y već je određen pravcima x i y -ose pa je neophodno odrediti još njihovu dužinu i smjer. Obje ove karakteristike vektora možemo odrediti jednom te istom skalarnom veličinom koju zovemo komponenta vektora i označavamo je s A_x , odnosno A_y . Komponenta vektora A_x je određena na sljedeći način:

- apsolutna vrijednost $|A_x|$ predstavlja dužinu vektora \vec{A}_x ,
- predznak komponente A_x je pozitivan ako je vektor \vec{A}_x usmjeren u pozitivnom smjeru x -ose, a negativan ako je vektor \vec{A}_x usmjeren u suprotnom smjeru.

Isto vrijedi i za komponentu A_y . Prema tome, komponenta vektora A_x (A_y) nam nosi informaciju i o intenzitetu vektora \vec{A}_x (\vec{A}_y) i o njegovom smjeru.



Slika 2.10: Prikaz vektora \vec{A} u dvodimenzionalnom koordinatnom sistemu i rastavljanja tog vektora na komponentne vektore.



Na slici 2.11 prikazane su tri situacije gdje je vektor razložen na svoje komponentne vektore. Dužina vektora \vec{A}_x je 3 m i on je usmjeren u pozitivnom smjeru x -ose pa je, prema tome, komponenta $A_x = +3$ m. Dužina vektora \vec{A}_y je 2 m i on je usmjeren u pozitivnom smjeru y -ose pa je $A_y = +2$ m (predznak + možemo izostavljati u daljnjem tekstu). Vektor \vec{B} je razložen na svoje dvije komponente tako da je vektor \vec{B}_x usmjeren u negativnom smjeru x -ose pa je komponenta $B_x = -2$ m (obzirom da je dužina vektora \vec{B}_x 2 m). Komponenta B_y

Slika 2.11: Prikaz tri vektora i njihovo rastavljanje na komponentne vektore.

je 2 m jer pokazuje u pozitivnom sjeru y -ose. Vektor \vec{C} je razložen na način da je $C_x = 4$ m, a $C_y = -3$ m.

Prethodno smo istaknuli da je jedan vektor određen svojom dužinom (intenzitetom) i svojim pravcem. Pored toga, pokazali smo da se vektor u dvodimenzionalnom prostoru može predstaviti preko para brojeva, koje nazivamo komponente vektora. Sada ćemo naći vezu između ova dva načina predstavljanja vektora (između dvije reprezentacije). Pravac vektora ćemo određivati uglom koji taj vektor zaklapa s pozitivnim dijelom x -ose. Na lijevoj strani slike 2.12 prikazan je vektor \vec{A} koji s pozitivnim dijelom x -ose zaklapa ugao θ . Ako poznamo dužinu vektora A i ugao θ onda jednostavno možemo odrediti komponente A_x i A_y kao

VAŽNO! Relacije 2.3 i 2.4 vrijede samo u slučaju da se ugao θ određuje u odnosu na pozitivan smjer x -ose.

$$A_x = A \cos \theta, \quad (2.3)$$

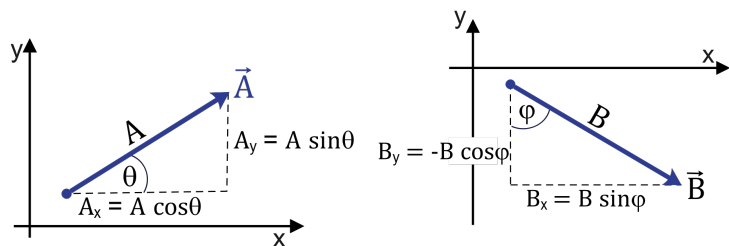
$$A_y = A \sin \theta. \quad (2.4)$$

Ako pak poznamo komponente vektora A_x i A_y onda su dužina vektora A i ugao koji on zatvara s pozitivnim dijelom x -ose dati s

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}, \quad (2.5)$$

$$\theta = \arctan \frac{A_y}{A_x}. \quad (2.6)$$

Slika 2.12: Komponente dva vektora izražene preko intenziteta vektora i ugla koji vektor zaklapa s pozitivnim dijelom x -ose (lijevo) i negativnim dijelom y -ose (desno).



Iako je uobičajeno da se pravac vektora određuje uglom između vektora i pozitivnog dijela x -ose, nekada se, u zavisnosti od prirode fizikalnog problema, može odrediti i uglom između vektora i pozitivnog ili negativnog dijela y -ose, kao što je prikazano na desnom dijelu slike 2.12. U ovom slučaju se pri određivanju komponenata vektora treba voditi i računa da li su one pozitivne ili negativne. Naime, dužina y -komponente vektora \vec{B} jednaka je $B \cos \phi$ ali je y -komponenta ovog vektora negativna pa treba dodati predznak minus i pisati $B_y = -B \cos \phi$.

2.3 Jedinični vektori koordinatnog sistema

Izborom koordinatnog sistema određujemo dva međusobno okomita pravca određena x i y -osom. Ova dva pravca su preferabilna, izdvojena u odnosu na sve druge pravce, pa je pogodno njihov značaj naglasiti definisanjem dva specifična vektora koji su usmjereni upravo u pravcu x , odnosno y -ose. Definišemo jedinični vektor x -ose, u oznaci \vec{i} , kao vektor koji ima pravac i pozitivan smjer x -ose, a dužina mu je jednaka jedinici. Analogno jedinični vektor y -ose, u oznaci \vec{j} , definišemo kao vektor koji ima pravac i pozitivan smjer y -ose, a dužina mu je jednaka jedinici. Uz ovakvu definiciju jediničnih vektora možemo izvršiti razlaganje proizvoljnog vektora \vec{A} na sljedeći način

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}, \quad (2.7)$$

tj. jednoznačno ga prikazati preko njegovih komponenti i jediničnih vektora (slika 2.13). Prethodna relacija predstavlja osnovu algebarske reprezentacije vektora.

Sada možemo definisati sabiranje vektora koristeći razlaganje na komponente. Neka su vektori $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j}$ i $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$ dva proizvoljna vektora. Tada je njihova suma, označena kao vektor \vec{C} na slici 2.14, data s

$$\begin{aligned} \vec{C} &= \vec{A} + \vec{B} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \\ &= (A_x + B_x) \vec{i} + (A_y + B_y) \vec{j}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Ako s druge strane vektor \vec{C} prikažemo preko komponenta na način $\vec{C} = C_x \vec{i} + C_y \vec{j}$ poređenjem s prethodnom relacijom zaključujemo

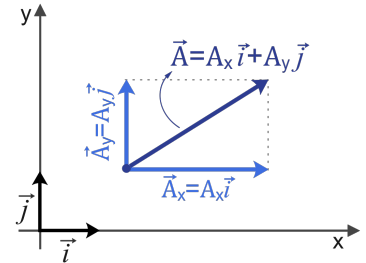
$$C_x = A_x + B_x, \quad (2.9)$$

$$C_y = A_y + B_y. \quad (2.10)$$

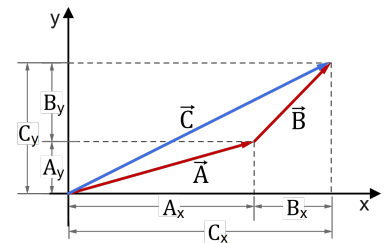
Prema tome, ako želimo sabrati dva vektora, dovoljno je sabrati samo njihove odgovarajuće x , odnosno y -komponente. Oduzimanje vektora podrazumijeva oduzimanje odgovarajućih komponenti vektora.

Na slici 2.14 su prikazani vektori \vec{A} i \vec{B} razloženi na komponente. Sa slike je jasno da su komponente vektora $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ jednake sumi komponenti vektora \vec{A} i \vec{B} , odnosno da su geometrijska i algebarska reprezentacija vektora podudarne. Poopštenje na slučaj tri dimenzije se može izvršiti uvođenjem z -ose i odgovarajućeg jediničnog vektora \vec{k} , tako da se vektor \vec{A} može zapisati kao

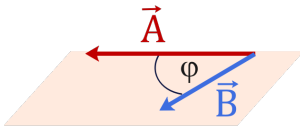
$$\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}. \quad (2.11)$$



Slika 2.13: Vektor \vec{A} predstavljen preko jediničnih vektora \vec{i} i \vec{j} .

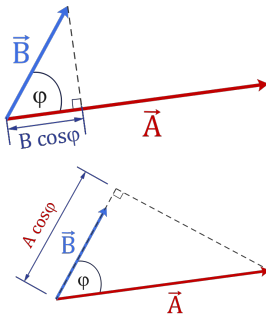


Slika 2.14: Grafička i algebarska ilustracija sabiranja dva vektora. Vektori \vec{A} i \vec{B} su rastavljeni na komponente. Komponente rezultujućeg vektora \vec{C} jednake su zbiru odgovarajućih komponenti vektora \vec{A} i \vec{B} .



Slika 2.15: Pri određivanju ugla između dva vektora počeci tih vektora moraju biti u istoj tački.

²Skalarni proizvod dva vektora se označava tačkom između dva vektora dok se vektorski proizvod označava s \times .



Slika 2.16: Gore: veličina $B \cos \varphi$ predstavlja ortogonalnu projekciju vektora \vec{B} na \vec{A} . Skalarni proizvod je proizvod te projekcije i intenziteta vektora \vec{A} . Dolje: Veličina $A \cos \varphi$ predstavlja ortogonalnu projekciju vektora \vec{A} na vektor \vec{B} . Prema tome, skalarni proizvod je proizvod te projekcije i intenziteta vektora \vec{B} .

VAŽNO! Uglovi se mjere u stepenima ili radijanima. Veza između ugla mjerenog u stepenima i radijanima data je s $180^\circ = \pi$ rad. Jedan stepen je $1^\circ = \frac{\pi}{180}$ rad, a jedan radijan $1 \text{ rad} = \frac{180^\circ}{\pi}$.

2.4 Skalarni proizvod vektora

Do sada smo definisali operacije sabiranja vektora, množenje vektora skalarom i oduzimanje vektora. Pored ovih operacija moguće je definisati i množenje dva vektora. Kako vektori nisu obični brojevi nije moguće primijeniti pravilo množenja dva broja. Naime, moguće je definisati množenje vektora na dva načina. Prvi način, koji se naziva skalarni proizvod, definisan je tako da kao rezultat množenja dva vektora dobijemo skalar, tj. broj. Drugi način, nazvan vektorski proizvod, definisan je tako da kao rezultat množenja dva vektora dobijemo ponovo vektor. Razmatranje skalarnog i vektorskog proizvoda je neophodno jer je niz fizikalnih veličina definisano preko skalarnog, odnosno vektorskog proizvoda, te je nekolicina fizikalnih zakona iskazana preko njih.

Skalarni proizvod² dva vektora \vec{A} i \vec{B} definiše se kao proizvod intenziteta vektora \vec{A} , intenziteta vektora \vec{B} i kosinusa ugla između ova dva vektora. Možemo ga zapisati kao

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \angle (\vec{A}, \vec{B}). \quad (2.12)$$

Bitno je naglasiti da kada se određuje ugao između dva vektora onda počeci tih vektora moraju biti u istoj tački (slika 2.15). Ako vektori nisu kolinearni, tj. ne leže na istom pravcu, onda se ugao mjeri u ravni koja sadrži oba vektora. Vrijednost ugla između dva vektora može imati bilo koju vrijednost između 0° i 180° . Ako su vektori kolinearni onda je ugao između dva vektora 0° ako imaju isti smjer, odnosno 180° ako imaju suprotan smjer.

Neka je ugao između vektora \vec{A} i \vec{B} označen s φ . Veličina $B \cos \varphi$ predstavlja ortogonalnu projekciju vektora \vec{B} na \vec{A} (slika 2.16). Skalarni proizvod je prema tome proizvod intenziteta vektora \vec{A} i projekcije vektora \vec{B} na vektor \vec{A} . Potpuno analogno možemo definisati skalarni proizvod kao proizvod intenziteta vektora \vec{B} i ortogonalne projekcije vektora \vec{A} na vektor \vec{B} (donji panel slike 2.16). Jasno je da vrijedi $AB \cos \varphi = BA \cos \varphi$, pa prema tome vrijedi i $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$. To znači da je skalarni proizvod komutativan.

Kako je rezultat skalarnog množenja dva vektora skalar, tj. broj, njegova vrijednost može biti pozitivna, negativna ili jednaka nuli. Skalarni proizvod dva vektora će biti pozitivan ako je ugao između njih u intervalu od 0° do 90° (gornji panel slike 2.17). Skalarni proizvod dva vektora je negativan ako ugao između njih ima bilo koju vrijednost u intervalu od 90° do 180° (srednji panel slike 2.17). Ukoliko su dva vektora ortogonalna, tj. ugao između njih je jednak 90° , njihov skalarni proizvod će biti jednak nuli (donji panel slike 2.17).

Skalarni proizvod dva vektora se može izračunati ako znamo intenzitete oba vektora i ugao između njih. Alternativno skalarni proizvod je moguće odrediti i ako znamo komponente oba vektora. Primijetimo da je skalarni proizvod dva jedinična vektora jednak jedinici ili nuli. Ako množimo dva identična jedinična vektora onda vrijedi

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0 = 1. \quad (2.13)$$

Ako pak pomnožimo dva različita jedinična vektora dobijemo

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90^\circ = 0. \quad (2.14)$$

Skalarni proizvod vektora $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ i $\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$, prikazan preko njihovih komponenti možemo napisati kao

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot \vec{B} &= (A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}) \cdot (B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}) = \\ &= A_x B_x \vec{i} \cdot \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \cdot \vec{j} + A_x B_z \vec{i} \cdot \vec{k} + \\ &+ A_y B_x \vec{j} \cdot \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \cdot \vec{j} + A_y B_z \vec{j} \cdot \vec{k} + \\ &+ A_z B_x \vec{k} \cdot \vec{i} + A_z B_y \vec{k} \cdot \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \cdot \vec{k} = \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z, \end{aligned} \quad (2.15)$$

gdje smo iskoristili relacije (2.13) i (2.14).

Pogledajmo još čemu je jednak skalarni proizvod vektora sa samim sobom. Po definiciji je

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}| |\vec{A}| \cos 0^\circ = |\vec{A}|^2 = A^2. \quad (2.16)$$

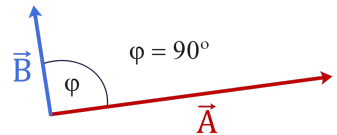
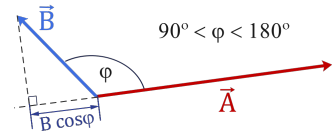
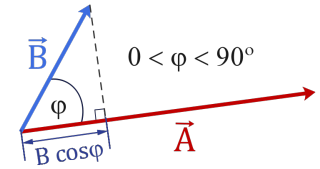
Prema tome, kvadrat vektora \vec{A}^2 je isto što i kvadrat intenziteta tog vektora A^2 . S druge strane, na osnovu relacije (2.15), zaključujemo da je $\vec{A} \cdot \vec{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2$, odnosno da je intenzitet vektora prikazan preko njegovih komponenti dat s

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}. \quad (2.17)$$

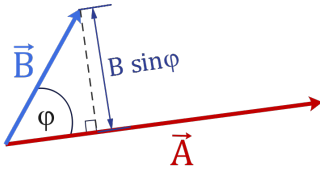
2.5 Vektorski proizvod vektora

Vektorskim množenjem dva vektora \vec{A} i \vec{B} dobije se kao rezultat ponovo vektor. Neka je rezultujući vektor označen s $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$. Da bismo odredili vektor \vec{C} neophodno je definisati njegov intenzitet, pravac i smjer. Intenzitet rezultujućeg vektora \vec{C} se definiše kao proizvod intenziteta vektora \vec{A} , intenziteta vektora \vec{B} i sinusa ugla između ova dva vektora:

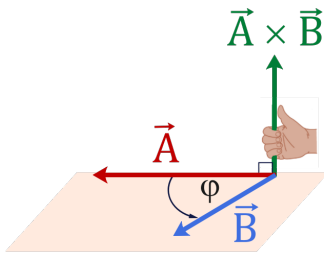
$$|\vec{C}| = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \angle (\vec{A}, \vec{B}). \quad (2.18)$$



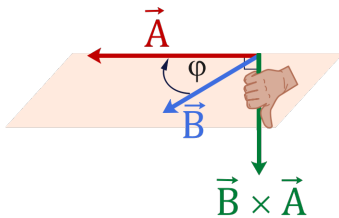
Slika 2.17: Skalarni proizvod dva vektora može biti pozitivan (gore), negativan (sredina) ili jednak nuli (dolje).



Slika 2.18: Veličina $B \sin \varphi$ predstavlja komponentu vektora \vec{B} koja je okomita na vektor \vec{A} . Intenzitet vektorskog proizvoda je proizvod te komponente i intenziteta vektora \vec{A} .



Slika 2.19: Pravac vektora $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ je okomit i na vektor \vec{A} i na vektor \vec{B} , a smjer mu se određuje tako da prsti desne ruke pokazuju od \vec{A} prema \vec{B} a palac smjer vektora \vec{C} .



Slika 2.20: Pravac vektora $\vec{C} = \vec{B} \times \vec{A}$ je okomit i na vektor \vec{A} i na vektor \vec{B} a smjer mu se određuje tako da prsti desne ruke pokazuju od \vec{B} prema \vec{A} a palac smjer vektora \vec{C} .

Kako ugao između dva vektora može poprimiti vrijednosti od 0° do 180° , sinus takvog ugla je uvijek pozitivan pa je i intenzitet vektora \vec{C} uvijek pozitivan, što definicijom samog intenziteta mora i biti. Ako su vektori \vec{A} i \vec{B} kolinearni, ugao između njih je 0° ili 180° pa je sinus takvog ugla jednak nuli odnosno vektorski proizvod ova dva vektora jednak je nuli. Iz ovoga slijedi da je vektorski proizvod dva identična vektora uvijek jednak nuli.

Geometrijska interpretacija intenziteta vektorskog proizvoda dva vektora data je na slici 2.18. Veličina $B \sin \varphi$ predstavlja komponentu vektora \vec{B} okomitu na vektor \vec{A} , pa je intenzitet vektorskog proizvoda dva vektora ustvari proizvod intenziteta vektora \vec{A} i komponente vektora \vec{B} koja je okomita na vektor \vec{A} .

Pravac rezultujućeg vektora \vec{C} je takav da je uvijek okomit i na vektor \vec{A} i na vektor \vec{B} , tj. okomit je na ravan u kojoj leže vektori \vec{A} i \vec{B} . Smjer rezultujućeg vektora određuje se tzv. pravilom desne ruke. Naime, prsti desne ruke treba da pokazuju od prvog vektora u vektorskom proizvodu ka drugom vektoru (od vektora \vec{A} prema vektoru \vec{B} ako određujemo $\vec{A} \times \vec{B}$). Tada palac pokazuje smjer vektora \vec{C} (slika 2.19). Ako određujemo $\vec{B} \times \vec{A}$ prsti desne ruke pokazuju od \vec{B} prema \vec{A} pa će rezultujući vektor imati suprotan smjer u odnosu na slučaj kada određujemo $\vec{A} \times \vec{B}$ (slika 2.20). Zaključujemo da vektorski proizvod nije komutativan tj. da vrijedi $\vec{A} \times \vec{B} \neq \vec{B} \times \vec{A}$, pa je stoga bitno voditi računa koji je vektor napisan na prvom, a koji na drugom mjestu u vektorskom proizvodu. Rezultujući vektor će u ova dva slučaja imati isti intenzitet i pravac ali suprotan smjer, pa vrijedi $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$, te stoga kažemo da je vektorski proizvod antikomutativan.

Da bismo vektorski proizvod dva vektora prikazali preko njegovih komponenti prvo ćemo vidjeti šta su vektorski proizvodi jediničnih vektora međusobno. Kao što je već ranije rečeno, vektorski proizvod vektora samog sa sobom jednak je nuli pa vrijedi

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = 0. \quad (2.19)$$

Koristeći definiciju vektorskog proizvoda i pravilo desne ruke možemo jednostavno zaključiti da vrijedi

$$\begin{aligned} \vec{i} \times \vec{j} &= -\vec{j} \times \vec{i} = \vec{k}, \\ \vec{j} \times \vec{k} &= -\vec{k} \times \vec{j} = \vec{i}, \\ \vec{k} \times \vec{i} &= -\vec{i} \times \vec{k} = \vec{j}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Sada vektorski proizvod dva vektora $\vec{A} = A_x \vec{i} + A_y \vec{j} + A_z \vec{k}$ i $\vec{B} =$

$B_x \vec{i} + B_y \vec{j} + B_z \vec{k}$ možemo pisati kao

$$\begin{aligned} \vec{A} \times \vec{B} &= A_x B_x \vec{i} \times \vec{i} + A_x B_y \vec{i} \times \vec{j} + A_x B_z \vec{i} \times \vec{k} + \\ &+ A_y B_x \vec{j} \times \vec{i} + A_y B_y \vec{j} \times \vec{j} + A_y B_z \vec{j} \times \vec{k} + \\ &+ A_z B_x \vec{k} \times \vec{i} + A_z B_y \vec{k} \times \vec{j} + A_z B_z \vec{k} \times \vec{k} \end{aligned} \quad (2.21)$$

Ako iskoristimo relacije za vektorski proizvod dva jedinična vektora dobijamo

$$\vec{A} \times \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y) \vec{i} + (A_z B_x - A_x B_z) \vec{j} + (A_x B_y - A_y B_x) \vec{k}, \quad (2.22)$$

pa se komponente rezultujućeg vektora $\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B}$ mogu napisati kao

$$C_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad C_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad C_z = A_x B_y - A_y B_x. \quad (2.23)$$

Vektorski proizvod prikazan preko komponenti može se predstaviti i preko determinante na sljedeći način

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \quad (2.24)$$

2.6 Definicija i osnovne osobine trigonometrijskih funkcija

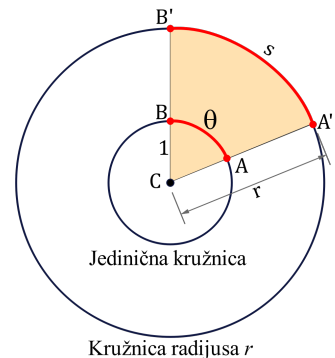
Određivanje ugla

Ugao između dva pravca ili dva vektora mjeri se u stepenima ili radijanima. Da bismo došli do definicije radijana i veze između ove dvije jedinice, razmotrimo dva koncentrična kruga, jedan jediničnog, a drugi proizvoljnog radijusa r , prikazana na slici 2.21. Neka je ugao između pravaca CA' i CB' označen s θ . Tada je ugao θ , mjereno u radijanima, brojno jednak dužini luka AB na kružnici jediničnog radijusa. Obim kružnice jediničnog radijusa jednak je $2\pi \cdot 1$, pa je puni ugao, mjereno u radijanima, jednak 2π rad. Puni ugao, s druge strane, jednak je 360° , pa je veza između radijana i stepena data s

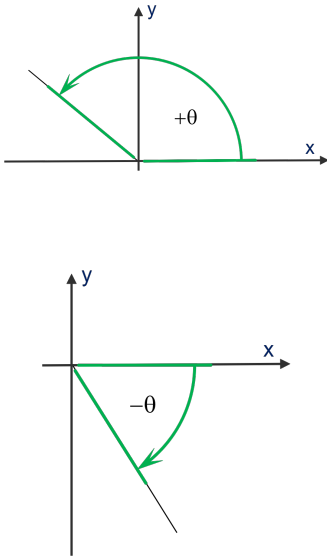
$$\pi \text{ rad} = 180^\circ. \quad (2.25)$$

Sa slike 2.21 je jasno da vrijedi proporcija $\frac{\theta}{1} = \frac{s}{r}$, pa je veza između dužine luka, radijusa kružnice i ugla data s

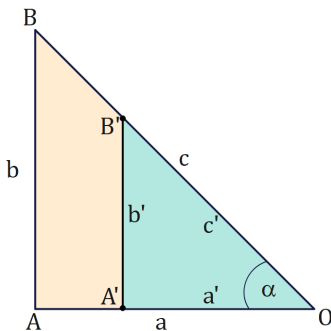
$$\theta = \frac{s}{r} \quad (2.26)$$



Slika 2.21: Ugao θ , mjereno u radijanima, jednak je dužini luka AB na kružnici jediničnog radijusa.



Slika 2.22: Određivanje ugla koji zaklapa neki pravac u odnosu na x -osu. Ukoliko se ugao mjeri u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu onda je pozitivan (slika gore), a ako se mjeri u smjeru kretanja kazaljke na satu onda je negativan (slika dolje).



Slika 2.23: Definicija trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu.

ZAPAMTI! Definicije trigonometrijskih funkcija u pravouglom trouglu je najpogodnije zapamtiti kao

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{\text{nalegla kateta}}{\text{hipotenuza}}, \\ \sin \alpha &= \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{hipotenuza}}, \\ \text{tg } \alpha &= \frac{\text{naspramna kateta}}{\text{nalegla kateta}}.\end{aligned}$$

Uglove ćemo često određivati u odnosu na jednu od osa izabranog koordinatnog sistema (uglavnom x -osu). Pri tome je neophodno da pravac koji određuje dati ugao prolazi kroz ishodište koordinatnog sistema. Ukoliko ugao između x -ose i datog pravca mjerimo u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu, onda će taj ugao biti pozitivan (slika 2.22 gore). Ako pak ugao između x -ose i datog pravca mjerimo u smjeru kretanja kazaljke na satu onda će njegova vrijednosti biti negativna (slika 2.22 dolje).

Definicija trigonometrijskih funkcija

Razmotrimo sada pravougli trougao $\triangle OAB$ i njemu sličan $\triangle OA'B'$, s odgovarajućim katetama a, a', b, b' i hipotenzama c i c' kako je prikazano na slici 2.23. Neka je pri tome α oštri ugao između katete a (a') i hipotenuze c (c'). Zbog sličnosti trouglova, odnos a/c će biti isti kao i odnos a'/c' . Ovaj odnos isključivo zavisi od ugla α i prema tome predstavlja funkciju ugla α . Ova funkcija se naziva kosinus i u pravouglom trouglu definiše kao

$$\cos \alpha = \frac{a}{c}, \quad (2.27)$$

gdje je a nalegla kateta (kateta koja s hipotenzom zatvara ugao α), a c hipotenuza pravouglom trougla. Slično tome odnos b/c je isti kao i odnos b'/c' i zavisi isključivo od ugla α te predstavlja funkciju ovog ugla koja se naziva sinus i definiše kao

$$\sin \alpha = \frac{b}{c}, \quad (2.28)$$

gdje je b naspramna kateta, a c hipotenuza pravouglom trougla. Pored ove dvije funkcije, moguće je definisati i odnos kateta kao funkciju ugla α . Naime, odnos naspramne i nalegla katete definiše funkciju tangens, tj.

$$\text{tg } \alpha = \frac{b}{a}. \quad (2.29)$$

Gore definisane tri funkcije nazivaju se trigonometrijske funkcije.

Definicija trigonometrijskih funkcija pomoću pravouglom trougla vrijedi samo za uglove u intervalu $(0, 90^\circ)$. Da bismo poopštili ovu definiciju razmotrićemo kružnicu jediničnog radijusa čiji je centar postavljen u ishodište koordinatnog sistema (x, y) kao na slici 2.24. Neka pravac OC zatvara ugao α s pozitivnim smjerom x -ose. Spustimo iz tačke C normalu na x -osu tako da je $\triangle OAC$ pravougli trougao. Ona odnos nalegla katete \overline{OA} i hipotenuze $\overline{OC} = 1$ predstavlja kosinus

ugla α i može se odrediti kao projekcija tačke C na x -osu. Ova definicija se onda može poopštiti na proizvoljan ugao α . Naime vrijednost kosinusa ugla α , koji tvori x -osa i proizvoljan pravac OC , ćemo dobiti projektovanjem tačke C na x -osu.

Analogno možemo definisati sinus ugla preko projekcije na y -osu. Naime, projekcijom tačke C na y -osu dobijamo vrijednost projekcije \overline{OB} koja je jednaka dužini naspramne katete \overline{AC} . Odnos naspramne katete i hipotenuze jedinične dužine upravo predstavlja sinus ugla.

Tangens ugla α možemo odrediti kao presjek pravca OC koji s x -osom zatvara ugao α i pravca $x = 1$ (vidjeti sliku 2.25). Naime, ova dva pravca zajedno s x -osom čine trougao $\triangle OAC$ u kojem je tangens ugla definisan kao odnos naspramne katete b i nalegale katete a . Kako je dužina katete a jednaka jedinici, onda će vrijednost tangensa biti jednaka upravo dužini \overline{AC} .

Osnovne osobine trigonometrijskih funkcija

Gore definisane trigonometrijske funkcije su periodične s periodom 2π . Vrijednost funkcija sinus i kosinus je ograničena u intervalu od $[-1, 1]$. Vrijednost tangensa nije ograničena, ali ova funkcija nije definisana za uglove $\pm\pi/2$, tj. ima prekid u ovim tačkama. Grafički prikazi trigonometrijskih funkcija su dati na slikama 2.26 i 2.27.

Funkcija sinus je neparna funkcija tj. vrijedi $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, dok je funkcija kosinus parna pa vrijedi $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$. Inače relacije koje povezuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija istih ili različitih argumenata nazivaju se trigonometrijski identiteti. Jedan od često korištenih identiteta koji povezuje funkcije sinus i kosinus je

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1. \quad (2.30)$$

Kako su funkcije sinus i kosinus periodične onda vrijedi $\sin(\alpha + 2\pi) = \sin \alpha$ i $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos \alpha$. Pored toga, u praksi se često koriste trigonometrijski identiteti koji se nazivaju adicione formule:

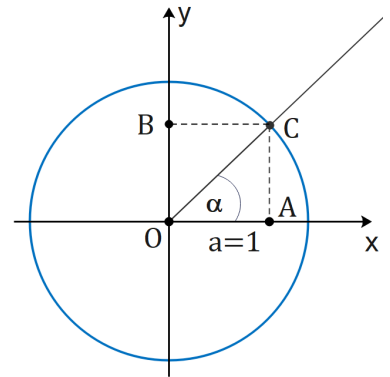
$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad (2.31)$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta. \quad (2.32)$$

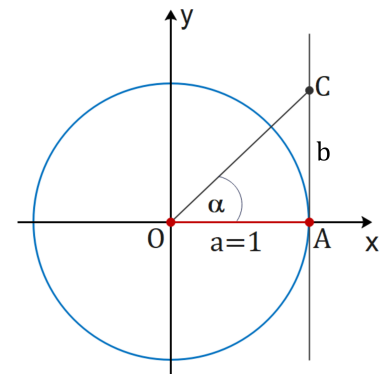
Trigonometrijski identiteti kojima se definiše sinus odnosno kosinus dvostrukog ugla dati su sa

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha, \quad (2.33)$$

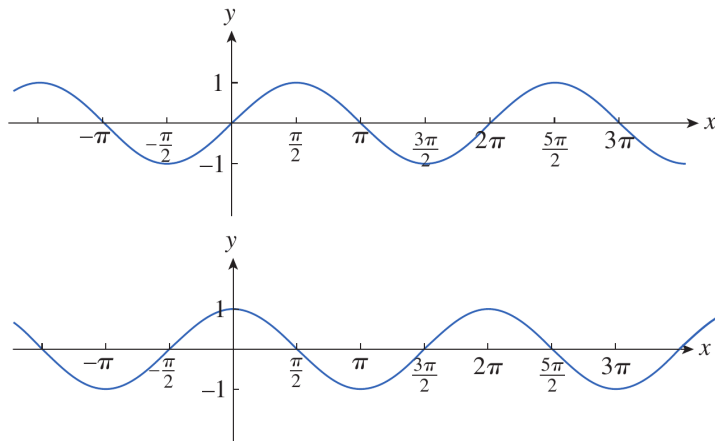
$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha. \quad (2.34)$$



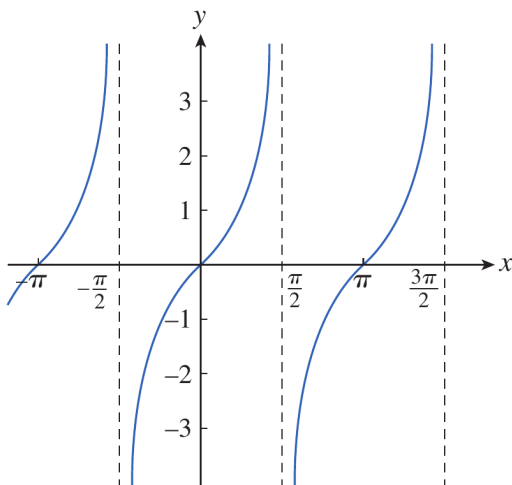
Slika 2.24: Trigonometrijska kružnica.



Slika 2.25: Određivanje tangensa ugla na trigonometrijskoj kružnici.



Slika 2.26: Grafički prikaz funkcija sinus (gore) i kosinus (dolje).



Slika 2.27: Grafički prikaz funkcije tangens.

2.7 Elementi diferencijalnog računa

Diferencijalni račun potiče još iz 17. vijeka, a otkrili su ga nezavisno jedan od drugog, engleski fizičar i matematičar sir Isaac Newton i njemački matematičar Gottfried W. Leibniz. Diferencijalni račun je usko vezan uz pojam brzine promjene funkcije, pa se zbog toga primjenjuje u slučajevima u kojima se određuje promjena neke fizikalne veličine. Veliki broj fizikalnih zakona su iskazani u tzv. diferencijalnoj formi te je zbog toga neophodno poznavati elemente diferencijalnog računa. U daljem tekstu ćemo navesti definicije osnovnih pojmova diferencijalnog računa i njihovu geometrijsku i fizikalnu interpretaciju.

Prirast funkcije i prirast argumenta

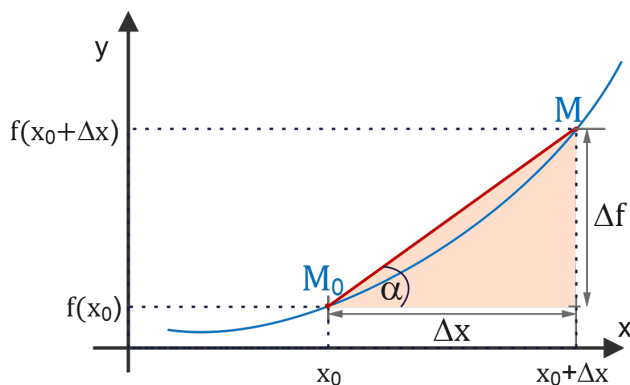
Neka je data funkcija $y = f(x)$ i proizvoljna tačka x_0 koja pripada otvorenom intervalu na kojem je definisana ta funkcija. Veličinu $x - x_0$ nazivamo prirastom argumenta i označavamo je kao

$$\Delta x = x - x_0. \quad (2.35)$$

Veličinu $f(x) - f(x_0)$ nazivamo prirastom funkcije i označavamo kao

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) \quad (2.36)$$

odnosno



Slika 2.28: Prirast argumenta Δx i prirast funkcije Δf .

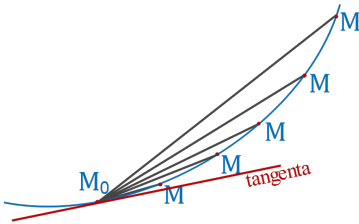
$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \quad (2.37)$$

gdje smo iz jednačine (2.35) izrazili $x = x_0 + \Delta x$. Koristeći uvedene oznake, srednju brzinu promjene funkcije možemo zapisati kao

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.38)$$

Srednja brzina promjene funkcije ima i svoje geometrijsko značenje. Uzmimo neku fiksnu tačku $M_0 = (x_0, f(x_0))$ na nekoj proizvoljnoj krivoj kao na slici 2.28 i vrijednost priraštaja argumenta $\Delta x \neq 0$. Tada možemo definisati novu tačku $M = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ također na toj krivoj. Očito je da je srednja brzina promjene funkcije jednaka tangensu ugla koji sekanta M_0M zaklapa s pozitivnim dijelom x -ose

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \quad (2.39)$$



Slika 2.29: Kako se tačka M približava tački M_0 , sekanta M_0M prelazi u tangentu.

Izvod funkcije

Sada ćemo posmatrati slučaj kada prirast argumenta teži nuli, tj. $\Delta x \rightarrow 0$, a to će se desiti kada $x \rightarrow x_0$. Tada će gore pomenuta tačka M da klizi po datoj krivoj $y = f(x)$ ka tački M_0 kao na slici 2.29, tj. tačka M će se približavati tački M_0 , a sekanta M_0M će se približavati tangenti te krive u tački M_0 . Taj granični slučaj ili limes, (ukoliko postoji), nazivamo izvodom funkcije f u tački M_0 i pišemo ga kao

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}. \quad (2.40)$$

Postupak računanja izvoda nazivamo deriviranje funkcije, pri kojem određujemo izvodnu funkciju

$$f'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (2.41)$$

koja se još naziva i izvod funkcije f po varijabli x . To je izvod prvog reda, dok vrijednost

$$f''(x) = \frac{d}{dx} \left[\frac{df(x)}{dx} \right] = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x} \quad (2.42)$$

nazivamo drugim izvodom ili izvodom drugog reda funkcije f .

Razmotrimo sada geometrijsko značenje prvog izvoda funkcije. Već smo rekli da posmatramo granični slučaj u kojem prirast argumenta teži nuli, tj. sekanta M_0M teži tangenti date krive u posmatranoj tački M_0 . Onda na osnovu jednačina (2.39) i (2.40) možemo

zaključiti da će izvod funkcije biti jednak tangensu ugla koji tangenta u nekoj proizvoljnoj tački M_0 zaklapa s pozitivnim dijelom x -ose (slika 2.30)

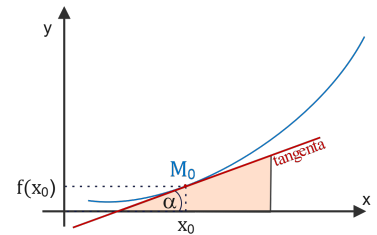
$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha. \quad (2.43)$$

Diferencijal funkcije

Iako je diferencijal, historijski gledano, definisan prije izvoda, ipak ćemo ga ovdje definisati koristeći izvod funkcije radi boljeg razumijevanja. Dakle, diferencijal funkcije $f(x)$ je jednak proizvodu izvoda funkcije i diferencijala argumenta

$$df(x) = f'(x) dx, \quad (2.44)$$

gdje je dx upravo diferencijal argumenta, odnosno diferencijal nezavisne varijable. Određivanje diferencijala funkcije nazivamo diferenciranjem.



Slika 2.30: Izvod funkcije je jednak tangensu ugla α .

Osnovna pravila deriviranja

Bez izvođenja dokaza navest ćemo osnovna pravila deriviranja, pomoću kojih ćemo moći izračunati izvod svake racionalne funkcije:

1. izvod stepena $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$,
2. izvod proizvoda s konstantom $\frac{d}{dx}[cf(x)] = c \frac{d}{dx}[f(x)]$,
3. izvod zbira i razlike $\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)] \pm \frac{d}{dx}[g(x)]$,
4. izvod proizvoda $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = \frac{d}{dx}[f(x)]g(x) + f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]$,
5. izvod količnika $\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{g(x) \frac{d}{dx}[f(x)] - f(x) \frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$.

U tabeli 2.1 su dati izvodi nekih elementarnih funkcija.

Tabela 2.1: Izvod nekih elementarnih funkcija.

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x	1
x^a	ax^{a-1}
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$

Primjer 1: Naći priraštaj i diferencijal brzine date jednačinom za jednoliko usporeno kretanje $v(t) = v_0 - at$, gdje su v_0 i a konstantne veličine.

Priraštaj funkcije je dat jednačinom (2.36), koja primijenjena na datu jednačinu za brzinu daje

$$\Delta v = [v_0 - a(t + \Delta t)] - [v_0 - at] \quad (2.45)$$

te nakon sređivanja dobijamo da je priraštaj brzine

$$\Delta v = -a\Delta t. \quad (2.46)$$

Priraštaj brzine je negativan, što znači da brzina opada, odnosno da je $v(t + \Delta t) < v(t)$, a to je u skladu s činjenicom da data formula opisuje usporeno kretanje.

Da bismo našli diferencijal brzine, potražimo najprije prvi izvod brzine po vremenu

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(v_0 - at) = \frac{d}{dt}(v_0) - \frac{d}{dt}(at) = 0 - a \frac{dt}{dt} = -a \quad (2.47)$$

te je prema definiciji (2.44) diferencijal brzine

$$dv = -a dt. \quad (2.48)$$

Primjer 2: Neka je jednačina stanja idealnog gasa data kao $p(T) = \frac{nR}{V}T$ gdje je p pritisak, T temperatura gasa, a ostale veličine su konstantne. Možemo reći da je pritisak funkcija temperature, te izraziti to kao $p = f(T)$ ili samo kao $p(T)$. Koristeći gore navedena pravila izvod pritiska po temperaturi će biti

$$p'(T) = \frac{d}{dT}[p(T)] = \frac{d}{dT} \left[\frac{nR}{V}T \right] = \frac{nR}{V} \frac{d}{dT}[T] = \frac{nR}{V}, \quad (2.49)$$

dok su priraštaj i diferencijal pritiska

$$\Delta p = \frac{nR}{V} \Delta T \quad \text{i} \quad dp = \frac{nR}{V} dT. \quad (2.50)$$

Izvod funkcije kroz primjer kretanja čestice

Razmotrimo primjer fizikalnog značenja izvoda na vektorskoj funkciji $\vec{r}(t)$, tako što ćemo objasniti pojam brzine čestice. Brzina čestice je vektor \vec{v} koji predstavlja promjenu položaja te čestice u vremenu. Neka je položaj čestice u bilo kojem trenutku t određen vektorom $\vec{r}(t)$ koji počinje u koordinatnom početku (ili u nekoj nepomičnoj tački O), a završava u tački u kojoj se nalazi posmatrana čestica.

Kako vrijeme teče, čestica mijenja svoj položaj duž neke krive od tačke M_0 do tačke M koje su prikazane na slici 2.31, te i vektor položaja mijenja svoj smjer i intenzitet od $\vec{r}(t_1)$ do $\vec{r}(t_2)$. Ako vektor \vec{r} možemo smatrati funkcijom $\vec{r}(t)$ onda je priraštaj funkcije

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1), \quad (2.51)$$

a priraštaj argumenta

$$\Delta t = t_2 - t_1. \quad (2.52)$$

Priraštaj $\Delta \vec{r}$ je također vektor koji je usmjeren od vrha vektora $\vec{r}(t_1)$ ka vrhu vektora $\vec{r}(t_2)$, tj. od tačke M_0 do tačke M . Srednja brzina promjene vektora položaja ili srednja brzina kretanja čestice data je kao

$$\vec{v}_{\text{sr}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2.53)$$

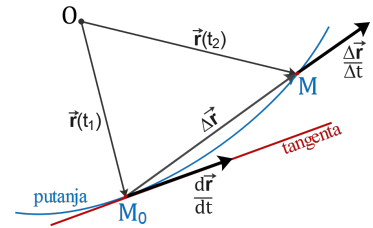
i predstavlja vektor koji ima pravac i smjer vektora $\Delta \vec{r}$, s tim da mu je intenzitet promijenjen za iznos $\frac{1}{\Delta t}$.

Ako sada uzmemo granični slučaj (limes) kada $\Delta t \rightarrow 0$, tačka M teži ka tački M_0 , onda tetiva M_0M teži tangenti u tački M_0 , a vektor $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ teži prema $\frac{d\vec{r}}{dt}$. Vektor $\frac{d\vec{r}}{dt}$ dakle, predstavlja vektor na tangenti krive po kojoj se kreće čestica (putanja na slici 2.31), a smjer mu je određen zadanim smjerom porasta varijable t uzduž krive.

Na osnovu gore rečenog, možemo reći da je trenutna brzina čestice jednaka vremenskom izvodu od \vec{r}

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (2.54)$$

ima pravac tangente na putanju u posmatranoj tački, smjer joj je određen zadanim smjerom porasta varijable t uzduž putanje, dok je $v = |\vec{v}|$ njen intenzitet. U narednim poglavljima knjige vrlo često



Slika 2.31: Kada $\Delta t \rightarrow 0$, vektor $\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ koji leži duž tetive, teži ka vektoru brzine $\frac{d\vec{r}}{dt}$ koji ima pravac tangente na putanju u tački M_0 .

ćemo koristiti izvod funkcije u definisanju različitih fizičkih veličina, te s toga treba imati u vidu njegovo matematičko, geometrijsko i fizikalno značenje.

Primjer 3: Kretanje tijela dato je jednačinom $x(t) = x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$. Naći ubrzanje tog tijela.

Ubrzanje je jednako drugom izvod funkcije $x(t)$ po vremenu,

$$a = \frac{d}{dt} \left(\frac{dx}{dt} \right), \quad (2.55)$$

što nakon primjene osnovnih pravila deriviranja na funkciju $x(t)$ i primjene izvoda elementarnih funkcija daje

$$\begin{aligned} a &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt} \left(x_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2 \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left[\frac{d}{dt}(x_0) + \frac{d}{dt}(v_0t) - \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}gt^2 \right) \right] = \\ &= \frac{d}{dt} \left(0 + v_0 - \frac{1}{2}g2t \right) = \frac{d}{dt} (v_0 - gt) = \\ &= \frac{d}{dt}(v_0) - \frac{d}{dt}(gt) = \\ &= 0 - g = -g. \end{aligned} \quad (2.56)$$

2.8 Elementi integralnog računa

Za razliku od diferencijalnog računa koji koristimo kako bismo odredili derivaciju neke zadane funkcije, integralni račun koristimo kako bismo iz već poznatih derivacija odredili o kojoj se funkciji radi. Zbog toga integralni račun često shvatamo kao inverznu operaciju diferencijalnog računa. S druge strane, derivacija se koristi za izračunavanje porasta ili padanja funkcije, dok se neodređeni integral koristi za izračunavanje površine ispod krivulja u graficima funkcija i zapremine tijela dobijenih rotacijom funkcija oko određene ose. To je posebno korisno u fizici, inženjerstvu i drugim naučnim disciplinama.

U cilju definisanja osnovnih pojmova integralnog računa kao što su neodređeni i određeni integral, moramo prvo definisati primitivnu funkciju. Za funkciju $F(x)$ kažemo da je primitivna funkcija funkcije $f(x)$ ako je

$$F'(x) = f(x). \quad (2.57)$$

Na primjer primitivna funkcija za funkciju $f(x) = 20x^4$ je funkcija $F(x) = 4x^5$ jer prema navedenim pravilima deriviranja vrijedi da

je $(4x^5)' = 4 \cdot 5x^{5-1} = 20x^4$. Također, smo vidjeli da je izvod zbiru jednak zbiru izvoda, kao i da je izvod konstante jednak nuli, što možemo zapisati kao

$$[F(X) + C]' = F'(x) \quad (2.58)$$

za bilo koje $C \in \mathbb{R}$. To nas vodi na zaključak da ako je neka funkcija $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$, onda je i funkcija $F(X) + C$ također primitivna funkcije te iste funkcije $f(x)$. Upravo primitivnu funkciju $F(X) + C$ zovemo neodređeni integral funkcije $f(x)$ i označavamo ga s $\int f(x) dx$, tj.

$$\int f(x) dx = F(X) + C. \quad (2.59)$$

gdje je C konstanta koja se obično naziva konstantom integracije i predstavlja sve moguće konstantne vrijednosti koje mogu biti dio neodređenog integrala (jer kao što smo već rekli, derivacija konstante uvijek daje nulu). Izračunati neodređeni integral funkcije $f(x)$ znači odrediti skup $F(x) + C$, tako da je $F(x)$ primitivna funkcija funkcije $f(x)$ i C proizvoljna konstanta. Određivanje integrala funkcije nazivamo integriranje.

Konstantu integracije određujemo iz početnih ili graničnih (rubnih) uslova. U mehanici se često kao nezavisna varijabla javlja vrijeme, te vrijednost neke funkcije (ili njene derivacije) u početnom trenutku predstavlja početni uslov. Također se konstanta integracije može odrediti i pomoću graničnih uslova, koji predstavljaju vrijednosti funkcija ili njihovih derivacija na granicama intervala ili na kraju domena.

Bez izvođenja ćemo navesti neke osobine neodređenog integrala:

1. $(\int f(x) dx)' = f(x),$
2. $\int df(x) = f(x) + C,$
3. $\int C \cdot f(x) dx = C \int f(x) dx,$
4. $\int [f(x) \pm g(x)] dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx.$

U tabeli 2.2 su dati neodređeni integrali nekih elementarnih funkcija.

Tabela 2.2: Neodređeni integrali nekih elementarnih funkcija.

$f(x)$	$\int f(x) dx$
1	$x + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
x^a	$\frac{x^{a+1}}{a+1} + C, (a \neq -1)$
$\ln x$	$x \ln x - x + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

Primjer 4: Izračunati integral $\int (2x^2 + 3x + 1) dx$. Prvo ćemo primijeniti osobinu da je integral zbira jednak zbiru integrala, te integrirati svaki pojedini član funkcije:

$$\int 2x^2 dx = \frac{2}{3}x^3 + C_1$$

$$\int 3x dx = \frac{3}{2}x^2 + C_2$$

$$\int 1 dx = x + C_3$$

pri čemu smo koristili pravilo $\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$.

Sada ćemo sve dobijene rezultate sabrati kako bismo dobili konačan integral:

$$\int (2x^2 + 3x + 1) dx = \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

pri čemu smo konstante C_1 , C_2 i C_3 sabrali u jednu konstantu C , jer u neodređenom integralu postoji proizvoljna konstanta koju možemo dodati na kraju integriranja.

Primjer 5: Neka na tijelo djeluje sila otpora proporcionalna brzini $F_{\text{ot}} = -bv$ i neka je u početnom trenutku $t = 0$ brzina tijela v_0 , ili kraće zapisano $v(0) = v_0$. Naći brzinu tijela kao funkciju vremena.

Drugi Newtonov zakon će u ovom slučaju glasiti

$$ma = F_{\text{ot}} = -bv. \quad (2.60)$$

Ubrzanje tijela po definiciji je jednako prvom izvodu brzine po vremenu te gornja jednačina postaje

$$m \frac{dv}{dt} = -bv. \quad (2.61)$$

Sada je potrebno da razdvojimo promjenjive kao

$$\frac{dv}{v} = -\frac{b}{m}dt, \quad (2.62)$$

a zatim integriramo gornju jednačinu

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \frac{b}{m}dt. \quad (2.63)$$

Primjenom integrala iz tabele 2.2 dobijamo

$$\ln v = -\frac{b}{m}t + C, \quad (2.64)$$

gdje je C integraciona konstanta koju ćemo dobiti iz datog početnog uslova, tako što u gornju jednačinu uvrstimo da je $t = 0$ i $v = v_0$

$$\ln v_0 = -\frac{b}{m} \cdot 0 + C = C. \quad (2.65)$$

Dakle, brzina tijela koje se kreće pod djelovanjem sile oblika $-bv$ je određena izrazom

$$\ln v = -\frac{b}{m}t + \ln v_0, \quad (2.66)$$

odnosno

$$\ln \frac{v}{v_0} = -\frac{b}{m}t, \quad (2.67)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je razlika logaritama dvije funkcije jednaka logaritmu količnika tih funkcija. Iz prethodnog izraza konačno dobijamo

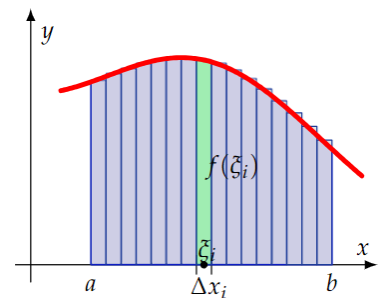
$$v(t) = v_0 e^{-\frac{b}{m}t}. \quad (2.68)$$

Razmotrimo sada neku proizvoljnu funkciju $f(x)$ koja je definisana na intervalu $[a, b]$ (slika 2.32). Podijelimo taj interval na n jednakih dijelova tačkama $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$, pri čemu je širina svakog intervala $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Uzmimo sada neku tačku $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$ i posmatrajmo sumu $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$. Ako postoji granična vrijednost te sume (limes) kada $n \rightarrow \infty$ i ako je ona konačna, onda za bilo kakvu podjelu intervala $[a, b]$, limes te sume zovemo određenim integralom funkcije $f(x)$ u granicama od a do b i zapisujemo kao

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \quad (2.69)$$

Kako bismo izračunali vrijednost nekog određenog integrala koristimo Newton-Leibnitzovu formulu, koja predstavlja fundamentalni teorem integralnog računa za izračun određenog integrala:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$



Slika 2.32: Interval $[a, b]$, na kojem je funkcija $f(x)$ definisana, podijeljen je na n dijelova širine Δx_i . Vrijednost funkcije u tački ξ_i je $f(\xi_i)$.

Dakle, pri integriranju potrebno je naći primitivnu funkciju kao u slučaju neodređenog integrala, zatim izračunati vrijednosti te funkcije na gornjoj granici ($F(b)$) i donjoj granici ($F(a)$) te ih oduzeti.

Neke osnovne osobine određenih integrala su:

1. $\int_a^a f(x)dx = 0,$
2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$
3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

S obzirom da ovdje nećemo detaljno navoditi pojedinačne tehnike za računanje integrala, bitno je napomenuti da ne postoje univerzalna pravila za računanje svih integrala, jer to zavisi od konkretne funkcije koja se integrira. Zavisno od situacije, možda će biti potrebno primijeniti različite tehnike kako bismo riješili neke zadate integrale.

Primjer 6: Moment inercije se definiše kao $I = \int r^2 dm$. Izvesti formulu za moment inercije homogenog diska čija je površinska gustoća mase $\sigma = \frac{m}{S}$, a poluprečnik baze R .

Iz površinske gustoće mase izrazimo masu diska kao $m = \sigma S$ te nađimo diferencijal dm kao

$$dm = (\sigma S)' dS = \sigma dS. \quad (2.70)$$

Površina elementa mase iznosi $dS = (r^2\pi)' dr = 2\pi r dr$ te diferencijal mase postaje

$$dm = \sigma 2\pi r dr. \quad (2.71)$$

Sada ćemo dobijeni diferencijal uvrstiti u izraz za moment inercije te dobiti

$$I = \int_0^R r^2 \sigma 2\pi r dr. \quad (2.72)$$

Konstante integracije možemo prebaciti ispred integrala tako da prethodni izraz postaje

$$I = 2\sigma\pi \int_0^R r^3 dr. \quad (2.73)$$

Primjenom odgovarajuće formule iz tabele 2.2 i primjenom fundamentalnog teorema integralnog računa za izračun određenog integrala dobijamo

$$I = 2\sigma\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{m}{S} \pi \frac{R^4}{2} = \frac{m}{R^2\pi} \pi \frac{R^4}{2} = \frac{1}{2} m R^2. \quad (2.74)$$

Primjer 7: Izračunati određeni integral $\int_0^2 (2x^2 + 3x + 1) dx$.

Postupak rješavanja datog integrala je sljedeći: prvo ćemo primijeniti osobinu da je integral zbira jednak zbiru integrala, integrirati svaki pojedini član funkcije, primijeniti fundamentalni teorem integralnog računa za izračun određenog integrala, izračunati vrijednosti na gornjoj granici ($x = 2$) i donjoj granici ($x = 0$) i dobijene vrijednosti oduzeti:

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x^2 + 3x + 1) dx &= \int_0^2 2x^2 dx + \int_0^2 3x dx + \int_0^2 1 dx = \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 \right]_0^2 + \left[\frac{3}{2}x^2 \right]_0^2 + [x]_0^2 = \left[\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x \right]_0^2 = \\ &= \left[\frac{2}{3}(2)^3 + \frac{3}{2}(2)^2 + 2 \right] - \left[\frac{2}{3}(0)^3 + \frac{3}{2}(0)^2 + 0 \right] = \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

Dakle, vrijednost određenog integrala je

$$\int_0^2 (2x^2 + 3x + 1) dx = \frac{28}{3}$$

Primjer 8: Neka je mehanički rad koji izvrši neka sila jednak $A = \int F(r) dr$. Izvesti izraz za rad gravitacione sile na pomjeranju tijela iz položaja r_1 u položaj r_2 .

Intenzitet gravitacione sile je određen relacijom $F(r) = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}$ te je rad te sile

$$A = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} dr. \quad (2.75)$$

Gornji integral riješit ćemo koristeći formule date u tabeli 2.2:

$$A = \gamma m_1 m_2 \int_{r_1}^{r_2} r^{-2} dr = \quad (2.76)$$

$$= \left[\gamma m_1 m_2 \frac{r^{-2+1}}{(-2+1)} \right]_{r_1}^{r_2} = \quad (2.77)$$

$$= \left[-\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r} \right]_{r_1}^{r_2} = \quad (2.78)$$

$$= \left(-\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r_2} \right) - \left(-\gamma m_1 m_2 \frac{1}{r_1} \right) = \quad (2.79)$$

$$= \gamma m_1 m_2 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right). \quad (2.80)$$

KRETANJE DUŽ PRAVCA

3.1	Opisivanje kretanja	41
3.2	Položaj tijela, put i pomak	44
3.3	Srednja i trenutna brzina	46
3.4	Ubrzanje	48
3.5	Ravnomjerno kretanje	48
3.6	Jednakoubrzano kretanje	49
3.7	Riješeni zadaci	51
3.8	Zadaci za vježbu	71

Kretanje je pojava koja se vjerovatno najviše proučava u fizici i nauci općenito. Postoje razni oblici kretanja u prirodi kao što su npr. pravolinijsko, kružno, oscilatorno itd. Dio mehanike koji se bavi proučavanjem kretanja nekog tijela bez da se razmatra uzrok tog kretanja naziva se kinematika. U kinematici se često koristi fizikalni model materijalne tačke (vidi poglavlje 1.2 Fizikalni modeli). U okviru ovog modela kretanje svakog tijela se predstavlja kretanjem jedne tačke ukoliko su dimenzije tog tijela zanemarive u odnosu na prostor u kojem se ono kreće. Tako se, npr. padanje kapi kiše, kretanje tramvaja od jedne do druge stanice ili kretanje Zemlje oko Sunca može modelirati kretanjem materijalne tačke. U ovom poglavlju ćemo prvo definisati veličine koje opisuju kretanje tijela, a zatim razmatrati specijalan slučaj kretanja duž jednog pravca.

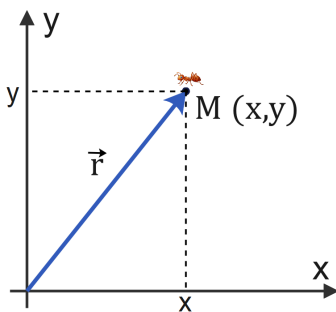
3.1 Opisivanje kretanja

Ukoliko posmatrano tijelo mijenja svoj položaj u odnosu na neko drugo, referentno tijelo, onda kažemo da se ono kreće. U prirodi

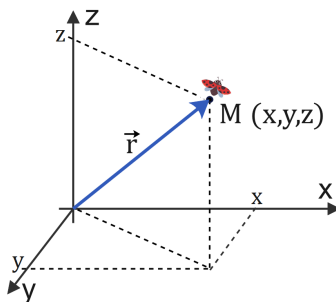
postoje različiti oblici kretanja kako makroskopskih tijela, npr. lopta, Sunce itd., tako i mikroskopskih kao što su elektron, molekula itd. Pri analizi svakog kretanja postavljaju se dva ključna pitanja: kako i na koji način opisati kretanje i kako objasniti kretanje odnosno uzrok kretanja. Upravo ćemo se u ovom i narednom poglavlju fokusirati na odgovor na prvo pitanje odnosno razmatrati problem opisivanja kretanja.

Pri proučavanju svake fizikalne pojave nastojimo uočiti pravilnosti na osnovu kojih onda možemo formulirati zakone fizike. Da bi analizirali bilo kakve pravilnosti u opisivanje neke fizikalne pojave, neophodno je kvantificirati tu pojavu, tj. definisati skup mjerljivih fizikalnih veličina kojima možemo opisati datu pojavu. Tako npr. nakon što su ljudi uočili pravilnosti u kretanju nebeskih tijela, kao što je Mjesec, nastojali su predvidjeti kada će se kretanje odnosno pojavljivanje Mjeseca ponoviti, te su pojavu pojavljivanja Mjeseca kvantificirali vremenskim periodom.

Postavlja se sada pitanje koje to fizikalne veličine opisuju kretanje bilo kojeg tijela. Obzirom da se prilikom kretanja mijenja položaj tijela, logično je definisati fizikalnu veličinu kojom će se mjeriti odnosno određivati položaj. Posmatrajmo kretanje nekog tijela u ravni, npr. kretanje mrava kao što je prikazano na slici 3.1. Položaj tijela koje se kreće u ravni možemo u datom trenutku opisati preko x i y -koordinate položaja, gdje smo prethodno izabrali dvodimenzionalni koordinatni sistem i njegovo ishodište vezali za referentno tijelo. Ako se tijelo kreće, onda će se i koordinate položaja mijenjati u vremenu. Položaj tijela možemo odrediti i vektorom koji spaja referentno tijelo (ishodište koordinatnog sistema) i tačku u kojoj se nalazi tijelo čije kretanje posmatramo (vektor \vec{r} na slici 3.1). Taj vektor se naziva vektor položaja i ima komponente x i y koje se podudaraju s koordinatama položaja tijela.



Slika 3.1: Određivanje položaja tijela koje se kreće u ravni.



Slika 3.2: Određivanje položaja tijela koje se kreće u prostoru.

Ukoliko se neko tijelo kreće u prostoru, kao što je prikazano na slici 3.2, onda je za određivanje položaja neophodno poznavati x , y i z -koordinatu. Alternativno, položaj se opet može odrediti vektorom položaja \vec{r} koji sada ima x , y i z -komponentu. Koordinate položaja i komponente vektora položaja se podudaraju pa ćemo položaj tijela određivati fizikalnom veličinom koja se naziva vektor položaja.

Vektor položaja je određen sa svoje tri komponente x , y i z . Ukoliko se kretanje vrši duž jednog pravca, npr. duž x -ose koordinatnog sistema onda se y i z -komponenta vektora položaja neće mijenjati u vremenu pa je promjena položaja tijela određena samo x -komponentom vektora položaja. Slično, ako se kretanje vrši u ravni, npr. xy -ravni, onda se z -komponenta vektora položaja ne mijenja, pa je promjena položaja određena s x odnosno y -komponentom vektora položaja.

Vektor položaja nije jedina veličina kojom je opisano kretanje tijela. Pored ovog vektora, kretanje svakog tijela je određeno vektorom brzine i vektorom ubrzanja. Ove veličine će biti definisane postepeno u ovom i narednom poglavlju. Uglavnom, možemo zaključiti da je kretanje tijela moguće opisati ako znamo vektor položaja, vektor brzine i vektor ubrzanja u svakom trenutku. Postoji više načina kako ove tri vektorske veličine možemo predstaviti. Način na koji se predstavlja kretanje nekog tijela najčešće se naziva reprezentacija. U opisivanju kretanja tijela najčešće se koriste

- verbalna,
- slikovna,
- tabelarna,
- grafička i
- algebarska reprezentacija.

Svaka od ovih reprezentacija ima svoje prednosti ali i nedostatke. U okviru verbalne reprezentacije nastojimo kretanje tijela opisati riječima, npr. kažemo da je tijelo pušteno da pada s visine 10 metara i da se tokom padanja njegova visina smanjuje, a intenzitet brzine povećava, dok mu se ubrzanje ne mijenja. Nedostatak ove reprezentacije je što ne možemo odrediti vrijednosti položaja, brzine i ubrzanja već samo reći kako se oni mijenjaju. U slikovnoj reprezentaciji nastojimo kretanje prikazati pomoću tzv. dijagrama kretanja. Naime, položaj tijela je u pravilnim vremenskim trenucima moguće približno prikazati na skici, odnosno ilustraciji, pa možemo dobiti određene informacije o putanji tijela, njegovoj brzini ili ubrzanju. Tako je na slici 3.3 prikazan položaj košarkaške lopte u pravilnim vremenskim trenucima, pa možemo steći dojam o putanji tijela i promjeni njegovog položaja. Tabelarnom reprezentacijom prikazujemo komponente vektora položaja, brzine i/ili ubrzanja u tačno određenim vremenskim trenucima. Grafičkom reprezentacijom nastojimo opisati kretanje tijela tako što ćemo promjenu položaja, brzine i ubrzanja grafički prikazati kao funkciju vremena. Na ovaj način najbolje možemo predložiti kako se mijenjaju ove veličine u nekom vremenskom intervalu. Pored gore nabrojanih, najčešće se ipak koristi algebarska reprezentacija u okviru koje algebarskim relacijama nastojimo prikazati vektor položaja, vektor brzine i vektor ubrzanja kao funkciju vremena, tj. nastojimo naći funkcije $\vec{r}(t)$, $\vec{v}(t)$ i $\vec{a}(t)$ kojima će biti opisano kretanje. Na ovaj način jednoznačno možemo odrediti položaj, brzinu i ubrzanje u svakom trenutku, pa je stoga ova reprezentacija sveobuhvatna.



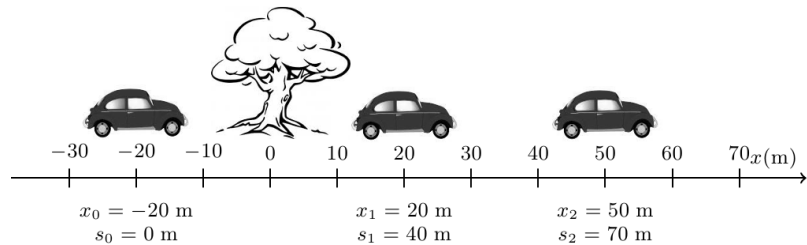
Slika 3.3: Određivanje položaja tijela koje se kreće u ravni.

Obično se kretanja jednog te istog tijela u različitim situacijama predstavlja kroz više reprezentacija. Nerijetko imamo situaciju da je kretanje nekog tijela opisano verbalno (npr. padanje kamena), a onda pravimo dijagram kretanja, te nastojimo naći relacije koje nam daju položaj, brzinu i ubrzanje kao funkciju vremena. Kako bi vizualizirali promjenu ovih veličina, onda obično grafički prikazujemo njihovu promjenu. Prema tome, u opisivanju jednostavnog kretanja kao što je padanje tijela koristimo verbalnu, slikovnu, algebarsku i grafičku reprezentaciju.

3.2 Položaj tijela, put i pomak

Nakon što smo vidjeli kako i na koji način možemo prikazati kretanje tijela, u ostatku ovog poglavlja ćemo analizirati specijalan slučaj kretanja, a to je kretanje duž jednog pravca. Za opisivanje kretanja će nam biti onda neophodna samo jedna komponenta vektora položaja, vektora brzine i vektora ubrzanja. Obično ćemo uzimati da je to x -komponenta.

Slika 3.4: Određivanje položaja i pređenog puta pri kretanju automobila duž jednog pravca.



Kretanje nekog tijela odnosno materijalne tačke može se definisati kao promjena položaja tog tijela u odnosu na neko drugo, referentno tijelo. Prvi korak pri opisivanju svakog kretanja jeste izbor referentnog tijela, a da bismo mogli kvantitativno opisati kretanje materijalne tačke neophodno je definisati odgovarajuće fizikalne veličine. Posmatrajmo sada kretanje automobila duž jednog pravca (slika 3.4). Neka je pri tome referentno tijelo stablo koje se nalazi pored ceste. Dakle, kretanje automobila opisujemo promjenom njegovog položaja u odnosu na stablo. Kako je dužina pravca po kojem se automobil kreće znatno veća od samih dimenzija automobila, sam automobil možemo modelirati kao materijalnu tačku.

Prva u nizu fizikalnih veličina kojim se opisuje kretanje materijalne tačke jeste njen položaj u odnosu na referentno tijelo. Da bi se on mogao jednoznačno odrediti praksa je da se koristi koordinatni sistem, čije je ishodište vezano za referentno tijelo. Koordinatni sistem

vezan za referentno tijelo naziva se sistem referencije ili referentni sistem. Ako se kretanje vrši samo duž jednog pravca onda je dovoljna samo jedna osa koordinatnog sistema za opisivanje kretanja, u našem slučaju x -osa. Kretanje automobila počnemo posmatrati u trenutku $t_0 = 0$. Pretpostavimo da se u ovom trenutku automobil nalazi u tački $x_0 = -20$ m i da se kreće udesno. Položaj tijela u trenutku $t = 0$ naziva se početni položaj. Neka je u nekom kasnijem trenutku t_1 položaj automobila $x_1 = 20$ m, dok je u trenutku t_2 dat s $x_2 = 50$ m. Očito da položaj automobila u odnosu na referentno tijelo zavisi od vremenskog trenutka kada ga određujemo, pa zaključujemo da je položaj tijela funkcija vremena, tj. $x = x(t)$. Poznavanje ove funkcije neophodno je za opisivanje kretanja.

Druga važna veličina kojom možemo okarakterizirati kretanje čestice je pomak. Pomak se definiše kao promjena položaja čestice u konačnom vremenskom intervalu, odnosno

$$\Delta x = x_k - x_p, \quad (3.1)$$

gdje su x_p i x_k početni i krajnji položaj tijela, respektivno. Tako je npr. naš automobil od trenutka t_1 do trenutka t_2 napravio pomak od $\Delta x = 50 \text{ m} - 20 \text{ m} = 30 \text{ m}$, dok je pomak automobila od trenutka t_0 do t_2 jednak $\Delta x = 50 \text{ m} - (-20 \text{ m}) = 70 \text{ m}$. Razmatrajući prethodnu relaciju možemo zaključiti da pomak Δx može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti, ali može biti jednak i nuli. Dakle, pomak će u našem primjeru biti pozitivan ako se konačna pozicija nalazi desno od početne pozicije objekta ($x_k > x_p$), tj. tijelo se pomjeri u pozitivnom smjeru x -ose, a negativna ako se u odabranom jednodimenzionalnom koordinatnom sistemu, konačni položaj tijela nalazi lijevo od početnog položaja ($x_k < x_p$), tj. tijelo se pomjeri u suprotnom smjeru u odnosu na smjer x -ose. Ukoliko se automobil, u razmatranom primjeru, u nekom vremenskom trenutku t_3 vrati u početni položaj $x_3 = x_0 = -20$ m onda je njegov pomak od trenutka t_0 do trenutka t_3 jednak nuli. Dakle, automobil je tokom svog kretanja mijenjao položaj, pri tome je prešao put različit od nule, ali je njegov pomak jednak nuli, tj. nije napravio nikakav pomak jer se vratio u početni položaj. Ovdje treba naglasiti da postoji bitna razlika između položaja, pomaka i pređenog puta. Naime iz navedenog primjera vidimo da je u trenutku t_3 položaj automobila $x(t_3) = -20$ m, a ukupan pomak (pomak u odnosu na položaj u početnom trenutku t_0) $\Delta x = 0$ m. Ako pretpostavimo da se automobil kretao od tačke $x_0 = -20$ m do tačke $x_2 = 50$ m i nazad onda je pređeni put u trenutku t_3 jednak $s(t_3) = 140$ m i vidimo da je različit i od položaja tijela i od pomaka. Položaj tijela, pomak i pređeni put se podudaraju samo ako se kretanje počne posmatrati iz ishodišta koordinatnog sistema, tj. ako je

Napomena: Strogo govoreći, sistem referencije je pored koordinatnog sistema opremljen i satom.

$x_0 = 0$, i ako se kretanje vrši samo u pozitivnom smjeru x -ose.

3.3 Srednja i trenutna brzina

Da bismo definisali i druge fizikalne veličine koje opisuju kretanje materijalne tačke razmotrićemo ponovo primjer kretanja automobila u odnosu na stablo. Pretpostavimo da su vremski trenuci t_0 , t_1 i t_2 , u kojima je određen položaj automobila, dati s $t_0 = 0$, $t_1 = 5$ s i $t_2 = 10$ s. Automobil je u prvih 5 s svog kretanja napravio pomak od 40 m, dok je narednih 5 s pomak iznosio 30 m. Očito da automobil u jednakim vremenskim intervalima pravi različit pomak, pa zaključujemo da se u ovim intervalima kretao na različit način. Uobičajen način da se uporede ova dva različita kretanja jeste da se pomak podijeli s vremenskim intervalom u kome je on napravljen. Ovaj odnos se naziva srednja brzina i definiše kao

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_k - x_p}{t_k - t_p}. \quad (3.2)$$

Jedinica za brzinu je m s^{-1} .

Osim brojne vrijednosti, ova veličina nam određuje i smjer kretanja tijela (pravac je već određen pravcem x -ose). U našem razmatranju, ako se tijelo kreće s lijeva nadesno, onda je $x_k > x_p$, pa je $\bar{v}_x > 0$. U suprotnome, ako se tijelo kreće s desna na lijevo onda je $x_p > x_k$, a odavde je $\bar{v}_x < 0$. Prema tome, ukoliko je \bar{v}_x pozitivno, kretanje se vrši u pozitivnom smjeru x -ose, a ako je \bar{v}_x negativno, kretanje se vrši u suprotnom smjeru.

Iako je srednja brzina korisna veličina za opis kretanja tijela jer nam odgovara na pitanje koliko se u prosjeku ono brzo kreće, ova veličina nekada može dati pogrešnu predstavu o kretanju tijela. Pretpostavimo da smo automobilom prešli pravolinijsku dionicu dugu 130 km za dva sata. Jednostavnim korištenjem relacije (3.2), dolazimo do zaključka da je srednja brzina kretanja automobila 65 km h^{-1} . Iako smo se tokom našeg putovanja ovom brzinom kretali u samo par navrata, srednja brzina kretanja je data s tom vrijednošću. Primjera radi, mogli smo se veći dio puta kretati brzinom 90 km h^{-1} , ali usljed nekih zastoja, kada je brzina bila nula, vrijednost srednje brzine je samo 65 km h^{-1} . Dakle, informacija o brzini tijela je pouzdanija što se za određivanje srednje brzine tijela koristi kraći vremenski interval. Još preciznije bi bilo kada bismo u svakom momentu mogli odrediti, odnosno poznavati, brzinu kretanja našeg automobila. Upravo zbog toga se uvodi veličina koju nazivamo trenutna brzina, te se definiše

kao

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Kao i srednja brzina, i trenutna brzina može poprimiti pozitivne i negativne vrijednosti, te može biti i nula. Oznaka "lim" u relaciji (3.3) označava da tražimo vrijednost trenutne brzine tako što uzimamo sve kraći i kraći vremenski interval Δt koji se pritom približava nuli. Neka je položaj tijela u trenutku t određen s $x(t)$, a u trenutku $t + \Delta t$ s $x(t + \Delta t)$. Pomak koji napravi tijelo između ova dva trenutka je $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t)$, pa izraz 3.3 postaje

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}. \quad (3.4)$$

gdje smo iskoristili definiciju prvog izvoda funkcije (vidi poglavlje 2). Prema tome, trenutna brzina tijela jednaka je prvom izvodu položaja tijela po vremenu. Naglasimo da kada je brzina kretanja tijela tokom nekog vremenskog intervala konstantna, tj. kada se brzina ne mijenja tokom vremena, tada je srednja brzina (3.2) unutar bilo kog izabranog vremenskog intervala jednaka trenutnoj brzini (3.3) u bilo kom trenutku. Trenutna brzina je funkcija vremena, tj. $v = v(t)$.

Iako se ne radi o pravolinijskom kretanju, pretpostavimo da želimo opisati kretanje jednog atletičara na utrci od 400 metara (dužina atletske staze je 400 metara pa su za ovu disciplinu start i cilj u istoj tački). Bez obzira za koje vrijeme atletičar pretrči stazu od 400 metara njegov pomak će uvijek biti jednak nuli pa je i njegova srednja brzina jednaka nuli. Iz ovog primjera vidimo da srednja brzina definisana kao odnos pomaka i vremenskog intervala u kojem se taj pomak desi ne opisuje uvijek kretanje adekvatno. Stoga je u ovom slučaju pogodnije određivati srednju putnu brzinu. Ona se definiše kao odnos pređenog puta i vremenskog intervala u kojem je taj put pređen, tj. kao

$$\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Ukoliko je pređeni put funkcija vremena, moguće je definisati i trenutnu putnu brzinu kao

$$v = \frac{ds}{dt}. \quad (3.6)$$

Ako se tijelo kreće po pravcu u pozitivnom smjeru x -ose onda se njegova trenutna brzina v_x i trenutna putna brzina v podudaraju.

Napomena: U engleskom jeziku se koriste tri različite riječi koje se u našem jeziku prevode kao brzina, ali imaju različita značenja u kontekstu fizike. To su *velocity*, *speed* i *rate* i koriste se u sljedećem značenju:

- *velocity* se koristi kada se govori o vektoru brzine \vec{v} ,
- *speed* predstavlja intenzitet brzine v ,
- *rate* se može prevesti kao stopa promjene i koristi se za označavanje promjene neke veličine u vremenu $\frac{d}{dt}$.

3.4 Ubrzanje

Definišimo sada i treću fizikalnu veličinu kojom opisujemo kretanje tijela, a to je ubrzanje ili akceleracija. Ukoliko se brzina materijalne tačke ili nekog tijela mijenja tokom vremena kažemo da se to tijelo kreće ubrzano ili usporeno. Ova veličina nam govori na koji način se mijenja brzina kretanja. Srednja vrijednost ubrzanja je definisana kao promjena brzine tijela podijeljena s vremenskim intervalom u kojem se ta promjena desila. Matematički to možemo iskazati kao

$$\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_{x_k} - v_{x_p}}{t_k - t_p}, \quad (3.7)$$

pri čemu su s v_{x_p} i v_{x_k} označene vrijednosti brzine u početnom i krajnjem trenutku, respektivno. Jedinica za ubrzanje je m s^{-2} .

Ako posmatramo kretanje po jednom pravcu, onda slično kao i kod pomaka i brzine, ubrzanje (tj. x -komponenta vektora¹ ubrzanja) može biti pozitivno, negativno ili jednako nuli. Ako je brzina u konačnom trenutku v_{x_k} veća nego brzina u početnom v_{x_p} onda je komponenta vektora ubrzanja pozitivna i kažemo da se tijelo kreće ubrzano. Ako je, pak $v_{x_k} < v_{x_p}$ onda je komponenta vektora ubrzanja negativna i kretanje je usporeno.

Slično kao za brzinu, možemo definisati trenutnu vrijednost ubrzanja kao

$$a_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{dv_x}{dt}. \quad (3.8)$$

Komponenta trenutnog ubrzanja predstavlja prvi izvod odgovarajuće komponente brzine tijela po vremenu. Ako se radi o kretanju s konstantnim ubrzanjem onda se srednja vrijednost ubrzanja (3.7) poklapa s trenutnim ubrzanjem (3.8).

3.5 Ravnomjerno kretanje

Da bismo mogli opisati kretanje bilo kojeg tijela ili materijalne tačke neophodno je u svakom trenutku poznavati njegov položaj, njegovu brzinu i njegovo ubrzanje. Ravnomjerno pravolinijsko kretanje je svako kretanje materijalne tačke čija je brzina tokom vremena konstantna. Prema, tome kod ovog vida kretanja brzina je određena relacijom

$$v_x(t) = v_{0x} = \text{const.} \quad (3.9)$$

Pošto se brzina tokom kretanja ne mijenja, onda je srednja vrijednost brzine jednaka trenutnoj. Da bismo odredili položaj tijela kao funkci-

¹ Komponenta vektora se dobija projekcijom vektora na datu osu koordinatnog sistema.

ju vremena krenućemo od definicije srednje brzine

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_k - x_p}{t_k - t_p}. \quad (3.10)$$

Neka je početni trenutak jednak nuli i neka je položaj tijela u tom trenutku jednak $x_p = x_0$. Položaj tijela u krajnjem trenutku je prema prethodnoj relaciji određen s

$$x_k = x_0 + \bar{v}_x \cdot t_k. \quad (3.11)$$

Ovo vrijedi za bilo koji krajnji trenutak t_k pa možemo u opštem slučaju pisati položaj tijela kao funkciju vremena na sljedeći način

$$x(t) = x_0 + v_x \cdot t, \quad (3.12)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je trenutna brzina kod ovog kretanja jednaka srednjoj.

3.6 Jednakubrzano kretanje

Razmotrimo kretanje tijela čije je ubrzanje konstantno. Ako je ubrzanje konstantno i različito od nule, onda se takvo kretanje naziva jednakoubrzanim (jednoliko ubrzano), odnosno jednakosporenim (jednoliko usporeno), a ako je ubrzanje jednako nuli kretanje se svodi na ravnomjerno. Kao što smo naglasili u prethodnom odjeljku, kretanje u kojemu je ubrzanje konstantno je takvo, da je srednja vrijednost ubrzanja jednaka njenoj trenutnoj vrijednosti u bilo kom trenutku [vidi relacije (3.7) i (3.8)].

Nađimo sada brzinu tijela kao funkciju vremena. Poći ćemo od izraza za srednje ubrzanje tijela. Neka je početni trenutak mjerenja $t_p = 0$, a početna brzinu u tom trenutku $v_p = v_{0x}$. Na osnovu definicione relacije (3.7), vrijedi

$$\bar{a}_x = a_x = \frac{v_{x_k} - v_{0x}}{t_k - 0}, \quad (3.13)$$

odnosno

$$v_{x_k} = v_{0x} + a_x t_k. \quad (3.14)$$

Ovo vrijedi za bilo koji proizvoljan konačni trenutak pa možemo pisati

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t. \quad (3.15)$$

Relacija (3.15) daje vrijednost brzine materijalne tačke ili tijela u bilo kom trenutku t , ako je ubrzanje konstantno. Ako se kretanje vrši

samo duž jednog pravca onda ubrzanje tijela (komponenta vektora ubrzanja) a_x može imati pozitivnu ili negativnu vrijednost intenziteta ubrzanja, tj $a_x = \pm a$, pa se prethodna relacija može pisati kao

$$v_x(t) = v_{0x} \pm at, \quad (3.16)$$

zavisno da li se radi o ubrzanom ili usporenom kretanju.

Potražimo položaj tijela, koje se kreće ubrzano, kao funkciju vremena. Iz definicije srednje vrijednosti brzine slijedi

$$\bar{v}_x = \frac{x - x_0}{t - 0}, \quad (3.17)$$

a odatle je

$$x - x_0 = \bar{v}_x t. \quad (3.18)$$

Ako je ubrzanje tijela konstantno, onda je srednja vrijednost brzine jednaka srednjoj aritmetičkoj vrijednosti između početne i krajnje brzine, tj.

$$\bar{v}_x = \frac{v_{0x} + v_x}{2}. \quad (3.19)$$

Iz jednačina (3.19) i (3.18) dobijamo

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x)t. \quad (3.20)$$

Uvrštavanjem relacije za brzinu (3.15) u prethodnu jednačini dobijamo

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2. \quad (3.21)$$

Ova relacija nam daje položaj čestice kao funkciju vremena t i vrijedi u slučaju kada je ubrzanje konstantno tokom vremena.

Izvedimo još relaciju koja povezuje brzinu v_x s ubrzanjem a_x i položajem tijela x . Iz relacije (3.15) izrazimo vrijeme t kao

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \quad (3.22)$$

i uvrstimo u izraz (3.20) u svrhu eliminiranja vremena t , tako da dobijemo

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) \left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right). \quad (3.23)$$

Uzimajući u obzir da je $(v_x + v_{0x})(v_x - v_{0x}) = v_x^2 - v_{0x}^2$ prethodna relacija postaje

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}, \quad (3.24)$$

odnosno

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (3.25)$$

Posljednji izraz nam daje vezu između početne i konačne brzine, ubrzanja i pomaka tijela.

3.7 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Automobil koji putuje konstantnom brzinom 20m s^{-1} prolazi kroz raskrnicu u trenutku $t = 0\text{s}$. Nakon 5s drugi automobil prolazi kroz istu raskrnicu krećući se brzinom 30m s^{-1} .

- Odrediti kada će drugi automobil preći prvi.
- Na kojoj će se udaljenosti od raskrsnice dogoditi preticanje?
- Gdje se nalazi prvi automobil u trenutku kada drugi prolazi kroz raskrnicu?
- Grafički prikazati funkciju $x_1(t)$ i $x_2(t)$ za oba automobila, te grafički odrediti mjesto i vrijeme susreta.

Rješenje:

a) U ovom zadatku razmatramo kretanje dva tijela. Ukoliko je kretanje jednog tijela nezavisno od kretanja drugog tijela, onda je pogodno napisati jednačine koje opisuju kretanje svakog tijela ponaosob. U ovom zadatku oba tijela se kreću ravnomjerno pa možemo pisati

$$x_1(t) = x_{01} + v_{x1}t, \quad x_2(t) = x_{02} + v_{x2}t. \quad (1.1)$$

Ishodište referentnog sistema ćemo vezati za raskrnicu i izabrati da početni trenutak odgovara prolasku prvog automobila kroz raskrnicu. Tada je $x_{01} = x_1(t = 0) = 0$. Početni položaj drugog automobila možemo dobiti iz uslova da je njegov položaj u trenutku $t_1 = 5\text{s}$ jednak nula, jer u tom trenutku on prolazi kroz raskrnicu. Iz ovog uslova imamo

$$x_2(t_1) = 0 \rightarrow x_2(t_1) = x_{02} + v_{x2} \cdot t_1 = 0, \quad (1.2)$$

$$x_{02} = -30\text{m s}^{-1} \cdot 5\text{s} = -150\text{m}. \quad (1.3)$$

Trenutak susreta t_s možemo odrediti iz uslova da je položaj jednog automobila u trenutku susreta jednak položaju drugog automobila u istom trenutku, tj.

$$x_1(t_s) = x_2(t_s), \quad (1.4)$$

odnosno

$$v_{x1}t_s = x_{02} + v_{x2}t_s. \quad (1.5)$$

Iz prethodne relacije dobijemo

$$t_s = \frac{x_{02}}{v_{x1} - v_{x2}} = \frac{-150\text{m}}{20\text{m s}^{-1} - 30\text{m s}^{-1}} = 15\text{s}. \quad (1.6)$$

b) Mjesto na kojem će se dogoditi preticanje je položaj u kojem se nalaze oba automobila u trenutku susreta. Taj položaj je

$$x_1(t_s) = v_{x_1} t_s = 20 \text{ m s}^{-1} \cdot 15 \text{ s} = 300 \text{ m.} \quad (1.7)$$

c) Položaj prvog automobila u trenutku $t_1 = 5 \text{ s}$ je $x_1(t_1) = v_{x_1} t_1 = 100 \text{ m}$.

d) Uzmimo raskrnicu za ishodište referentnog koordinatnog sistema. Položaj sporijeg automobila, $x_1(t)$, je dat kao

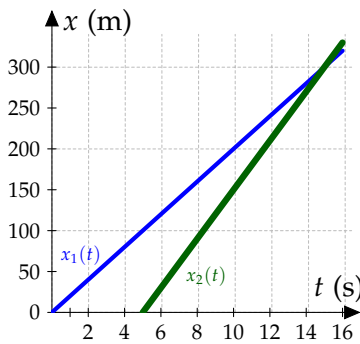
$$x_1(t) = 20t. \quad (1.8)$$

S obzirom da se i brži automobil kreće ravnomjerno, njegov položaj je dat funkcijom

$$x_2(t) = 30t + b, \quad (1.9)$$

pri čemu koeficijent b određujemo iz uslova da je on u trenutku $t = 5 \text{ s}$ bio na raskrsnici tj. $x_2(t = 5 \text{ s}) = 0$, dakle $b = -150 \text{ m}$. Konačan oblik funkcije $x_2(t)$ je onda

$$x_2(t) = 30t - 150. \quad (1.10)$$



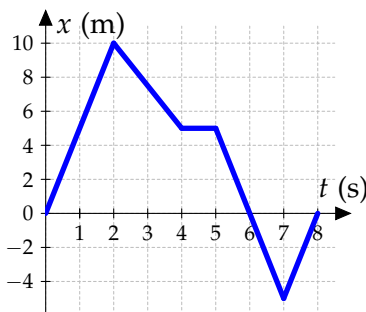
Slika 3.5: Rješenje zadatka 1d.

Grafički prikaz funkcija $x_1(t)$ i $x_2(t)$ dat je na slici 3.5. Mjesto i vrijeme susreta je određeno presjekom ove dvije prave. Vidimo da je trenutak susreta 15 s, a mjesto susreta 300 m.

ZADATAK 2: Na grafikonu 3.6 prikazana je zavisnost x -komponente vektora položaja od vremena.

a) Odrediti srednju brzinu kretanja duž x -ose u vremenskim intervalima $t \in (0, 2)$, $(0, 4)$, $(2, 4)$, $(4, 7)$, $(0, 8)$.

b) Odrediti pomak i pređeni put duž x -ose nakon 5 s.



Slika 3.6: Uz zadatak 2.

Rješenje:

a) Srednja brzina kretanja duž x -ose se definiše kao $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ i u zavisnosti kakav je pomak, može imati pozitivnu ili negativnu vrijednost. Pomak koji je tijelo napravilo u vremenskom intervalu od 0 do 2 s iznosi $\Delta x = x(t = 2 \text{ s}) - x(t = 0 \text{ s}) = 10 \text{ m} - 0 \text{ m} = 10 \text{ m}$ pa je srednja brzina u ovom intervalu $\bar{v}_x = \frac{10 \text{ m}}{2 \text{ s}} = 5 \text{ m s}^{-1}$.

Srednja brzina u intervalu od 0 do 4 s iznosi

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m} - 0 \text{ m}}{4 \text{ s} - 0 \text{ s}} = 1,25 \text{ m s}^{-1}, \quad (2.1)$$

dok je ona u intervalu od 2 s do 4 s jednaka

$$\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{5 \text{ m} - 10 \text{ m}}{4 \text{ s} - 2 \text{ s}} = -2,5 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.2)$$

Kao što vidimo srednja brzina u ovom intervalu je negativna jer pomak ima negativnu vrijednost, što implicira da se tijelo kretalo unazad, tj. u suprotnom smjeru u odnosu na smjer x -ose.

Srednja brzina u intervalu od 4s do 7s iznosi

$$\bar{v}_x = \frac{-5\text{ m} - 5\text{ m}}{7\text{ s} - 4\text{ s}} = -3,33\text{ m s}^{-1}, \quad (2.3)$$

a u intervalu od 0s do 8s jednaka je nuli jer je pomak u ovom intervalu nula.

b) Pomak duž x -ose se definiše kao razlika položaja tijela (određenog x -koordinatom) u dva vremenska trenutka. Položaj tijela, tj. x -koordinata u trenutku 5s iznosi 5m, a u početnom trenutku je jednak nuli, pa je pomak tijela nakon 5s jednak 5m. Za razliku od pomaka, pređeni put je veličina koja može imati samo pozitivne vrijednosti. Bez obzira u kojem smjeru se tijelo kreće, pređeni put se sabira za svaku etapu kretanja. Tako u prve dvije sekunde tijelo je napravilo pomak u pozitivnom smjeru i prešlo put od 10 m. U naredne dvije sekunde tijelo je napravilo pomak u negativnom smjeru, tj. vratilo se unazad i pri tome prešlo put od 5 m. Poslije toga, tijelo miruje do trenutka $t = 5\text{ s}$. Prema tome, ukupni pređeni put je 15m.

Napomena: Pređeni put u datom vremenskom intervalu se definiše kao dužina putanje (trajektorije) po kojoj se tijelo kretalo u tom vremenskom intervalu.

ZADATAK 3: Motociklista prolazi kroz mali grad krećući se prema istoku. Ograničenje brzine u gradu iznosi 15 m s^{-1} . Motociklista pri izlasku iz grada prolazi pored semafora nakon kojeg prestaje ograničenje brzine. Nakon što je prošao 5m od semafora motociklista počinje ubrzavati konstantnom akceleracijom 4 m s^{-2} .

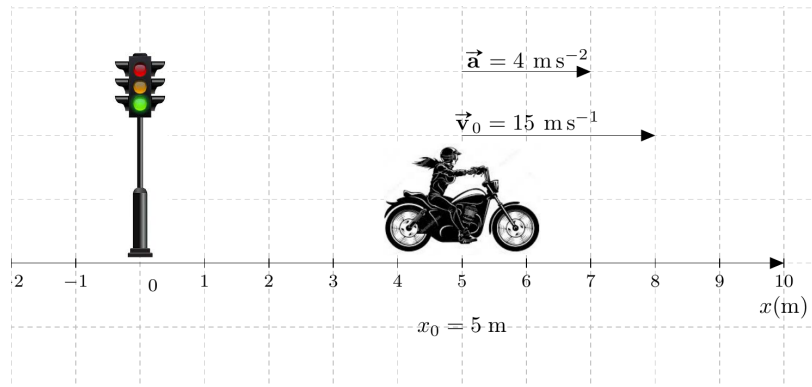
- Odrediti položaj i brzinu motocikliste dvije sekunde nakon što je počeo ubrzavati.
- Gdje se nalazi motociklista u trenutku kada je njegova brzina 25 m s^{-1} ?

Rješenje:

a) Pri rješavanju zadataka iz kinematike poželjno je pokušati kretanje tijela opisati riječima što je moguće preciznije. U ovom slučaju motociklista se prvobitno kreće konstantnom brzinom. Njegovo kretanje je ravnomjerno sve do trenutka kada počinje ubrzavati. Od tog trenutka brzina motocikliste se počinje mijenjati. Da bismo mogli primijeniti relacije koje matematički opisuju kretanje tijela neophodno je odrediti referentno tijelo, referentni sistem i početne uslove (početni trenutak, početni položaj i početnu brzinu). U ovom zadatku je prirodno izabrati semafor kao referentno tijelo. Referentni sistem je jednodimenzionalni koordinatni sistem čija je x -osa postavljena duž pravca

kretanja i u smjeru kretanja, a ishodište se poklapa s referentnim tijelom (slika 3.7). Kako se promjena u kretanju dešava u trenutku kada motociklista počinje ubrzavati, pogodno je izabrati taj trenutak kao početni, tj. uzeti da je u tom trenutku $t = 0$. Položaj motocikliste u tom trenutku je $x_0 = 5\text{ m}$, a brzina $v_{0x} = 15\text{ m s}^{-1}$.

Slika 3.7: Uz rješenje zadatka 3.



Kretanje motocikliste u bilo kom trenutku $t > 0$ je jednakoubrzano pa su njegov položaj i njegova brzina dati relacijama

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad (3.1)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t. \quad (3.2)$$

Motociklista se kreće ubrzano pa je komponenta ubrzanja a_x pozitivna tj. $a_x = +a$, gdje je a intenzitet vektora ubrzanja i iznosi 4 m s^{-2} . Sada možemo odrediti položaj i brzinu u svakom trenutku t . Specijalno u trenutku $t = 2\text{ s}$ položaj tijela je

$$x(t = 2\text{ s}) = 5\text{ m} + 15\text{ m s}^{-1} \cdot 2\text{ s} + \frac{1}{2}4\text{ m s}^{-2} \cdot (2\text{ s})^2 = 43\text{ m}, \quad (3.3)$$

a njegova brzina

$$v_x(t = 2\text{ s}) = 15\text{ m s}^{-1} + 4\text{ m s}^{-2} \cdot 2\text{ s} = 23\text{ m s}^{-1} \quad (3.4)$$

b) Da bismo našli položaj motocikliste u trenutku kada je njegova brzina jednaka $v_x = 25\text{ m s}^{-1}$ pogodno je eliminisati vrijeme iz relacija koje opisuju kretanje tijela. Iz jednačine za brzinu imamo

$$t = \frac{v_x - v_{0x}}{a_x}. \quad (3.5)$$

Uvrstimo ovu relaciju u izraz za položaj tijela u svrhu eliminiranja vremena t , tako da dobijemo

$$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_{0x} + v_x) \left(\frac{v_x - v_{0x}}{a_x} \right). \quad (3.6)$$

Uzimajući u obzir da je $(v_x + v_{0x})(v_x - v_{0x}) = v_x^2 - v_{0x}^2$ prethodna relacija postaje

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}, \quad (3.7)$$

odnosno

$$v_x^2 = v_{0x}^2 + 2a_x(x - x_0). \quad (3.8)$$

Posljednji izraz nam daje vezu između brzine tijela na jednom, odnosno drugom mjestu, bez potrebe za poznavanjem vremena koje je proteklo dok je ono prešlo put od jedne do druge tačke. Iz prethodne relacije dobijamo

$$x = x_0 + \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a} = 5\text{m} + \frac{(25\text{m s}^{-1})^2 - (15\text{m s}^{-1})^2}{2 \cdot 4\text{m s}^{-2}} = 55\text{m}. \quad (3.9)$$

ZADATAK 4: Automobil se kreće konstantnom brzinom od 20 m s^{-1} . U jednom trenutku automobil počne kočiti konstantnom akceleracijom od 1 m s^{-2} . Nakon kojeg vremena će se zaustaviti? Koliki put će preći do trenutka zaustavljanja?

Rješenje:

Slično kao u prethodnom zadatku kretanje tijela se može modelirati materijalnom tačkom. Automobil se prvobitno kreće ravnomjerno (konstantnom brzinom). U jednom trenutku automobil počinje kočiti i njegova brzina se ravnomjerno smanjuje sve do trenutka kada se zaustavi. U većini zadataka više nećemo specificirati referentno tijelo. Umjesto toga kretanje materijalne tačke određujemo u odnosu na ishodište koordinatnog sistema, kojeg možemo izabrati proizvoljno. Ovdje je pogodno izabrati jednodimenzionalni koordinatni sistem čija je x -osa usmjerena u smjeru kretanja automobila, a ishodište koordinatnog sistema se nalazi u tački u kojoj je automobil počeo kočiti. Početni trenutak je trenutak kada je automobil počeo kočiti. Izborom ovakvog početnog trenutka i koordinatnog sistema dobijamo da je početni položaj x_0 jednak nuli, što nam znatno pojednostavljuje jedinačine kretanja, koje sada glase

$$x(t) = v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad (4.1)$$

$$v_x(t) = v_{0x} + a_x t. \quad (4.2)$$

Početna brzina je brzina u trenutku $t = 0$, tj. u trenutku kada je automobil počeo kočiti i ona iznosi $v_{0x} = 20\text{ m s}^{-1}$. Pošto se automobil nakon trenutka $t = 0$ kreće usporeno, njegova akceleracija je negativna, tj. $a_x = -a$, gdje je $a = 1\text{ m s}^{-2}$, pa jednačine kretanja glase

$$x(t) = v_{0x}t - \frac{1}{2}at^2, \quad (4.3)$$

$$v_x(t) = v_{0x} - at. \quad (4.4)$$

Trenutak zaustavljanja t_z odredićemo iz uslova da je brzina automobila u tom trenutku jednaka nuli, tj. $v_x(t_z) = 0$.

$$v_x(t_z) = v_{0x} - at_z = 0. \quad (4.5)$$

Iz posljednje relacije slijedi

$$t_z = \frac{v_{0x}}{a} = \frac{20 \text{ m s}^{-1}}{1 \text{ m s}^{-2}} = 20 \text{ s}. \quad (4.6)$$

Pošto se automobil kreće u pozitivnom smjeru x -ose, a kretanje je počeo iz ishodišta koordinatnog sistema, pređeni put se poklapa s položajem automobila. Položaj automobila u trenutku zaustavljanja je

$$x(t_z) = v_{0x}t_z - \frac{1}{2}at_z^2 = 20 \text{ m s}^{-1} \cdot 20 \text{ s} - \frac{1}{2}1 \text{ m s}^{-2}(20 \text{ s})^2 = 200 \text{ m}. \quad (4.7)$$

Prema tome, možemo zaključiti da će se automobil zaustaviti 20 s od početka kočenja i da će pri tome preći put od 200 m.

ZADATAK 5: Motociklista, koji se kreće konstantnom brzinom 15 m s^{-1} , prolazi pored škole gdje je ograničenje brzine 10 m s^{-1} . Neposredno nakon što je motociklista prošao znak ograničenja brzine, za njim kreće policajac ubrzavajući akceleracijom 3 m s^{-2} .

- Kada će policajac stići motociklistu?
- Kolika je brzina policajca u tom trenutku?
- Koliki put su prešla oba vozila do trenutka susreta?

Rješenje:

a) Razmotrimo kretanje dva tijela, motocikliste i policajca. Kretanje motocikliste je ravnomjerno, dok je kretanje policajca jednakoubrzano pa možemo pisati jednačine kretanja kao

$$x_1(t) = x_{01} + v_{0x1}t, \quad x_2(t) = x_{02} + v_{0x2}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad (5.1)$$

$$v_{x1}(t) = v_{0x1} = \text{const.}, \quad v_{x2}(t) = v_{0x2} + a_x t, \quad (5.2)$$

gdje smo s indeksom 1 označili položaj i brzinu motocikliste, a s indeksom 2 policajca. Izabraćemo trenutak prolaska motocikliste pored znaka ograničenja kao početni trenutak, a ishodište koordinatnog sistema ćemo vezati za znak ograničenja. Tada su početni uslovi

$x_{01} = x_{02} = 0$, $v_{0x_2} = 0$ i $a_x = +a$. Jednačine kretanja postaju

$$x_1(t) = v_{0x_1}t, \quad x_2(t) = \frac{1}{2}at^2, \quad (5.3)$$

$$v_{x_1}(t) = v_{0x_1}, \quad v_{x_2}(t) = at. \quad (5.4)$$

Trenutak sustizanja t_s određujemo iz uslova $x_1(t_s) = x_2(t_s)$ odnosno

$$v_{0x_1}t_s = \frac{1}{2}at_s^2. \quad (5.5)$$

Iz prethodne relacije dobijamo

$$t_s = \frac{2v_{0x_1}}{a} = \frac{2 \cdot 15 \text{ m s}^{-1}}{3 \text{ m s}^{-2}} = 10 \text{ s}. \quad (5.6)$$

b) Brzina policajca u trenutku sustizanja iznosi

$$v_{x_2}(t_s) = at_s = 3 \text{ m s}^{-2} \cdot 10 \text{ s} = 30 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.7)$$

c) Pređeni put oba vozila do trenutka susreta podudara se s položajem oba tijela u trenutku susreta (oba tijela su započela kretanja iz ishodišta koordinatnog sistema i kreću se u pozitivnom smjeru x -ose) pa možemo pisati

$$s(t_s) = x_1(t_s) = v_{0x_1}t_s = 15 \text{ m s}^{-1} \cdot 10 \text{ s} = 150 \text{ m}. \quad (5.8)$$

ZADATAK 6: Borbeni avion slijeće na nosač aviona brzinom od 63 m s^{-1} .

- Kolika je akceleracija aviona ako se on zaustavi za dvije sekunde (pretpostaviti da je ona konstantna)?
- Koliki put pređe avion do trenutka zaustavljanja?
- Kolika je maksimalna početna brzina koju avion može imati ako je dužina piste 75 m ?

Rješenje:

a) Neka početni trenutak $t = 0$ odgovara trenutku kada avion dotakne nosač i neka je ishodište koordinatnog sistema vezano za tačku u kojoj avion dotakne nosač. Avion se kreće konstantnom akceleracijom, pa možemo pisati

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, \quad v_x(t) = v_{0x} + a_x t. \quad (6.1)$$

Pretpostavimo da se avion u početnom trenutku kreće udesno u pozitivnom smjeru x -ose. Onda je x -komponenta vektora početne brzine pozitivna, a komponenta ubrzanja je negativna jer je projekcija

vektora ubrzanja na x -osu usmjerena ulijevo i jednaka je negativnoj vrijednosti intenziteta ubrzanja. Početni uslovi su tada $x_0 = 0$, $v_{0x} = v_0 = 63 \text{ m s}^{-1}$ i $a_x = -a$, pa jednačine koje opisuju jednakousporeno kretanje aviona duž piste glase

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \quad v_x(t) = v_0 - a t. \quad (6.2)$$

Akceleraciju aviona ćemo odrediti iz uslova da je brzina aviona u trenutku zaustavljanja t_z jednaka nuli, tj. $v_x(t_z) = v_0 - a t_z = 0$. Iz prethodne relacije slijedi

$$a = \frac{v_0}{t_z} = \frac{63 \text{ m s}^{-1}}{2 \text{ s}} = 31,5 \text{ m s}^{-2}. \quad (6.3)$$

b) Pređeni put odgovara položaju aviona u trenutku zaustavljanja

$$s(t_z) = x(t_z) = v_0 t_z - \frac{1}{2} a t_z^2 = 63 \text{ m}. \quad (6.4)$$

c) Da bismo odredili maksimalnu brzinu kojom avion može sletjeti na nosač, koristićemo vezu između pomaka, početne i konačne brzine i akceleracije, koja je data s

$$x - x_0 = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}. \quad (6.5)$$

Konačna brzina aviona v_x jednaka je nuli, a položaj u trenutku zaustavljanja x jednak je maksimalnoj dužini piste, te je prema prethodnoj relaciji

$$v_{0x} = \sqrt{-2a_x x} = \sqrt{2ax} = \sqrt{2 \cdot 31,5 \text{ m s}^{-2} \cdot 75 \text{ m}} = 68,74 \text{ m s}^{-1}. \quad (6.6)$$

ZADATAK 7: Košarkaš počne da trči s lijeve strane terena i kreće se tako da mu je promjena komponente brzine prikazana na grafikonu 3.8.

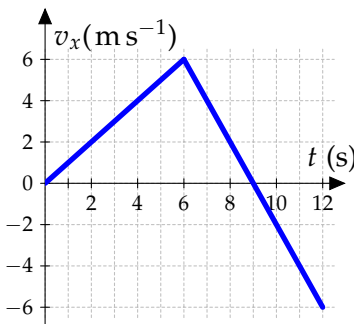
a) Nacrtati grafikon ubrzanja košarkaša.

b) Skicirati grafikon zavisnosti komponente vektora položaja košarkaša.

Rješenje:

a) S grafikona je očigledno da se u prvih šest sekundi komponenta brzine košarkaša ravnomjerno (linearno) povećava, a u narednih šest sekundi ravnomjerno smanjuje. Za vremenski interval $t \in (0, 6)$, ubrzanje tijela je određeno s

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{6 \text{ m s}^{-1}}{6 \text{ s}} = 1 \text{ m s}^{-2}. \quad (7.1)$$



Slika 3.8: Uz zadatak 7.

Ubrzanje tijela u vremenskom intervalu $t \in (6, 12)$ iznosi

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{-6 \text{ m s}^{-1} - 6 \text{ m s}^{-1}}{12 \text{ s} - 6 \text{ s}} = -2 \text{ m s}^{-2}. \quad (7.2)$$

U oba vremenska intervala ubrzanje je konstantno. U prvom intervalu vrijednost komponente ubrzanja je pozitivna, što znači da brojna vrijednost komponente brzine raste, dok je u drugom intervalu komponenta ubrzanja negativna i prema tome brojna vrijednost komponente brzine košarkaša opada. Grafikon ubrzanja je prikazan na slici 3.9.

b) U prvih šest sekundi komponenta ubrzanja košarkaša je pozitivna, pa je njegov položaj nakon šest sekundi

$$x = \frac{1}{2} a_x t^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \text{ m s}^{-2} \cdot 6^2 \text{ s}^2 = 18 \text{ m}, \quad (7.3)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je početna brzina košarkaša jednaka nuli. U ovom intervalu grafikon zavisnosti položaja od vremena je konkavan. U narednih šest sekundi košarkaš se kreće tako da je komponenta njegovog ubrzanja negativna, početna brzina 6 m s^{-1} i početni položaj 18 m , pa za ovaj interval vrijedi

$$x = x_0 + v_0 t - \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (7.4)$$

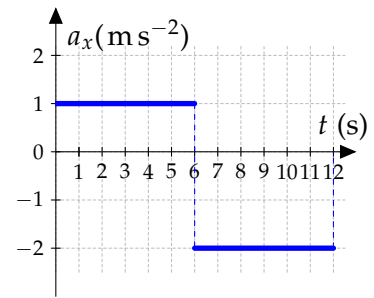
pri čemu sada vrijeme mjerimo od trenutka kada je košarkaš počeo usporavati, tj. kada je komponenta ubrzanja promijenila predznak. Tri sekunde nakon što je počeo usporavati, tj. 9 s nakon početka kretanja, brzina košarkaša iznosi 0 m s^{-1} (što se vidi s grafikona 3.8), a položaj

$$x = 18 \text{ m} + 6 \text{ m s}^{-1} \cdot 3 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m s}^{-2} \cdot 9 \text{ s}^2 = 27 \text{ m}. \quad (7.5)$$

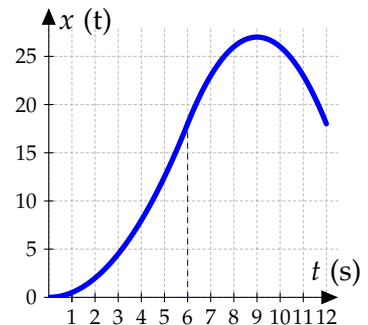
To je ujedno i najveća udaljenost do koje košarkaš dođe. U ovom trenutku komponenta brzine mijenja predznak, pa nakon toga košarkaš trči u suprotnom smjeru. Njegov položaj na kraju kretanja, tj. 6 s nakon što je promijenio predznak ubrzanja, iznosi

$$x = 18 \text{ m} + 6 \text{ m s}^{-1} \cdot 6 \text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m s}^{-2} \cdot 36 \text{ s}^2 = 18 \text{ m}. \quad (7.6)$$

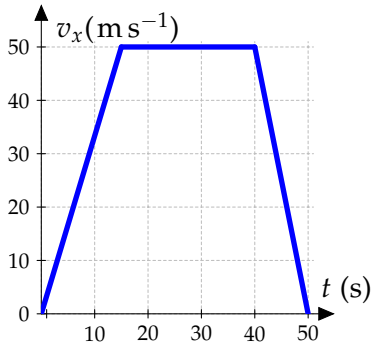
U vremenskom intervalu $t \in (6, 12)$ predznak komponente ubrzanja je negativan pa je grafikon zavisnosti položaja od vremena konveksan. Ovaj grafikon je prikazan na slici 3.10 za cjelokupan vremenski interval kretanja.



Slika 3.9: Rješenje zadatka 7a.



Slika 3.10: Rješenje 7b.



Slika 3.11: Uz zadatak 8.

ZADATAK 8: Automobil se počne kretati iz ishodišta koordinatnog sistema duž x -ose. Na grafikonu 3.11 prikazana je promjena brzine automobila u toku kretanja.

- Koliki je put prešao automobil?
- Koliki je put automobil prešao u vremenskom intervalu od 10 do 40s?
- Nacrtati grafik funkcije zavisnosti ubrzanja automobila od vremena.
- Kolika je srednja brzina i srednje ubrzanje između vremenskih trenutaka $t = 0\text{s}$ i $t = 50\text{s}$?

Rješenje:

a) U intervalu od 0 do 15s brzina se linearno povećava u vremenu pa zaključujemo da se radi o kretanju s konstantnom akceleracijom (u ovom slučaju jednakoubrzano kretanje). U vremenskom intervalu od 15s do 40s brzina je konstantna (ravnomjerno kretanje), a zatim se od $t = 40\text{s}$ do $t = 50\text{s}$ linearno smanjuje sve do zaustavljanja (jednako usporeno kretanje). Akceleracija u prvom posmatranom intervalu vremena iznosi

$$a_{x_1} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{50 \text{ m s}^{-1}}{15 \text{ s}} = 3,33 \text{ m s}^{-2} \quad (8.1)$$

U drugom intervalu je jednaka nuli, a u trećem

$$\begin{aligned} a_{x_3} &= \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \frac{v_x(t=50\text{s}) - v_x(t=40\text{s})}{50\text{s} - 40\text{s}} = \frac{0 \text{ m s}^{-1} - 50 \text{ m s}^{-1}}{10\text{s}} = \\ &= -5 \text{ m s}^{-2}. \end{aligned} \quad (8.2)$$

Pređeni put u prvom intervalu iznosi

$$s_1 = \frac{1}{2} a_{x_1} t^2 = \frac{1}{2} \cdot 3,33 \text{ m s}^{-2} \cdot (15\text{s})^2 = 374,625 \text{ m}. \quad (8.3)$$

U intervalu od 15s do 40s tijelo se kreće ravnomjerno brzinom od 50 m s^{-1} pa je pređeni put u ovom intervalu jednak $s_2 = v\Delta t = 50 \text{ m s}^{-1} \cdot 25\text{s} = 1250 \text{ m}$. U zadnjem intervalu, tijelo se kreće jednako usporeno s početnom brzinom $v_0 = 50 \text{ m s}^{-1}$ i prelazi put

$$s_3 = v_0 \Delta t + \frac{1}{2} a_{x_3} (\Delta t)^2 = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} a_3 (\Delta t)^2 = 250 \text{ m}. \quad (8.4)$$

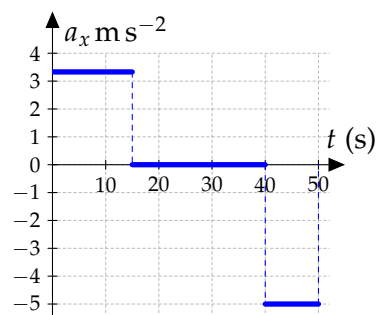
U prethodnoj relaciji smo mogli uvrstiti $a_{x_3} = -5 \text{ m s}^{-2}$ ili iskoristiti činjenicu da se radi u usporenom kretanju pa pisati $a_{x_3} = -a_3$, gdje

je a_3 intenzitet akceleracije koji iznosi 5 m s^{-2} . Ukupni pređeni put je zbir puteva koje je tijelo prešlo u ova tri intervala i iznosi $s = 1874,625 \text{ m}$.

b) Pređeni put u prvih deset sekundi iznosi $s = \frac{1}{2}a_{x1}t^2 = 166,5 \text{ m}$, što znači da je pređeni put u intervalu od 10 s do 15 s jednak $s'_1 = 374,625 \text{ m} - 166,5 \text{ m} = 208,125 \text{ m}$, gdje smo iskoristili proračun iz prethodnog dijela zadatka. Ukupni pređeni put u intervalu od 10 s do 40 s iznosi $s = s'_1 + s_2 = 208,125 \text{ m} + 1250 \text{ m} = 1458,125 \text{ m}$.

c) Zavisnost ubrzanja od vremena je prikazana na grafikonu 4.15.

d) Srednja brzina jednaka je količniku pomaka i vremenskog intervala u kojem se taj pomak napravi, tj. $\bar{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{1874,625 \text{ m}}{50 \text{ s}} = 37,5 \text{ m s}^{-1}$. Srednje ubrzanje je $\bar{a}_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = 0$ jer je brzina na početku i na kraju intervala jednaka nuli pa je i promjena brzine u ovom intervalu također nula.



Slika 3.12: Rješenje zadatka 8c.

ZADATAK 9: Dva tijela se počnu istovremeno kretati pod uticajem sile zemljine teže tako da je njihovo ubrzanje konstantno i iznosi g . Jedno tijelo se s površine Zemlje baci vertikalno uvis početnom brzinom $v_{01} = 50 \text{ m s}^{-1}$ dok se drugo pusti da slobodno pada s visine od $H = 125 \text{ m}$. Odrediti

- maksimalnu visinu koju će dostići prvo tijelo,
- vrijeme nakon kojeg će drugo tijelo pasti na tlo,
- vrijeme i mjesto susreta ova dva tijela,
- brzine oba tijela u trenutku susreta.

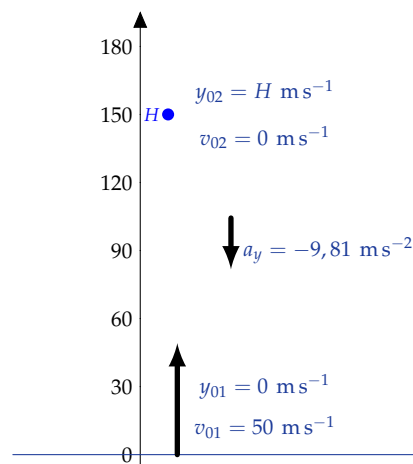
Rješenje:

Oba tijela se kreću pod uticajem sile Zemljine teže koja je u blizini površine Zemlje konstantna. Ako se zanemari otpor vazduha možemo reći da će se oba tijela kretati s konstantnim ubrzanjem. Kada razmatramo kretanje dva ili više tijela onda treba jednostavno za svako tijelo napisati jednačine kretanja. Izabraćemo jednodimenzionalni koordinatni sistem čije je y -osa usmjerena prema gore, a ishodište se nalazi na površini Zemlje kao na slici 3.13. Ubrzanje oba tijela je a_y i ima negativan predznak jer je usmjereno u suprotnom smjeru od smjera y -ose. Položaj oba tijela u proizvoljnom trenutku t određen je s

$$y_1(t) = y_{01} + v_{01}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \quad y_2(t) = y_{02} + v_{02}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \quad (9.1)$$

a brzine tijela

$$v_{y1}(t) = v_{01} + a_y t, \quad v_{y2}(t) = v_{02} + a_y t. \quad (9.2)$$



Slika 3.13: Uz rješenje zadatka 9.

Za tijelo koje je izbačeno vertikalno uvis vrijedi $y_{01} = 0$ i $v_{01} = v_0$, dok za drugo, koje slobodno pada $y_{02} = H$ i $v_{02} = 0$. Za oba tijela vrijedi $a_y = -g$, gdje je g intenzitet ubrzanja Zemljine teže i približno iznosi 10 m s^{-2} . Nakon uvrštavanja početnih uslova jednačine kretanja postaju

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad y_2(t) = H - \frac{1}{2} g t^2, \quad (9.3)$$

$$v_{y_1}(t) = v_0 - g t, \quad v_{y_2}(t) = -g t. \quad (9.4)$$

Vidimo da će komponenta brzine tijela koje slobodno pada uvijek biti negativna, što je očekivano obzirom na to da je smjer vektora brzine tokom slobodnog pada uvijek suprotan u odnosu na y -osu. Pored toga, uz ovakav izbor koordinatnog sistema, položaji oba tijela y_1 i y_2 se poklapaju s visinama oba tijela u proizvoljnom trenutku. Kada smo napisali jednačine kretanja koje opisuju kretanja oba tijela (hitac uvis i slobodan pad) možemo preći na rješavanje konkretnih problema iz samog teksta zadatka.

a) Da bismo odredili maksimalnu visinu, prvo ćemo odrediti vrijeme potrebno da tijelo dostigne maksimalnu visinu iz uslova da je brzina tijela, u trenutku kada je njegova visina maksimalna, jednaka nuli. Neka je to trenutak t_m . Vrijedi $v_{y_1}(t_m) = 0$, pa je

$$0 = v_{01} - g t_m, \quad \rightarrow \quad t_m = \frac{v_{01}}{g} = \frac{50 \text{ m s}^{-1}}{10 \text{ m s}^{-2}} = 5 \text{ s}. \quad (9.5)$$

Maksimalna visina je visina u trenutku t_m , tj.

$$\begin{aligned} h_{\max} &= y_1(t_m) = v_{01} t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = v_{01} \frac{v_{01}}{g} - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_{01}}{g} \right)^2 = \\ &= \frac{v_{01}^2}{2g} = \frac{(50 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 10 \text{ m s}^{-2}} = 125 \text{ m}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Istu vrijednost možemo dobiti da u prethodnu relaciju uvrstimo direktno $t_m = 5 \text{ s}$.

b) Vrijeme padanja tijela određujemo iz uslova da je visina tijela u trenutku pada jednaka nuli. Neka je trenutak padanja t_p . Vrijedi $y_2(t_p) = 0$, pa je

$$y_2(t_p) = H - \frac{1}{2} g t_p^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 125 \text{ m}}{10 \text{ m s}^{-2}}} = 5 \text{ s}. \quad (9.7)$$

c) Vrijeme susreta dva tijela određujemo iz uslova da je njihov položaj u trenutku susreta jednak, tj. $y_1(t_s) = y_2(t_s)$, gdje smo s t_s označili trenutak susreta odnosno sudara. Prema tome, možemo pisati

$$v_0 t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 = H - \frac{1}{2} g t_s^2. \quad (9.8)$$

Iz prethodne relacije se odmah dobije

$$t_s = \frac{H}{v_0} = \frac{125 \text{ m}}{50 \text{ m s}^{-1}} = 2,5 \text{ s} \quad (9.9)$$

Visina na kojoj se tijela susretnu može se odrediti kao $h_s = y_1(t_s) = y_2(t_s)$, odnosno

$$h_s = v_0 t_s - \frac{1}{2} g t_s^2 = 50 \text{ m s}^{-1} \cdot 2,5 \text{ s} - \frac{1}{2} 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 6,25 \text{ s}^2 = 93,75 \text{ m}. \quad (9.10)$$

Na osnovu ovog rezultata možemo zaključiti da, iako se oba tijela susretnu u trenutku koji odgovara polovini njihovog vremena kretanja, visina susreta nije jednaka polovini pređenog puta tokom kretanja (polovina pređenog puta u oba slučaja je $125 \text{ m}/2 = 62,5 \text{ m}$). Razlog je to što položaj tijela nije linearna funkcija vremena već kvadratna.

d) Brzine tijela u trenutku susreta su

$$v_{y_1}(t_s) = v_0 - g t_s = 50 \text{ m s}^{-1} - 10 \text{ m s}^{-2} \cdot 2,5 \text{ s} = 25 \text{ m s}^{-1}, \quad (9.11)$$

$$v_{y_2}(t_s) = -g t_s = -10 \text{ m s}^{-2} \cdot 2,5 \text{ s} = -25 \text{ m s}^{-1}. \quad (9.12)$$

Možemo zaključiti da je brzina prvog tijela u trenutku 2,5 s jednaka polovini njegove početne brzine. Također, brzina drugog tijela u trenutku susreta jednaka je polovini njegove konačne brzine. Razlog je taj što je brzina u ovom slučaju linearna funkcija vremena. Pored toga brzina drugog tijela ima negativnu vrijednost $v_{y_2}(t_s) = -25 \text{ m s}^{-1}$. Ovaj rezultat nam daje informaciju o intenzitetu brzine i o smjeru vektora brzine. Intenzitet brzine je 25 m s^{-1} , a predznak minus nam govori da je smjer vektora brzine suprotan u odnosu na smjer y -ose (koji je izabran da pokazuje prema gore), što je očekivano obzirom da se u tom trenutku tijelo kreće prema dolje.

ZADATAK 10: S vrha zgrade visoke 50 m bačen je kamen vertikalno uvis početnom brzinom 20 m s^{-1} . Pri povratku kamen prođe neposredno pored krova zgrade i pada prema tlu. Naći:

- vrijeme za koje će kamen dostići maksimalnu visinu,
- maksimalnu visinu,
- vrijeme za koje će se kamen vratiti na početnu visinu,
- brzinu kamena u tom trenutku,
- položaj kamena u trenutku $t = 5 \text{ s}$.

Otpor vazduha zanemariti.

Rješenje:

a) Neka je ishodište referentnog sistema postavljeno na vrh zgrade i neka je y -osa usmjerena vertikalno prema gore. Ako zanemarimo silu otpora vazduha, tijelo se kreće isključivo pod uticajem sile Zemljine teže s konstantnim ubrzanjem $a_y = -g$. Kretanje tijela je opisano jednačinama

$$y(t) = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = v_0 - g t, \quad (10.1)$$

gdje su $y_0 = 0$ (jer se položaj određuje u odnosu na vrh zgrade, a ne u odnosu na tlo), $v_0 = 20 \text{ m s}^{-1}$ početna brzina i $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$ ubrzanje Zemljine teže. Vrijeme za koje kamen dostiže maksimalnu visinu određujemo iz uslova da je brzina u tom trenutku jednaka nuli. Neka je t_m trenutak kada kamen dostigne najveću visinu. Tada vrijedi

$$v_y(t_m) = 0, \rightarrow v_0 - g t_m = 0 \rightarrow t_m = \frac{v_0}{g} = \frac{20 \text{ m s}^{-1}}{9,81 \text{ m s}^{-2}} = 2,04 \text{ s}. \quad (10.2)$$

b) Maksimalna visina (u odnosu na krov zgrade) je visina u trenutku t_m , tj.

$$\begin{aligned} h_{\max} &= y(t_m) = v_0 t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = \\ &= 20 \text{ m s}^{-1} \cdot 2,04 \text{ s} - \frac{1}{2} 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (2,04 \text{ s})^2 = 20,4 \text{ m}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

c) Trenutak povratka t_p na početnu visinu, koja je jednaka nuli, možemo odrediti iz uslova $y(t_p) = 0$.

$$y(t_p) = v_0 t_p - \frac{1}{2} g t_p^2 = 0, \rightarrow t_p (v_0 - \frac{1}{2} g t_p) = 0. \quad (10.4)$$

Ova jednačina ima dva rješenja. Prvo je $t_p = 0$ i ono odgovara početnom trenutku kada je visina također jednaka nuli. Drugo rješenje je ustvari trenutak kada će se tijelo vratiti na početnu visinu, a dobije se iz

$$v_0 - \frac{1}{2} g t_p = 0, \rightarrow t_p = \frac{2v_0}{g} = \frac{2 \cdot 20 \text{ m s}^{-1}}{9,81 \text{ m s}^{-2}} = 4,08 \text{ s}. \quad (10.5)$$

d) Brzina kamena u trenutku povratka iznosi

$$v_y(t_p) = v_0 - g t_p = 20 \text{ m s}^{-1} - 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 4,08 \text{ s} = -20 \text{ m s}^{-1}. \quad (10.6)$$

Komponenta brzine je negativna jer je vektor brzine usmjeren prema dolje, tj. u suprotnom smjeru u odnosu na pozitivan smjer y -ose, a intenzitet brzine je 20 m s^{-1} i jednak je intenzitetu početne brzine.

e) Položaj kamena u proizvoljnom trenutku određen je jednačinom kretanja, pa je položaj u trenutku $t = 5$ s jednak

$$y(t = 5\text{ s}) = 20\text{ m s}^{-1} \cdot 5\text{ s} - \frac{1}{2} \cdot 9,81\text{ m s}^{-2} \cdot (5\text{ s})^2 = -22,6\text{ m}. \quad (10.7)$$

To znači da se kamen u trenutku $t = 5$ s nalazi 22,6 m ispod vrha zgrade, tj. ishodišta referentnog sistema (pod pretpostavkom da je kamen prošao pored vrha zgrade i da nije pao na nju), odnosno 27,4 m iznad tla.

ZADATAK 11: Raketa je ispaljena tako da ima ubrzanje vertikalno prema gore, a koje iznosi 20 m s^{-2} . Nakon 25 s pogon rakete se ugasi tako da se ona nastavi kretati isključivo pod uticajem sile Zemljine teže. Pretpostavljajući da je ubrzanje Zemljine teže konstantno, odrediti:

- maksimalnu visinu koju će raketa dostići,
- vrijeme koje raketa provede u zraku,
- brzinu rakete neposredno prije pada na tlo.

Rješenje:

a) U toku prvih 25 s raketa se kreće jednakoubrzano prema gore konstantnim ubrzanjem od 20 m s^{-2} . Položaj rakete u prvih 25 sekundi kretanja određen je s

$$y(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_y t^2, \quad (11.1)$$

a brzina

$$v_y(t) = v_0 + a_y t. \quad (11.2)$$

U trenutku $t = 25$ s položaj rakete je $y_1 = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot 20\text{ m s}^{-2} \cdot (25\text{ s})^2 = 6250\text{ m}$. Brzina rakete u ovom trenutku je $v_1 = a t = 500\text{ m s}^{-1}$. Nakon 25 s pogon rakete prestaje raditi pa se raketa kreće pod uticajem sile Zemljine teže, tj. kreće se kao hitac uvis s početnom visinom y_1 i početnom brzinom v_1 . Jednačine kretanja u ovom slučaju su

$$y(t) = y_1 + v_1 t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = v_1 - g t, \quad (11.3)$$

gdje ćemo vrijeme mjeriti od trenutka prestanka rada raketnog pogona. Trenutak kada raketa dostigne maksimalnu visinu određen je uslovom $v_y(t_m) = 0$, odnosno $v_1 - g t_m = 0$. Prema tome,

$$t_m = \frac{v_1}{g} = 50\text{ s}. \quad (11.4)$$

Visina u ovom trenutku je

$$\begin{aligned} h_{\max} &= y(t_m) = 6250\text{ m} + 500\text{ m s}^{-1} \cdot 50\text{ s} + \frac{1}{2} \cdot 10\text{ m s}^{-2} \cdot (50\text{ s})^2 \\ &= 43750\text{ m}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Napomena: Ovaj rezultat je dobiven pod pretpostavkom da je ubrzanje Zemljine teže g konstantno. U stvarnosti ubrzanje Zemljine teže opada s povećanjem visine.

b) Trenutak pada rakete, mjereno od trenutka kada pogon prestane raditi možemo dobiti iz uslova da je $y(t_p) = 0$, gdje je t_p trenutak pada, a y trenutni položaj dat relacijom (11.3). Rješavanjem kvadratne jednačine

$$\frac{1}{2}gt_p^2 - v_1t_p - y_1 = 0 \quad (11.6)$$

dobijamo kao pozitivno rješenje

$$t_p = \frac{v_1 + \sqrt{v_1^2 + 2gy_1}}{g} = 156\text{ s}. \quad (11.7)$$

Vrijeme koje je raketa provela u zraku sastoji se od vremena koje je provela dok je pogon bio aktivan (25 s) i vremena padanja nakon toga (156 s) i iznosi 181 s.

c) Brzina rakete u svakom trenutku nakon prestanka rada pogona određena je relacijom (11.3). Brzina u trenutku pada iznosi

$$v_y(t_p) = v_1 - gt_p = 500\text{ m s}^{-1} - 10\text{ m s}^{-2} \cdot 156\text{ s} = -1060\text{ m s}^{-1}. \quad (11.8)$$

Komponenta brzine v_y je negativna jer je u trenutku pada vektor brzine usmjeren prema dolje, tj. u suprotnom smjeru u odnosu na smjer y -ose. Intenzitet brzine rakete neposredno prije padanja iznosi 1060 m s^{-1} .

ZADATAK 12: Tijelo A je pušteno da slobodno pada sa zgrade visine H , dok je drugo tijelo B bačeno vertikalno uvis u isto vrijeme. Neposredno prije sudara oba tijela se kreću u suprotnim smjerovima tako da je brzina tijela A dva puta veća od brzine tijela B. Na kojoj visini će se tijela sudariti?

Rješenje:

U slučaju kada posmatramo kretanje dva ili više tijela, onda treba opisati kretanje svakog tijela ponaosob. Tijelo A slobodno pada pa možemo pisati

$$y_A(t) = H - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_{y_A}(t) = -gt. \quad (12.1)$$

Za tijelo B vrijedi

$$y_B(t) = v_{0_B}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_{y_B}(t) = v_{0_B} - gt. \quad (12.2)$$

Uslov zadatka koji treba iskoristiti jeste da se tijela neposredno prije sudara kreću u suprotnim smjerovima i da je intenzitet brzine tijela A dva puta veći od intenziteta brzine tijela B. Taj uslov možemo pisati kao

$$v_{y_A}(t_s) = -2v_{y_B}(t_s), \quad (12.3)$$

gdje smo s t_s označili trenutak sudara, a predznakom minus uvažili činjenicu da se tijela kreću u suprotnim smjerovima. Uvrštavanjem izraza za brzinu tijela u prethodnu jednačinu dobijemo

$$-gt_s = -2(v_{0_B} - gt_s), \quad (12.4)$$

odnosno

$$t_s = \frac{2v_{0_B}}{3g}. \quad (12.5)$$

Pored toga, oba tijela se u trenutku susreta nalaze na istoj visini pa možemo pisati

$$y_A(t_s) = y_B(t_s), \quad (12.6)$$

odnosno

$$H - \frac{1}{2}gt_s^2 = v_{0_B}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2. \quad (12.7)$$

Uvrštavanjem izraza za trenutak sudara u prethodnu jednačinu dobijamo

$$H = v_{0_B} \cdot \frac{2v_{0_B}}{3g} = \frac{2v_{0_B}^2}{3g}, \quad (12.8)$$

odakle je

$$v_{0_B} = \sqrt{\frac{3gH}{2}}, \quad (12.9)$$

odnosno trenutak susreta

$$t_s = \sqrt{\frac{2H}{3g}}. \quad (12.10)$$

Visina na kojoj se tijela sudare, iznosi

$$y_A(t_s) = H - \frac{1}{2}gt_s^2 = H - \frac{1}{2}g \frac{2H}{3g} = \frac{2H}{3}. \quad (12.11)$$

Brzina tijela A u trenutku susreta iznosi

$$v_{y_A}(t_s) = -gt_s = -\sqrt{\frac{2gH}{3}}, \quad (12.12)$$

a tijela B

$$\begin{aligned} v_{y_B}(t_s) &= v_{0_B} - gt_s = v_{0_B} - \frac{2}{3}v_{0_B} = \frac{1}{3}v_{0_B} = \\ &= \frac{1}{3}\sqrt{\frac{3gH}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2gH}{3}} = -\frac{1}{2}v_{y_A}(t_s). \end{aligned} \quad (12.13)$$

Napomena: U ovom i narednom zadatku ćemo pretpostavljati da su položaj, brzina, ubrzanje i vremenski trenutak dati u njihovim osnovnim SI jedinicama, ne vodeći računa da relacije koje pišemo budu dimenziono korektne. To znači da ćemo relacijama predstavljati samo brojne vrijednosti datih fizikalnih veličina, a na kraju im pridružiti jedinicu.

ZADATAK 13: Automobil počne ubrzavati iz stanja mirovanja tako da je u jednom kraćem periodu njegova brzina kao funkcija vremena određena s $v_x(t) = (3t^2 + 2t) \text{ m s}^{-1}$. Odrediti položaj i ubrzanje automobila 3 s nakon početka kretanja.

Rješenje:

Do sada smo razmatrali slučajeve kada je brzina tijela konstantna (ravnomjerno kretanje) ili linearna funkcija vremena (jednakoubrzano kretanje). U ovom slučaju brzina je kvadratna funkcija vremena pa kretanje automobila nije jednakoubrzano. Kako bismo našli položaj kao funkciju vremena poči ćemo od definicije trenutne brzine

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad (13.1)$$

odakle slijedi

$$dx = v_x(t)dt. \quad (13.2)$$

Da bismo dobili x kao funkciju vremena prethodnu relaciju ćemo integrirati

$$\int dx = \int (3t^2 + 2t)dt. \quad (13.3)$$

odnosno

$$x(t) = t^3 + t^2 + C, \quad (13.4)$$

gdje je C konstanta integracije, a x se mjeri u metrima. Konstantu integracije ćemo odrediti iz početnog uslova da je položaj tijela u početnom trenutku $t = 0$ jednak x_0 . Ako u prethodnu relaciju uvrstimo $t = 0$ i $x = x_0$ dobijamo da je konstanta integracije $C = x_0$. Ako još, pored toga, postavimo ishodište koordinatnog sistema u tačku u kojoj se automobil nalazio u početnom trenutku onda je $x_0 = 0$, pa zaključujemo da je položaj tijela, mjereno u metrima, kao funkcija vremena dat s

$$x(t) = t^3 + t^2. \quad (13.5)$$

Položaj tijela nakon tri sekunde iznosi $x(t = 3\text{ s}) = 36 \text{ m}$.

Ubrzanje tijela, mjereno u m s^{-2} kao funkciju vremena određujemo iz same definicije ubrzanja

$$a_x(t) = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t) = 6t + 2. \quad (13.6)$$

Ubrzanje nakon 3 s iznosi 20 m s^{-2} .

ZADATAK 14: Metak se ispali u vodu vertikalno prema dolje početnom brzinom $v_0 = 60 \text{ m s}^{-1}$. Zbog otpora fluida, metak se kreće usporeno akceleracijom koja je određena s

$$a_y = (-0,4v^3) \text{ m s}^{-2}, \text{ gdje je } v \text{ intenzitet brzine mjeren u } \text{m s}^{-1}.$$

- Naći intenzitet brzine kao funkciju vremena.
- Naći pređeni put kao funkciju vremena.
- Grafički prikazati put, brzinu i ubrzanje kao funkciju vremena.

Rješenje:

Tokom kretanja kroz vodu ubrzanje metka je promjenjivo i zavisi od njegove brzine. Izabraćemo koordinatni sistem tako da je njegova y -osa usmjerena prema dolje, a ishodište postavljeno u tačku u kojoj metak ulazi u vodu. Predznak minus u izrazu za ubrzanje govori da je vektor ubrzanja usmjeren prema gore, tj. da se metak kroz vodu kreće usporeno sve do zaustavljanja. Vektor brzine je uvijek usmjeren u pozitivnom smjeru y -ose pa je njegova komponenta jednaka intenzitetu brzine. Kako se metak počeo kretati iz ishodišta, i kreće se isključivo u pozitivnom smjeru y -ose, pređeni put metka se podudara s njegovim položajem.

a) Iz definicije ubrzanja i uslova zadatka slijedi

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{dv}{dt} = -0,4v^3. \quad (14.1)$$

Ova relacija predstavlja jednu linearnu diferencijalnu jednačinu prvog reda koja se može jednostavno riješiti metodom separacije (razdvajanja) varijabli. Možemo pisati

$$\frac{dv}{v^3} = -0,4dt. \quad (14.2)$$

Integracijom ovog izraza dobijamo

$$\int \frac{dv}{v^3} = -0,4 \int dt, \quad (14.3)$$

odnosno

$$-\frac{v^{-2}}{2} = -0,4t + C, \quad (14.4)$$

gdje je C konstanta integracije. Prethodni izraz možemo napisati i kao

$$v^{-2} = 0,8t + C_1, \quad (14.5)$$

gdje je $C_1 = -2C$ nova konstanta integracije koju ćemo odrediti iz početnog uslova, tj. da je brzina u trenutku $t = 0$ jednaka v_0 . Kada

uvrstimo ovaj uslov u prethodnu jednačinu dobijemo da je $C_1 = v_0^{-2}$ odnosno

$$v^{-2} = v_0^{-2} + 0,8t. \quad (14.6)$$

Prema tome, konačno možemo napisati intenzitet brzine kao funkciju vremena na sljedeći način

$$v(t) = \left(v_0^{-2} + 0,8t\right)^{-1/2}. \quad (14.7)$$

b) Na osnovu definicije trenutne brzine i rezultata iz prethodnog dijela zadatka, možemo pisati

$$v(t) = v_y(t) = \frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \left(v_0^{-2} + 0,8t\right)^{-1/2}. \quad (14.8)$$

Kada prethodnu relaciju pomnožimo s dt i integriramo, dobijamo

$$\int ds = \int \left(v_0^{-2} + 0,8t\right)^{-1/2} dt, \quad (14.9)$$

odnosno

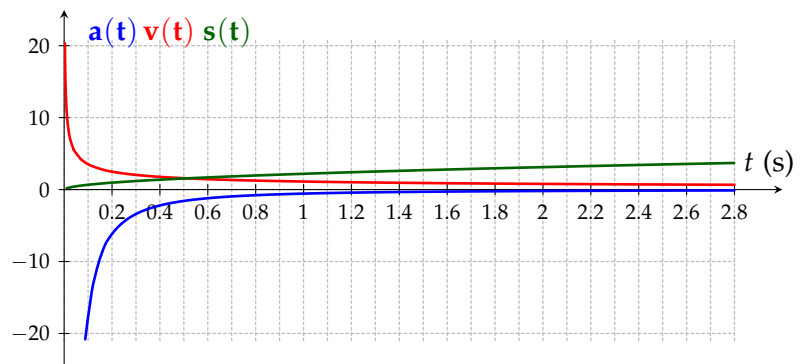
$$s = \frac{2}{0,8} \left(v_0^{-2} + 0,8t\right)^{1/2} + C, \quad (14.10)$$

gdje smo prethodni integral riješili jednostavnom smjenom varijabli $\left(v_0^{-2} + 0,8t\right) = x$. Konstantu integracije C određujemo iz početnog uslova za položaj tijela, tj. za $t = 0$, pređeni put s jednak je nuli, pa uvrštavanjem u prethodnu relaciju slijedi $C = -\frac{1}{0,4v_0}$. Konačno pređeni put kao funkcija vremena dat je sa

$$s(t) = \frac{1}{0,4} \left(v_0^{-2} + 0,8t\right)^{1/2} - \frac{1}{0,4v_0}. \quad (14.11)$$

c) Ubrzanje, brzina i pređeni put metka su prikazani na slici 3.14 plavom, crvenom i zelenom krivom respektivno.

Slika 3.14: Rješenje zadatka 14c.



3.8 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Gepard može trčati brzinom 113 km h^{-1} , soko može letjeti brzinom 161 km h^{-1} , a riba jedriličarka može plivati brzinom 105 km h^{-1} . Kada bi njih troje učestvovali u štafeti pri kojoj bi svako prelazio dužinu L svojom maksimalnom brzinom, kolika bi bila srednja brzina ove štafete? Kolika je srednja vrijednost njihovih brzina? ($\bar{v}_1 = 122 \text{ km h}^{-1}$, $\bar{v}_2 = 126 \text{ km h}^{-1} = 1,03\bar{v}_1$)

Zadatak 2: Voz metroa kreće sa stanice i ubrzava konstantnom akceleracijom od 1 m s^{-2} pola udaljenosti do sljedeće stanice, a zatim usporava istim intenzitetom akceleracije drugu polovinu udaljenosti. Ukupna udaljenost između stanica je 900 m . Skicirati grafik brzine i pređenog puta kao funkciju vremena tokom cijelog putovanja. Postaviti odgovarajuće numeričke vrijednosti na obje ose. (grafikon 3.15)

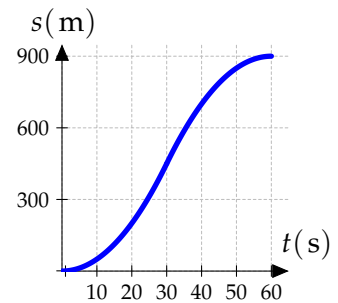
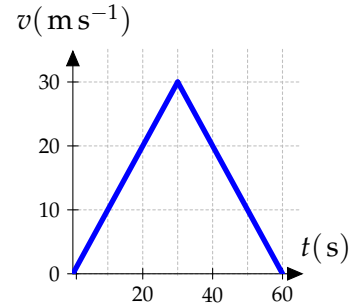
Zadatak 3: Promjena ubrzanja nekog tijela u toku njegovog kretanja data je na slici 3.16. Ako je tijelo krenulo iz stanja mirovanja, odrediti njegovu brzinu u trenutku $t = 10 \text{ s}$ i $t = 20 \text{ s}$. Odrediti pređeni put nakon prvih 20 s . ($v_1 = 20 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 5 \text{ m s}^{-1}$, $s = 262 \text{ m}$)

Zadatak 4: Dva automobila kreću se jedan prema drugom u susjednim trakama i paralelno s x -osom. U početnom trenutku automobili se nalaze na međusobnom rastojanju od 220 m . Ukoliko jedan od automobila ima stalnu brzinu od 20 km h^{-1} , on će do njihovog susreta preći put od $44,5 \text{ m}$, a ako ima stalnu brzinu od 40 km h^{-1} , do susreta će preći put od $76,6 \text{ m}$. Odrediti početnu brzinu i ubrzanje drugog automobila. ($v_0 = -13,9 \text{ m s}^{-1}$, $a = -2 \text{ m s}^{-2}$)

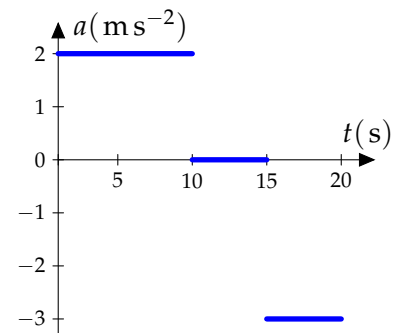
Zadatak 5: Voz se udaljava od stanice konstantnim ubrzanjem od $0,4 \text{ m s}^{-2}$. Putnik dolazi na kolosijek 6 s nakon što je voz prošao istu tu tačku. Koja je najmanja konstantna brzina kojom putnik može trčati i uhvatiti voz? Nacrtati krivu kretanja putnika i voza kao funkciju vremena. ($v = 4,8 \text{ m s}^{-1}$, grafikon 3.17)

Zadatak 6: Automobil se približava brdu brzinom od 30 m s^{-1} . U samom podnožju brda motor mu se ugasi te se automobil nastavlja kretati uzbrdo konstantnim ubrzanjem od -2 m s^{-2} . (a) Napisati jednačine zavisnosti položaja automobila duž brda i njegove brzine u funkciji od vremena, uzimajući da je $x = 0$ na dnu brda. (b) Odrediti maksimalnu udaljenost koju automobil dostigne uz brdo. ($x(t) = (30t - t^2) \text{ m}$, $v(t) = (30 - 2t) \text{ m s}^{-1}$, $x_{\text{max}} = 225 \text{ m}$)

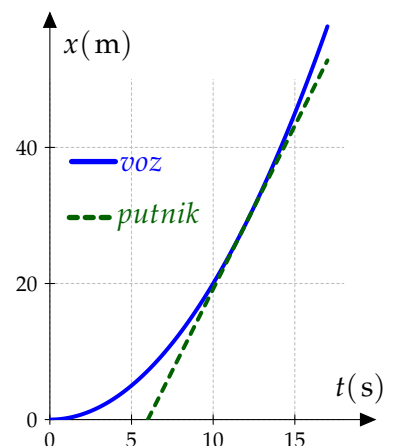
Zadatak 7: Lopta kreće iz stanja mirovanja i ubrzava akceleracijom od



Slika 3.15: Rješenje zadatka 2.



Slika 3.16: Uz zadatak 3.



Slika 3.17: Rješenje zadataka 5.

$0,5 \text{ m s}^{-2}$ krećući se niz strmu ravan dužine 9 m. Kada dostigne dno, lopta se kotrlja uz drugu strmu ravan i zaustavlja se nakon 15 m. (a) Kolika je brzina lopte na dnu prve ravni? (b) Koliko dugo je potrebno da se spusti niz prvu ravan? (c) Kolika je akceleracija duž druge strme ravni? (d) Kolika je brzina lopte nakon pređenih 8 m uz drugu ravan? ($v_1 = 3 \text{ m s}^{-1}$, $t = 6 \text{ s}$, $a = -0,3 \text{ m s}^{-2}$, $v_2 = 2,05 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 8: Kamen je pušten iz stanja mirovanja u bunar. Zvuk prskanja se čuje 2,4 s kasnije. Na kojoj dubini se nalazi voda u bunaru? Brzina zvuka u vazduhu (na temperaturi okoline) iznosi 336 m s^{-1} . (b) Ako se zanemari vrijeme prostiranja zvuka, kolika je relativna greška pri proračunu dubine bunara? ($d = 26,4 \text{ m}$, $\varepsilon = 6,82\%$)

Zadatak 9: Predmet je pušten iz stanja mirovanja s visine h . U toku prve sekunde padanja spusti se na visinu $0,8h$. Odrediti srednju brzinu predmeta tokom cijelog njegovog padanja i put koji pređe u posljednjih $0,5 \text{ s}$ kretanja. ($\bar{v} = 10,96 \text{ m s}^{-1}$, $s = 9,76 \text{ m}$)

Zadatak 10: U trenutku $t = 0$, kamen je pušten s vrha litice iznad jezera. Drugi kamen je bačen naniže $1,6 \text{ s}$ kasnije s iste tačke početnom brzinom od 32 m s^{-1} . Oba kamena su udarila u vodu u istom trenutku. Odrediti visinu litice. ($h = 27,6 \text{ m}$)

Zadatak 11: Čestica se kreće pravolinijski s ubrzanjem koje zavisi od vremena kao $a(t) = (12t - 3t^{1/2}) \text{ m s}^{-2}$. Odrediti brzinu i položaj čestice kao funkciju vremena. Poznati su početni uslovi $v(0) = 0$ i $x(0) = 15 \text{ m}$. ($v(t) = (6t^2 - 2t^{3/2}) \text{ m s}^{-1}$, $x(t) = (2t^3 - \frac{4}{5}t^{5/2} + 15) \text{ m}$)

Zadatak 12: Ubrzanje čestice koja se kreće duž prave se mijenja s vremenom kao $a(t) = (0,02e^t) \text{ m s}^{-2}$. Ako je $v = 0$ i $x = 0$ kada je $t = 0$, odrediti brzinu i ubrzanje čestice u položaju $x = 4 \text{ m}$. ($v = 4,11 \text{ m s}^{-1}$, $a = 4,13 \text{ m s}^{-2}$)

Zadatak 13: Neka je brzina čestice, koja se kreće duž x -ose data kao $v = v_0 - kx$, gdje je k konstanta. Ako se čestica u početnom trenutku nalazila u koordinatnom početku, odrediti položaj i ubrzanje čestice kao funkciju vremena. ($x(t) = \frac{v_0}{k}(1 - e^{-kt})$, $a(t) = -kv_0e^{-kt}$)

Zadatak 14: Dvije čestice A i B polaze iz stanja mirovanja iz koordinatnog početka i kreću se duž x -ose tako da je $a_A = (6t - 3) \text{ m s}^{-2}$ i $a_B = (12t^2 - 8) \text{ m s}^{-2}$, gdje je t izraženo u sekundama. Odredite udaljenost između njih u trenutku $t = 4 \text{ s}$ i ukupnu udaljenost koju je svaki prešao za prve 4 s kretanja. ($x_{AB} = 152 \text{ m}$, $x_A(4) = 40 \text{ m}$, $x_B(4) = 192 \text{ m}$)

KRETANJE U RAVNI

4.1	Položaj, brzina i ubrzanje	73
4.2	Relativno kretanje	76
4.3	Riješeni zadaci	77
4.4	Zadaci za vježbu	100

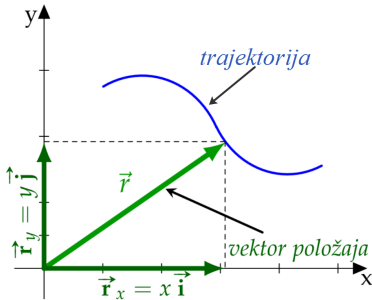
U prethodnom poglavlju smo razmatrali kretanje koje se odvija duž jednog pravca. Međutim, kretanje bilo koje materijalne tačke može biti vrlo složeno. U opštem slučaju kretanje materijalne tačke vrši se u prostoru, tako da je referentni sistem u kojem se opisuje ovo kretanje trodimenzionalan. Specijalno, ako se kretanje vrši u jednoj ravni, za opisivanje kretanja dovoljno je izabrati dvodimenzionalni koordinatni sistem.

4.1 Položaj, brzina i ubrzanje

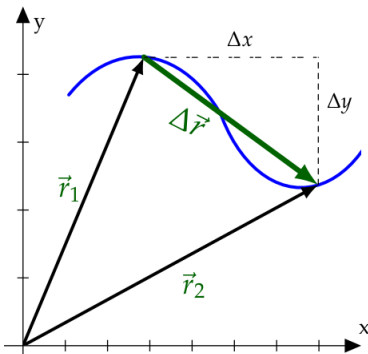
Fizikalna veličina koja određuje položaj tijela, koje se kreće u prostoru, naziva se vektor položaja i predstavlja vektor koji spaja ishodište koordinatnog sistema (ili referentno tijelo) i tačku u kojoj se tijelo, čije kretanje posmatramo, trenutno nalazi. Kao i svaki vektor, tako i vektor položaja \vec{r} možemo predstaviti preko njegovih komponenti. Uobičajeno je da se umjesto oznaka r_x, r_y i r_z koristi x, y, z kao prikaz komponenti vektora položaja. Prema tome, vektor položaja se može prikazati kao

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (4.1)$$

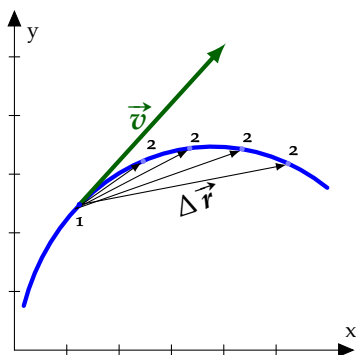
gdje su \vec{i}, \vec{j} i \vec{k} jedinični vektori x, y i z -ose, respektivno. Skup svih tačaka kroz koje prolazi tijelo čini krivu koju nazivamo trajektorija kretanja. Za slučaj kretanja u dvije dimenzije, vektor položaja, njego-



Slika 4.1: Vektor položaja.



Slika 4.2: Vektor pomaka.

Slika 4.3: Kada se vremenski interval Δt smanjuje, tačka 2 se približava tački 1 tako da se u limesu pravac vektora pomaka poklapa s tangentom na krivju u toj tački.

ve komponente i trajektorija kretanja prikazani su na slici (4.1)

Razlika između dva vektora položaja \vec{r}_1 i \vec{r}_2 u dva različita trenutka naziva se vektor pomaka $\Delta \vec{r}$. Vektor pomaka se može predstaviti preko komponenti kao

$$\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}, \quad (4.2)$$

gdje su Δx , Δy i Δz odgovarajuće komponente duž x , y i z ose respektivno (Slika 4.2).

Vektor pomaka nam može poslužiti da definišemo srednju brzinu tokom kretanja. Srednja brzina je vektorska veličina koja se definiše kao odnos vektora pomaka i vremenskog intervala u kojem se taj pomak napravi

$$\vec{v}_{sr} = \vec{v}_{sr} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}. \quad (4.3)$$

Pravac vektora srednje brzine se poklapa s pravcem vektora pomaka, a intenzitet srednje brzine jednak je $v_{sr} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$, gdje je Δr intenzitet vektora pomaka. Vektor srednje brzine možemo predstaviti preko njegovih komponenti kao

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} = \bar{v}_x \vec{i} + \bar{v}_y \vec{j} + \bar{v}_z \vec{k}, \quad (4.4)$$

gdje su \bar{v}_x , \bar{v}_y i \bar{v}_z komponente vektora srednje brzine.

Vektor trenutne brzine ćemo dobiti iz vektora srednje brzine kada uzmemo da vremenski interval Δt teži nuli

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (4.5)$$

Vektor trenutne brzine možemo prikazati preko komponenti kao

$$\vec{v} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k} = v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k}, \quad (4.6)$$

gdje su $v_x = \frac{dx}{dt}$, $v_y = \frac{dy}{dt}$ i $v_z = \frac{dz}{dt}$ komponente vektora trenutne brzine.

Već je ranije naglašeno da vektor srednje brzine ima pravac vektora pomaka $\Delta \vec{r}$. Da bismo odredili pravac vektora trenutne brzine razmotrimo situaciju prikazanu na slici 4.3. U slučaju kada vremenski interval Δt postaje sve kraći tačka 2 se kreće prema tački 1. Pravac vektora pomaka se pri tome mijenja na način da postaje sve bliži tangenti na trajektoriju u tački 1. Upravo će pravac vektora trenutne brzine u tački 1 biti jednak pravcu tangente u toj tački kada se uzme da vremenski interval Δt teži nuli. Možemo zaključiti da će se pravac vektora trenutne brzine u bilo kojoj tački prostora podudarati s tangentom na trajektoriju u toj tački prostora.

Vektor brzine možemo predstaviti preko komponenti kao što je navedeno ranije. U slučaju kretanja u dvije dimenzije, vektor brzine se može predstaviti preko komponenti v_x i v_y ili alternativno preko intenziteta vektora v i pravca vektora koji je određen uglom koji taj vektor zaklapa s pozitivnim smjerom x -ose (slika 4.4). Komponente vektora brzine mogu se predstaviti preko intenziteta vektora brzine i pravca vektora na slijedeći način

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad (4.7)$$

dok su intenzitet i pravac vektora izraženi preko komponenti kao

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{v_y}{v_x}. \quad (4.8)$$

Vektor srednjeg ubrzanja se definiše kao

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4.9)$$

i ima pravac i smjer vektora promjene brzine tijela $\Delta \vec{v}$ (slika 4.5). Vektor trenutnog ubrzanja je granična vrijednost srednjeg ubrzanja kada vremenski interval teži nuli, te se definiše kao

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (4.10)$$

a može se predstaviti preko komponenti a_x , a_y i a_z

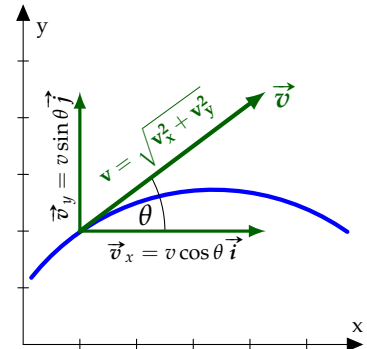
$$\vec{a} = \frac{dv_x}{dt} \vec{i} + \frac{dv_y}{dt} \vec{j} + \frac{dv_z}{dt} \vec{k} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}. \quad (4.11)$$

Pravac i smjer vektora trenutnog ubrzanja se poklapaju s pravcem i smjerom vektora priraštaja brzine $d\vec{v}$. Intenzitet i pravac vektora trenutnog ubrzanja, u slučaju kretanja u dvije dimenzije, se može izraziti preko njegovih komponenti $a_x = a \cos \theta$ i $a_y = a \sin \theta$ kao

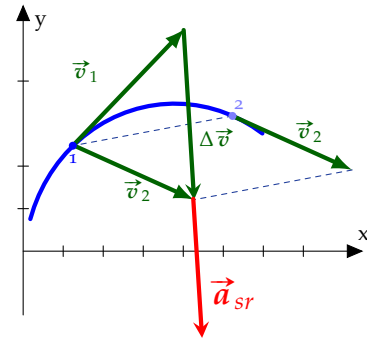
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \frac{a_y}{a_x}. \quad (4.12)$$

Za kretanje u jednoj ravni uobičajeno je da se vektor ubrzanja predstavlja preko tangencijalne i normalne komponente, o čemu će biti riječi u poglavlju 6. U slučaju kada je vektor ubrzanja konstantan, njegove komponente a_x , a_y i a_z se neće mijenjati u vremenu pa vrijede jednačine kretanja koje su izvedene u prethodnom poglavlju, tj.

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2, & y(t) &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2, \\ z(t) &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{aligned} \quad (4.13)$$



Slika 4.4: Vektor brzine prikazan preko komponenti.



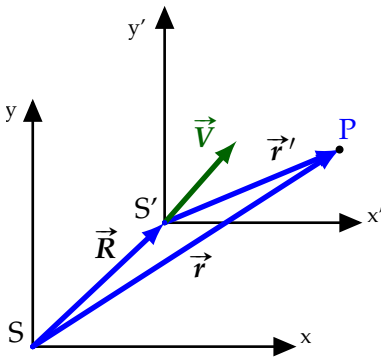
Slika 4.5: Vektor srednjeg ubrzanja.

$$v_x(t) = v_{0_x} + a_x t, \quad v_y(t) = v_{0_y} + a_y t, \quad v_z(t) = v_{0_z} + a_z t. \quad (4.14)$$

Uzimajući u obzir način kako su vektor položaja, vektor brzine i vektor ubrzanja razloženi preko komponenti, možemo napisati opšte jednačine kretanja u slučaju kada je vektor ubrzanja konstantan:

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \text{const.}, \\ \vec{v}(t) &= \vec{v}_0 + \vec{a}t, \\ \vec{r}(t) &= \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a}t^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

4.2 Relativno kretanje



Slika 4.6: Položaj materijalne tačke prikazane iz dva različita sistema referencije koji se kreću jedan u odnosu na drugi.

Kretanje nekog tijela smo opisali kao promjenu položaja tog tijela u odnosu na neko drugo, referentno tijelo. Postavlja se pitanje, šta i ako se drugo tijelo kreće u odnosu na neko treće. Npr. kretanje čamca nizvodno moguće je posmatrati u odnosu na obalu ili u odnosu na rijeku, koja se i sama kreće u odnosu na obalu. Automobil se kreće u odnosu na cestu određenom brzinom v , ali će mirovati u odnosu na drugi automobil koji se kreće u istom pravcu i smjeru i s istim intenzitetom brzine. Prema tome, fizikalne veličine koje opisuju kretanje tijela (položaj, brzina i ubrzanje) zavisice od toga šta izaberemo za referentno tijelo. Da bismo našli vezu između ovih veličina, kada se one određuju (mjere) iz dva različita sistema referencije, posmatrajmo kretanje materijalne tačke P iz sistema referencije S i S' . Neka se sistem S' kreće u odnosu na sistem S konstantnom brzinom \vec{V} . Vezu između vektora položaja materijalne tačke određenog u sistemu S i S' data je s (slika 4.6)

$$\vec{r} = \vec{r}' + \vec{R}, \quad (4.16)$$

gdje je \vec{R} vektor koji spaja ishodišta sistema S i S' . Ova relacija nam daje vezu između vektora položaja materijalne tačke određenog iz dva različita sistema referencije.

Da bismo našli vezu između vektora brzine materijalne tačke u dva različita sistema referencije, potražimo prvi izvod po vremenu prethodne relacije

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} + \frac{d\vec{R}}{dt}, \quad (4.17)$$

odnosno

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}. \quad (4.18)$$

Vežu između ubrzanja dva tijela nalazimo tako da nađemo prvi izvod po vremenu prethodne relacije

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{V}}{dt}, \quad (4.19)$$

$$\vec{a} = \vec{a}', \quad (4.20)$$

gdje smo iskoristili da se sistemi jedan u odnosu na drugi kreću konstantnom brzinom \vec{V} . Relacije (4.16), (4.18) i (4.20) su poznate kao Galilejeve transformacije.

4.3 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Dvije riječne luke se nalaze na istoj rijeci na međusobnom rastojanju od 2 km. Brzina riječnog toka iznosi $1,4 \text{ km h}^{-1}$. Motorni čamac može za 50 min otići od jedne do druge luke i vratiti se. Kolika je brzina čamca u odnosu na rijeku?

Rješenje:

Kretanje čamca možemo posmatrati iz referentnog sistema koji je vezan za rijeku ili referentnog sistema koji je vezan za obalu, tj. u odnosu na rijeku ili u odnosu na obalu. Ako je brzina čamca u odnosu na rijeku \vec{v}_1 , a njegova brzina u odnosu na obalu \vec{v}_2 , veza između ove dvije brzine data je relacijom

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{V}, \quad (1.1)$$

gdje je \vec{V} brzina jednog sistema u odnosu na drugi, tj. rijeke u odnosu na obalu. Sva tri vektora su usmjerena duž jednog pravca, pa projekcijom na odgovarajuću osu, npr. x -osu, dobijamo

$$v_{2n} = v_1 + V \quad (1.2)$$

kada se čamac kreće nizvodno i

$$-v_{2u} = -v_1 + V, \quad v_{2u} = v_1 - V \quad (1.3)$$

kada se čamac kreće uzvodno. Vrijeme putovanja čamca od jedne do druge luke i nazad iznosi $t = t_n + t_u$, gdje je $t_n = d/v_{2n}$ vrijeme putovanja nizvodno, a $t_u = d/v_{2u}$ vrijeme putovanja uzvodno. S d smo označili udaljenost između dvije luke. Prema tome, možemo pisati

$$t = \frac{d}{v_{2n}} + \frac{d}{v_{2u}} = \frac{d}{v_1 + V} + \frac{d}{v_1 - V} = \frac{2dv_1}{v_1^2 - V^2}. \quad (1.4)$$

Iz ove relacije dobijamo kvadratnu jednačinu

$$tv_1^2 - 2dv_1 - V^2t = 0 \quad (1.5)$$

čije je pozitivno rješenje

$$v_1 = \frac{d}{t} + \sqrt{\left(\frac{d}{t}\right)^2 + V^2}. \quad (1.6)$$

Uvrštavanjem vrijednosti za udaljenost između dvije luke d , ukupno vrijeme putovanja t i brzinu riječnog toka V dobijemo brzinu čamca u odnosu na rijeku $v_1 = 1,44 \text{ m s}^{-1}$.

ZADATAK 2: Plivač želi preplivati rijeku širine $d = 80 \text{ m}$. Pri tome nastoji da pliva okomito na tok rijeke brzinom $v_1 = 1 \text{ m s}^{-1}$. Nakon što je preplivao rijeku zaključio je da se nalazi $\Delta x = 40 \text{ m}$ nizvodno u odnosu na polaznu tačku.

- Kolika je brzina riječnog toka?
- Kolika je brzina plivača u odnosu na obalu?
- U kom pravcu bi trebao plivati da bi na drugu obalu došao na mjesto suprotno od polaznog?

Rješenje:

a) Na osnovu zakona transformacije brzina možemo pisati

$$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{V}, \quad (2.1)$$

gdje su \vec{v}_2 vektor brzine plivača u odnosu na obalu, \vec{v}_1 vektor brzine plivača u odnosu na rijeku i \vec{V} vektor brzine rijeke u odnosu na obalu (slika 4.7). Ugao α pod kojim se plivač kreće u odnosu na željeni pravac tj. okomicu možemo odrediti kao

$$\text{tg } \alpha = \frac{\Delta x}{d} = \frac{V}{v_1}, \quad (2.2)$$

pa je brzina riječnog toka

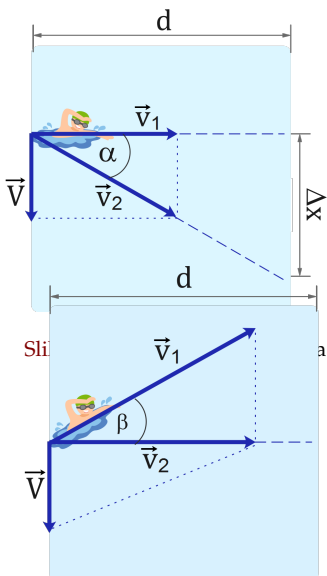
$$V = v_1 \frac{\Delta x}{d} = 1 \text{ m s}^{-1} \cdot \frac{40 \text{ m}}{80 \text{ m}} = 0,5 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.3)$$

b) Intenzitet brzine plivača u odnosu na obalu možemo odrediti kvadriranjem relacije (2.1) na osnovu čega dobijamo

$$v_2^2 = v_1^2 + V^2, \quad (2.4)$$

ili korištenjem definicije trigonometrijskih funkcija što vodi ka relacijama

$$v_2 = \frac{V}{\sin \alpha} = \frac{v_1}{\cos \alpha}, \quad (2.5)$$



Slika 2.8: Uz rješenje zadatka 2c.

gdje je $\alpha = \arctg \frac{1}{2} = 26,56^\circ$ ugao pod kojim se kreće plivač. U svim slučajevima dobijamo da je $v_2 = 1,12 \text{ m s}^{-1}$.

c) Da bi došao na mjesto koje je na drugoj obali nasuprot polaznog, plivač mora imati komponentu brzine suprotnu brzini riječnog toka, a njegova rezultujuća brzina v_2 mora biti usmjerena u pravcu koji je okomit na riječni tok. Sa slike 2.8 je očito da je

$$\sin \beta = \frac{V}{v_1}, \quad \beta = \arcsin \left(\frac{V}{v_1} \right) = 30^\circ. \quad (2.6)$$

ZADATAK 3: Avion leti brzinom od 250 km h^{-1} u odnosu na zrak. Pri tome puše vjetar u pravcu sjeveroistok-jugozapad brzinom 80 km h^{-1} .

a) Koji kurs mora držati pilot aviona da bi avion letio prema sjeveru?

b) Kolika je brzina aviona u odnosu na tlo?

Rješenje:

a) Neka je \vec{v}_1 brzina koju avion ima u odnosu na zrak i neka je \vec{V} brzina strujanja zraka u odnosu na tlo. Tada je brzina aviona u odnosu na tlo $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{V}$. Da bi avion letio prema sjeveru, vektor brzine \vec{v}_2 mora biti usmjeren upravo u tom pravcu, tj. u pravcu y -ose, kao što je prikazano na slici 4.9. Prema tome, x -komponenta vektora brzine \vec{v}_2 mora biti jednaka nuli pa za x -komponente vektora \vec{v}_1 i \vec{V} vrijedi $(\vec{v}_1)_x + (\vec{V})_x = 0$, odnosno

$$-V \sin 45^\circ + v_1 \sin \alpha = 0, \quad (3.1)$$

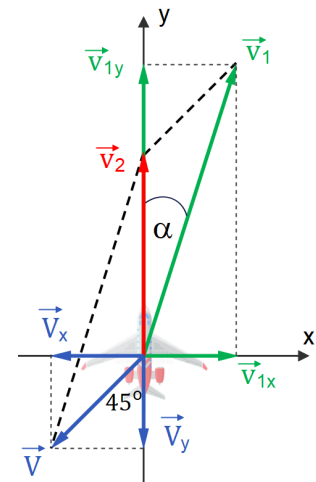
odakle je ugao α mjeran u odnosu na y -osu jednak

$$\alpha = \arcsin \left(\frac{V \sin 45^\circ}{v_1} \right) = 13,08^\circ. \quad (3.2)$$

b) Brzina aviona u odnosu na tlo je

$$\begin{aligned} v_2 &= v_{1y} + V_y = v_1 \cos \alpha - V \cos 45^\circ = \\ &= 250 \text{ km h}^{-1} \cdot \cos 13,08^\circ - 80 \text{ km h}^{-1} \cdot \cos 45^\circ, \end{aligned} \quad (3.3)$$

odakle dobijemo $v_2 = 186 \text{ km h}^{-1}$.



Slika 4.9: Uz rješenje zadatka 3.

ZADATAK 4: Riječni tok širine 200m ima brzinu od 2 m s^{-1} prema istoku. Motorni čamac napušta južnu obalu tako da mu je smjer vektora brzine određen uglom od 30° u pravcu sjeverozapada (u odnosu na pravac sjever-jug), a intenzitet vektora brzine čamca u odnosu na riječni tok iznosi 8 m s^{-1} .

- Koliki je intenzitet brzine čamca u odnosu na obalu?
- U kom pravcu se kreće čamac u odnosu na pravac sjever-jug?
- Koliko vremena je potrebno da čamac pređe rijeku?

Rješenje:

a) Ako je \vec{v}_1 brzina čamca u odnosu na riječni tok, a \vec{V} brzina riječnog toka, onda je $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{V}$ brzina čamca u odnosu na obalu. Kvadriranjem ove relacije dobijamo

$$v_2^2 = v_1^2 + V^2 + 2\vec{v}_1 \cdot \vec{V}, \quad (4.1)$$

odnosno

$$v_2 = \sqrt{v_1^2 + V^2 + 2v_1V \cos 120^\circ}, \quad (4.2)$$

gdje se sa slike 4.10 vidi da je ugao između vektora \vec{v}_1 i \vec{V} 120° . Uvrštavanjem vrijednosti za brzinu čamca v_1 i brzinu riječnog toka V dobijamo da je brzina čamca u odnosu na obalu $v_2 = 7,21 \text{ m s}^{-1}$.

b) Neka je β ugao između vektora brzine \vec{v}_2 i y -ose. Projekcijom jednačine $\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{V}$ na y -osu dobijamo

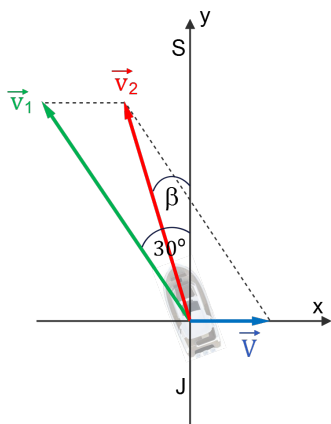
$$v_2 \cos \beta = v_1 \cos \alpha, \quad (4.3)$$

odakle je ugao pod kojim se kreće čamac u odnosu na pravac sjever-jug (y -osu) jednak

$$\beta = \arccos \left(\frac{v_1 \cos \alpha}{v_2} \right) = 16,1^\circ. \quad (4.4)$$

c) Čamac prelazi put dužine $s = d / \cos \beta$ krećući se brzinom v_2 za vrijeme

$$t = \frac{s}{v_2} = \frac{d}{\cos \beta \cdot v_2} = 28,9 \text{ s}. \quad (4.5)$$



Slika 4.10: Uz rješenje zadatka 4a.

ZADATAK 5: Spasilački avion leti na visini 500 m iznad površine mora konstantnom brzinom 60 m s^{-1} (slika 4.11). U jednom trenutku pilot mora ispustiti spasilačku kapsulu koja treba da padne na mjesto gdje se nalazi ugroženi plivač.

- Koliki mora biti ugao φ pod kojim pilot vidi plivača u trenutku ispuštanja kapsule?
- Kolika je brzina kapsule u trenutku kada padne na površinu mora?

Rješenje:

a) U trenutku kada avion ispusti kapsulu ona ima početnu brzinu u horizontalnom pravcu jednaku brzini aviona i kreće se pod uticajem sile Zemljine teže s konstantnim ubrzanjem g . Jednačine koje opisuju kretanje tijela s konstantnim ubrzanjem su

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (5.1)$$

Kako se tijelo kreće u ravni, neophodno je izabrati odgovarajući dvodimenzionalni sistem referencije i sve vektore iz prethodne dvije jednačine projektovati na ose tog koordinatnog sistema. Ako izaberemo koordinatni sistem kao na slici 4.11, dobićemo sljedeće skalarne jednačine koje opisuju kretanje

$$x(t) = x_0 + v_{0x} t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad v_x(t) = v_{0x} + a_x t, \quad (5.2)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2, \quad v_y(t) = v_{0y} + a_y t. \quad (5.3)$$

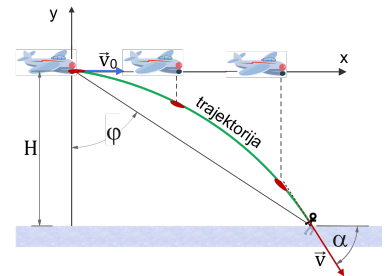
Naredni korak u postupku rješavanja zadatka ovog tipa jeste određivanje početnih uslova. Za izabrani koordinatni sistem možemo pisati: $x_0 = 0, v_{0x} = v_0, a_x = 0, y_0 = H, v_{0y} = 0$ i $a_y = -g$, gdje smo s H označili visinu tijela u početnom trenutku. Uvrštavanjem početnih uslova u prethodne jednačine dobijemo specifične jednačine koje opisuju kretanje ovog tijela koje se naziva horizontalni hitac

$$x(t) = v_0 t, \quad v_x(t) = v_0, \quad (5.4)$$

$$y(t) = H - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = -g t. \quad (5.5)$$

Kretanje duž horizontalnog pravca je opisano jednačinama ravnomjernog kretanja, a kretanje duž vertikalnog pravca jednačinama koje opisuju slobodan pad, pa možemo reći da je horizontalni hitac složeno kretanje koje predstavlja kombinaciju ravnomjernog kretanja duž horizontalnog pravca i slobodnog pada duž vertikalnog pravca.

Da bismo odredili ugao φ pod kojim pilot vidi plivača, neophodno je odrediti horizontalnu udaljenost na koju će pasti kapsula, tj. domet



Slika 4.11: Uz zadatak 5.

kapsule. Prvo ćemo odrediti trenutak padanja kapsule iz uslova da je visina, odnosno y -komponenta vektora položaja u trenutku pada jednaka nuli

$$y(t_p) = 0 \rightarrow H - \frac{1}{2}gt_p^2 = 0 \rightarrow t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (5.6)$$

Dometa tijela je onda jednak

$$x_D = x(t_p) = v_0 t_p = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 60 \text{ m s}^{-1} \sqrt{\frac{2 \cdot 500 \text{ m}}{9,81 \text{ m s}^{-2}}} = 605,8 \text{ m}. \quad (5.7)$$

Ugao φ je onda određen s

$$\text{tg } \varphi = \frac{x_D}{H} = \frac{605,8 \text{ m}}{500 \text{ m}} = 1,21 \rightarrow \varphi = \text{arctg}(1,21) = 50,46^\circ. \quad (5.8)$$

b) Brzina kapsule u proizvoljnom trenutku određena je jednačinama (5.4) i (5.5). U trenutku pada vrijedi

$$v_x(t_p) = v_0, \quad v_y(t_p) = -gt_p = -\sqrt{2gH}. \quad (5.9)$$

Intenzitet brzine u trenutku pada iznosi

$$v(t_p) = \sqrt{v_x^2(t_p) + v_y^2(t_p)} = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 115,8 \text{ m s}^{-1}, \quad (5.10)$$

a ugao pod kojim tijelo padne u odnosu na površinu vode

$$\text{tg } \alpha = \frac{v_y}{v_x} = -\frac{\sqrt{2gH}}{v_0} = -1,65, \quad \alpha = -58,8^\circ. \quad (5.11)$$

ZADATAK 6: Dječak baci kamen u more sa stijene visoke 40 m. Kamen je izbačen u horizontalnom pravcu početnom brzinom v_0 kao na slici 4.12. Ako dječak nakon 3 s čuje zvuk udaranja kamena o površinu vode, odrediti početnu brzinu kamena. Brzina zvuka u vazduhu je 343 m s^{-1} . Visina dječaka se može zanemariti u odnosu na visinu stijene.

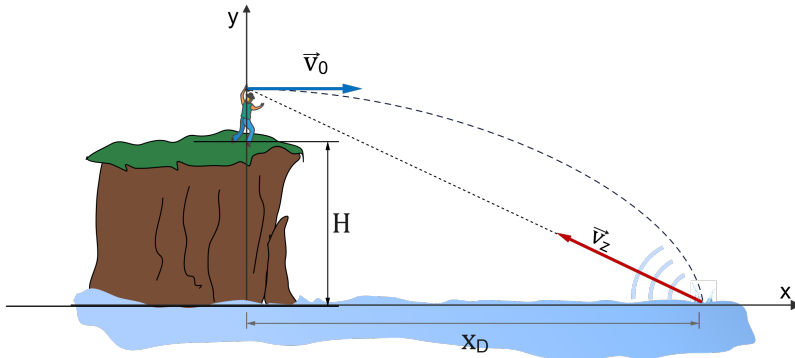
Rješenje:

Vremenski interval nakon kojeg dječak čuje zvuk udaranja kamena jednak je zbiru vremena leta kamena i vremena potrebnog da zvuk dospije od mjesta udara kamena do dječaka. Jednačine koje opisuju kretanje kamena u koordinatnom sistemu izabranom kao na slici 4.12 su

$$x(t) = v_0 t, \quad v_x(t) = v_0, \quad (6.1)$$

$$y(t) = H - \frac{1}{2}gt^2, \quad v_y(t) = -gt. \quad (6.2)$$

Slika 4.12: Uz zadatak 6.



Trenutak padanja određujemo, slično kao u prethodnom zadatku, iz uslova da je visina kamena u tom trenutku jednaka nuli

$$y(t_p) = 0 \rightarrow H - \frac{1}{2}gt_p^2 = 0 \rightarrow t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad (6.3)$$

a domet kamena kao $x_D = x(t_p)$, odnosno

$$x_D = x(t_p) = v_0 t_p = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}}. \quad (6.4)$$

Iz jednačine (6.3) možemo odrediti vrijeme leta kamena

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 40 \text{ m}}{9,81 \text{ m s}^{-2}}} = 2,856 \text{ s}. \quad (6.5)$$

Onda je vrijeme potrebno da zvuk dopiye od mjesta padanja kamena do dječaka jednako $t_z = t - t_p = 3 \text{ s} - 2,856 \text{ s} = 0,144 \text{ s}$. Zvuk od mjesta padanja do dječaka pređe put koji je jednak

$\sqrt{x_D^2 + H^2}$ brzinom v_z pa možemo pisati

$$\sqrt{x_D^2 + H^2} = v_z t_z, \quad (6.6)$$

odakle je

$$v_0^2 t_p^2 + H^2 = (v_z t_z)^2, \quad (6.7)$$

odnosno

$$v_0 = \frac{\sqrt{(v_z t_z)^2 - H^2}}{t_p} \quad (6.8)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti u prethodni izraz dobijemo da je $v_0 = 10,15 \text{ m s}^{-1}$.

ZADATAK 7: Košarkaš visok 2 m pokušava ubaciti loptu u koš s udaljenosti 10 m. Ako baci loptu pod uglom od 40° u odnosu na horizontalnu ravan, kolika mora biti njena početna brzina da bi ubacio loptu u koš? Kolika je brzina lopte u trenutku kada pogodi koš? Visina koša je 3,05 m.

Rješenje:

Lopta je izbačena početnom brzinom \vec{v}_0 pod uglom α i kreće se pod uticajem sile Zemljine teže s konstantnim ubrzanjem g . Ovakvo kretanje se naziva kosi hitac i opisano je jednačinama

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (7.1)$$

Ako izaberemo mjesto na kojem stoji košarkaš kao ishodište koordinatnog sistema kao na slici 4.13 onda su početni uslovi $x_0 = 0$, $y_0 = H$, $v_{0x} = v_0 \cos \alpha$, $v_{0y} = v_0 \sin \alpha$, $a_x = 0$ i $a_y = -g$ pa jednačine koje opisuju kretanje ovog tijela glase

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (7.2)$$

$$y(t) = H + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (7.3)$$

Kosi hitac se može posmatrati kao složeno kretanje koje je kombinacija ravnomjernog kretanja duž horizontalnog pravca brzinom $v_0 \cos \alpha$ i hica uvis s početnom brzinom $v_0 \sin \alpha$.

Zadatke u kojima se traži da se pogodi neka meta najlakše je riješiti tako da se koristi jednačina trajektorije $y(x)$. Ovu jednačinu možemo dobiti ako iz $x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t$ izrazimo vrijeme t i uvrstimo u $y(t)$. Slijedi

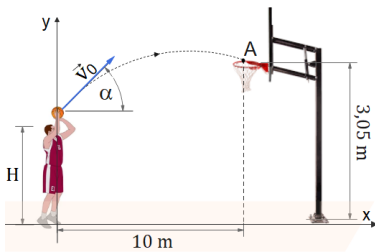
$$y(x) = H + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} - \frac{1}{2} \frac{g x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} = H + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (7.4)$$

Sada možemo iskoristiti uslov da je $y(x = 10 \text{ m}) = 3,05 \text{ m}$, tj. činjenicu da kada je horizontalna udaljenost lopte 10 m njena visina mora biti 3,05 m kako bi pogodila koš (tačka A na slici 4.13). Iz tog uslova i jednačine trajektorije dobijemo nepoznatu početnu brzinu v_0

$$v_0 = \sqrt{\frac{g x^2}{2 \cos^2 \alpha (H + \operatorname{tg} \alpha \cdot x - y)}}, \quad (7.5)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{9,81 \text{ m s}^{-2} (10 \text{ m})^2}{2 \cos^2(40^\circ) (2 \text{ m} + \operatorname{tg}(40^\circ) \cdot 10 \text{ m} - 3,05 \text{ m})}} = 10,67 \text{ m s}^{-1}. \quad (7.6)$$

Da bismo odredili brzinu kada lopta pogodi koš neophodno je prvo odrediti trenutak kada će lopta pogoditi koš. Iz jednačine kretanja



Slika 4.13: Uz rješenje zadatka 7.

dobijamo

$$x(t_p) = v_0 \cos \alpha \cdot t_p = 10 \text{ m} \rightarrow t_p = \frac{x(t_p)}{v_0 \cos \alpha} = \frac{10 \text{ m}}{10,67 \text{ m s}^{-1} \cos(40^\circ)}, \quad (7.7)$$

odnosno

$$t_p = 1,22 \text{ s}. \quad (7.8)$$

Intenzitet brzine lopte u trenutku kada pogodi koš iznosi

$$v(t_p) = \sqrt{v_x^2(t_p) + v_y^2(t_p)} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - g t_p)^2} \quad (7.9)$$

$$v(t_p) = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 \sin \alpha \cdot g t_p + g^2 t_p^2} = 9,64 \text{ m s}^{-1}. \quad (7.10)$$

ZADATAK 8: Kamen je bačen s tla pod određenim uglom tako da je njegova maksimalna visina jednaka njegovom dometu x_D (slika 4.14).

- Pod kojim uglom je kamen bačen?
- Koliki je maksimalni domet kamena, iskazan preko dometa x_D iz prethodnog dijela zadatka, ako je bačen istom početnom brzinom pod optimalnim uglom?

Rješenje:

a) Jednačine koje opisuju kretanje kamena su

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (8.1)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (8.2)$$

Maksimalnu visinu ćemo dobiti tako što ćemo prvo odrediti trenutak kada tijelo dostigne maksimalnu visinu iz uslova da je y -komponenta brzine u tom trenutku jednaka nuli

$$v_y(t_m) = v_0 \sin \alpha - g t_m = 0 \quad \rightarrow \quad t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8.3)$$

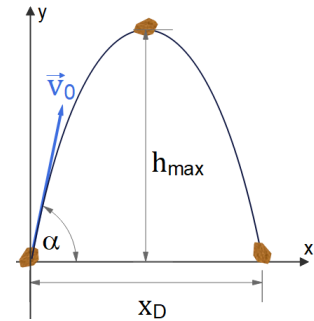
Maksimalna visina je

$$h_{\max} = y(t_m) = v_0 \sin \alpha \cdot t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} - \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}, \quad (8.4)$$

$$h_{\max} = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}. \quad (8.5)$$

Dometa ćemo odrediti tako što ćemo prvo odrediti trenutak kada kamen padne iz uslova $y(t_p) = 0$:

$$y(t_p) = v_0 \sin \alpha \cdot t_p - \frac{1}{2} g t_p^2 = 0 \quad \rightarrow \quad t_p (v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2} g t_p) = 0. \quad (8.6)$$



Slika 4.14: Uz zadatak 8.

Rješenje $t_p = 0$ odgovara početnom trenutku kretanja kada je y -komponenta vektora položaja također jednaka nuli, dok stvarni trenutak padanja dobijemo iz uslova da je izraz u zagradi prethodne jednačine jednaka nuli

$$(v_0 \sin \alpha - \frac{1}{2}gt_p) = 0 \quad \rightarrow \quad t_p = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (8.7)$$

Maksimalna horizontalna udaljenost kamena, odnosno njegov domet je

$$x_D = x(t_p) = v_0 \cos \alpha \cdot t_p = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}, \quad (8.8)$$

gdje smo iskoristili $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$. Iz uslova zadatka da je $h_{\max} = x_D$ dobijamo jednačinu

$$\frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g} = \frac{2v_0^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad (8.9)$$

čije je rješenje

$$\operatorname{tg} \alpha = 4 \quad \rightarrow \quad \alpha = 76^\circ. \quad (8.10)$$

b) Domet kamena koji je bačen pod uglom $\alpha = 76^\circ$ iznosi

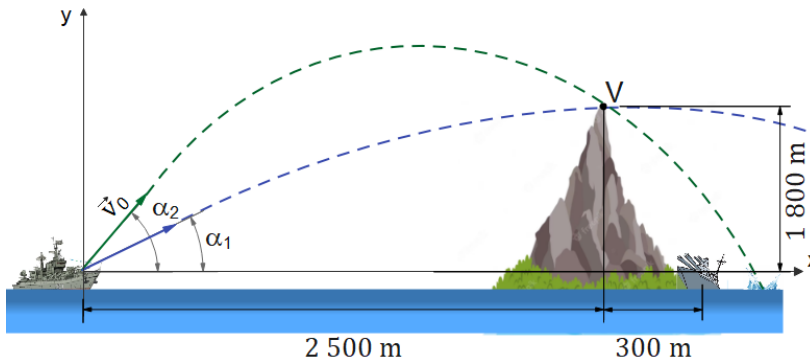
$$x_D = \frac{v_0^2 \sin(2 \cdot 76^\circ)}{g} = 0,47 \frac{v_0^2}{g} \quad (8.11)$$

Maksimalni domet se postiže kada se kamen izbacuje pod uglom od 45° i iznosi

$$x_{D \max} = \frac{v_0^2}{g}. \quad (8.12)$$

Na osnovu prethodne dvije jednačine dobijamo $x_{D \max} = 2,125x_D$.

ZADATAK 9: Neprijateljski brod se približio na udaljenost od 2500 m od središta planine visoke 1800 m, kao što je prikazano na slici 4.15, te može ispaljivati projektele s početnom brzinom od 250 m s^{-1} . Ako je istočna obala udaljena 300 m od središta planine, na kojoj udaljenosti od obale se može naći vaš brod, a da ne bude pogođen iz neprijateljskog broda?



Slika 4.15: Uz zadatak 9.

Rješenje:

U ovom zadatku ćemo prvo naći interval uglova za koji će projektil preći preko vrha planine, a zatim ćemo za ove granične vrijednosti uglova odrediti domet projektila. Neka je ishodište referentnog sistema vezano za tačku u kojoj se projektil ispali. Da bi prošao vrh planine (tačka V na slici 4.15), u graničnom slučaju, mora vrijediti $y(x = 2500 \text{ m}) = 1800 \text{ m}$. Dakle opet imamo slučaj gdje za datu horizontalnu udaljenost znamo kolika je vertikalna udaljenost tijela, tj. visina tijela pa je pogodno koristiti jednačinu trajektorije

$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (9.1)$$

Iz ove jednačine neophodno je naći ugao (uglove) za koji će projektil proći neposredno iznad vrha planine. Iskoristićemo trigonometrijski identitet

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \operatorname{tg}^2 \alpha + 1, \quad (9.2)$$

pa naša jednačina trajektorije postaje

$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2}, \quad (9.3)$$

odnosno

$$\frac{gx^2}{2v_0^2} \operatorname{tg}^2 \alpha - x \operatorname{tg} \alpha + \frac{gx^2}{2v_0^2} + y = 0, \quad (9.4)$$

$$gx^2 \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha - 2v_0^2 x \cdot \operatorname{tg} \alpha + gx^2 + 2v_0^2 y = 0, \quad (9.5)$$

što predstavlja kvadratnu jednačinu po $\operatorname{tg} \alpha$. Rješenje ove jednačine je

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{2v_0^2 x \pm \sqrt{4v_0^4 x^2 - 4gx^2(gx^2 + 2v_0^2 y)}}{2gx^2}, \quad (9.6)$$

odnosno nakon uvrštavanja početne brzine projektila $v_0 = 250 \text{ m s}^{-1}$, horizontalne udaljenosti $x = 2500 \text{ m}$ i vertikalne udaljenosti $y = 1800 \text{ m}$ vrha planine, dobijamo

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = 1,2 \quad \rightarrow \quad \alpha_1 = 50,14^\circ, \quad (9.7)$$

i

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = 3,9 \quad \rightarrow \quad \alpha_2 = 75,62^\circ. \quad (9.8)$$

Prema tome, jedino za početne uglove izbacivanja koji su u intervalu $(50,14^\circ, 75,62^\circ)$ projektil će preći preko vrha planine.

Domet projektila se može odrediti na osnovu jednačine trajektorije i uslova $y(x_D) = 0$

$$y(x_D) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x_D - \frac{gx_D^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = 0. \quad (9.9)$$

Odnosno

$$x_D \left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{gx_D}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0. \quad (9.10)$$

Rješenje $x_D = 0$ odgovara početnom položaju tijela, kada je visina y također jednaka nuli. Drugo rješenje za koje je zagrada u prethodnom izrazu jednaka nuli odgovara stvarnom dometu pa dobijamo

$$x_D = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g}, \quad (9.11)$$

gdje smo iskoristili $2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha = 2 \cos \alpha \sin \alpha = \sin(2\alpha)$. Domet projektila za uglove α_1 i α_2 iznosi

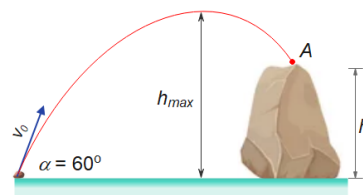
$$x_{D1} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_1)}{g} = 6268 \text{ m}, \quad (9.12)$$

$$x_{D2} = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha_2)}{g} = 3065 \text{ m}, \quad (9.13)$$

i ujedno predstavlja najveći i najmanji domet projektila pod uslovom da projektil pređe preko vrha planine. Prema tome, brod je siguran ako se nalazi na udaljenosti manjoj od $x_1 = 3065 \text{ m} - 300 \text{ m} - 2500 \text{ m} = 265 \text{ m}$ u odnosu na obalu ili udaljenosti većoj od $x_2 = 6268 \text{ m} - 300 \text{ m} - 2500 \text{ m} = 3468 \text{ m}$ u odnosu na obalu.

ZADATAK 10: Kamen je bačen početnom brzinom 42 m s^{-1} pod uglom od $\alpha = 60^\circ$ prema stijeni visine h . Kamen pada u tačku A $5,5 \text{ s}$ nakon izbacivanja (slika 4.16).

- a) Odrediti visinu stijene.
 b) Kolika je brzina kamena neposredno prije pada na stijenu?
 c) Kolika je maksimalna visina koju dostigne kamen?



Slika 4.16: Uz zadatak 10.

Rješenje:

a) Jednačine koje opisuju kretanje kamena su

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (10.1)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - g t. \quad (10.2)$$

Iz druge jednačine možemo odrediti vertikalnu udaljenost na koju će kamen pasti, odnosno visinu u trenutku padanja, što je ujedno i visina stijene. Jednostavnim uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo

$$h(t_p) = v_0 \sin \alpha \cdot t_p - \frac{1}{2} g t_p^2 = \quad (10.3)$$

$$= 42 \text{ m s}^{-1} \sin 60^\circ \cdot 5,5 \text{ s} - \frac{1}{2} 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (5,5 \text{ s})^2 \quad (10.4)$$

$$h = h(t_p) = 51,67 \text{ m}. \quad (10.5)$$

b) Komponente brzine kamena u trenutku pada (slika 4.17) možemo odrediti na osnovu jednačina kretanja, te zatim odrediti intenzitet brzine kao

$$v(t_p) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - g t_p)^2}. \quad (10.6)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo $v(t_p) = 27,39 \text{ m s}^{-1}$. Ugao pod kojim kamen padne na stijenu određen je s

$$\text{tg } \beta = \frac{v_y}{v_x} = \frac{v_0 \sin \alpha - g t_p}{v_0 \cos \alpha} = -0,837 \rightarrow \beta = -40^\circ. \quad (10.7)$$

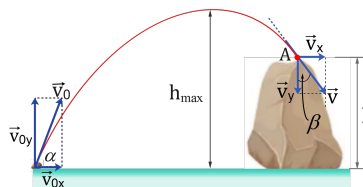
c) Maksimalnu visinu ćemo dobiti iz uslova da je y -komponenta brzine, u trenutku kada se dostigne maksimalna visina, jednaka nuli

$$v_y(t_m) = v_0 \sin \alpha - g t_m = 0 \rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (10.8)$$

Maksimalna visina je

$$h_{\max} = y(t_m) = v_0 \sin \alpha \cdot t_m - \frac{1}{2} g t_m^2 = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{g}. \quad (10.9)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijemo da je $h_{\max} = 67,43 \text{ m}$.



Slika 4.17: Uz rješenje zadatka 10b.

ZADATAK 11: Fudbaler udara loptu pod uglom od 45° tako da ona neposredno nakon udara ima brzinu od $19,5 \text{ m s}^{-1}$. Drugi fudbaler, koji se nalazi na udaljenosti 55 m od prvog, počinje trčati kako bi

uhvatio loptu. Kolika mora biti srednja brzina drugog fudbalera da bi uhvatio loptu prije nego padne na tlo? Visinu fudbalera zanemariti.

Rješenje:

Ovdje posmatramo kretanje dva tijela: lopte i fudbalera koji nastoji uhvatiti loptu. Kretanje lopte je kosi hitac, a kretanje fudbalera ravnomjerno po horizontalnom pravcu. Jednačine koje opisuju kretanje lopte su

$$x_1(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad v_{x1}(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (11.1)$$

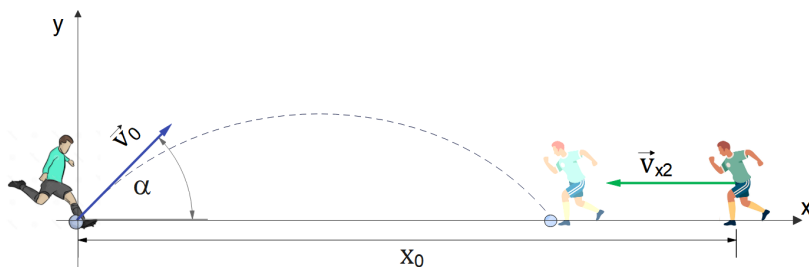
$$y_1(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad v_{y1}(t) = v_0 \sin \alpha - g t, \quad (11.2)$$

a fudbalera

$$x_2 = x_0 + \bar{v}_{x2} t, \quad (11.3)$$

gdje je \bar{v}_{x2} srednja brzina drugog fudbalera. Uslov koji mora biti is-

Slika 4.18: Uz rješenje zadatka 11.



punjen da bi fudbaler uhvatio loptu jeste da je u trenutku pada lopte pozicija lopte ista kao i pozicija fudbalera, odnosno $x_1(t_p) = x_2(t_p)$ (vidi sliku 4.18). Trenutak padanja lopte možemo odrediti iz uslova da je y_1 u trenutku padanja jednako nuli. Iz ovog uslova dobijamo

$$t_p = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = \frac{2 \cdot 19,5 \text{ m s}^{-1} \sin(45^\circ)}{9,81 \text{ m s}^{-2}} = 2,81 \text{ s}. \quad (11.4)$$

Sada možemo iskoristiti činjenicu da je položaj lopte u trenutku pada isti kao i položaj fudbalera, odnosno

$$x_1(t_p) = x_2(t_p) \quad \rightarrow \quad v_0 \cos \alpha \cdot t_p = x_0 + \bar{v}_{x2} t_p. \quad (11.5)$$

Iz prethodne relacije dobijamo

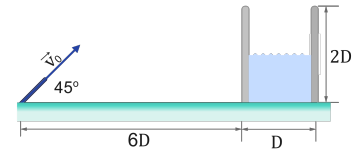
$$\bar{v}_{x2} = \frac{v_0 \cos \alpha \cdot t_p - x_0}{t_p} = \frac{19,5 \text{ m s}^{-1} \cdot \cos(45^\circ) \cdot 2,81 \text{ s} - 55 \text{ m}}{2,81 \text{ s}}, \quad (11.6)$$

odnosno

$$\bar{v}_{x2} = -5,78 \text{ m s}^{-1}. \quad (11.7)$$

Predznak minus u prethodnoj relaciji nam govori da se fudbaler kretao u suprotnom smjeru u odnosu na pozitivan smjer x -ose, odnosno prema fudbaleru koji je udario loptu. Intenzitet njegove srednje brzine je $\bar{v}_2 = 5,78 \text{ m s}^{-1}$. Inače, domet lopte je 38,8 m, pa da bi fudbaler (koji se prvobitno nalazio na udaljenosti 55 m) uhvatio loptu, jasno je da on mora trčati prema fudbaleru koji je udario loptu.

ZADATAK 12: Da bi se napunio rezervoar vode visine $2D$ i diametra D , koristi se šlauf za vodu postavljen na udaljenost $6D$ od rezervoara (slika 4.19). Šlauf za vodu je postavljen pod uglom od 45° . Odrediti za koji raspon početnih brzina će voda ulaziti u rezervoar.



Slika 4.19: Uz zadatak 12.

Rješenje:

Obzirom da se rezervoar nalazi na takvoj udaljenosti pri kojoj je ugao pod kojim se vidi vrh rezervoara manji od 45° , mlaz vode će biti u silaznoj putanji na ovoj udaljenosti i voda će moći ulaziti u rezervoar. Interval početnih brzina mora biti takav da mlaz prelazi vrh lijeve stijenke rezervoara, ali da istovremeno ne prelazi vrh desne stijenke. Granične vrijednosti ovog intervala ćemo odrediti iz uslova da mlaz vode dodiruje lijevi odnosno desni vrh stijenke rezervoara. Minimalnu vrijednost početne brzine ćemo, prema tome odrediti iz uslova da je $y(6D) = 2D$, a maksimalnu iz uslova $y(7D) = 2D$. Jednačina trajektorije glasi

$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (12.1)$$

Za minimalnu brzinu vrijedi

$$2D = \operatorname{tg} \alpha \cdot 6D - \frac{g(6D)^2}{2v_{0\min}^2 \cos^2 \alpha}. \quad (12.2)$$

Kako je $\operatorname{tg} 45^\circ = 1$ i $\cos^2 45^\circ = \frac{1}{2}$ iz prethodne jednačine dobijamo

$$\frac{36gD^2}{v_{0\min}^2} = 4D, \quad (12.3)$$

odnosno

$$v_{0\min} = 3\sqrt{gD}. \quad (12.4)$$

Za maksimalnu vrijednost brzine možemo pisati

$$2D = \operatorname{tg} \alpha \cdot 7D - \frac{g(7D)^2}{2v_{0\max}^2 \cos^2 \alpha}, \quad (12.5)$$

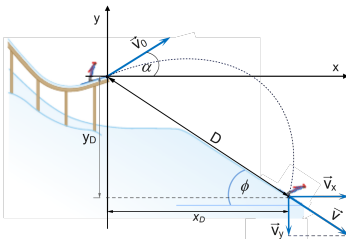
odakle je

$$v_{0\max} = \frac{7}{\sqrt{5}}\sqrt{gD} = 3,13\sqrt{gD}. \quad (12.6)$$

Prema tome, voda će ulaziti u rezervoar ako su vrijednosti početnih brzina u intervalu $v_0 \in (3\sqrt{gD}, 3, 13\sqrt{gD})$.

ZADATAK 13: Skakač napušta rampu skakaonice brzinom 10 m s^{-1} pod uglom 15° . Nagib doskočne zone iznosi 50° i otpor zraka se može zanemariti. Odrediti:

- udaljenost na koju će skakač doskočiti mjereno od rampe skakaonice.
- komponente brzine neposredno prije doskoka.



Slika 4.20: Uz rješenje zadatka 13.

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je ishodište koordinatnog sistema postavljeno na kraju rampe skakaonice odnosno u tačku u kojoj skakač odskoči, kao na slici 4.20. Jednačina trajektorije skakača je parabola i ona je određena s

$$y_1(x) = \operatorname{tg} \alpha \cdot x - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (13.1)$$

Doskočna zona određena je pravcem

$$y_2(x) = -\operatorname{tg} \phi \cdot x, \quad (13.2)$$

jer je nagib pravca negativan i iznosi $\operatorname{tg} \phi$. Mjesto na kojem se parabola, koja predstavlja jednačinu trajektorije, i ovaj pravac sijeku je mjesto doskoka skakača. Prema tome, u tački doskoka x_D vrijedi $y_1(x_D) = y_2(x_D)$, odnosno

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot x_D - \frac{gx_D^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} = -\operatorname{tg} \phi \cdot x_D. \quad (13.3)$$

Odavde je

$$x_D = \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\operatorname{tg} \phi + \operatorname{tg} \alpha). \quad (13.4)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijemo da je $x_D = 27,76 \text{ m}$. Vrijednost y -komponente vektora položaja u trenutku doskoka iznosi $y_D = y_1(x_D) = y_2(x_D) = -\operatorname{tg} \phi \cdot x_D = -33,09 \text{ m}$. Udaljenost na koju će skakač doskočiti iznosi

$$D = \sqrt{x_D^2 + y_D^2} = 43,19 \text{ m}. \quad (13.5)$$

b) Trenutak doskoka t_D odredit ćemo iz jednačine

$$x_D = v_0 \cos \alpha \cdot t_D. \quad (13.6)$$

Iz prethodne relacije dobijamo da je $t_D = 2,87 \text{ s}$. Komponente brzine u trenutku doskoka su

$$v_x = v_0 \cos \alpha = 9,66 \text{ m s}^{-1}, \quad (13.7)$$

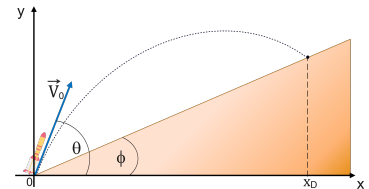
i

$$v_y = v_0 \sin \alpha - g t_D = -25,6 \text{ m s}^{-1}. \quad (13.8)$$

Intenzitet brzine skakača u trenutku doskoka je $27,36 \text{ m s}^{-1}$.

ZADATAK 14: Projektil je izbačen duž strme ravni (nagibnog ugla ϕ) početnom brzinom v_0 pod uglom θ u odnosu na horizontalnu ravan (slika 4.21).

- Odrediti udaljenost d na koju će projektil pasti.
- Za koju vrijednost početnog ugla θ je ova udaljenosti maksimalna i koliko iznosi?



Slika 4.21: Uz zadatak 14.

Rješenje:

a) Slično kao i u prethodnom zadatku mjesto na koje će tijelo pasti možemo odrediti iz uslova da se jednačina trajektorije i jednačina strme ravni sijeku u tački pada tijela. Jednačina trajektorije je

$$y_1(x) = \text{tg } \alpha \cdot x - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}, \quad (14.1)$$

a odgovarajuća jednačina strme ravni

$$y_2(x) = \text{tg } \phi \cdot x. \quad (14.2)$$

Iz uslova $y_1(x_D) = y_2(x_D)$ dobijamo

$$x_D = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} (\text{tg } \alpha - \text{tg } \phi) = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha}{g \cos \phi} (\sin \alpha \cos \phi - \cos \alpha \sin \phi), \quad (14.3)$$

odnosno

$$x_D = \frac{2 v_0^2 \cos \alpha \sin(\alpha - \phi)}{g \cos \phi}, \quad (14.4)$$

gdje smo iskoristili trigonometrijske identitete $\text{tg } \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$ i $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$.

b) Ugao za koji domet ima maksimalnu vrijednost određujemo iz uslova da je prvi izvod funkcije $x_D(\alpha)$ po uglu α jednak nuli. Kako nam funkcija $x_D(\alpha)$ samo kroz brojnik zavisi od ugla α dovoljno je naći maksimum funkcije $\cos \alpha \sin(\alpha - \phi)$. Prvi izvod ove funkcije po α je

$$\begin{aligned} [\cos \alpha \sin(\alpha - \phi)]' &= -\sin \alpha \sin(\alpha - \phi) + \cos \alpha \cos(\alpha - \phi) = \\ &= \cos(2\alpha - \phi), \end{aligned} \quad (14.5)$$

gdje smo iskoristili trigonometrijski identitet

$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$. Funkcija ima ekstrem kada je

prvi izvod jednak nuli odnosno za $\cos(2\alpha - \phi) = 0$. Iz ovog uslova dobijamo da je domet maksimalan ako se tijelo izbací pod uglom $\alpha = 45^\circ + \frac{\phi}{2}$. Vrijednost maksimalnog dometa iznosi

$$x_{D\max} = \frac{2v_0^2 \cos(45^\circ + \frac{\phi}{2}) \sin(45^\circ - \frac{\phi}{2})}{g \cos \phi} = \frac{v_0^2(1 - \sin \phi)}{g \cos \phi}, \quad (14.6)$$

gdje smo iskoristili $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$. Vidimo da ukoliko je $\phi = 0$ vrijednost maksimalnog dometa iznosi $x_{D\max} = v_0^2/g$ što smo dobili ranije.

ZADATAK 15: Loptica za stoni tenis padne s male visine h na vrh strme ravni nagibnog ugla α te se od nje elastično odbije. Odrediti trenutke i tačke u kojima će loptica udariti o strmu ravan.

Rješenje:

Loptica se pusti da slobodno pada i kreće se pod uticajem sile Zemljine teže. Kako je visina s koje se loptica pusti relativno mala, brzina loptice tokom kretanja će biti dovoljno niska da se otpor zraka može zanemariti. Do prvog udara o strmu ravan loptica slobodno pada. U trenutku prvog udara o strmu ravan $t_0 = \sqrt{2h/g}$ loptica ima brzinu

$$v_0 = \sqrt{2gh}. \quad (15.1)$$

Loptica se elastično odbije o strmu ravan te je njen intenzitet brzine neposredno nakon sudara sa strmom ravni isti kao i neposredno prije sudara, a ugao odbijanja je isti kao i upadni ugao. Nakon sudara loptica se kreće kao kosi hitac, a njeno kretanje je u opštem slučaju određeno jednačinama

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2, \quad \vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} t. \quad (15.2)$$

Pri rješavanju ovog zadatka pogodno je izabrati referentni sistem tako da jedna osa bude u pravcu strme ravni. U tom slučaju će biti neophodno vektor ubrzanja rastaviti na komponente. Pored toga, kretanje loptice ćemo opisivati od jednog do drugog udara sukcesivno. Neka početni trenutak $t_0 = 0$ odgovara trenutku prvog udara loptice o strmu ravan i neka je α ugao strme ravni. Tada će vektor početne brzine \vec{v}_0 biti usmjeren pod uglom α u odnosu na y -osu kako je prikazano na slici 4.22. Komponente vektora početne brzine su

$$v_{0x} = v_0 \sin \alpha, \quad v_{0y} = v_0 \cos \alpha, \quad (15.3)$$

a komponente vektora ubrzanja

$$a_x = g \sin \alpha, \quad a_y = -g \cos \alpha. \quad (15.4)$$

Jednačine kretanja loptice, projektovane na x i y -osu su

$$x(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2, \quad v_x(t) = v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot t, \quad (15.5)$$

$$y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2, \quad v_y(t) = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot t. \quad (15.6)$$

Trenutak drugog udara loptice o strmu ravan t_1 dobijamo iz uslova da je $y(t_1) = 0$ odnosno

$$\cos \alpha \cdot t_1 \left(v_0 - \frac{g t_1}{2} \right) = 0. \quad (15.7)$$

Oдавde slijedi

$$t_1 = \frac{2v_0}{g}. \quad (15.8)$$

Poziciju drugog udara možemo odrediti uvrštavanjem trenutka t_1 u izraza za $x(t)$:

$$x_1 = x(t_1) = v_0 \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2v_0}{g} \right)^2 = \frac{4v_0^2 \sin \alpha}{g} = 8h \sin \alpha. \quad (15.9)$$

Komponente brzine loptice prilikom drugog udara su

$$v_{1x} = v_x(t_1) = v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = 3v_0 \sin \alpha, \quad (15.10)$$

$$v_{1y} = v_y(t_1) = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0 \sin \alpha. \quad (15.11)$$

Nakon udara x -komponenta brzine ostaje nepromijenjena, a y -komponenta brzine mijenja svoj predznak pa će ove vrijednosti brzina biti početne brzine za period kretanja između drugog i trećeg sudara.

Jednačine kretanja za period od drugog do trećeg sudara su

$$x(t) = x_0 + 3v_0 \sin \alpha \cdot t + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot t^2, \quad v_x(t) = 3v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot t, \quad (15.12)$$

$$y(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cos \alpha \cdot t^2, \quad v_y(t) = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot t, \quad (15.13)$$

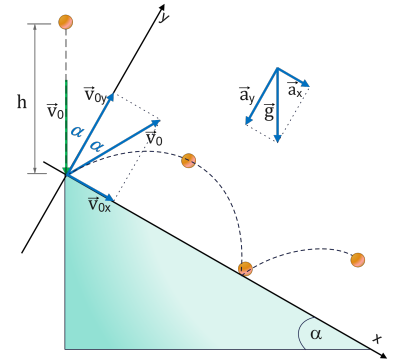
gdje je $x_0 = 8h \sin \alpha$ položaj tijela nakon prvog udara.

Trenutak trećeg udara t_2 (kojeg mjerimo od trenutka drugog udara) određujemo opet iz uslova $y(t_2) = 0$ te dobijemo

$$t_2 = \frac{2v_0}{g}, \quad (15.14)$$

a položaj trećeg udara x_2 mjereno od početka strme ravni

$$\begin{aligned} x_2 &= x_0 + 3v_0 \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{1}{2} g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2v_0}{g} \right)^2 = x_0 + \frac{8v_0^2 \sin \alpha}{g} \\ &= 8h \sin \alpha + 2 \cdot 8h \sin \alpha = (1 + 2) \cdot 8h \sin \alpha. \end{aligned} \quad (15.15)$$



Slika 4.22: Uz rješenje zadatka 15.

Komponente brzine loptice prilikom trećeg udara su

$$v_{2x} = v_x(t_2) = 3v_0 \sin \alpha + g \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = 5v_0 \sin \alpha, \quad (15.16)$$

$$v_{2y} = v_y(t_2) = v_0 \cos \alpha - g \cos \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} = -v_0 \sin \alpha. \quad (15.17)$$

Položaj pri četvrtom udaru, mjereno od početka strme ravni, će biti

$$\begin{aligned} x_3 &= x_0 + 5v_0 \sin \alpha \cdot \frac{2v_0}{g} + \frac{1}{2}g \sin \alpha \cdot \left(\frac{2v_0}{g}\right)^2 = x_0 + \frac{12v_0^2 \sin \alpha}{g} \\ &= x_0 + 3 \cdot 8h \sin \alpha \end{aligned} \quad (15.18)$$

gdje je $x_0 = x_2 = (1 + 2) \cdot 8h \sin \alpha$ položaj nakon trećeg udara. Prema tome, položaj tijela nakon četvrtog udara je određen sa

$$x_3 = (1 + 2 + 3) \cdot 8h \sin \alpha. \quad (15.19)$$

Možemo zaključiti da će položaj tijela nakon $n + 1$ udara biti određen sa

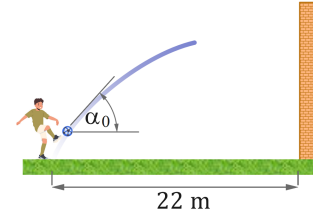
$$x_n = (1 + 2 + 3 + \dots + n) \cdot 8h \sin \alpha = \frac{n(n+1)}{2} 8h \sin \alpha. \quad (15.20)$$

Iz prethodnih relacija vidimo da će y -komponenta početne brzine pri svakom udaru biti ista te će zbog toga i vrijeme leta između dva sudara biti isto i iznosiće $2v_0/g$. Ukoliko vrijeme mjerimo od trenutka puštanja loptice, zaključujemo da će trenutak prvog udara biti $t_0 = \sqrt{2h/g}$, trenutak drugog udara $t_1 = t_0 + 2v_0/g = t_0 + 2\sqrt{2h/g}$, trećeg $t_2 = t_1 + 2v_0/g = t_0 + 4\sqrt{2h/g}$, odnosno u opštem slučaju trenutak $n + 1$ udara

$$t_n = t_0 + 2n\sqrt{\frac{2h}{g}} = (1 + 2n)\sqrt{\frac{2h}{g}}. \quad (15.21)$$

ZADATAK 16: Dječak nogom udari loptu prema zidu brzinom $v_0 = 25 \text{ m s}^{-1}$ i pod uglom od $\alpha_0 = 40^\circ$. Udaljenost dječaka od zida je 22 m (slika 4.23).

- Na kojoj visini će lopta pogoditi zid?
- Kolika je brzina lopte u tom trenutku?
- Gdje će lopta ponovo pasti?



Slika 4.23: Uz zadatak 16.

Rješenje:

a) Kretanje tijela se može modelirati kao kosi hitac pa jednačine kretanja za koordinatni sistem izabran kao na slici 4.24 glase:

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha_0 \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha_0 - gt \quad (16.1)$$

$$x(t) = v_0 \cos \alpha_0 \cdot t \quad y(t) = v_0 \sin \alpha_0 \cdot t - \frac{1}{2}gt^2. \quad (16.2)$$

Na osnovu prethodnih relacija možemo odrediti jednačinu trajektorije kao

$$y(x) = \operatorname{tg} \alpha_0 \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha_0} x^2 \quad (16.3)$$

Sada je jednostavno odrediti visinu na udaljenosti od 22 m.

$$y(x = 22 \text{ m}) = \operatorname{tg} 40^\circ \cdot 22 \text{ m} - \frac{9,81 \text{ m s}^{-2}}{2(25 \text{ m s}^{-1})^2 \cos^2 40^\circ} (22 \text{ m})^2 = 12 \text{ m}. \quad (16.4)$$

b) Prvo ćemo odrediti trenutak udara iz uslova $x(t_u) = 22 \text{ m}$

$$t_u = \frac{x}{v_0 \cos \alpha_0} = \frac{22 \text{ m}}{25 \text{ m s}^{-1} \cdot \cos 40^\circ} = 1,15 \text{ s} \quad (16.5)$$

Komponente brzine u tom trenutku su

$$v_x(t_u) = v_0 \cos \alpha_0 = 19,15 \text{ m s}^{-1}, \quad (16.6)$$

$$v_y(t_u) = v_0 \sin \alpha_0 - gt_u = 4,79 \text{ m s}^{-1}. \quad (16.7)$$

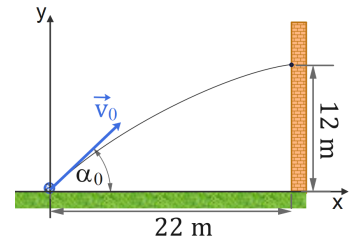
Vidimo da je y -komponenta brzine pozitivna, što znači da je u trenutku udara tijelo još uvijek bilo u uzlaznoj putanji (slika 4.25). Intenzitet brzine u trenutku udara je

$$v(t_u) = \sqrt{v_x^2(t_u) + v_y^2(t_u)} = 19,74 \text{ m s}^{-1}, \quad (16.8)$$

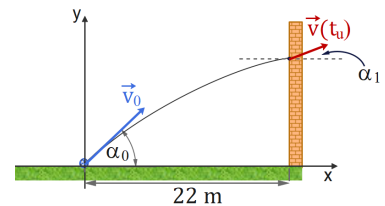
a pravac vektora brzine

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \frac{v_y(t_u)}{v_x(t_u)} = 14^\circ. \quad (16.9)$$

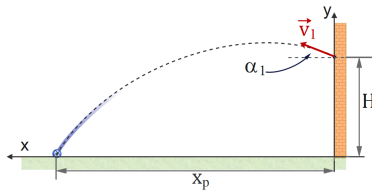
c) Neophodno je opisati kretanje lopte nakon udara o zid. Pretpostavimo da je sudar bio idealno elastičan. To znači da će brzina lopte



Slika 4.24: Uz rješenje zadatka 16a.



Slika 4.25: Uz rješenje zadatka 16b.



Slika 4.26: Uz rješenje zadatka 17c.

neposredno nakon udara biti jednaka brzini neposredno prije udara i iznosiće $v_1 = 19,74 \text{ m s}^{-1}$, dok će ugao pod kojim se lopta odbila biti jednak $\alpha_1 = 14^\circ$. Kretanje tijela je ponovo kosi hitac, ali sada s visine $H = 12 \text{ m}$. Ako sada izaberemo koordinatni sistem tako da je ishodište u tački u kojoj se nalazi zid i ako je x -osa okrenuta na lijevo kao na slici 4.26, jednačine kretanja su

$$x(t) = v_1 \cos \alpha_1 \cdot t, \quad y(t) = H + v_1 \sin \alpha_1 \cdot t - \frac{1}{2} g t^2. \quad (16.10)$$

Mjesto na kojem će tijelo pasti možemo naći pomoću jednačine trajektorije koja sada glasi

$$y(x) = H + \text{tg } \alpha_1 \cdot x - \frac{g}{2v_1^2 \cos^2 \alpha_1} x^2 \quad (16.11)$$

U trenutku kada tijelo pada vrijedi $y(x_p) = 0$. Prema tome, dobijamo slijedeću kvadratnu jednačinu

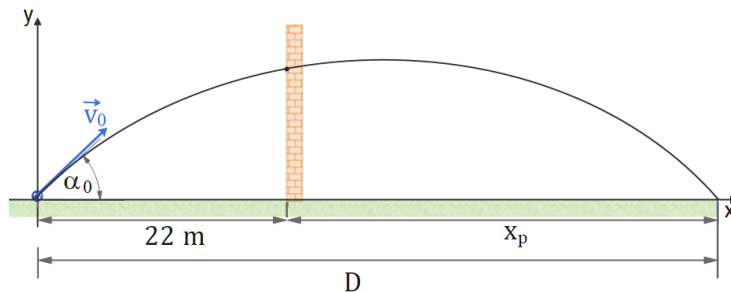
$$\frac{g}{2v_1^2 \cos^2 \alpha_1} x_p^2 - \text{tg } \alpha_1 \cdot x_p - H = 0 \quad (16.12)$$

Rješenja ove jednačine su

$$x_{p1,2} = \frac{\text{tg } \alpha_1 \pm \sqrt{\text{tg}^2 \alpha_1 + \frac{2gH}{v_1^2 \cos^2 \alpha_1}}}{\frac{g}{v_1^2 \cos^2 \alpha_1}} \quad (16.13)$$

Ovdje treba uzeti rješenje s pozitivnim predznakom tako da tražena udaljenost iznosi $x_p = 40,76 \text{ m}$. Ovaj dio zadatka se može riješiti jed-

Slika 4.27: Dodatak uz rješenje zadatka 16c.



nostavnije ako bi se posmatralo kretanje tijela bez da se desi sudar, tj. da se tijelo kreće bez interakcije sa zidom (slika 4.27). Tada bi dolet tijela bio $D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha_0}{g} = 62,74 \text{ m}$. To znači da bi se tijelo kretalo prvih 22 m do tačke gdje se nalazi zid, a ostalih $62,74 \text{ m} - 22 \text{ m} = 40,74 \text{ m}$ kretalo bi se od tačke gdje se nalazi zid. Prema tome, udaljenost mjesta gdje tijelo pada iznosi 40,74 m.

ZADATAK 17: U svakom trenutku horizontalni položaj meteorološkog balona je definisan s $x = 8t$. Ako je jednačina njegove putanje $y = x^2/10$, odrediti intenzitet i pravac vektora brzine i vektora ubrzanja balona u trenutku $t = 2$ s.

Rješenje:

Komponente vektora brzine se dobiju kao prvi izvod odgovarajućih komponenti vektora položaja po vremenu. Komponenta položaja balona duž x -ose je data kao funkcija vremena, tako da je x -komponenta njegove brzine

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ m s}^{-1}. \quad (17.1)$$

Vidimo da v_x ne zavisi od vremena, tj. ostaje konstantna u toku kretanja. S druge strane, y -koordinata balona nije direktno izražena preko vremena, već kao trajektorija balona $y = y(x)$. Kada u jednačinu trajektorije uvrstimo $x(t)$ dobijamo zavisnost y -koordinate od vremena kao

$$y = y(t) = \frac{x^2}{10} = \frac{64t^2}{10}, \quad (17.2)$$

te se y -komponenta brzine dobije kao

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{64t^2}{10} \right) = \frac{64}{10} 2t = \frac{64}{5} t, \quad (17.3)$$

te je njena vrijednost u datom trenutku

$$v_y(t = 2 \text{ s}) = \frac{64}{5} 2 = 25,6 \text{ m s}^{-1}. \quad (17.4)$$

Vektor brzine u datom trenutku ima pravac tangente na datu trajektoriju (slika 4.28). Pravac vektora brzine možemo odrediti uglom θ , koji je s komponentama brzine povezan relacijom

$$\text{tg } \theta = \frac{v_y}{v_x} \implies \theta = 72,6^\circ. \quad (17.5)$$

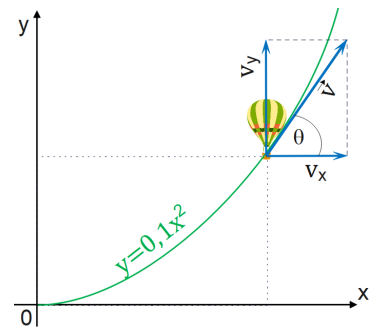
Intenzitet brzine iznosi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 26,8 \text{ m s}^{-1}. \quad (17.6)$$

Komponente ubrzanja balona određujemo kao prvi izvod odgovarajućih komponenti vektora brzine po vremenu:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(8) = 0, \quad (17.7)$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{64}{5} t \right) = \frac{64}{5} = 12,8 \text{ m s}^{-2}. \quad (17.8)$$



Slika 4.28: Uz rješenje zadatka 17.

Intenzitet vektora ubrzanja je onda

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{0 + 12,8^2} = 12,8 \text{ m s}^{-2}, \quad (17.9)$$

a njegov pravac

$$\text{tg } \theta_a = \frac{a_y}{a_x} \implies \theta_a = 90^\circ. \quad (17.10)$$

4.4 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Čestica se kreće u xy ravni stalnim ubrzanjem. U početnom trenutku se nalazi u tački s koordinatama $(4 \text{ m}, 3 \text{ m})$ i ima brzinu $\vec{v}_0 = (2 \text{ m s}^{-1})\vec{i} + (-9 \text{ m s}^{-1})\vec{j}$. Ako joj je ubrzanje dato s $\vec{a} = (4 \text{ m s}^{-1})\vec{i} + (3 \text{ m s}^{-2})\vec{j}$, odrediti:

- brzinu u trenutku $t = 2 \text{ s}$,
- položaj u trenutku $t = 4 \text{ s}$,
- intenzitet vektora položaja i njegov smjer.

$$(\vec{v} = (10 \text{ m s}^{-1})\vec{i} + (-3 \text{ m s}^{-1})\vec{j}), \vec{r} = (44 \text{ m})\vec{i} + (-9 \text{ m})\vec{j}, r(4 \text{ s}) = 44,9 \text{ m}, \theta = -11,6^\circ)$$

Zadatak 2: Neka čestica A se kreće paralelno s x -osom po pravoj $y = 30 \text{ m}$ stalnom brzinom \vec{v} intenziteta 3 m s^{-1} . U trenutku kada se nađe u tački s koordinatama $(0, 30 \text{ m})$, iz koordinatnog ishodišta kreće čestica B stalnim ubrzanjem \vec{a} intenziteta $0,4 \text{ m s}^{-2}$. Koji ugao θ treba da zaklapa vektor ubrzanja \vec{a} s y -osom da dođe do sudara ovih čestica? ($\theta = 60^\circ$)

Zadatak 3: Avion, koji može letjeti brzinom od 500 km h^{-1} u odnosu na vazduh, treba da stigne na odredište koje je udaljeno 800 km prema sjeveru. Pilot je zaključio da mora letjeti pod uglom od 20° prema istoku da bi u obzir uzeo i uticaj vjetra. Odrediti:

- intenzitet vektora brzine vjetra,
- pravac u kojem vjetar puše.

$$(v = 185 \text{ km h}^{-1}, \theta = 22,3^\circ)$$

Zadatak 4: Voz putuje brzinom 30 m s^{-1} prema jugu. Pri tome pada kiša tako da je, zbog vjetra, ugao između pravca kretanja svake kapi kiše i vertikalnog pravca 70° , posmatrano iz sistema koji miruje. Međutim posmatrač koji se nalazi u vozu vidi kapi kiše kako padaju

vertikalno. Odrediti intenzitet vektora brzine kapi kiše u odnosu na tlo. ($v = 32 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 5: Motorni čamac počne da se kreće iz stanja mirovanja konstantnom akceleracijom 3 m s^{-2} prema sjeveru. Nakon 20 s čamac skrene prema zapadu i kreće se konstantnom brzinom još narednih 10 s.

- Kolika je srednja brzina čamca tokom njegovog kretanja?
- Koliko je srednje ubrzanje čamca u toku prvih 30 s kretanja?
- Koliki je pomak napravio čamac?

$$(\vec{v}_{sr} = 20 \text{ m s}^{-1}(-\vec{i} + \vec{j}), \vec{a}_{sr} = -2 \text{ m s}^{-2}\vec{i}, \Delta\vec{r} = 600 \text{ m}(-\vec{i} + \vec{j}))$$

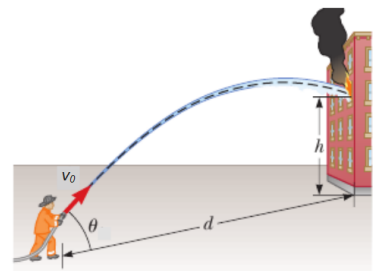
Zadatak 6: Čovjek ima dovoljno goriva u svom gliseru da stigne do marine. To uzvodno putovanje traje 4 h. Utvrdivši da je marina zatvorena za sezonu, on provodi sljedećih 8 h plutajući nazad nizvodno do njegove kolibe. Cijelo putovanje je trajalo 12 h. Koliko bi to putovanje trajalo da je kupio gorivo u marini? Pretpostavimo da je uticaj vjetra zanemariv. ($t = 6 \text{ h}$)

Zadatak 7: Mala loptica se kotrlja po stolu visine 1,2 m i pada s njegovog ruba, te udara od pod u tački udaljenoj 1,52 m horizontalno u odnosu na rub stola. Koliko dugo je loptica bila u zraku? Kolika joj je brzina u trenutku kada napusti stol? ($t = 0,495 \text{ s}$, $v = 3,07 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 8: Dvije lopte su bačene jednakom brzinom s vrha litice visine h . Jedna lopta je bačena pod uglom α iznad horizontale. Druga lopta je bačena pod uglom β ispod horizontale. Dokazati da svaka lopta udari o tlo istom brzinom te izraziti tu brzinu u zavisnosti od h i početne brzine v_0 . ($v = \sqrt{v_0^2 - 2gh}$)

Zadatak 9: Avion, ponirući stalnom brzinom pod uglom 53° u odnosu na vertikalnu ($-y$ pravac), ispusti projektil kada se nađe na visini od 730 m. Projektil pogađa tlo 5 s kasnije. Kolika je brzina aviona? Koliku horizontalnu udaljenost pređe projektil u toku svog kretanja? Kolike su horizontalna i vertikalna komponenta njegove brzine neposredno prije udara od tlo? ($v = 202 \text{ m s}^{-1}$, $d = 806 \text{ m}$, $v_x = 161 \text{ m s}^{-1}$, $v_y = -171 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 10: Vatrogasac, koji se nalazi na udaljenosti d od zgrade koja gori, usmjerio je mlaz vode pod uglom θ u odnosu na horizontalnu ravan (slika 4.29). Ako je početna brzina vode v_0 odrediti na kojoj će visini mlaz vode udariti u zgradu. ($h = d \tan \theta - \frac{gd^2}{2v_0^2 \cos^2 \theta}$)



Slika 4.29: Uz zadatak 10.

Zadatak 11: Radnik na krovu kuće ispušta čekić koji klizi niz krov konstantnom brzinom 4 m s^{-1} . Nagib krova je 30° , a najniža tačka mu je 10 m od tla. Kolika je horizontalna udaljenost koju čekić pređe između trenutka kada napusti krov kuće i trenutka kada udari o tlo? ($d = 4,29 \text{ m}$)

Zadatak 12: Djevojka baca loptu na okomiti zid udaljen 4 m . Lopta je 2 m iznad zemlje kada napusti djevojčinu ruku početnom brzinom $\vec{v}_0 = (10 \text{ m s}^{-1})(\vec{i} + \vec{j})$. Gdje lopta udara o tlo nakon elastičnog sudara sa zidom? Savjet: Zid se može zamisliti kao ogledalo. Odrediti domet, zanemariti zid, a zatim razmotriti odraz poput ogledala. ($d = 18,2 \text{ m}$)

Zadatak 13: Strijelac ispaljuje strijelu brzinom od 45 m s^{-1} pod uglom od 50° u odnosu na horizontalu. Pomoćnik, koji stoji na ravnom terenu 150 m od lansirne tačke, baca jabuku pravo uvis minimalnom početnom brzinom potrebnom da dostigne putanju strijele.

- Kolika je početna brzina jabuke?
- U koje vrijeme nakon lansiranja strijele treba baciti jabuku tako da strijela pogodi jabuku?

$$(v_{0j} = 30,3 \text{ m s}^{-1}, t = 2,09 \text{ s})$$

Zadatak 14: Čestica se kreće paraboličnom putanjom $y = bx^2$. Ako je njena komponenta brzine duž y -ose $v_y = ct^2$, odrediti x i y -komponente ubrzanja te čestice. Koeficijenti b i c su konstante. ($x = \sqrt{\frac{c}{3b}} t^{\frac{3}{2}}$, $a_x = \frac{3}{4} \sqrt{\frac{c}{3b}} \frac{1}{\sqrt{t}}$, $a_y = 2ct$)

Zadatak 15: Neko tijelo se kreće duž krive $y = x - (\frac{x^2}{400})$, gdje su x i y -u metrima. Ako je komponenta brzine u smjeru x -ose $v_x = 2 \text{ m s}^{-1}$ i ostaje konstantna tokom kretanja, odrediti intenzitet brzine i ubrzanja u položaju $x = 20 \text{ m}$. ($v = 2,69 \text{ m s}^{-1}$, $a = 0,02 \text{ m s}^{-2}$)

NEWTONOVI ZAKONI

5.1	Koncept sile	103
5.2	Prvi Newtonov zakon	107
5.3	Drugi Newtonov zakon	109
5.4	Treći Newtonov zakon	110
5.5	Riješeni zadaci	111
5.6	Zadaci za vježbu	129

U prethodnim poglavljima smo razmatrali različite oblike kretanja tijela bez da smo razmatrali uzrok tog kretanja. U okviru ovog poglavlja želimo istražiti i opisati uzroke kretanje tijela. Iz iskustva nam je poznato da ako jednu jabuku pustimo iz ruke, ona će se kretati sve dok ne dotakne podlogu, a ako je stavimo na sto ona će mirovati. Jabuka koju pustimo da pada, kreće se zbog prisustva drugog tijela, u ovom slučaju Zemlje, a jabuka koja miruje, ostaje u tom stanju zbog prisustva još jednog trećeg tijela, u ovom slučaju stola. Prema tome, možemo zaključiti da će na kretanje jednog tijela uticati prisustvo drugih tijela. Uticaj jednog tijela na kretanje drugog opisujemo pomoću koncepta međudjelovanja odnosno interakcije tih tijela.

U primjeru s jabukom, koji smo naveli, u jednom slučaju međudjelovanje se prenosi bez neposrednog kontakta (međudjelovanje između jabuke i Zemlje), a u drugom neposrednim kontaktom (međudjelovanje između jabuke i stola). U prvom slučaju međudjelovanje se prenosi putem fizičkog polja. To polje može biti gravitaciono (kao u primjeru s jabukom), elektrostatičko, magnetno itd.

5.1 Koncept sile

Ranije smo kretanje tijela definisali kao promjenu položaja tog tijela u odnosu na neko drugo referentno tijelo (ili u odnosu na posma-

trača). Zatim smo definisali skup fizikalnih veličina (vektor položaja, brzine i ubrzanja) koje opisuju kretanje tijela. Ovdje smo utvrdili da je kretanje tijela uzrokovano međudjelovanjem s drugim tijelima. Bilo bi prirodno definisati skup fizikalnih veličina koje opisuju takvo međudjelovanje. Jedna od tih veličina je sila. Sila, prema tome, predstavlja fizikalnu veličinu kojom se kvantificira međudjelovanje (interakcija) između dva ili više tijela, odnosno, drugim riječima, sila predstavlja mjeru interakcije između dva ili više tijela. Sila je vektorska veličina koja određuje pravac, smjer i intenzitet međudjelovanja između dva ili više tijela.

U mehanici je pogodno sve sile podijeliti u dvije skupine: fundamentalne sile i kontaktne sile. Fundamentalne sile su:

- gravitaciona,
- elektromagnetna,
- slaba,
- i jaka sila.

Gravitaciona i elektromagnetna sila su dalekodosežne (dalekodometne) sile, prenose se putem gravitacionog odnosno elektromagnetnog polja i njihov intenzitet opada s kvadratom rastojanja od izvora sile. Slaba i jaka sila su kratkodosežne (kratkodometne), odgovorne su uglavnom za interakcije na nivou atomskih jezgri i elementarnih čestica i ne igraju nikakvu značajnu ulogu u razmatranju mehaničkih problema i kretanja makroskopskih tijela. Intenzitet gravitacione sile između dva tijela masa m_1 i m_2 , koja se nalaze na međusobnoj udaljenosti r (slika 5.1), dat je Newtonovim zakonom gravitacije

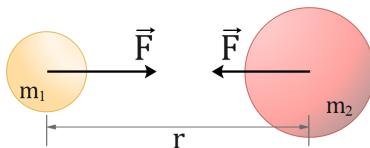
$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (5.1)$$

gdje je γ univerzalna gravitaciona konstanta čija je vrijednost $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$. Gravitaciona sila između tijela mase m i Zemlje na površini Zemlje, tj. na udaljenosti R_z od centra Zemlje, može se prema tome pisati kao

$$F = \gamma \frac{m M_z}{R_z^2}, \quad (5.2)$$

gdje je M_z masa Zemlje. Ako se pretpostavi da je Zemlje idealna sfera, onda radijus Zemlje R_z ima konstantnu vrijednost, a obzirom da su univerzalna gravitaciona konstanta γ i masa Zemlje M_z također konstantne, možemo zaključiti da gravitaciona sila na tijelo mase m , koje se nalazi na površini Zemlje, iznosi

$$F = mg, \quad (5.3)$$



Slika 5.1: Gravitaciona sila između dva tijela masa m_1 i m_2 obrnuto je proporcionalna kvadratu njihovog rastojanja r .

gdje je $g = \gamma \frac{M_Z}{R_Z^2}$. Ovu silu ćemo obično označavati s \vec{G} (slika 5.2.) Treba naglasiti da veličina g , koja se naziva gravitaciono ubrzanje, nije uvijek konstantna zbog toga što Zemlja nije idealna sfera i njen radijus se neznatno mijenja. Pored toga, da bismo dobili ukupnu silu koja djeluje na tijelo koje se nalazi na površini Zemlje, treba u obzir uzeti i rotaciju Zemlje (o tome će biti riječi kasnije). Ukupno ubrzanje tijela, koje nastaje zbog gravitacionog međudjelovanja tijela s planetom Zemljom i zbog rotacije Zemlje, nazivamo ubrzanjem Zemljine teže. Ono se u praksi neznatno razlikuje od gravitacionog ubrzanja, te se i samo obilježava slovom g i iznosi za našu geografsku širinu $9,81 \text{ m s}^{-2}$.

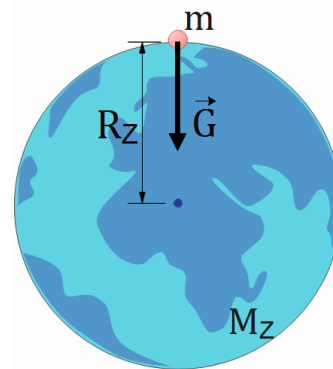
Kontaktne sile se javljaju između dva ili više tijela kada su ona u neposrednom kontaktu, tj. kada se dodiruju. Neke od kontaktnih sila su

- sila reakcije podloge,
- sila zatezanja užeta,
- sila trenja,
- elastična sila opruge.

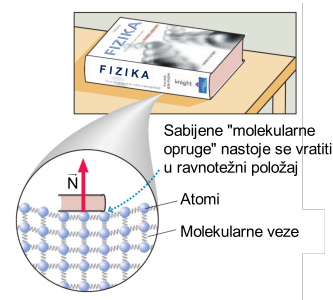
Sve kontaktne sile, kada se razmatraju na makroskopskom nivou, mogu se svesti na neku od fundamentalnih. Obično je to elektromagnetska.

Razmotrimo primjer gdje jedna knjiga miruje na površini stola (slika 5.3). Knjiga svojom težinom vrši pritisak na površinu stola. Zbog toga se rastojanje između atoma u molekulama materijala od kojeg je napravljen sto smanjuje, tj. molekule se sabijaju. Interakcija između atoma u molekulama ili unutar kristalne rešetke je takva da između njih djeluje privlačna sila ako se atomi pomjere na udaljenost veću od ravnotežnog položaja, odnosno odbojna sila ako se približe na udaljenost koja je manja od ravnotežne udaljenosti. Stoga se molekularne veze mogu modelirati jednostavnim oprugama koje nastoje da atome vrte u njihov ravnotežni položaj. Pošto se svaki atom u površinskom sloju nastoji vratiti u svoj ravnotežni položaj, svaki od tih atoma će djelovati nekom silom na knjigu. Sabiranjem svih tih sila dobije se jedna makroskopska sila koju nazivamo sila reakcije podloge. Sila reakcije podloge uvijek ima pravac koji je okomit na podlogu. Ovu silu ćemo obično označavati s \vec{N} .

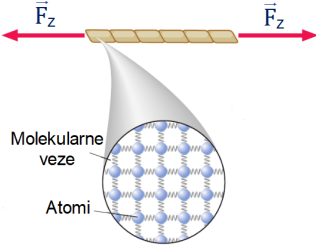
Kada se uže, konac ili neka žica nastoje istegnuti, onda se javlja kontaktna sila koju nazivamo sila zatezanja. Da bismo zaključili šta uzrokuje silu zatezanja ponovo ćemo se vratiti na molekularni nivo i koristiti model u kojem molekularne veze između atoma predstavljamo kao opruge (Slika 5.4). Kada nastojite istegnuti neko uže onda će



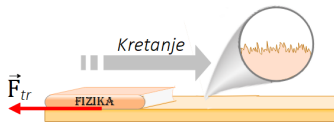
Slika 5.2: Gravitaciona sila kojom Zemlja djeluje na tijelo mase m uvijek je usmjerena prema centru Zemlje i obilježava se s \vec{G} .



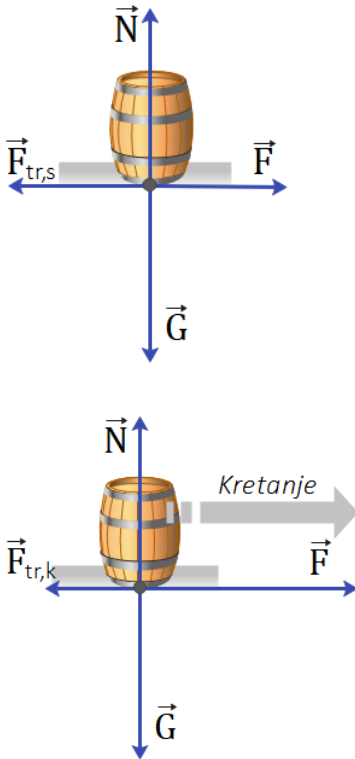
Slika 5.3: Sila reakcije podloge nastaje zbrajanjem svih mikroskopskih sila kojim atomi površinskog sloja djeluju na knjigu (tijelo na podlozi) pri nastojanju da se vrte u svoj ravnotežni položaj.



Slika 5.4: Silu zatezanja uzrokuju atomi koji se zbog molekularnih veza nastoje vratiti u svoj ravnotežni položaj.



Slika 5.5: Silu trenja uzrokuju neravnine na površini podloge koje mogu doći do izražaja tek ako se površina posmatra na mikroskopskom (molekularnom) nivou.



Slika 5.6: Dok tijelo miruje intenzitet statičke sile trenja jednak je intenzitetu vanjske sile \vec{F} (gore). Ako postepeno povećavamo intenzitet sile \vec{F} tijelo se u jednom trenutku počne kretati i tada na njega djeluje kinetička sila trenja (dole).

se rastojanje između atoma unutar tog užeta povećavati. Molekularne veze (opruge) će nastojati da atome vrate u njihov ravnotežni položaj. "Opruge" će na svaki atom djelovati određenom silom, a suma svih tih mikroskopskih sila daje jednu makroskopsku koju nazivamo sila zatezanja. Sila zatezanja uvijek djeluje u pravcu užeta. Ovu silu ćemo obično označavati s \vec{T} ili \vec{F}_z .

Kada se neko tijelo nalazi na podlozi, onda se pored sile reakcije podloge javlja i sila trenja. Ova sila, za razliku od sile reakcije podloge, ima pravac koji je u pravcu tangente na podlogu. Silu trenja, između ostalog, uzrokuju neravnine na površini podloge koje mogu doći do izražaja tek ako se površina posmatra na mikroskopskom (molekularnom) nivou (slika 5.5). Silu trenja je pogodno razmatrati odvojeno za slučaj kada se tijelo kreće i slučaj kada tijelo miruje. Tada govorimo o kinetičkoj odnosno statičkoj sili trenja. Kinetička sila trenja, koju ćemo označavati s $\vec{F}_{tr,k}$ ili alternativno s \vec{f}_k , javlja se kada se tijelo kreće po podlozi nekom brzinom \vec{v} . Smjer kinetičke sile trenja uvijek je suprotan smjeru kretanja tijela, tj. smjeru vektora brzine \vec{v} . Intenzitet kinetičke sile trenja je konstantan i iznosi

$$F_{tr,k} = \mu_k N, \quad (5.4)$$

gdje je μ_k kinetički koeficijent trenja, koji zavisi od vrste podloge, a N intenzitet sile reakcije podloge.

Kada tijelo miruje na podlozi, onda se između tijela i podloge može javiti statička sila trenja (nju ćemo označavati s $\vec{F}_{tr,s}$ ili alternativno s \vec{f}_s). Statička sila trenja nema konstantnu vrijednost. Vrijednost ove sile zavisi od intenziteta drugih sila koje djeluju u tangencijalnom pravcu. Razmotrimo primjer u kojem nastojimo silom \vec{F} pomjeriti neko tijelo na podlozi kao što je prikazano na slici 5.6 (nazovimo ovu silu vanjska sila). Sve dok tijelo miruje rezultujuća sila jednaka je nuli. To znači da mora postojati sila koja je jednakog intenziteta i pravca kao i vanjska sila \vec{F} , a koja ima suprotan smjer kako bi kompenzirala djelovanje sile \vec{F} . Ta sila je upravo statička sila trenja jer ona sprečava da se tijelo pokrene. Prema tome, možemo zaključiti da je intenzitet statičke sile trenja jednak intenzitetu tangencijalne komponente (komponente koja je u pravcu tangente na površinu) rezultujuće vanjske sile (vektorski zbir svih vanjskih sila), a da je njen smjer suprotan smjeru tangencijalne komponente rezultujuće vanjske sile. Ako postepeno povećavamo silu \vec{F} onda će u nekom trenutku intenzitet te sile biti veći od maksimalnog intenziteta statičke sile trenja i tijelo će početi da se kreće. Poslije toga na tijelo djeluje kinetička sila trenja. Maksimalna vrijednost statičke sile trenja jednaka je

$$F_{tr,s,max} = \mu_s N, \quad (5.5)$$

gdje je μ_s statički koeficijent trenja koji je uvijek veći od kinetičkog μ_k . Grafički prikaz zavisnosti sile trenja od intenziteta vanjske sile dat je na slici 5.7.

Sila kojom opruga djeluje na tijelo koje je okačeno na nju u trenutku kada je sabijena ili izdužena naziva se elastična sila opruge. Intenzitet ove sile proporcionalan je samom izduženju opruge, a smjer zavisi od toga da li je opruga sabijena ili izdužena. Pretpostavimo da je tijelo okačeno o oprugu koja je postavljena duž x -ose kao na slici 5.8. Kada je opruga izdužena (slučaj a), tj. položaj tijela x pozitivan, elastična sila djeluje tako da nastoji tijelo vratiti u ravnotežni položaj, tj. u negativnom smjeru x -ose, pa je njena x -komponenta negativna. Ako se tijelo nalazi u ravnotežnom položaju (slučaj b) izduženje je jednako nuli, pa je i elastična sila jednaka nuli. Ukoliko se opruga sabije (slučaj c) sila djeluje u pozitivnom smjeru x -ose, pa je komponenta vektora elastične sile opruge pozitivna. Prema tome, komponentu vektora elastične sile možemo pisati kao

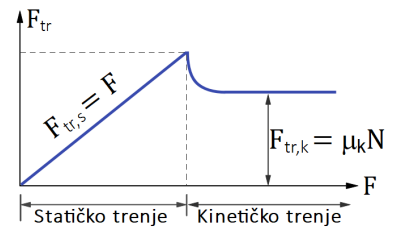
$$F_{el} = -kx, \quad (5.6)$$

gdje je k koeficijent elastičnosti opruge, a x izduženje opruge.

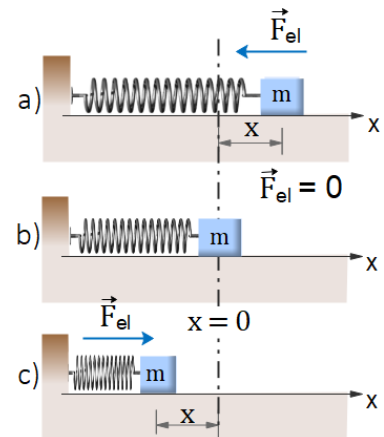
5.2 Prvi Newtonov zakon

Zakone klasične mehanike formulisao je slavni engleski fizičar i matematičar Isaac Newton u drugoj polovini 17. vijeka. On je bio prvi koji je našao vezu između sile, kao uzroka kretanja i ubrzanja kao posljedice. Newton je klasičnu mehaniku formulisao aksiomatski kroz tri aksioma tj. tvrdnje koje su očigledne da se ne dokazuju (iako su to aksiomi, mi ih danas nazivamo zakonima). Ti aksiomi odnosno zakoni se nazivaju Newtonovi zakoni ili zakoni kretanja, a teorija bazirana na ovim zakonima Newtonova mehanika. Newtonovu mehaniku nije moguće primijeniti na opisivanje svih kretanja u prirodi. Kretanje tijela čija je brzina uporediva s brzinom svjetlosti opisuje se Einsteinovom Specijalnom teorijom relativnosti, dok za opisivanje interakcije tijela kao što su atomi, joni, molekule itd. Newtonovu mehaniku moramo zamijeniti kvantnom mehanikom.

Kretanje tijela je bilo predmet istraživanja i antičkih filozofa. Promatrajući kretanje različitih tijela na Zemlji zaključili su da će svako tijelo koje se prepusti samo sebi, bez obzira da li se prvobitno kretalo ili nije, na kraju doći u stanje mirovanja tj. prestati se kretati. Prema tome, zaključili su da je "prirodno stanje" tijela stanje mirovanja. Galileo Galilei je prvi spoznao da ukoliko se postepeno smanjuju vanjski uticaji (trenje, otpor vazduha), tijela koja se kreću nastaviće se kretati



Slika 5.7: Zavisnost sile trenja od intenziteta vanjske tangencijalne sile \vec{F} .



Slika 5.8: Smjer i intenzitet elastične sile opruge \vec{F}_{el} u zavisnosti od izduženja x .

Napomena: ukoliko posmatramo samo jedno tijelo kao mehanički sistem, onda na to tijelo mogu djelovati sile uzrokovane interakcijom s drugim tijelima ali i sile između npr. atoma unutar tog tijela. Sile koje su posljedica interakcije s drugim tijelima nazivamo vanjskim silama a sile koje su posljedica interakcije između elemenata nekog sistema (u ovom slučaju atoma samog tijela) nazivamo unutrašnjim. Kretanje tijela u cjelini uzrokuju isključivo vanjske sile.

sve duže i duže. U graničnom slučaju kada ne bi bilo nikakvih trenja niti otpora, tijela koja se kreću nikada se ne bi ni zaustavila. Ova saznanja je Newton iskoristio za formulaciju svog prvog zakona koji glasi: *Svako tijelo koje miruje ili se kreće ravnomjerno pravolinijski ostaće u stanju mirovanja odnosno ravnomjernog pravolinijskog kretanja ako i samo ako je rezultujuća sila koja djeluje na njega jednaka nuli.* Rezultujuća sila \vec{R} predstavlja vektorsku sumu svih sila koje djeluju na tijelo, tj.

$$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (5.7)$$

Tijelo za koje vrijedi da je $\vec{R} = \vec{0}$, tj. rezultujuća sila jednaka nuli, kažemo da se nalazi u ravnoteži. Pri tome obično razlikujemo statičku ravnotežu (slučaj kada je $\vec{R} = \vec{0}$ i tijelo miruje) i dinamičku ravnotežu (slučaj kada je $\vec{R} = \vec{0}$ i tijelo se kreće).

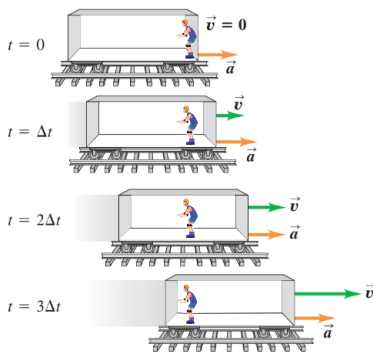
Prvi Newtonov zakon se često zove i zakon inercije. Inercija je svojstvo tijela da se opire promjeni stanja svog kretanja. Što je tijelo više inertno teže je promijeniti njegovu brzinu. Fizikalna veličina kojom se mjeri stepen inertnosti nekog tijela naziva se inercijalna masa.

Prvi Newtonov zakon se ne može primijeniti na kretanje tijela koje se posmatra iz proizvoljnog sistema referencije. Naime, postoje sistemi referencije u kojima ne vrijedi I Newtonov zakon. Takvi sistemi se nazivaju neinercijalnim sistemima. Na sreću, mogu se naći sistemi referencije u kojima je I Newtonov zakon validan i takvi sistemi se nazivaju inercijalnim sistemima referencije. Da bismo uočili razliku između inercijalnih i neinercijalnih sistema referencije razmotrimo sljedeći primjer.

Na slici 5.9 prikazana je situacija u kojoj se čovjek na rolama nalazi u vozu. Čovjek prvobitno miruje i u jednom trenutku voz se počne kretati konstantnom akceleracijom \vec{a} . Pošto čovjek stoji na rolama, rezultujuća sila koja djeluje na njega jednaka je nuli. Zamislimo da postoje dva posmatrača za koja su vezana dva sistema referencije. Jedan stoji pored voza i prati kretanje čovjeka na rolama, a drugi sjedi u vozu. Posmatrač koji stoji pored voza može primjetiti da se voz kreće, ali da čovjek na rolama ne mijenja svoj položaj u odnosu na tog posmatrača. Ovo je u skladu s I Newtonovim zakonom jer je rezultujuća sila na čovjeka jednaka nuli. Sistem referencije koji je vezan za posmatrača koji stoji pored voza je inercijalni sistem i u njemu vrijedi I Newtonov zakon.

Posmatrač koji sjedi u vozu primijeti da se čovjek na rolama u jednom trenutku počinje kretati prema njemu ubrzano. Ovo nije u skladu s I Newtonovim zakonom jer je rezultujuća sila na čovjeka još uvijek jednaka nuli. Prema tome, sistem koji je vezan za posmatrača koji se nalazi u vozu je neinercijalni sistem referencije i u njemu se ne

Napomena: masa tijela koju smo koristili u izrazu za Newtonov zakon gravitacije naziva se gravitaciona masa. Svi eksperimenti pokazuju da nema nikakve razlike između inercijalne i gravitacione mase, tako da onda ovu veličinu nazivamo jednostavno masa.



Slika 5.9: Promjena položaja čovjeka koji se nalazi u vozu i stoji na rolama u trenutku kada voz počne ubrzavati. Za posmatrača koji stoji na stanici čovjek se ne kreće dok se za posmatrača u vozu čovjek počne kretati u trenutku kada voz počne ubrzavati.

može primjeniti I Newtonov zakon.

5.3 Drugi Newtonov zakon

Drugi Newtonov zakon predstavlja osnovni zakon mehanike. On povezuje silu kao uzrok kretanja i ubrzanje tijela kao posljedicu. Kao i ostala dva, II Newtonov zakon je postavljen aksiomatski. Može se formulisati matematički kao

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (5.8)$$

odnosno riječima: proizvod mase i vektora ubrzanja tijela jednak je vektorskoj sumi svih sila koje djeluju na tijelo. Ranije smo naglasili da se vektorska suma svih sila na tijelo naziva rezultujuća sila. Prema tome ako je rezultujuća vanjska sila na neko tijelo različita od nule tijelo će ubrzavati. Pravac i smjer vektora ubrzanja poklapa se s pravcem i smjerom vektora rezultujuće sile. Intenzitet vektora ubrzanja je obrnuto proporcionalan masi tijela, a direktno proporcionalan intenzitetu rezultujuće sile.

Ukoliko poznamo sve sile koje djeluju na tijelo onda možemo odrediti i rezultujuću silu, pa na osnovu II Newtonovog zakona i ubrzanje tijela. Time su stvorene pretpostavke da se opiše kretanje tijela. Prilikom primjene II Newtonovog zakona pogodno je proći kroz sljedeće korake:

- Identifikovati sve sile koje djeluju na tijelo. Pri tome voditi računa da se uvažavaju sve kontaktne sile.
- Ucrtati vektore svih sila koje djeluju na tijelo (napraviti tzv. dijagram sila).
- Napisati II Newtonov zakon u vektorskoj formi

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N$$

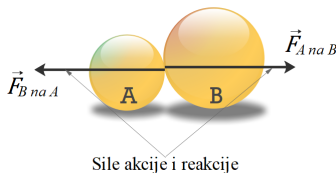
- Izabrati odgovarajući koordinatni sistem i sve vektore projektovati na ose koordinatnog sistema (razložiti sile). Obično se bira da jedna od osa bude u smjeru vektora rezultujuće sile (ako se ona može jednostavno odrediti ili pretpostaviti njen pravac na osnovu dijagrama sila).
- Ukoliko je izabran koordinatni sistem tako da je jedna osa u pravcu rezultujuće sile, onda iz jednačine koja se dobije projekcijom na okomitu osu (osu okomitu na pravac rezultujuće sile) odrediti intenzitet sile reakcije podloge, a na osnovu toga i intenzitet sile

trenja (ukoliko postoje), a zatim iz jednačine koja se dobije projekcijom na paralelnu osu odrediti komponentu vektora ubrzanja.

- Ukoliko nije izabran koordinatni sistem tako da je jedna osa u pravcu rezultujuće sile, iz II Newtonovog zakona, napisanog u vektorskoj formi odrediti komponente ubrzanja, projektovanjem svih vektora iz te jednačina na ose izabranog koordinatnog sistema.

5.4 Treći Newtonov zakon

Ranije smo rekli da je promjena stanja kretanja svakog tijela uzrokovana prisustvom nekog drugog tijela. Uticaj jednog tijela na drugo nazivamo interakcija ili međudjelovanje, a opisujemo je fizikalnom veličinom koju nazivamo sila. Pored toga, naglasili smo da se interakcija može prenositi fizičkim poljem (gravitacionim, elektromagnetnim, itd.) ili kontaktom. Razmotrimo sada nekoliko primjera. Neka se dva tijela nalaze na horizontalnoj podlozi (slika 5.10) i neka su u međusobnom kontaktu. Ako postoji kontakt dva tijela tada će jedno tijelo djelovati nekom od kontaktnih sila na drugo. Međutim nema razloga da i drugo tijelo ne djeluje na prvo nekom kontaktnom silom.



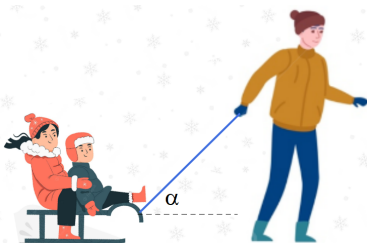
Slika 5.10: Par sila akcije i reakcije kada su dva tijela u kontaktu.



Slika 5.11: Sila kojom Zemlja djeluje na Mjesec i sila kojom Mjesec djeluje na Zemlju su sile akcije i reakcije.

$$F_{\text{Zemlje na Mjesec}} = \gamma \frac{M_Z M_M}{R_{ZM}^2}, \quad (5.9)$$

i ima istu vrijednost kao i intenzitet sile kojom Mjesec djeluje na Zemlju (ta sila je $F_{\text{Mjeseca na Zemlju}} = \gamma \frac{M_M M_Z}{R_{ZM}^2}$). Prema tome, možemo zaključiti da ako dva tijela međudjeluju, onda se sile javljaju u parovima. Taj par sila nazivamo sila akcije i reakcije. Veza između sile akcije i reakcije data je III Newtonovim zakonom koji glasi: *Svaka sila u prirodi pripada paru sila akcije-reakcije. Sile akcije i reakcije djeluju na različita tijela, njihovi intenziteti i pravci su isti, a smjer suprotan:* $\vec{F}_{AB} = -\vec{F}_{BA}$.



Slika 5.12: Uz zadatak 1.

5.5 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Dvoje djece sjede na sankama i očekuju od vas da ih vučete kao na slici 5.12. Pri tome koristite uže koje, kada se zategne, čini ugao od 40° u odnosu na horizontalnu ravan. Ukupna masa djece je 45 kg, a masa sanki 5 kg. Koeficijent statičkog trenja iznosi $\mu_s = 0,2$, a kinetičkog $\mu_k = 0,15$. Odrediti silu trenja između sanki i snijega kao i ubrzanje sanki ako je sila zatezanja užeta:

- a) 100 N,
b) 140 N.

Rješenje:

a) U ovom zadatku posmatramo kretanje sistema koji se sastoji od sanki i dva djeteta koja sjede na sankama. Pri rješavanju zadataka u kojima je neophodno opisati kretanje tijela uvažavajući prirodu interakcije tih tijela s okolinom, u prvom koraku, nastojaćemo da identifikujemo sve sile koje djeluju na tijelo (ili sistem tijela) čije kretanje posmatramo. Konkretno, u ovom zadatku, na sistem koji posmatramo djeluje sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} , sila zatezanja užeta \vec{F}_z i sila trenja \vec{F}_{tr} koja može biti statička ili kinetička zavisno da li tijelo miruje ili se kreće.

Kada smo identifikovali sile koje djeluju na tijelo, možemo pisati II Newtonov zakon u formi

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_z + \vec{F}_{tr}, \quad (1.1)$$

gdje je m masa sanki zajedno s dvoje djece, a \vec{a} ubrzanje sistema. Pod pretpostavkom da se sanke kreću isključivo duž horizontalnog pravca, izabraćemo sistem referencije u kojem ćemo x -osu postaviti duž pravca kretanja kao na slici 5.13, tako da projekcijom vektora, koji se pojavljuju u prethodnoj jednačini, na ose izabranog koordinatnog sistema dobijamo sistem skalarnih jednjčina

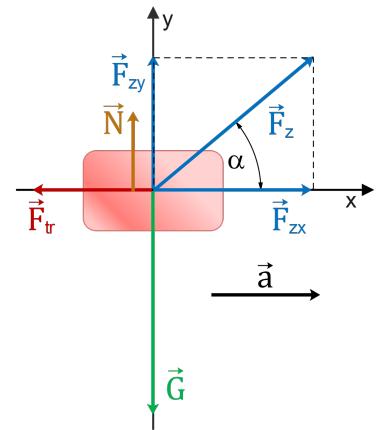
$$ma_x = F_z \cos \alpha - F_{tr}, \quad (1.2)$$

$$ma_y = -G + N + F_z \sin \alpha, \quad (1.3)$$

gdje smo s α označili ugao između vektora sile zatezanja i x -ose. Kako se sistem kreće isključivo duž horizontalnog pravca, y -komponenta ubrzanja a_y će biti jednaka nuli tako da iz prethodne jednačine dobijamo

$$N = G - F_z \sin \alpha. \quad (1.4)$$

Vidimo da je intenzitet sile reakcije podloge umanjen za vrijednost $F_z \sin \alpha$ uslijed djelovanja sile zatezanja užeta.



Slika 5.13: Uz rješenje zadatka 1.

Napomena: u analizi translatorsnog kretanja tijela napadna tačka sile ne igra nikakvu ulogu pa zbog toga pri crtanju dijagrama sile nećemo voditi računa o položaju napadne tačke sile, već ćemo vektore sile najčešće pomjeriti u ishodište koordinatnog sistema.

Sada je neophodno provjeriti da li je intenzitet sile zatezanja dovoljno veliki da može uopšte pomjeriti sanke. Da bismo odredili graničnu (minimalnu) vrijednost sile zatezanja koja je neophodna da se sanke pomjere pretpostavićemo da sanke miruju, tj. da je $a = 0$ i da na njih djeluje maksimalna statička sila trenja. Tada iz jednačine (1.2) dobijamo

$$F_z \cos \alpha = F_{\text{tr},s,\text{max}}. \quad (1.5)$$

Maksimalna vrijednost statičke sile trenja se određuje kao $F_{\text{tr},s,\text{max}} = \mu_s N$, gdje je μ_s statički koeficijent trenja, tako da je

$$F_z \cos \alpha = \mu_s (mg - F_z \sin \alpha), \quad (1.6)$$

odnosno

$$F_z = \frac{\mu_s mg}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha} = \frac{0,2 \cdot 50 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}}{\cos 40^\circ + 0,2 \sin 40^\circ} = 109,66 \text{ N}. \quad (1.7)$$

Prema tome, sila zatezanja od 100 N nije dovoljna da bi se pomjerile sanke, pa će u ovom slučaju ubrzanje sanki iznositi 0 m s^{-2} . Sila trenja koja djeluje na sistem je statička sila trenja i njena vrijednost je jednaka rezultujućoj vanjskoj sili u horizontalnom smjeru, odnosno, u ovom slučaju, horizontalnoj komponenti sile zatezanja. Intenzitet sile trenja iznosi

$$F_{\text{tr}} = F_z \cos \alpha = 100 \text{ N} \cdot \cos 40^\circ = 76,6 \text{ N}. \quad (1.8)$$

b) U ovom slučaju intenzitet sile zatezanja je dovoljno veliki da pomjeri sanke i da se one počnu kretati ubrzano. Sila trenja koja djeluje na sistem je kinetička i njena vrijednost je konstantna i iznosi $F_{\text{tr},k} = \mu_k N$ odnosno

$$F_{\text{tr},k} = \mu_k (mg - F_z \sin \alpha) = \quad (1.9)$$

$$= 0,15 \cdot (50 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} - 140 \text{ N} \sin 40^\circ) = \quad (1.10)$$

$$= 60,08 \text{ N}. \quad (1.11)$$

Ubrzanje sistema možemo odrediti iz jednačine (1.2)

$$a_x = \frac{F_z \cos \alpha - \mu_k mg + \mu_k F_z \sin \alpha}{m} = \quad (1.12)$$

$$= \frac{F_z}{m} (\cos \alpha + \mu_k \sin \alpha) - \mu_k g = \quad (1.13)$$

$$= 0,94 \text{ m s}^{-2}. \quad (1.14)$$

ZADATAK 2: Dva drvena tijela su povezana neistegljivim užetom zanemarive mase. Na tijelo mase m_2 djeluje konstantna sila \vec{F} kao što je prikazano na slici 5.14. Odrediti ubrzanje sistema i silu zatezanja užeta.

Rješenje:

U ovom zadatku razmatramo kretanje sistema koji se sastoji od dva tijela. Neophodno je identifikovati sve koje djeluju na oba tijela, a zatim napisati II Newtonov zakon za oba tijela ponaosob. Na tijelo mase m_1 djeluju: sila Zemljine teže \vec{G}_1 , sila reakcije podloge \vec{N}_1 , sila trenja \vec{F}_{tr1} i sila zatezanja \vec{F}_{z1} . Na tijelo mase m_2 djeluju: sila Zemljine teže \vec{G}_2 , sila reakcije podloge \vec{N}_2 , sila trenja \vec{F}_{tr2} , sila zatezanja \vec{F}_{z2} i vanjska sila \vec{F} . Drugi Newtonov zakon, napisan za ova dva tijela, glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{tr1} + \vec{F}_{z1}, \quad (2.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{tr2} + \vec{F}_{z2} + \vec{F}. \quad (2.2)$$

Izabraćemo koordinatni sistem tako da je x -osa usmjerena u horizontalnom, a y -osa u vertikalnom pravcu kao na slici 5.15. Kako se oba tijela kreću duž horizontalnog pravca, y -komponenta ubrzanja oba tijela jednaka je nuli. Projekcijom svih vektora iz prethodne dvije jednačine dobijamo sistem skalarnih jednačina

$$m_1 a_1 = -F_{tr1} + F_{z1}, \quad (2.3)$$

$$0 = -m_1 g + N_1, \quad (2.4)$$

$$m_2 a_2 = -F_{tr2} - F_{z2} + F \quad (2.5)$$

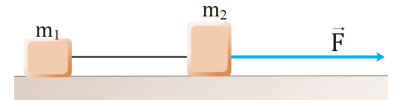
$$0 = -m_2 g + N_2. \quad (2.6)$$

Iz prethodnih relacija zaključujemo da je $N_1 = m_1 g$ i $N_2 = m_2 g$, pa su intenziteti sila trenja, koje djeluju na ova dva tijela, određeni s $F_{tr1} = \mu m_1 g$ i $F_{tr2} = \mu m_2 g$. Uvrštavanjem izraza za silu trenja, prethodni sistem postaje

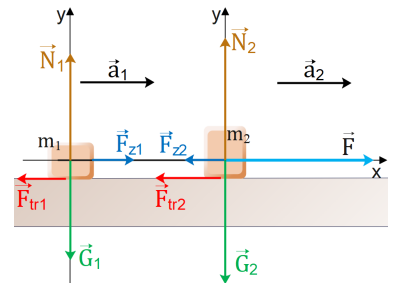
$$m_1 a_1 = -\mu m_1 g + F_{z1}, \quad (2.7)$$

$$m_2 a_2 = -\mu m_2 g - F_{z2} + F. \quad (2.8)$$

Ovaj sistem od dvije jednačine sadrži četiri nepoznate veličine (a_1 , a_2 , F_{z1} i F_{z2}) i nije ga moguće riješiti bez uvođenja dodatnih pojednostavljenja. Da bismo ipak došli do izraza za ubrzanje i sile zatezanja iskoristićemo činjenicu da je uže neistegljivo i da je njegova masa zanemariva. Iz činjenice da je uže neistegljivo zaključujemo da će put koji pređe prvo tijelo u nekom vremenskom intervalu ($s_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2$) biti isti kao i put koji pređe drugo tijelo u istom tom vremenskom



Slika 5.14: Uz zadatak 2.



Slika 5.15: Uz rješenje zadatka 2.

intervalu ($s_2 = \frac{1}{2}a_2t^2$), pa će zbog toga ubrzanje oba tijela biti isto i možemo pisati $a_1 = a_2 \equiv a$.

Kako uže djeluje silom zatezanja F_{z1} na tijelo mase m_1 , onda će prema III Newtonovom zakonu ovo tijelo djelovati na uže silom istog intenziteta F'_{z1} , a suprotnog smjera, tj. $F_{z1} = F'_{z1}$. Analogno zaključujemo da je i $F_{z2} = F'_{z2}$. Drugi Newtonov zakon napisan za uže nakon projekcija svih vektora na x -osu, glasi

$$m_u a = F'_{z2} - F'_{z1}, \quad (2.9)$$

gdje je m_u masa užeta. Pošto je ova masa zanemariva, tj. $m_u \approx 0$ zaključujemo da je i $F'_{z1} = F'_{z2}$, odnosno $F_{z1} = F_{z2} \equiv F_z$.

Sada se sistem jednačina svodi na dvije jednačine

$$m_1 a = -\mu m_1 g + F_z, \quad (2.10)$$

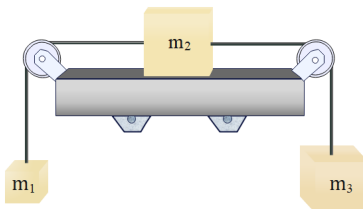
$$m_2 a = -\mu m_2 g - F_z + F, \quad (2.11)$$

s dvije nepoznate veličine, ubrzanje a i intenzitet sile zatezanja F_z . Ovaj sistem se može jednostavno riješiti ako saberemo jednačine, nakon čega dobijamo

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - \mu g. \quad (2.12)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednu od dvije prethodne jednačine dobijamo intenzitet sile zatezanja

$$F_z = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F. \quad (2.13)$$



Slika 5.16: Uz zadatak 3.

ZADATAK 3: Tijelo mase $m_2 = 3,5$ kg miruje na horizontalnoj podlozi i povezano je neistegljivim konopcima zanemarive mase s tijelom mase $m_1 = 1,5$ kg i tijelom mase $m_3 = 2,5$ kg (kao na slici 5.16). U početku sistem miruje. Odrediti ubrzanje sistema i sile zatezanja ako se sva trenja mogu zanemariti.

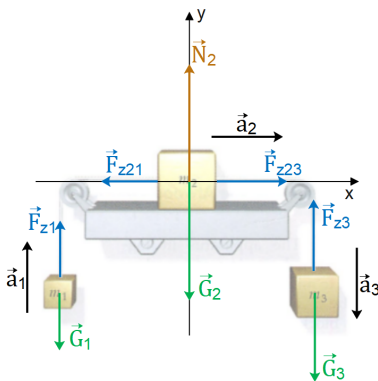
Rješenje:

Kada posmatramo kretanje više tijela onda je neophodno identifikovati sile koje djeluju na svako od tih tijela i napisati II Newtonov zakon za svako tijelo ponaosob. Na tijelo mase m_1 djeluju sile \vec{G}_1 i sile zatezanja \vec{F}_{z1} . Na tijelo mase m_2 djeluju sile \vec{G}_2 , sile reakcije podloge \vec{N}_2 i sile zatezanja \vec{F}_{z21} i \vec{F}_{z23} . Na tijelo mase m_3 djeluju sile \vec{G}_3 i \vec{F}_{z3} . Nakon što smo identifikovali sve sile možemo pisati II Newtonov zakon za svako tijelo

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{z1}, \quad (3.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{z21} + \vec{F}_{z23}, \quad (3.2)$$

$$m_3 \vec{a}_3 = \vec{G}_3 + \vec{F}_{z3}. \quad (3.3)$$



Slika 5.17: Uz rješenje zadatka 3.

Ako izaberemo sistem referencije tako da je x -osa usmjerena u horizontalnom, a y -osa u vertikalnom pravcu kao na slici 5.17, projekcijom svih vektora iz prethodne tri relacije na ose odabranog sistema dobijamo sljedeći sistem jednačina

$$m_1 a_1 = -G_1 + F_{z1}, \quad (3.4)$$

$$m_2 a_2 = -F_{z21} + F_{z23}, \quad (3.5)$$

$$0 = -G_2 + N_2, \quad (3.6)$$

$$-m_3 a_3 = -G_3 + F_{z3}. \quad (3.7)$$

Pošto je uže neistegljivo, put koji pređe jedno tijelo u jedinici vremena isti je kao i put koji pređu druga dva tijela u jedinici vremena, pa možemo zaključiti da će intenziteti ubrzanja sva tri tijela biti ista i iznositi a . Pored toga, zbog činjenice da je masa užeta zanemariva zaključujemo da je $F_{z1} = F_{z21}$ i $F_{z3} = F_{z23}$ pa prethodni sistem jednačina postaje

$$m_1 a = F_{z1} - m_1 g, \quad (3.8)$$

$$m_2 a = -F_{z1} + F_{z3}, \quad (3.9)$$

$$m_3 a = m_3 g - F_{z3}. \quad (3.10)$$

Sabiranjem prethodne tri jednačine dobijamo

$$a = \frac{m_3 - m_1}{m_1 + m_2 + m_3} g = 1,31 \text{ m s}^{-2}. \quad (3.11)$$

Sila zatezanja F_{z1} je

$$F_{z1} = m_1(a + g) = 16,68 \text{ N}, \quad (3.12)$$

a sila zatezanja F_{z3}

$$F_{z3} = m_3(g - a) = 21,25 \text{ N}. \quad (3.13)$$

ZADATAK 4: Tijelo mase 20 kg može da se kreće po horizontalnoj podlozi bez trenja. Ovo tijelo je povezano s drugim tijelom mase 5 kg kao što je prikazano na slici 5.18. Odrediti ubrzanje oba tijela i silu zatezanja užeta ako je uže neistegljivo i zanemarive mase.

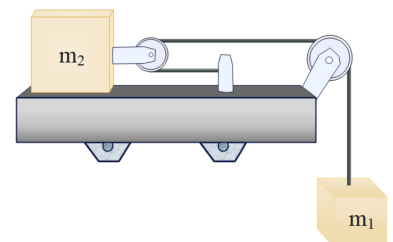
Rješenje:

Dijagram sila za oba tijela je prikazan na slici 5.19. Na manje tijelo djeluje sila \vec{G}_1 i \vec{F}_{z1} dok na veće tijelo pored sila \vec{G}_2 i \vec{N}_2 djeluju sile zatezanja \vec{F}_{z2} i \vec{F}'_{z2} .

II Newtonov zakon napisan za svako tijelo ponaosob glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{z1}, \quad (4.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{N}_2 + \vec{F}_{z2} + \vec{F}'_{z2}. \quad (4.2)$$



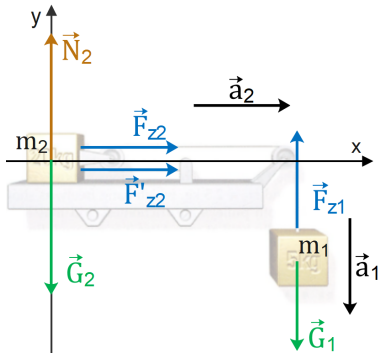
Slika 5.18: Uz zadatak 4.

Standardnim odabirom koordinatnog sistema i projekcijom svih vektora na izabrani sistem dobijamo

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{z1} \quad (4.3)$$

$$m_2 a_2 = F_{z2} + F'_{z2}, \quad (4.4)$$

$$0 = -m_2 g + N. \quad (4.5)$$



Slika 5.19: Uz rješenje zadatka 4.

Ako je uže zanemarive mase onda se prema analizi iz prethodnih zadataka za svaki element užeta može napisati II Newtonov zakon i zaključiti da će sile zatezanja koje djeluju na taj element užeta biti istog intenziteta, a suprotnog smjera. Konkretno, ako uzmemo dio užeta koji je prebačen preko lijevog kotura zaključujemo da je $F_{z2} = F'_{z2}$, a ako izaberemo dio užeta koji je prebačen preko desnog kotura možemo zaključiti da je $F_{z2} = F_{z1}$, pa je stoga $F_{z1} = F_{z2} = F'_{z2} \equiv F_z$.

Pretpostavimo da, kada se sistem prepusti sam sebi, tijelo mase m_2 za vrijeme t pređe put s_2 . Onda će za isti taj vremenski interval tijelo mase m_1 preći dvostruko veći put jer je uže omotano oko lijevog kotura (s obje strane) i ako se kotur pomjeri npr. do mjesta za koje je vezano uže, onda će se samo uže "odmotati" oko kotura za dvostruko veću vrijednost. Prema tome, možemo pisati da je za isti vremenski interval $s_1 = 2s_2$ odnosno

$$\frac{1}{2} a_1 t^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} a_2 t^2 \quad \rightarrow \quad a_1 = 2a_2 \equiv a. \quad (4.6)$$

Jednačine (4.3) i (4.4) sada postaju

$$m_1 a = m_1 g - F_z \quad (4.7)$$

$$m_2 \frac{a}{2} = 2F_z. \quad (4.8)$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo s 4, a drugu s 2 i saberemo ih, dobijamo

$$a = \frac{4m_1}{4m_1 + m_2} g, \quad (4.9)$$

i

$$F_z = \frac{m_1 m_2}{4m_1 + m_2} g. \quad (4.10)$$

ZADATAK 5: Pljačkaši banke su uspjeli dogurati sef mase 1000 kg do prozora koji se nalazi na drugom spratu banke. Njihov plan je da spuste sef na kamion koji se nalazi 3 m ispod prozora (slika 5.20). Ne poznavajući zakone fizike, oni su jednim krajem užeta vezali sef, a drugim ormar mase 200 kg. Ako je koeficijent trenja između ormara i podloge 0,5, kolika je brzina kojom će sef pasti na kamion?

Rješenje:

Razmotrićemo sistem koji se sastoji od sefa mase m_1 i ormara mase m_2 koji su međusobno povezani užetom. Na sef djeluje sila Zemljine teže \vec{G}_1 i sila zatezanja \vec{F}_{z1} dok na ormar pored sila \vec{G}_2 i \vec{N} djeluju sila zatezanja \vec{F}_{z2} i sila trenja \vec{F}_{tr} kao na slici 5.21. II Newtonov zakon napisan za oba tijela glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{z1}, \quad (5.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{z2} + \vec{F}_{tr}. \quad (5.2)$$

Izborom koordinatnog sistema kao na slici i projekcijom svih vektora na izabrani sistem dobijamo

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{z1} \quad (5.3)$$

$$m_2 a_2 = F_{z2} - F_{tr}, \quad (5.4)$$

$$0 = -m_2 g + N. \quad (5.5)$$

Iz zadnje jednačine slijedi da je $N = m_2 g$ odnosno $F_{tr} = \mu N = \mu m_2 g$, pa prethodni sistem postaje

$$m_1 a = m_1 g - F_z \quad (5.6)$$

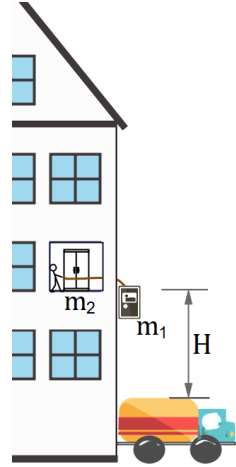
$$m_2 a = F_z - \mu m_2 g, \quad (5.7)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je užo neistegljivo i zanemarive mase, te ubrzanje oba tijela označili s a , a silu zatezanja užeta s F_z . Sabiranjem prethodne dvije jednačine zaključujemo da je ubrzanje sefa

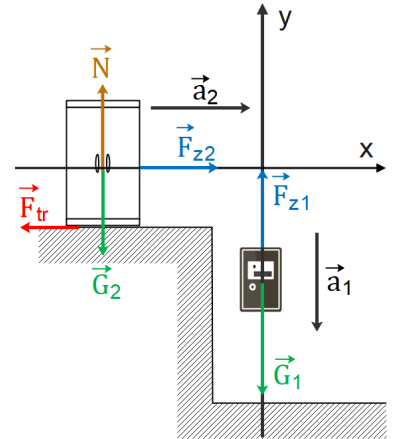
$$a = \frac{m_1 - \mu m_2}{m_1 + m_2} g = 0,75g = 7,36 \text{ m s}^{-2}. \quad (5.8)$$

Sef će padati ubrzanjem a tako da je brzina u trenutku padanja $v = at_p$, gdje je trenutak pada određen s $t_p = \sqrt{2H/a}$. Prema tome, brzina kojom će sef pasti na kamion iznosi

$$v = a \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{2aH} = 6,65 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.9)$$



Slika 5.20: Uz zadatak 5.



Slika 5.21: Uz rješenje zadatka 5.

ZADATAK 6: Automobil mase $m = 1200 \text{ kg}$ nailazi na strmu poleđenu cestu čiji je nagibni ugao 6° . Na vrhu ceste automobil počne proklizavati bez trenja. Koliko je ubrzanje automobila? Koliku će brzinu imati automobil na dnu ceste ako je njena dužina 200 m ?

Rješenje:

Ukoliko se pretpostavi da je sila trenja na poleđenoj cesti zanemarlivo mala onda na automobil djeluju samo sila Zemljine teže \vec{G} i sila reakcije podloge \vec{N} koja je uvijek okomita na podlogu. Za kretanje automobila niz poleđenu cestu možemo pisati

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (6.1)$$

Pošto se tijelo kreće niz strmu ravan (poleđenu cestu) i ima ubrzanje u tom pravcu onda je pogodno izabrati sistem referencije tako da je jedna osa usmjerena u pravcu vektora ubrzanja, tj. u pravcu strme ravni kao na slici 5.22. U tom slučaju silu \vec{G} je neophodno rastaviti na komponente. Sa slike vidimo da je ugao između vektora \vec{G} i negativnog dijela y -ose isti kao ugao strme ravni jer se radi o uglovima između međusobno okomitih pravaca. Komponente vektora \vec{G} su

$$G_x = mg \sin \alpha, \quad (6.2)$$

$$G_y = -mg \cos \alpha, \quad (6.3)$$

pa projektovanjem vektora iz jednačine (6.1) na ose izabranog sistema dobijamo

$$ma = mg \sin \alpha, \quad (6.4)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (6.5)$$

Iz druge jednačine dobijamo da je $N = mg \cos \alpha$, a iz prve

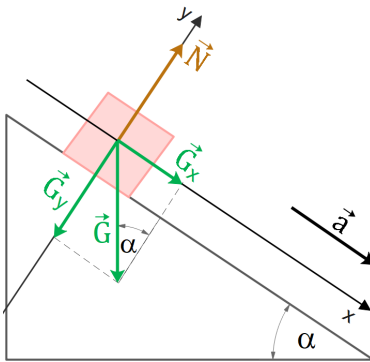
$$a = g \sin \alpha = 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot \sin 6^\circ = 1 \text{ m s}^{-2}. \quad (6.6)$$

Iz relacije

$$\Delta x = \frac{v_x^2 - v_{0x}^2}{2a_x}, \quad (6.7)$$

pod pretpostavkom da je početna brzina automobila v_{0x} bila jednaka nuli, dobijamo

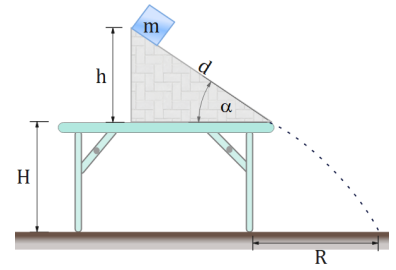
$$v_x = \sqrt{2a_x \Delta x} = \sqrt{2 \cdot 1 \text{ m s}^{-2} \cdot 200 \text{ m}} = 20 \text{ m s}^{-1}. \quad (6.8)$$



Slika 5.22: Uz rješenje zadatka 6.

ZADATAK 7: Tijelo mase $m = 2 \text{ kg}$ pušteno je iz stanja mirovanja s visine $h = 0,5 \text{ m}$ niz strmu ravan nagibnog ugla $\alpha = 30^\circ$ i dužine d . Strma ravan je fiksirana na stolu visine $H = 2 \text{ m}$ kao na slici 5.23. Ako je koeficijent trenja između tijela i strme ravni $\mu = 0,4$ odrediti:

- ubrzanje tijela,
- brzinu tijela u trenutku kada napusti strmu ravan,
- udaljenosti na kojoj će tijelo pasti na pod,
- vremenski interval od trenutka kada je tijelo pušteno, pa do trenutka pada.



Slika 5.23: Uz zadatak 7.

Rješenje:

a) Dok se kreće niz strmu ravan na tijelo djeluju sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} i sila trenja \vec{F}_{tr} , a kada se odvoji od strme ravni samo sila Zemljine teže \vec{G} . Zbog toga ćemo odvojeno posmatrati kretanje tijela niz strmu ravan i kretanje nakon odvajanja od strme ravni.

Za vremenski interval u kojem se tijelo kreće niz strmu ravan vrijedi

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}}. \quad (7.1)$$

Izborom koordinatnog sistema kao na slici 5.24 i projekcijom vektora na ose datog koordinatnog sistema dobijamo

$$ma = mg \sin \alpha - F_{\text{tr}}, \quad (7.2)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (7.3)$$

Iz druge jednačine dobijamo izraz za intenzitet sile reakcije podloge $N = mg \cos \alpha$, pa možemo odrediti intenzitet kinetičke sile trenja

$$F_{\text{tr}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha. \quad (7.4)$$

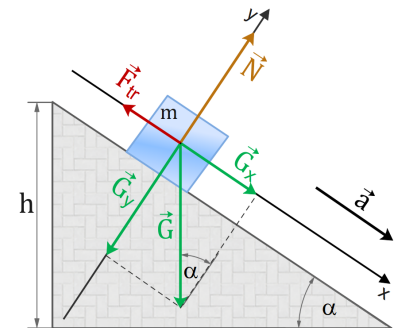
Uvrštavanjem u jednačinu (7.2) dobijamo da je ubrzanje tijela jednako

$$a = (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g = 1,51 \text{ m s}^{-2}. \quad (7.5)$$

b) Brzina tijela u trenutku napuštanja strme ravni je

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{2a \frac{h}{\sin \alpha}} = \sqrt{2 \cdot 1,51 \text{ m s}^{-2} \frac{0,5 \text{ m}}{\sin 30^\circ}} = 1,74 \text{ m s}^{-1}. \quad (7.6)$$

c) Nakon što se odvoji od strme ravni tijelo se kreće isključivo pod djelovanjem sile Zemljine teže s ubrzanjem g i početnom brzinom



Slika 5.24: Uz rješenje zadatka 7a.

$v_0 = 1,74 \text{ m s}^{-1}$ pod uglom od -30° u odnosu na horizontalnu ravan (slika 5.25). Jednačine kretanja tijela su

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (7.7)$$

$$y(t) = H - v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2, \quad (7.8)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je y -komponenta početne brzine negativna (sada ćemo uzimati pozitivnu vrijednost ugla). Trenutak padanja ćemo odrediti iz uslova $y(t_p) = 0$, odakle dobijamo

$$g t_p^2 + 2v_0 \sin \alpha \cdot t_p - 2H = 0 \quad (7.9)$$

Positivno rješenje prethodne kvadratne jednačine je

$$t_p = \frac{-v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}}{g} = 0,56 \text{ s}, \quad (7.10)$$

Horizontalna udaljenost na koju će tijelo pasti je

$$\begin{aligned} R &= x_D = x(t_p) = v_0 \cos \alpha \cdot t_p = \\ &= 1,74 \text{ m s}^{-1} \cos(-30^\circ) \cdot 0,56 \text{ s} = 0,84 \text{ m}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

d) Dužina strme ravni iznosi $d = \frac{h}{\sin 30^\circ} = 1 \text{ m}$, pa je vrijeme t_1 za koje će se tijelo spustiti niz strmu ravan, krećući se ubrzanjem $a = 1,51 \text{ m s}^{-2}$, bez početne brzine, određeno s

$$d = \frac{1}{2} a t_1^2 \quad \rightarrow \quad t_1 = \sqrt{\frac{2d}{a}} = 1,15 \text{ s}. \quad (7.12)$$

Vremenski interval od početka kretanja pa do trenutka padanja na tlo je

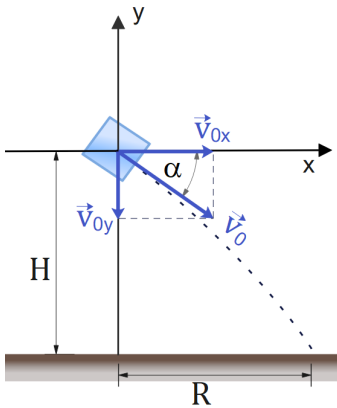
$$t = t_1 + t_p = 1,71 \text{ s}. \quad (7.13)$$

ZADATAK 8: Uz strmu ravan nagibnog ugla 15° gura se drveni sanduk mase 40 kg konstantnom silom koja djeluje u horizontalnom pravcu. Odrediti koliki mora biti intenzitet ove sile da bi se sanduk izgurao uz strminu za 10 s . Dužina strme ravni je 5 m , a koeficijent trenja između sanduka i podloge iznosi $0,3$.

Rješenje:

Prilikom kretanja uz strmu ravan na sanduk djeluju sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} , sila trenja \vec{F}_{tr} i vanjska sila \vec{F} u horizontalnom pravcu, tako da se II Newtonov zakon za kretanje ovog tijela može napisati kao

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + \vec{F}. \quad (8.1)$$



Slika 5.25: Uz rješenje zadatka 7c.

Ako izaberemo x -osu tako da je usmjerena uz strmu ravan kao na slici 5.26, projekcijom na ose koordinatnog sistema dobijamo sljedeći sistem jednačina

$$ma = -mg \sin \alpha - F_{tr} + F \cos \alpha, \quad (8.2)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N - F \sin \alpha. \quad (8.3)$$

Iz druge jednačine dobijamo izraz za silu reakcije podloge

$$N = mg \cos \alpha + F \sin \alpha, \quad (8.4)$$

na osnovu kojeg možemo odrediti intenzitet sile trenja kao

$$F_{tr} = \mu N = \mu mg \cos \alpha + \mu F \sin \alpha. \quad (8.5)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (8.2) dobijamo

$$ma = -mg \sin \alpha - \mu mg \cos \alpha - \mu F \sin \alpha + F \cos \alpha, \quad (8.6)$$

odakle je

$$F = \frac{a + g(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} m. \quad (8.7)$$

Ako pretpostavimo da se tijelo počelo kretati iz stanja mirovanja i da se kreće jednakoubrzano uz strmu ravan, onda vrijedi

$$x = \frac{1}{2} at^2, \quad (8.8)$$

odakle je ubrzanje tijela

$$a = \frac{2x}{t^2} = \frac{10\text{m}}{100\text{s}^2} = 0,1\text{m s}^{-2}. \quad (8.9)$$

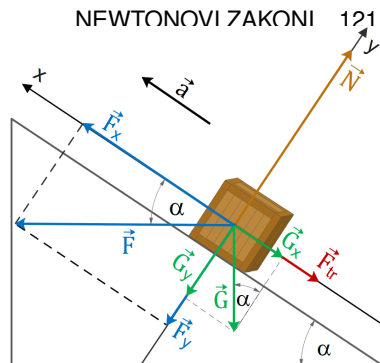
Prema tome, intenzitet vanjske sile \vec{F} mora biti

$$F = 40\text{kg} \frac{0,1\text{m s}^{-2} + 9,81\text{m s}^{-2}(\sin 15^\circ + 0,3 \cos 15^\circ)}{\cos 15^\circ - 0,3 \sin 15^\circ} = 247\text{N}. \quad (8.10)$$

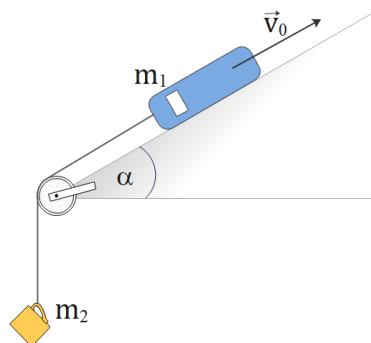
ZADATAK 9: Knjiga mase 1 kg, koja se nalazi na strmoj ravni nagibnog ugla 20° , povezana je neistegljivim užetom sa šoljicom za čaj mase 500 g (slika 5.27). Knjizi se saopšti početna brzina 3m s^{-1} prema gore. Statički koeficijent trenja između tijela i podloge je 0,5, a kinetički 0,2.

a) Na kojoj će se udaljenosti knjiga zaustaviti?

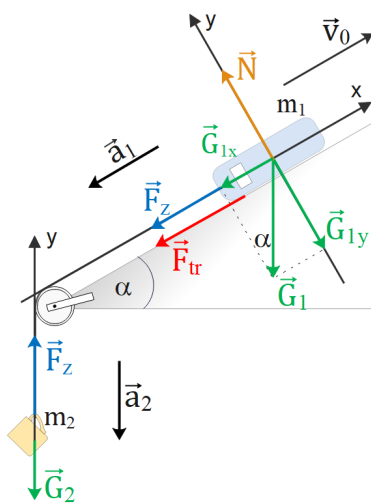
b) Da li će u najvišoj tački ostati da miruje ili će se početi kretati niz strmu ravan?



Slika 5.26: Uz rješenje zadatka 8.



Slika 5.27: Uz zadatak 9.



Slika 9.28: Uz rješenje zadatka 9.

Rješenje:

a) Posmatramo kretanje dva tijela koja su povezana neistegljivim užetom. Na knjigu djeluju sila Zemljine teže \vec{G}_1 , sila reakcije podloge \vec{N} , sila trenja \vec{F}_{tr} i sila zatezanja užeta \vec{F}_{z1} . Na šoljicu djeluju dvije sile i to sila Zemljine teže \vec{G}_2 i sila zatezanja \vec{F}_{z2} . Drugi Newtonov zakon napisan za ova dva tijela glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + \vec{F}_{z1}, \quad (9.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{z2}, \quad (9.2)$$

gdje smo s \vec{a}_1 i \vec{a}_2 označili ubrzanje knjige i šoljice, a s m_1 i m_2 njihove mase, respektivno. Kretanje knjige posmatramo iz referentnog sistema u kojem je x -osa usmjerena uz strmu ravan, a kretanje šoljice iz sistema u kojem je y -osa usmjerena vertikalno gore kao na slici 9.28. Projekcijom jednačina (9.1) i (9.2) na ose izabranog sistema dobijamo

$$-m_1 a_1 = -m_1 g \sin \alpha - F_{\text{tr}} - F_{z1}, \quad (9.3)$$

$$0 = -m_1 g \cos \alpha + N, \quad (9.4)$$

$$-m_2 a_2 = -m_2 g + F_{z2}, \quad (9.5)$$

gdje smo uvažili činjenicu da se oba tijela kreću usporeno. Ako pretpostavimo da je uže neistegljivo i zanemarive mase onda možemo pisati $a_1 = a_2 \equiv a$ i $F_{z1} = F_{z2} \equiv F_z$ tako da sabiranjem jednačina (9.3) i (9.5) dobijamo

$$a = \frac{m_1 g \sin \alpha + m_2 g + F_{\text{tr}}}{m_1 + m_2}. \quad (9.6)$$

Iz jednačine (9.4) možemo odrediti intenzitet sile reakcije podloge $N = m_1 g \cos \alpha$, pa je intenzitet sile trenja $F_{\text{tr}} = \mu N = \mu m_1 g \cos \alpha$, tako da je intenzitet ubrzanja (treba imati na umu da je komponenta ubrzanja negativna)

$$a = \frac{m_1 (\sin \alpha + \mu \cos \alpha) + m_2}{m_1 + m_2} g = 6,74 \text{ m s}^{-2}. \quad (9.7)$$

Jednačine kretanja knjige su

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2, \quad v_x(t) = v_0 - a t. \quad (9.8)$$

Trenutak zaustavljanja dobijamo iz uslova $v_x(t_z) = 0$, pa je $t_z = v_0/a$. Udaljenost na kojoj će se knjiga zaustaviti je

$$x_D = x(t_z) = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{(3 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 6,74 \text{ m s}^{-2}} = 0,67 \text{ m}. \quad (9.9)$$

b) Tijelo će ostati da miruje nakon zaustavljanja ukoliko je rezultujuća sila na njega jednaka nuli. Na knjigu sada djeluje statička sila trenja

koja je usmjerena prema vrhu strme ravni i ona nastoji spriječiti knjigu da se počne kretati niz strmu ravan. Pored toga, na knjigu djeluju sila Zemljine teže, koja ima komponentu duž x -ose, $G_x = -m_1g \sin \alpha$ i sila zatezanja čija je x -komponenta jednaka $-m_2g$. Jednačine (9.3)-(9.5) sada postaju

$$0 = -m_1g \sin \alpha + F_{\text{tr},s} - F_Z, \quad (9.10)$$

$$0 = -m_1g \cos \alpha + N, \quad (9.11)$$

$$0 = -m_2g + F_Z. \quad (9.12)$$

Tijelo će mirovati na vrhu strme ravni ukoliko je intenzitet maksimalne statičke sile trenja veći ili jednak $F_Z + m_1g \sin \alpha$. Maksimalna vrijednost statičke sile trenja je

$$\begin{aligned} F_{\text{tr},s,\text{max}} &= \mu_s N = \mu_s m_1 g \cos \alpha = \\ &= 0,5 \cdot 1 \text{ kg} \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cos 20^\circ = 4,61 \text{ N}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Intenzitet rezultujuće sile koja nastoji tijelo pomjerati niz strmu ravan je

$$F_Z + m_1g \sin \alpha = m_2g + m_1g \sin \alpha = 8,26 \text{ N}, \quad (9.14)$$

pa zaključujemo da intenzitet maksimalne statičke sile trenja nije dovoljan da ostavi tijelo u stanju mirovanja, te će se knjiga nakon zauzavljanja početi kretati niz strmu ravan ubrzano.

ZADATAK 10: Kugla mase m_1 i kocka mase m_2 povezane su nestegljivim užetom zanemarive mase kao što je prikazano na slici 5.29. Kakav mora biti odnos masa m_1/m_2 da bi se kocka kretala

- niz strmu ravan,
- uz strmu ravan,
- mirovala?

Ugao strme ravni je α , a koeficijent statičkog trenja između tijela i podloge μ_s .

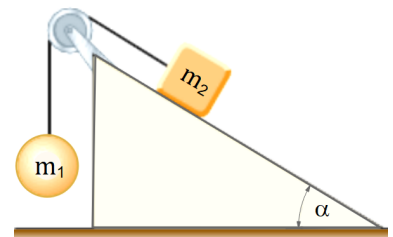
Rješenje:

Drugi Newtonov zakona napisan za ova dva tijela glasi

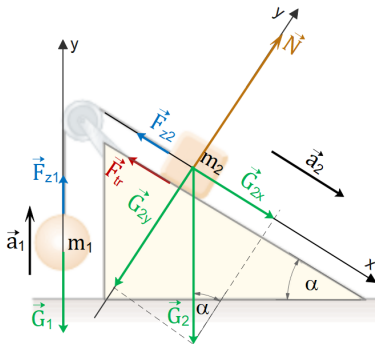
$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{z1}, \quad (10.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + \vec{F}_{z2}. \quad (10.2)$$

Slično kao u prethodnom zadatku, projekcijom na ose odabranog ko-



Slika 5.29: Uz zadatak 10.



Slika 5.30: Uz rješenje zadatka 10a.

ordinatnog sistema datog na slici 5.30 dobijamo

$$m_1 a_1 = -m_1 g + F_{z1}, \quad (10.3)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g \sin \alpha \pm F_{tr} - F_{z2}, \quad (10.4)$$

$$0 = -m_2 g \cos \alpha + N, \quad (10.5)$$

gdje predznak \pm ispred intenziteta sile trenja obuhvata slučaj kretanja niz odnosno uz strmu ravan.

a) Pri kretanju niz strmu ravan, sila trenja djeluje u suprotnom smjeru, tj. uz strmu ravan, pa u izrazu (10.4) treba izabrati predznak minus. Tijelo će se kretati niz strmu ravan samo u slučaju da je x -komponenta sile Zemljine teže $G_{2x} = m_2 g \sin \alpha$ veća od sila koje djeluju u suprotnom smjeru. Maksimalna vrijednost sile koja djeluje u suprotnom smjeru se dobije kada je sila trenja statička i uz to maksimalna, tj. $F_{tr} = F_{tr,s,max} = \mu_s N$, pa uslov koji mora biti ispunjen da bi se tijelo kretalo niz strmu ravan glasi

$$m_2 g \sin \alpha > \mu_s m_2 g \cos \alpha + m_1 g, \quad (10.6)$$

gdje smo iskoristili $N = m_2 g \cos \alpha$ i $F_{z2} = F_{z1} = m_1 g$. Iz ovog uslova dobijamo

$$\frac{m_1}{m_2} < \sin \alpha - \mu_s \cos \alpha. \quad (10.7)$$

b) Pri kretanju tijela uz strmu ravan sila trenja djeluje u suprotnom smjeru, tako da "uzštrmu ravan djeluje sila zatezanja, a "nizštrmu ravan x -komponenta sile Zemljine teže i sila trenja. Tijelo će se kretati uz strmu ravan ukoliko je sila zatezanja veća od zbiru x -komponente sile Zemljine teže i maksimalne statičke sile trenja, što možemo zapisati kao

$$m_1 g > m_2 g \sin \alpha + \mu_s m_2 g \cos \alpha. \quad (10.8)$$

Iz ovog uslova dobijamo

$$\frac{m_1}{m_2} > \sin \alpha + \mu_s \cos \alpha. \quad (10.9)$$

c) Na osnovu rezultata iz prethodna dva dijela zadatka zaključujemo da će tijelo mirovati ukoliko je

$$\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha < \frac{m_1}{m_2} < \sin \alpha + \mu_s \cos \alpha. \quad (10.10)$$

ZADATAK 11: Drvena kocka mase $m_1 = 2 \text{ kg}$ povezana je s metalnom kuglom mase $m_2 = 4 \text{ kg}$ preko neistegljivog užeta zanemarljive mase (slika 5.31). Sila $F = 60 \text{ N}$ djeluje na drvenu kocku pod uglom $\theta = 30^\circ$ u odnosu na horizontalnu ravan. Odrediti ubrzanje ova dva tijela ako je koeficijent kinetičkog trenja između kocke i podloge $\mu = 0,3$.

Rješenje:

Razmatramo kretanje dva tijela koja su povezana neistegljivim užetom pa je neophodno napisati II Newtonov zakon za svako od ova dva tijela. Pri tome je potrebno identifikovati sve sile koje djeluju na njih. Na tijelo mase m_1 pored sile Zemljine teže \vec{G}_1 djeluju sila reakcije podloge \vec{N} , sila trenja \vec{F}_{tr} , sila zatezanja \vec{F}_{z1} i vanjska sila \vec{F} . Na tijelo mase m_2 djeluju sila Zemljine teže \vec{G}_2 i sila zatezanja \vec{F}_{z2} . Drugi Newtonov zakon za kretanje ova dva tijela glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + \vec{F}_{z1} + \vec{F}, \quad (11.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{z2}. \quad (11.2)$$

Uz izbor koordinatnog sistema kao na slici 5.32, u kojem je x -osa postavljena u horizontalnom, a y u vertikalnom pravcu, projekcijom na ose izabranog sistema dobijamo sistem jednačina

$$m_1 a_1 = -F_{\text{tr}} - F_{z1} + F \cos \theta, \quad (11.3)$$

$$0 = -m_1 g + N + F \sin \theta, \quad (11.4)$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{z2}. \quad (11.5)$$

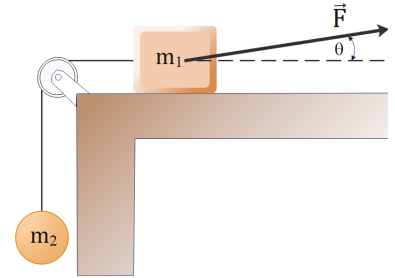
Iz druge jednačine zaključujemo da je intenzitet sile reakcije podloge $N = m_1 g - F \sin \theta$ pa je intenzitet sile trenja $F_{\text{tr}} = \mu N = \mu m_1 g - \mu F \sin \theta$. Pošto je uže neistegljivo intenziteti ubrzanja ova dva tijela će biti jednaki $a_1 = a_2 \equiv a$, a zbog činjenice da je masa užeta zanemarljiva zaključujemo da su intenziteti sila zatezanja također jednaki $F_{z1} = F_{z2} \equiv F_z$. Sada sabiranjem jednačina (11.3) i (11.5) dobijamo

$$(m_1 + m_2)a = -\mu m_1 g + \mu F \sin \theta + F \cos \theta - m_2 g, \quad (11.6)$$

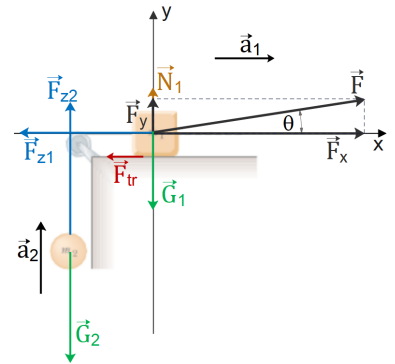
odnosno

$$a = \frac{F(\cos \theta + \mu \sin \theta) - g(m_2 + \mu m_1)}{m_1 + m_2}. \quad (11.7)$$

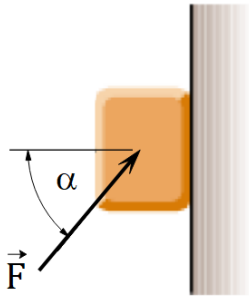
Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo $a = 2,64 \text{ m s}^{-2}$.



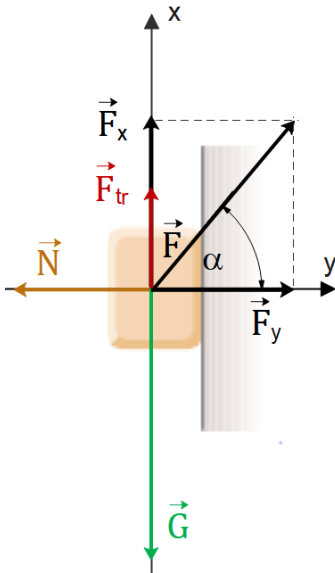
Slika 5.31: Uz zadatak 11.



Slika 5.32: Uz rješenje zadatka 11.



Slika 5.33: Uz zadatak 12.



Slika 5.34: Uz rješenje zadatka 12.

ZADATAK 12: Tijelo mase 3 kg gura se uz zid silom \vec{F} pod uglom od $\alpha = 50^\circ$, kao što je prikazano na slici 5.33. Koeficijent statičkog trenja između tijela i zida iznosi 0,25. U kojem intervalu mora biti vrijednosti sile \vec{F} da bi tijelo ostalo u stanju mirovanja?

Rješenje:

Na tijelo pored vanjske sile \vec{F} djeluju sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} i sila trenja \vec{F}_{tr} , pa II Newtonov zakon možemo pisati kao

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}. \quad (12.1)$$

Ako izaberemo x -osu tako da je usmjerena duž zida kao na slici 5.34, projekcijom na ose koordinatnog sistema dobijamo sljedeći sistem jednačina:

$$ma_x = -mg + F_{tr} + F \sin \alpha, \quad (12.2)$$

$$ma_y = F \cos \alpha - N. \quad (12.3)$$

Minimalna vrijednost sile \vec{F} , za koju će tijelo još uvijek mirovati, odgovara situaciji kada ta sila, zajedno sa statičkom silom trenja nastoji spriječiti tijelo da se kreće niz zid. U tom slučaju statička sila trenja djeluje vertikalno prema gore. Prethodne jednačine se sada mogu napisati kao

$$0 = -mg + F_{tr,s} + F_{min} \sin \alpha, \quad (12.4)$$

$$0 = F_{min} \cos \alpha - N, \quad (12.5)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je ubrzanje tijela jednako nuli. U graničnom slučaju vrijednost statičke sile trenja je maksimalna i iznosi $F_{tr,s,max} = \mu_s N = \mu_s F_{min} \cos \alpha$. Tako da iz jednačine (12.4) dobijamo

$$mg = \mu_s F_{min} \cos \alpha + F_{min} \sin \alpha, \quad (12.6)$$

odnosno

$$F_{min} = \frac{mg}{\sin \alpha + \mu_s \cos \alpha} = 31,76 \text{ N}. \quad (12.7)$$

Maksimalna vrijednost sile \vec{F} , za koju će tijelo još uvijek mirovati, odgovara situaciji kada sila Zemljine teže, zajedno sa statičkom silom trenja nastoji spriječiti tijelo da se kreće uz zid. U tom slučaju statička sila trenja djeluje vertikalno prema dolje. Projekcijom izraza (12.1) na ose izabranog koordinatnog sistema u ovom slučaju, dobijamo

$$0 = -mg - F_{tr,s} + F_{max} \sin \alpha, \quad (12.8)$$

$$0 = F_{max} \cos \alpha - N. \quad (12.9)$$

Opet je u graničnom slučaju statička sila trenja maksimalna, tj.

$$F_{tr,s,max} = \mu_s N = \mu_s F_{max} \cos \alpha \quad (12.10)$$

pa je maksimalna vrijednost vanjske sile \vec{F} , za koju će tijelo još uvijek mirovati

$$F_{max} = \frac{mg}{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha} = 48,62 \text{ N}. \quad (12.11)$$

Prema tome, da bi tijelo mirovalo intenzitet vanjske sile \vec{F} mora biti u intervalu $F \in (31.76 \text{ N}, 48.62 \text{ N})$.

ZADATAK 13: Da bi spriječio drveni blok da klizi niz strmu ravan student A gura blok u pravcu koji je paralelan nagibu strme ravni upravo onoliko da tijelo ostane u mirovanju. U identičnoj situaciji student B gura blok silom koja ima horizontalni pravac. Ako je poznata masa drvenog bloka, koeficijent statičkog trenja i ugao strme ravni odrediti:

- silu kojom djeluje student A na blok,
- silu kojom djeluje student B na blok.
- Ako je $m = 2 \text{ kg}$, $\alpha = 25^\circ$ i $\mu = 0.16$, ko ima lakši posao?
- Šta ako je $\mu = 0.38$? Ko ima lakši posao?

Rješenje:

a) Ako s \vec{F} označimo silu kojom student djeluje na drveni blok, II Newtonov zakon glasi

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}. \quad (13.1)$$

U situaciji kada tijelo miruje ubrzanje je jednako nula, a sila trenja je statička. U graničnom slučaju kada student djeluje minimalnom silom kojom će spriječiti kretanje tijela, statička sila trenja ima maksimalnu vrijednost koja iznosi $F_{tr,s,max} = \mu_s N$. Projekcijom jednačine (13.1) na ose izabranog sistema dobijamo (slika 5.35)

$$0 = -mg \sin \alpha + F_A + F_{tr}, \quad (13.2)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N. \quad (13.3)$$

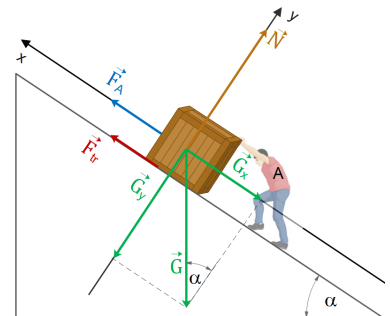
Iz druge jednačine dobijamo $N = mg \cos \alpha$ odnosno $F_{tr} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \alpha$ pa je

$$F_A = mg(\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha). \quad (13.4)$$

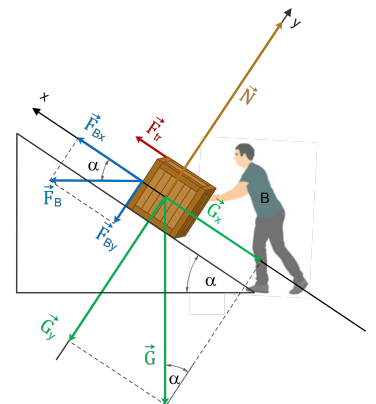
b) U ovom slučaju student gura drveni blok u horizontalnom pravcu, pa projekcijom vektora koji se javljaju u relaciji (13.1) na ose izabranog koordinatnog sistema dobijamo (slika 5.36)

$$0 = -mg \sin \alpha + F_B \cos \alpha + F_{tr}, \quad (13.5)$$

$$0 = -mg \cos \alpha + N - F_B \sin \alpha. \quad (13.6)$$



Slika 5.35: Uz rješenje zadatka 13a.



Slika 5.36: Uz rješenje zadatka 13b.

Sada je $N = mg \cos \alpha + F_B \sin \alpha$ odnosno $F_{tr} = \mu_s mg \cos \alpha + \mu_s F_B \sin \alpha$. Uvrštavanjem u jednačinu (13.5) dobijamo

$$F_B = \frac{\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \sin \alpha} mg. \quad (13.7)$$

c) Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo

$$F_A = 5,47 \text{ N}, \quad F_B = 5,62 \text{ N}, \quad (13.8)$$

te zaključujemo da prvi student mora djelovati manjom silom, da bi spriječio kretanja drvenog bloka, u odnosu na drugog studenta, pa samim tim ima i lakši posao.

d) U ovom slučaju je $F_A = 1,53 \text{ N}$, a $F_B = 1,43 \text{ N}$ pa drugi student ima lakši posao. Naime, drugi student svojim djelovanjem povećava silu reakcije podloge, te se time dodatno povećava maksimalna statička sila trenja. Interesantno bi bilo vidjeti kakav će biti odnos ovih sila za ekstreman slučaj kada je nagib strme ravni 90° , što odgovora situaciji kada je tijelo prislonjeno o zid (vidjeti zadatak 12). U tom slučaju, sila kojom prvi student djeluje na tijelo iznosi $F_A = mg$, dok je sila kojom drugi student djeluje na tijelo $F_B = mg/\mu_s$. Vidimo da u ovom slučaju lakše je studentu A sve dok je koeficijent trenja između tijela i podloge manji od 1, što je slučaj kod većine materijala.

ZADATAK 14: Dva tijela masa $m_1 = 6 \text{ kg}$ i $m_2 = 4 \text{ kg}$ povezana su neistegljivim užetom zanemarive mase. Uže je prebačeno preko nepomičnog kotura koji je učvršćen za plafon. Naći ubrzanje ovih tijela kao i silu zatezanja užeta. Nakon kojeg vremena će tijelo veće mase pasti na tlo ako se prvobitno nalazilo na visini 1 m, a drugo tijelo na podlozi? Kolika je maksimalna visina koju će dostići manje tijelo? Trenje između užeta i kotura zanemariti.

Rješenje:

Posmatračemo sistem koji se sastoji od tijela masa m_1 i m_2 i napisati II Newtonov zakon za svako tijelo ponaosob. Na oba tijela djeluje sila Zemljine teže i sila zatezanja užeta, tako da vrijedi

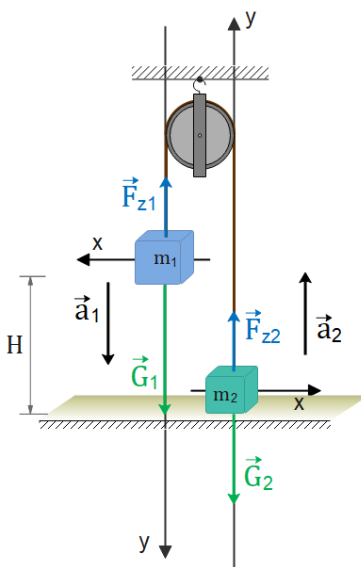
$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{F}_{z1}, \quad (14.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{z2}. \quad (14.2)$$

Sistem referencije možemo izabrati za svako tijelo kao što je prikazano na slici 5.37, pa projektovanjem vektora, iz prethodne dvije jednačine, dobijamo

$$m_1 a_1 = m_1 g - F_{z1}, \quad (14.3)$$

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{z2}. \quad (14.4)$$



Slika 5.37: Uz rješenje prvog dijela zadatka 14.

Kako je uže neistegljivo i zanemarive mase zaključujemo da su intenziteti ubrzanja oba tijela isti, i da su sile zatezanja međusobno jednake. Prethodni sistem jednačina sada možemo napisati kao

$$m_1 a = m_1 g - F_z, \quad (14.5)$$

$$m_2 a = -m_2 g + F_z. \quad (14.6)$$

Sabiranjem prethodne dvije jednačine dobijemo izraz za ubrzanje oba tijela

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g = 0,2g. \quad (14.7)$$

Sila zatezanja je onda

$$F_z = m_2(a + g) = 1,2m_2g = 47,1 \text{ N}. \quad (14.8)$$

Vrijeme padanja većeg tijela možemo odrediti na osnovu relacije

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{a}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1 \text{ m}}{1,96 \text{ m s}^{-2}}} = 1 \text{ s}. \quad (14.9)$$

Nakon što veće tijelo dotakne podlogu (slika 5.38), manje tijelo će se kretati pod uticajem sile Zemljine teže s ubrzanjem g i početnom brzinom koja je jednaka brzini koju ima veće tijelo u trenutku kada dotakne tlo. Prema tome, vrijedi

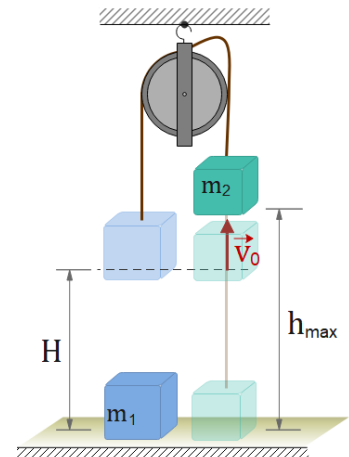
$$v_0 = v(t_p) = at_p = 1,96 \text{ m s}^{-1}, \quad (14.10)$$

$$h_{\max} = H + \frac{v_0^2}{2g} = 1 \text{ m} + \frac{(1,96 \text{ m s}^{-1})^2}{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2}} = 1,196 \text{ m}. \quad (14.11)$$

5.6 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Tri sile koje djeluju na tijelo su date kao $\vec{F}_1 = (-2\vec{i} + 2\vec{j}) \text{ N}$, $\vec{F}_2 = (5\vec{i} + 3\vec{j}) \text{ N}$ i $\vec{F}_3 = (-45\vec{i}) \text{ N}$. Tijelo dobija ubrzanje $3,75 \text{ m s}^{-2}$. a) Odrediti smjer vektora ubrzanja? b) Kolika je masa tijela? c) Ako tijelo u početku miruje, kolika je njegova brzina nakon 10 s? d) Kolike su komponente brzine tijela nakon 10 s? (181° , $m = 11,2 \text{ kg}$, $v = 35,7 \text{ m s}^{-1}$, $\vec{v} = (-37,5\vec{i} - 0,893\vec{j}) \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 2: Blok od 25 kg u početku miruje na horizontalnoj površini. Potrebna je horizontalna sila od 75 N da bi se blok pokrenuo. Nakon što je u pokretu, potrebna je horizontalna sila od 60 N da bi se blok kretao konstantnom brzinom. Odrediti koeficijente statičkog i kinetičkog trenja. ($\mu_s = 0,3$, $\mu_k = 0,24$)



Slika 5.38: Uz rješenje drugog dijela zadatka 14.

Zadatak 3: Kutija mase $m = 50 \text{ kg}$ nalazi se na kamionu čija se karoserija može naginjati. Kolika je vrijednost statičke sile trenja ako je ugao nagiba karoserije 20° ? Pri kojem će uglu nagiba kutija početi da se kreće? Statički koeficijent trenja između kutije i karoserije iznosi $0,8$. ($F_{\text{tr}} = 167,8 \text{ N}$, $\theta = 38,66^\circ$)

Zadatak 4: Tijelo mase $m = 3 \text{ kg}$ nalazi se na vrhu strme ravni nagibnog ugla 30° . Tijelo se spusti do dna strme ravni za $1,5 \text{ s}$ prešavši put od 2 m . Odrediti:

- ubrzanje tijela, ($1,78 \text{ m s}^{-2}$)
- kinetički koeficijent trenja između tijela i podloge, ($0,368$)
- silu trenja koja djeluje na tijelo, ($9,37 \text{ N}$)
- brzinu tijela na dnu strme ravni. ($2,67 \text{ m s}^{-1}$)

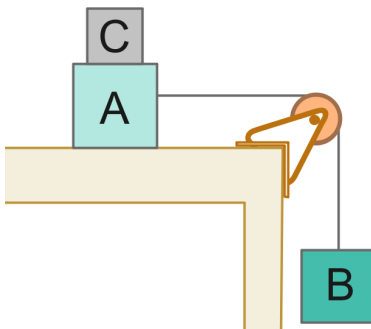
Zadatak 5: Automobil od 800 kg klizi niz veoma dugu nizbrdicu nagiba 6° . Sila otpora kretanju automobila ima oblik $F_d = 100 \text{ N} + (1,2 \text{ N s}^2 \text{ m}^{-2})v^2$. Koja je krajnja brzina automobila niz ovu nizbrdicu? Zanimariti trenje kotrljanja. ($v = 88,2 \text{ km h}^{-1}$)

Zadatak 6: Sanduk s knjigama treba staviti na kamion uz pomoć nekoliko dasaka pod uglom od 30° . Masa sanduka je 100 kg , a kinetički koeficijent trenja između njega i dasaka je $0,5$. Vi i vaši prijatelji gurate horizontalno silom \vec{F} . Kada se sanduk počne kretati, koliki mora biti intenzitet sile F da bi se sanduk mogao kretati konstantnom brzinom? ($F = 1,49 \text{ kN}$)

Zadatak 7: Dva bloka, težina $3,6 \text{ N}$ i $7,2 \text{ N}$, povezana su užetom zanemarive mase i klize niz strmu ravan nagiba 30° . Kinetički koeficijent trenja između lakšeg bloka i ravni je $0,1$, a između težeg bloka i ravni je $0,2$. Uz pretpostavku da lakši blok prednjači, odrediti ubrzanje blokova i silu zatezanja užeta. ($a = 3,5 \text{ m s}^{-2}$, $F_z = 0,21 \text{ N}$)

Zadatak 8: Preko nepokretnog kotura prebačen je konac zanemarive mase. Za krajeve konca vezana su tijela A i B. Masa tijela A je dva puta veća od mase tijela B. U početnom trenutku tijelo A se nalazi na visini $h = 60 \text{ cm}$, a tijelo B dodiruje podlogu. Kolika je maksimalna visina do koje se popne tijelo B kada se sistem prepusti samom sebi? Silu trenja između kotura i konca zanemariti. ($h_{\text{max}} = 1 \text{ m}$)

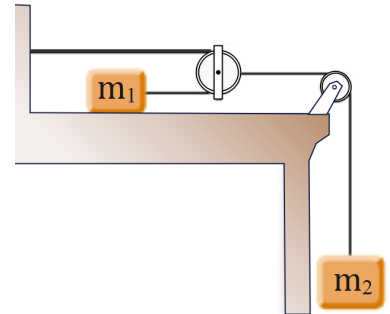
Zadatak 9: Blokovi A i B (slika 5.39) imaju težine od 44 N i 22 N , respektivno. a) Odrediti minimalnu težinu bloka C da spriječi blok A da klizi ako je statički koeficijent trenja između bloka A i stola $0,2$.



Slika 5.39: Uz zadatak 9.

b) Blok C se iznenada podiže s bloka A. Koliko je ubrzanje bloka A, ako je kinetički koeficijent trenja između bloka A i stola 0,15? ($G_C = 110\text{ N}$, $a = 2,3\text{ m s}^{-2}$)

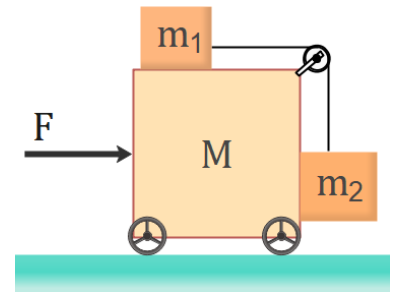
Zadatak 10: Tijelo mase m_1 , koje se može kretati po horizontalnoj podlozi bez trenja (slika 5.40), povezano je preko dva kotura s tijelom mase m_2 . Masa užeta i mase kotura su zanemarive u odnosu na mase tijela. Odrediti ubrzanje oba tijela i sile zatezanja užeta. ($a_1 = \frac{m_2 g}{2m_1 + \frac{1}{2}m_2}$, $a_2 = \frac{1}{2}a_1$, $F_{z1} = \frac{m_1 m_2}{2m_1 + \frac{1}{2}m_2} g$, $F_{z2} = 2F_{z1}$)



Slika 5.40: Uz zadatak 10.

Zadatak 11: Koja horizontalna sila mora biti primijenjena na kolica na slici 5.41 kako bi blokovi ostali nepomični u odnosu na kolica? Pretpostavimo da su sve površine, točkovi i užadi bez trenja. (Savjet: sila kojom djeluje užde ubrzava m_1 .) ($F = (M + m_1 + m_2) \frac{m_2 g}{m_1}$)

Zadatak 12: Ljestve od 10 kg naslonjene su na glatki zid u tački B, a donji kraj A leži na gruboj horizontalnoj ravni za koju je koeficijent statičkog trenja 0,3. Odrediti ugao nagiba ljestvi u odnosu na zid i silu reakcije podloge u tački B ako su ljestve na ivici klizanja. ($\theta = 59^\circ$, $N_B = 29,4\text{ N}$)

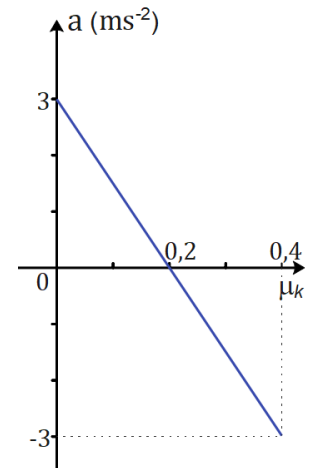


Slika 5.41: Uz zadatak 11.

Zadatak 13: Blok je gurnut duž horizontalnog poda konstantnom silom koja je usmjerena pod uglom θ nadolje u odnosu na ravan poda. Na grafiku 5.42 je data zavisnost ubrzanja a od koeficijenta kinetičkog trenja. Odrediti vrijednost ugla θ ? ($\theta = 60^\circ$)

Zadatak 14: Čamac od 1000 kg putuje brzinom od 90 km h^{-1} kada mu se motor ugasi. Intenzitet kinetičke sile trenja između čamca i vode proporcionalan je brzini čamca $F_{tr,k} = 70v$. Odrediti vrijeme potrebno da se čamac uspori na 45 km h^{-1} . ($t = 9,9\text{ s}$)

Zadatak 15: Potrebno je preko poda povući kutiju s pijeskom (koja miruje) pomoću sajle u kojoj sila zatezanja ne bi trebala biti veća od 1100 N. Koeficijent statičkog trenja između kutije i poda je 0,35. Koliki bi trebao biti ugao između sajle i horizontale kako bi se povukla što veća količina pijeska i kolika je težina pijeska i kutije u toj situaciji? ($\theta = 19^\circ$, $G = 3300\text{ N}$)



Slika 5.42: Uz zadatak 13.

KRUŽNO KRETANJE

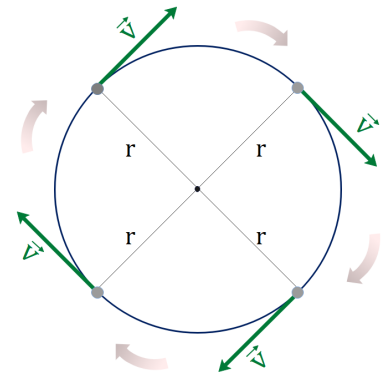
6.1	Uniformno kružno kretanje	133
6.2	Centripetalno ubrzanje	136
6.3	Neuniformno kružno kretanje	137
6.4	Dinamika kružnog kretanja materijalne tačke	138
6.5	Riješeni zadaci	141
6.6	Zadaci za vježbu	153

Kružno kretanje je specijalan slučaj kretanja u ravni pri kojem je putanja materijalne tačke koja se kreće, kružnica. U prirodi postoji mnogo primjera kružnog kretanja kao što je kretanje satelita oko Zemlje, kretanje kuglice okačene o konac, itd. Kružno kretanje je primjer kretanja u ravni, slično kao i horizontalni i kosi hitac, ali zbog svojih specifičnosti zahtijeva posebnu analizu. Prvo ćemo analizirati uniformno kružno kretanje, zatim ćemo definisati ugaone kinematičke veličine i naći vezu s linearnim kretanjem, te na kraju analizirati neuniformno kružno kretanje.

6.1 Uniformno kružno kretanje

Kružno kretanje kod kojeg se ne mijenja intenzitet vektora brzine naziva se uniformno kružno kretanje (slika 6.1). Obzirom da je intenzitet brzine konstantan, materijalna tačka će u jednakim vremenskim intervalima prelaziti puteve jednake dužine. Nakon određenog vremenskog intervala materijalna tačka će napraviti jedan puni krug nakon čega se kretanje ponavlja. Kretanja koja se ponavljaju nakon određenog vremena nazivaju se periodična kretanja, a najkraći vremenski interval nakon kojeg se kretanje ponavlja naziva se period i označava s T .

Za vrijeme jednog perioda materijalna tačka opiše jednu punu kru-



Slika 6.1: Prikaz uniformnog kružnog kretanja.

žnicu, tj. pređe put jednak obimu kruga $2\pi r$, gdje je r radijus kruga, pa vrijedi

$$T = \frac{2\pi r}{v}. \quad (6.1)$$

Pored perioda, svako periodično kretanje karakteriše i frekvencija koja predstavlja broj ponavljanja, u slučaju kružnog kretanja broj obrtaja, u jedinici vremena. Ako neka čestica napravi N punih obrtaja za vrijeme t , onda je njena frekvencija $f = N/t$. Frekvencija se izražava u hertzima (Hz), pri čemu je $1\text{Hz} = 1\text{s}^{-1}$.

Ranije smo naglasili da je za opisivanje kretanja materijalne tačke neophodno poznavati vektor položaja, vektor brzine i vektor ubrzanja kao funkciju vremena. Da bismo opisali kretanje tijela u jednoj ravni neophodno je poznavati po dvije komponente (npr. x i y -komponentu) vektora položaja, vektora brzine i vektora ubrzanja kao funkciju vremena. U opštem slučaju to zahtijeva poznavanje ukupno šest skalarnih veličina u svakom trenutku vremena tj. šest funkcija vremena. Kod kružnog kretanja pogodno je uvesti drugačiji skup kinematičkih veličina, tzv. ugaone kinematičke veličine i to ugaoni položaj, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje.

Položaj materijalne tačke koja se kreće po kružnici radijusa r jednoznačno je određen uglom θ koji zaklapa pravac koji spaja materijalnu tačku i centar kružnice s pozitivnim dijelom x -ose (slika 6.2). Ukoliko ugaon θ mjerimo u odnosu na x -osu u smjeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu on je pozitivan. U suprotnom ako ga mjerimo u smjeru kazaljke na satu on je negativan. Ovo je analogno situaciji kada određujemo da li se tijelo, koje se kreće po pravcu, nalazi lijevo ili desno od ishodišta.

Razlika položaja u dva različita trenutka predstavlja ugaoni pomak $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ (slika 6.3). Po analogiji s kretanjem po pravcu možemo definisati srednju ugaonu brzinu $\bar{\omega}$ kao

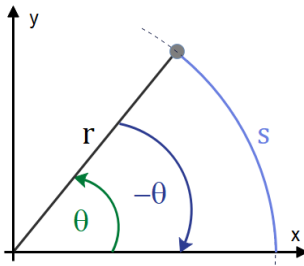
$$\bar{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \quad (6.2)$$

gdje je Δt vremenski interval u kome je napravljen ugaoni pomak $\Delta\theta$. Trenutna ugaona brzina je data kao granična vrijednost srednje ugaone brzine

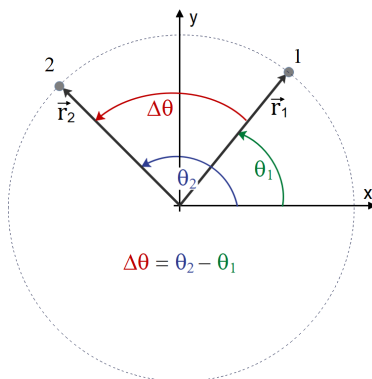
$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \quad (6.3)$$

Ugaona brzina se mjeri u radijanima po sekundi (rad s^{-1}).

Ukoliko se radi o uniformnom kružnom kretanju, ugaoni pomak koji se napravi u datom vremenskom intervalu, odnosno put koji čestica pređe u tom intervalu je isti za svaki vremenski interval. To znači da je kod uniformnog kružnog kretanja ugaona brzina konstantna.



Slika 6.2: Položaj tijela koje se kreće po kružnici radijusa r jednoznačno je određen uglom θ .



Slika 6.3: Ugaoni pomak $\Delta\theta$ predstavlja razliku položaja koja su određena uglovima u dva različita trenutka, θ_1 i θ_2 . Ugaoni pomak $\Delta\theta$ također predstavlja ugaon koji opiše radijus vektor materijalne tačke koje se kreće po kružnici.

Trenutna ugaona brzina se u tom slučaju podudara sa srednjom ugaonom brzinom pa, po analogiji s kretanjem po pravcu, možemo naći da je

$$\theta(t) = \theta_0 \pm \omega t. \quad (6.4)$$

Predznak ispred ugaone brzine u prethodnom izrazu nam određuje smjer kružnog kretanja materijalne tačke. Naime, već ranije smo rekli da ćemo izabrati smjer suprotan kretanju kazaljke na satu kao pozitivan smjer. Ako se materijalna tačka kreće u tom smjeru (suprotno od smjera kretanja kazaljke na satu) onda je ugaoni pomak $\Delta\theta$ pozitivan pa je i komponenta ugaone brzine pozitivna. Ako se materijalna tačka kreće u smjeru kretanja kazaljke na satu ugaoni pomak je negativan, pa je i komponenta ugaone brzine negativna.

Obzirom da ugaona brzina može imati i pozitivne i negativne vrijednosti, zavisno od smjera kretanja, pogodno je definisati vektor ugaone brzine. Pravac vektora ugaone brzine ćemo izabrati kao pravac koji je okomit na ravan u kojoj se kreće materijalna tačka. Smjer ovog vektora određujemo tzv. pravilom desne ruke na način da prsti pokazuju smjer kružnog kretanja, a palac smjer vektora ugaone brzine (vidjeti sliku 6.4).

Da bismo našli vezu između linearnih i ugaonih kinematičkih veličina iskoristićemo činjenicu da je dužina luka s koja odgovara pređenom putu materijalne tačke povezana s uglom θ relacijom

$$s = r\theta, \quad (6.5)$$

gdje je ugao θ mjeren u radijanima. Ukoliko čestica napravi jedan puni obrtaj i opiše ugao od 2π radijana, pređeni put odgovara dužini luka od $s = 2\pi r$. Za vrijeme jednog perioda T čestica pređe put $2\pi r$ pa je intenzitet njene linearne brzine

$$v = \frac{2\pi r}{T}. \quad (6.6)$$

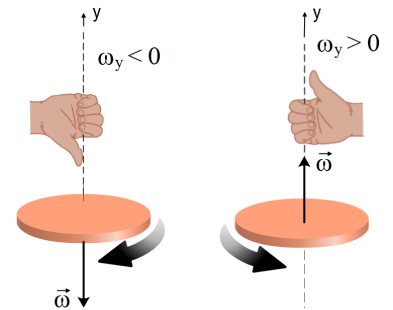
U istom tom vremenskom intervalu čestica napravi ugaoni pomak od 2π pa je ugaona brzina čestice

$$\omega = \frac{2\pi}{T}. \quad (6.7)$$

Na osnovu prethodne dvije relacije nalazimo da je

$$v = \omega r. \quad (6.8)$$

Ako neka čestica napravi N punih obrtaja u jedinici vremena onda je njena ugaona brzina $\omega = 2\pi N/t$. Odavde slijedi da je veza ugaone brzine i frekvencije data s $\omega = 2\pi f$.¹



Slika 6.4: Određivanje smjera vektora ugaone brzine.

¹ Treba biti oprezan kod definicije ovih veličina. U nekim zadacima se ugaona brzina izražava preko broja obrtaja u jedinici vremena. To je ustvari frekvencija, a ugaona brzina se dobije kada se taj broj pomnoži s 2π .

S obzirom da smo uveli vektor ugaone brzine kao vektor čiji je pravac okomit na ravan u kojoj kruži tijelo, jednačinu (6.8) možemo zapisati i u vektorskom obliku kao

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (6.9)$$

gdje je \vec{r} radijus vektor posmatrane tačke, a \vec{v} vektor linijske brzine čiji se pravac poklapa s pravcem tangente na kružnicu, tj. okomit je na radijus vektor \vec{r} , a s obzirom da leži u ravni kružnice okomit je i na vektor ugaone brzine.

6.2 Centripetalno ubrzanje

Pretpostavimo da se materijalna tačka kreće po kružnici radijusa r brzinom konstantnog intenziteta v . Pravac vektora brzine u svakoj tački putanje podudara se s tangentom na kružnicu u toj tački (slika 6.5). Iako je intenzitet vektora brzine konstantan, njegov pravac se stalno mijenja, pa se samim tim mijenja i vektor brzine. Ranije smo vidjeli da svaka promjena vektora brzine ima za posljedicu postojanje ubrzanja različitog od nule.

Ubrzanje uzrokovano promjenom pravca vektora brzine, kao što je to slučaj kod uniformnog kružnog kretanja, naziva se centripetalno ili normalno ubrzanje. Da bismo odredili intenzitet i pravac vektora centripetalnog ubrzanja prvo ćemo odrediti vektor srednjeg ubrzanja. Neka se materijalna tačka kreće po kružnici radijusa r kao što je to prikazano na slici 6.5. U tačkama 1 i 2 vektori brzina su dati sa \vec{v}_1 i \vec{v}_2 , a njihovi intenziteti su međusobno jednaki. Vektor razlike brzina $\Delta\vec{v}$ dobija se oduzimanjem vektora \vec{v}_2 i \vec{v}_1 . Kako su pravci vektora brzina \vec{v}_1 i \vec{v}_2 okomiti na pravce koji spajaju tačku 1, odnosno 2 s centrom O , uglovi $\Delta\theta$ označeni na gornjem i donjem panelu slike 6.5 su isti, a odgovarajući trouglovi slični. Stoga su odnosi pojedinih stranica trougla isti tj.

$$\frac{\Delta s}{r} = \frac{|\Delta\vec{v}|}{|\vec{v}_1|}, \quad (6.10)$$

odnosno

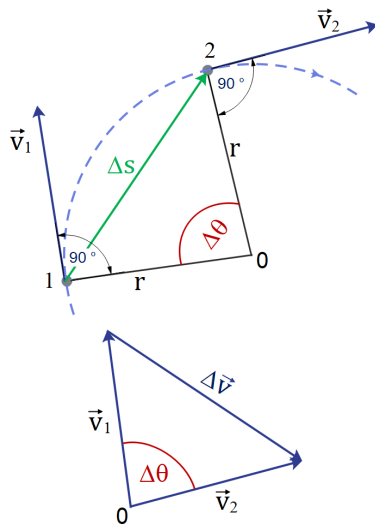
$$|\Delta\vec{v}| = v_1 \frac{\Delta s}{r}. \quad (6.11)$$

Srednja vrijednost intenziteta vektora normalnog ubrzanja je

$$\bar{a}_n = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v_1 \Delta s}{r \Delta t}. \quad (6.12)$$

Trenutnu vrijednost vektora ubrzanja dobijamo kada uzmemo limes u kojem vremenski interval Δt teži nuli:

$$a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \Delta s}{r \Delta t} = \frac{v_1}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (6.13)$$



Slika 6.5: Gore: brzina i položaj materijalne tačke koja se kreće po kružnici radijusa r u dvije različite tačke putanje. Dole: vektori brzina i vektor razlike brzina u date dvije tačke putanje.

U limesu $\Delta t \rightarrow 0$ tačka P_2 se približava tački P_1 , a odnos $\Delta s / \Delta t$ predstavlja intenzitet brzine u tački P_1 . Prema tome intenzitet centripetalnog ubrzanja u tački P_1 , a samim time i u bilo kojoj tački kružnice, iznosi

$$a_n = \frac{v^2}{r}, \quad (6.14)$$

dok je pravac vektora ubrzanja uvijek okomit na vektor brzine i pokazuje prema centru kružnice.

6.3 Neuniformno kružno kretanje

Do sada smo razmatrali kružno kretanje kod kojeg je intenzitet brzine materijalne tačke konstantan tokom vremena. Kružno kretanje kod kojeg se mijenja intenzitet brzine tokom vremena naziva se neuniformno kružno kretanje. Kako je ugaona brzina direktno proporcionalna intenzitetu linearne brzine materijalne tačke, to će se pri neuniformnom kružnom kretanje mijenjati intenzitet odnosno komponenta vektora ugaone brzine. Stoga je pogodno definisati srednje ugaono ubrzanje $\bar{\alpha}$ relacijom

$$\bar{\alpha} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \quad (6.15)$$

odnosno trenutno ugaono ubrzanje

$$\alpha(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \quad (6.16)$$

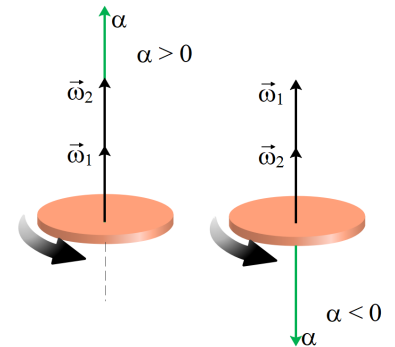
Slično kao i kod linearnog ubrzanja a , ugaono ubrzanje može biti pozitivno ili negativno zavisno da li je promjena ugaone brzine pozitivna ili negativna (slika 6.6). Ako komponenta ugaone brzine raste ugaono ubrzanje je pozitivno, a ako opada ono je negativno. Vektor ugaonog ubrzanja možemo definisati kao vektor koji je okomit na ravan u kojoj se materijalna tačka kreće, a smjer mu je pozitivan ukoliko se komponenta ugaonog ubrzanja povećava, inače je negativan (suprotan izabranom smjeru z-ose).

Specijalan slučaj neuniformnog kružnog kretanja je jednakoubrzano kružno kretanje. Kod ovog kretanja vektor ugaonog ubrzanja je konstantan, a ugaona brzina i ugaoni položaj se mijenjaju u skladu sa sljedećim relacijama

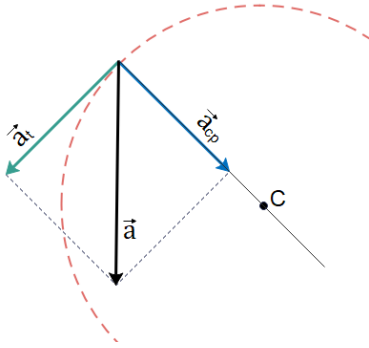
$$\omega(t) = \omega_0 \pm \alpha t, \quad (6.17)$$

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega_0 t \pm \frac{1}{2} \alpha t^2, \quad (6.18)$$

gdje predznak ugaonog ubrzanja zavisi od toga da li se radi o ubrzanom ili usporenom kružnom kretanju.



Slika 6.6: Smjer vektora ugaonog ubrzanja pri ravnomjerno ubrzanom (lijevo) i ravnomjerno usporenom kružnom kretanju (desno).



Slika 6.7: Vektor ukupnog ubrzanja je suma vektora centripetalnog i tangencijalnog ubrzanja. Vektor tangencijalnog ubrzanja \vec{a}_t je usmjeren u pravcu tangente na trajektoriju, a centripetalnog \vec{a}_{cp} okomito na pravac tangente.

Ako se pri neuniformnom kružnom kretanju mijenja ugaona brzina ω , onda će se mijenjati i linijska brzina v . Diferenciranjem relacije (6.8) dobijamo

$$\frac{dv}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}, \quad (6.19)$$

odnosno

$$a_t = r\alpha, \quad (6.20)$$

gdje je a_t tangencijalno ubrzanje povezano s promjenom intenziteta vektora brzine tijela. Prema tome, možemo zaključiti da će svako tijelo koje se kreće po krivolinijskoj putanji, u opštem slučaju, imati tangencijalno ubrzanje, koje je povezano s promjenom intenziteta vektora brzine i centripetalno (normalno) ubrzanje, povezano s promjenom pravca vektora brzine. Vektor tangencijalnog ubrzanja je usmjeren u pravcu tangente na trajektoriju, a centripetalnog okomito na pravac tangente (slika 6.7). Intenzitet rezultujućeg ubrzanja je određen s

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_{cp}^2}. \quad (6.21)$$

6.4 Dinamika kružnog kretanja materijalne tačke

Ranije je naglašeno da svako tijelo koje se kreće po kružnoj putanji stalno mijenja pravac vektora brzine, bez obzira kakva je promjena intenziteta ovog vektora. Zbog promjene pravca vektora brzine, tijelo se kreće ubrzano. Komponenta ubrzanja koje se javlja uslijed promjene pravca vektora brzine je centripetalno ubrzanje. Prema Newtonovim zakonima tijelo će se kretati ubrzano samo ako je rezultujuća sila različita od nule. Prema tome, možemo zaključiti da je rezultujuća sila koja djeluje na tijelo koje se kreće po kružnici uvijek različita od nule.

Pri razmatranju kružnog kretanja pogodno je umjesto Decartesovog koordinatnog sistema xyz uvesti drugi pravougli koordinatni sistem čije ćemo ose označiti s r , t i z . Kretanje tijela se posmatra u ravni koja je okomita na z osu, a koordinata t (tangencijalna koordinata) u svakom trenutku ima pravac tangente na kružnicu u tački u kojoj se tijelo nalazi dok koordinata r (radijalna koordinata) u svakom trenutku ima pravac okomit na tangentu i na z osu. Uz ovakav izbor koordinatnog sistema vektor ubrzanja smo mogli razložiti na njegovu tangencijalnu komponentu (povezanu s promjenom intenziteta vektora brzine) i normalnu komponentu (povezanu s promjenom pravca vektora brzine). Ako se tijelo kreće po kružnici uniformno onda je $a_t = 0$ i vektor ubrzanja ima pravac koji u svakoj tački putanje pokazuje prema centru kružnice, a intenzitet mu je jednak intenzitetu centripetalnog ubrzanja $a_{cp} = v^2/r$.

II Newtonov zakon za kružno kretanje možemo pisati kao

$$m\vec{a} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i, \quad (6.22)$$

a razlaganjem na komponente

$$ma_r = \sum_{i=1}^N F_r \quad (6.23)$$

$$ma_t = \sum_{i=1}^N F_t \quad (6.24)$$

$$ma_z = 0 \quad (6.25)$$

Ako je suma svih tangencijalnih komponenti jednaka nuli tijelo će se kretati uniformno. Pošto pri kružnom kretanju mora postojati normalno ubrzanje, radijalna komponenta rezultujuće sile uvijek mora biti različita od nule. Pri tome možemo pisati

$$m\frac{v^2}{r} = \sum_{i=1}^N F_r. \quad (6.26)$$

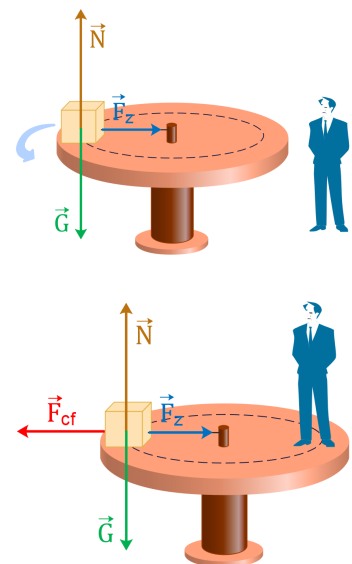
Radijalna komponenta sile može imati različit karakter. To može biti sila gravitacije ako se posmatra kretanje satelita oko Zemlje, može biti statička sila trenja ako se posmatra kretanje automobila u krivini ili sila zatezanja užeta ako se posmatra kružno kretanje kuglice okačene na užu. Rezultujuća radijalna komponenta sile se često naziva centripetalna sila. To nije nikakva posebna sila koja ima svoj sopstveni izvor. To je samo naziv za sile koje imaju radijalnu komponentu različitu od nule. Sve gore spomenute sile mogu biti centripetalne sile ako se posmatraju u kontekstu kružnog kretanja. Na osnovu II Newtonovog zakona (6.22) intenzitet bilo koje sile koja ima karakter centripetalne dat je s

$$F_{cp} = m\frac{v^2}{r}. \quad (6.27)$$

Slično kao kod kretanja po pravcu i kod kružnog kretanja se može uvesti pojam inercijalne sile ukoliko se kretanje nekog tijela posmatra iz neinercijalnog sistema referencije. Na slici (6.8) su prikazane dvije situacije u kojima se kružno kretanje jednog te istog tijela posmatra iz dva različita sistema referencije.

Na tijelo, koje se nalazi na rotirajućoj platformi i vezano je užetom, djeluju tri realne sile: sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} i sila zatezanja \vec{F}_z . II Newtonov zakon se može pisati kao

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_z. \quad (6.28)$$



Slika 6.8: Kružno kretanje tijela posmatrano iz inercijalnog (gore) i neinercijalnog (dolje) sistema referencije.

Rastavljanjem na radijalnu, tangencijalnu i z komponentu dobijamo

$$ma_r = F_z, \quad (6.29)$$

$$ma_t = 0, \quad (6.30)$$

$$ma_z = -mg + N. \quad (6.31)$$

Kako je ubrzanje duž z ose jednako nuli, dobijamo $N = mg$. Radijalna komponenta ubrzanja je centripetalno ubrzanje pa možemo pisati

$$m \frac{v^2}{r} = F_z. \quad (6.32)$$

Ovdje je sila zatezanja jedina radijalna sila i ona ima karakter centripetalne. Ova analiza odgovara situaciji kada se kretanje tijela posmatra iz inercijalnog sistema referencije (slika 6.8 gore) jer tada vrijede Newtonovi zakoni.

Ako se kretanje tijela posmatra iz neinercijalnog sistema koji je vezan za posmatrača koji sjedi na disku i zajedno rotira s tijelom (slika 6.8 dolje), II Newtonov zakon se ne može primijeniti, jer za ovog posmatrača tijelo miruje, a radijalna komponenta rezultujuće sile različita je od nule. Ako ipak želimo na neki način koristiti Newtonove zakone i u ovom slučaju onda moramo uvesti jednu fiktivnu silu koju nazivamo inercijalna sila, a čija će radijalna komponenta biti negativna, tj. u smjeru koji pokazuje od centra kružnice. Inercijalna sila kod kružnog kretanja ima poseban naziv, centrifugalna sila. Da bi tijelo ostalo mirovati u odnosu na posmatrača koji se nalazi na disku, ono se mora nalaziti u stanju statičke ravnoteže što znači da intenzitet fiktivne centrifugalne sile mora biti jednak intenzitetu radijalne komponente rezultujuće sile (u ovom slučaju intenzitetu sile zatezanja). Prema tome, iz uslova $F_{cf} = F_z$ i prethodne relacije slijedi

$$F_{cf} = \frac{mv^2}{r}. \quad (6.33)$$

Na kraju treba naglasiti da se često javljaju pogrešne interpretacije centrifugalne i centripetalne sile iz razloga što su njihovi intenziteti isti. Karakteri ovih sile i razlozi za njihovo uvođenje su potpuno različiti. Centripetalna sila nije ništa drugo do naziv za radijalnu komponentu rezultujuće sile koja djeluje na tijelo. To je samo desna strana II Newtonovog zakona kada se projektuje na radijalnu osu. Centrifugalna sila je inercijalna sila i ona se uvodi samo ako kružno kretanje tijela posmatramo iz neinercijalnog sistema referencije. Uvijek je pogodno koristiti inercijalne sisteme referencije jer u tom slučaju neće biti neophodno u jednačine kretanja uvoditi inercijalne sile.

6.5 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Loptica mase m okačena je o neistegljiv konac dužine L . Loptica se kreće u horizontalnoj ravni po kružnoj putanji tako da konac s vertikalnim pravcem zaklapa ugao θ (konusno klatno na slici 6.9).

- Kolika je brzina kojom loptica rotira?
- Kolika je maksimalna brzina koju loptica može imati ako konac puca pri sili zatezanja koja je 3 puta veća od sile Zemljine teže koja djeluje na lopticu?

Rješenje:

- Loptica se kreće pod uticajem sile Zemljine teže i sile zatezanja konca, pa je njeno kretanje određeno jednačinom

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_z. \quad (1.1)$$

Loptica se kreće u horizontalnoj ravni brzinom konstantnog intenziteta v po kružnoj putanji radijusa r . Kako je intenzitet brzine konstantan, tangencijalno ubrzanje jednako je nuli, pa loptica ima samo centripetalno ubrzanje. Ako izaberemo koordinatni sistem u kome će y -osa biti okomita na ravan kretanja loptice, a x -osa imati pravac normale na kružnu putanju tj. pravac radijusa kao na slici 6.10, projekcijom vektora iz prethodne vektorske jednačine dobijemo sistem dvije skalarne jednačine

$$-ma_{cp} = -F_z \sin \theta, \quad (1.2)$$

$$0 = -mg + F_z \cos \theta. \quad (1.3)$$

Iz druge relacije dobijemo da je $F_z = \frac{mg}{\cos \theta}$ pa uvrštavanjem u prvu slijedi

$$m \frac{v^2}{r} = mg \operatorname{tg} \theta. \quad (1.4)$$

Odavde je intenzitet brzine loptice

$$v = \sqrt{gr \operatorname{tg} \theta}. \quad (1.5)$$

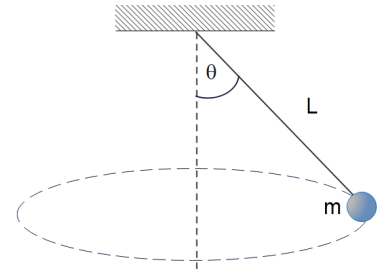
Ako iskoristimo još da je $r = L \sin \theta$ konačno dobijamo

$$v = \sqrt{gL \sin \theta \operatorname{tg} \theta}. \quad (1.6)$$

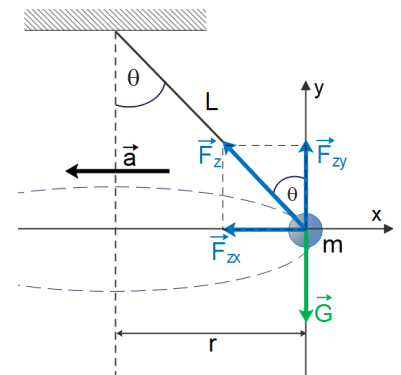
- Razmotrimo granični slučaj kada je sila zatezanja maksimalna, tj. $F_z = 3mg$. Iz jednačina (1.2) i (1.3) slijedi

$$m \frac{v_{\max}^2}{r} = 3mg \sin \theta, \quad (1.7)$$

$$0 = -mg + 3mg \cos \theta. \quad (1.8)$$



Slika 6.9: Uz zadatak 1.

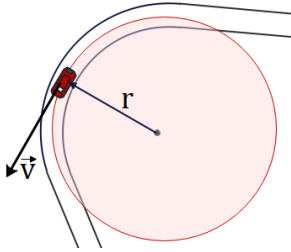


Slika 6.10: Uz rješenje zadatka 1.

Iz druge relacije je $\cos \theta = \frac{1}{3}$ pa uvrštavanjem u prvu dobijemo

$$v_{\max} = \sqrt{3gr \sin \theta} = \sqrt{3gL \sin^2 \theta} = \sqrt{3gL(1 - \cos^2 \theta)} = \sqrt{\frac{8gL}{3}}. \quad (1.9)$$

ZADATAK 2: Automobil mase 1500 kg kreće se duž krivine radijusa zakrivljenosti 35 m (slika 6.11). Statički koeficijent trenja između guma automobila i suhe podloge iznosi 0,5.



Slika 6.11: Uz zadatak 2.

- Kolika je maksimalna brzina kojom automobil može voziti u krivini?
- Kada je cesta mokra, maksimalna brzina automobila pri kojoj neće proklizati iznosi 8 m s^{-1} . Koliki je u tom slučaju koeficijent statičkog trenja?

Rješenje:

a) Tokom kretanja po kružnoj putanji na automobil djeluju sila Zemljine teže, sila reakcije podloge i sila trenja. Sila trenja je u ovom slučaju statička i ona sprječava da se automobil nastavi kretati pravolinijski po inerciji te da točkovi automobila proklizuju po cesti. Statička sila trenja je paralelna sa osom rotacije točka i djeluje prema centru kružne putanje (slika 6.12). Kretanje automobila je određeno jednačinom

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}}. \quad (2.1)$$

Slično kao i u prethodnom zadatku, izabraćemo referentni sistem tako da je u datom trenutku x -osa usmjerena u pravcu normale na putanju, tj. prema centru kružne putanje, a y -osa u vertikalnom pravcu. Projekcijom vektora u jednačini (2.1) na ose ovog koordinatnog sistema dobijamo

$$m a_{\text{cp}} = F_{\text{tr}}, \quad (2.2)$$

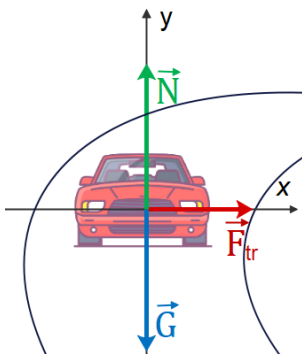
$$0 = -mg + N. \quad (2.3)$$

Maksimalna brzina kojom automobil može voziti u krivini, a da pri tome točkovi ne proklizuju, odgovara situaciji kada je statička sila trenja maksimalna. Iz relacije (2.2) slijedi

$$m \frac{v_{\max}^2}{r} = F_{\text{tr,max}}. \quad (2.4)$$

Kako je maksimalna vrijednost statičke sile trenja $F_{\text{tr,max}} = \mu N = \mu mg$, dobijamo

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g r}, \quad (2.5)$$



Slika 6.12: Uz rješenje zadatka 2.

odnosno uvrštavanjem brojnih vrijednosti

$$v_{\max} = 13,1 \text{ m s}^{-1} = 47,17 \text{ km h}^{-1}. \quad (2.6)$$

b) Ako je cesta mokra i pri tome maksimalna brzina pri kojoj automobil neće proklizati 8 m s^{-1} , koeficijent statičkog trenja, na osnovu jednačine (2.5) iznosi

$$\mu = \frac{v_{\max}^2}{gr} = 0,19. \quad (2.7)$$

ZADATAK 3: Automobil, koji se kreće konstantnom brzinom 40 km h^{-1} nailazi na krivinu radijusa zakrivljenosti 30 m koja je nagnuta prema unutra s uglom nagiba θ . Koliki mora biti ugao nagiba da bi automobil prošao kroz ovu krivinu ako se na cesti nalazi led (tako da je trenje zanemarivo)? Šta ako je brzina automobila manja, odnosno veća od 40 km h^{-1} ?

Rješenje:

Na automobil koji se kreće po kružnoj putanji djeluju sila Zemljine teže i sila reakcije podloge, tako da vrijedi

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (3.1)$$

Obzirom da je krivina nagnuta, jedna komponenta sile reakcije podloge biće usmjerena ka centru kružne putanje i sprječavaće da se automobil kreće po inerciji pravolinijski. Izborom koordinatnog sistema kao na slici 6.13, na osnovu prethodne jednačine, dobijamo

$$ma_{\text{cp}} = N \sin \theta, \quad (3.2)$$

$$0 = -mg + N \cos \theta. \quad (3.3)$$

Iz jednačine (3.3) slijedi $N = \frac{mg}{\cos \theta}$, pa je

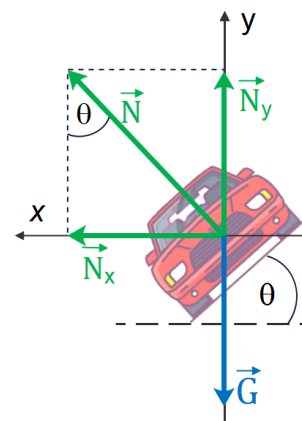
$$m \frac{v^2}{r} = mg \operatorname{tg} \theta, \quad (3.4)$$

odnosno

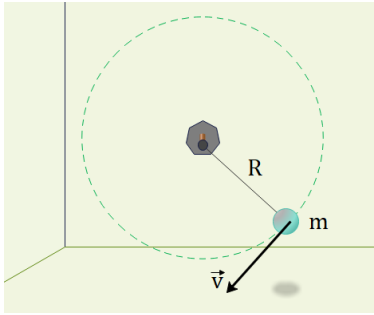
$$\theta = \arctg \left(\frac{v^2}{gr} \right). \quad (3.5)$$

Ugao nagiba ceste je $22,76^\circ$.

Ukoliko je brzina automobila manja od 40 km h^{-1} , automobil će se pomjeriti prema unutrašnjosti krivine tako da odnos $\frac{v^2}{r}$ ostane konstantan i jednak rezultujućoj vrijednosti sile. Drugim riječima, intenzitet sile koja djeluje na automobil je konstantan pa i centripetalno ubrzanje mora biti konstantno. Ako se smanji brzina, smanjiće se i radijus putanje, a ako se poveća brzina, povećaće se i radijus putanje.



Slika 6.13: Uz rješenje zadatka 3.



Slika 6.14: Uz zadatak 4.

ZADATAK 4: Mala kuglica mase m , okačena o nit dužine R , rotira u vertikalnoj ravni oko fiksne tačke kao na slici 6.14. Odrediti tangencijalno ubrzanje kuglice i silu zatezanja konca u trenutku kada je brzina kuglice v , a konac je pod uglom θ u odnosu na vertikalni pravac. Kolika je minimalna brzina kuglice da bi prošla najvišom tačkom kružne putanje?

Rješenje:

Kuglica se kreće po kružnoj putanji u vertikalnoj ravni pod djelovanjem sile Zemljine teže i sile zatezanja konca. Drugi Newtonov zakon, napisan za kretanje ovog tijela, glasi

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_z. \quad (4.1)$$

Tokom kretanja, kuglica stalno mijenja pravac vektora brzine, pa zbog toga posjeduje centripetalno ubrzanje, ali mijenja i intenzitet vektora brzine, pa posjeduje i tangencijalnu komponentu ubrzanja, odnosno tangencijalno ubrzanje. Zbog toga ćemo izabrati referentni sistem tako da je x -osa usmjerena u pravcu tangente, a y -osa u pravcu normale na putanju (slika 6.15). Ako je θ ugao koji nit zaklapa s vertikalnim pravcem, onda projekcijom prethodne jednačine na ose izabranog koordinatnog sistema dobijamo

$$ma_t = mg \sin \theta, \quad (4.2)$$

$$ma_{cp} = -mg \cos \theta + F_z. \quad (4.3)$$

Iz jednačine (4.2) slijedi da je $a_t = g \sin \theta$, a iz jednačine (4.3)

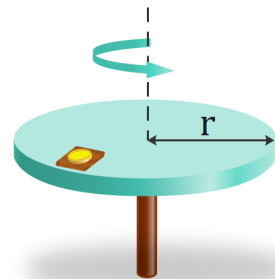
$$F_z = m \left(\frac{v^2}{R} + g \cos \theta \right). \quad (4.4)$$

Minimalna vrijednost brzine u najvišoj tački putanje, za koju je $\theta = 180^\circ$ odgovara situaciji kada intenzitet sile zatezanja teži nuli, pa na osnovu izraza (4.4) dobijamo

$$v_{\min} = \sqrt{gR}, \quad (4.5)$$

gdje smo iskoristili $\cos 180^\circ = -1$.

ZADATAK 5: Kovanica mase 3.1 g postavljena je na malo drveno tijelo mase 20 g kao na slici 6.16. Kovanica i drveno tijelo se postavljaju na disk radijusa 12 cm koji rotira u horizontalnoj ravni. Koliki je maksimalni broj obrtaja koje može imati disk, a da ni kovanica ni drveno tijelo ne počnu proklizavati po disku? Koeficijent statičkog trenja između drvenog tijela i podloge je 0,7, a između kovanice i drvenog tijela 0,5.



Slika 6.16: Uz zadatak 5.

Rješenje:

Određićemo maksimalnu linearnu brzinu kojom se ova dva tijela mogu kretati, a da pri tome nijedno ne proklizava. Sila statičkog trenja pri tome sprječava proklizavanje. Na drveni blok djeluju sila Zemljine teže, sila reakcije podloge, sila trenja i sila težine kovanice. Ako s m_1 označimo masu bloka, a s m_2 masu kovanice, drugi Newtonov zakon za kretanje bloka i kovanice zajedno možemo pisati kao

$$(m_1 + m_2) \vec{a}_1 = (m_1 + m_2) \vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{\text{tr}1}. \quad (5.1)$$

Izabraćemo referentni sistem tako da je x -osa usmjerena prema centru kružne putanje, a y -osa okomita na ravan rotacije kao na slici 6.17. Projekcijom vektora iz gornje jednačine na ose izabranog sistema dobijamo

$$(m_1 + m_2) a_{\text{cp}1} = F_{\text{tr},s1}, \quad (5.2)$$

$$0 = -(m_1 + m_2)g + N_1. \quad (5.3)$$

Iz jednačine (5.3) dobijemo silu reakcije podloge na drveno tijelo $N_1 = (m_1 + m_2)g$. Maksimalna brzina kretanja pri kojoj tijelo neće proklizati odgovara situaciji kada je statička sila trenja maksimalna i kada je radijus kružne putanje najveći, odnosno

$$(m_1 + m_2) \frac{v_{1\text{max}}^2}{r} = F_{\text{tr},s,\text{max}} = \mu_1 N_1 = \mu_1 (m_1 + m_2)g. \quad (5.4)$$

Oдавde je

$$v_{1\text{max}} = \sqrt{\mu_1 g r} = 0,91 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.5)$$

Posmatrajmo sada sistem koji se sastoji samo od kovanice. Na kovanicu djeluju sila Zemljine teže, sila reakcije podloge i statička sila trenja kao na slici 6.18, pa možemo pisati

$$m_2 \vec{a}_2 = m_2 \vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{\text{tr}2}. \quad (5.6)$$

Projekcijom na ose koordinatnog sistema dobijamo da je sila reakcije podloge $N_2 = m_2 g$ i

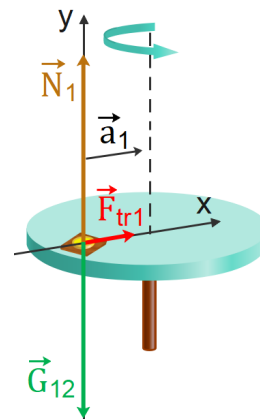
$$m_2 \frac{v_{2\text{max}}^2}{r} = F_{\text{tr},s,\text{max}} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g, \quad (5.7)$$

odnosno

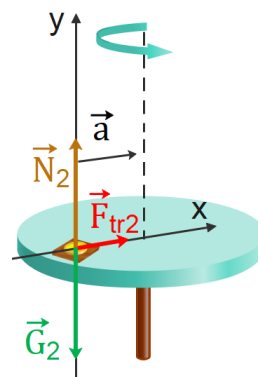
$$v_{2\text{max}} = \sqrt{\mu_2 g r} = 0,77 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.8)$$

Prema tome zaključujemo da će kovanica početi proklizavati prije drvenog bloka i to pri brzini od $0,77 \text{ m s}^{-1}$. Broj obrtaja u jedinici vremena koji odgovara ovoj brzini je

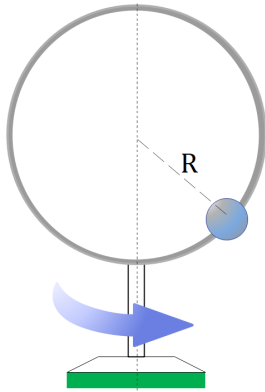
$$f = \frac{v_{2\text{max}}}{2\pi r} = 61,3 \frac{\text{obr}}{\text{min}}. \quad (5.9)$$



Slika 6.17: Uz rješenje prvog dijela zadatka 5.



Slika 6.18: Uz rješenje drugog dijela zadatka 5.



Slika 6.19: Uz zadatak 6.

ZADATAK 6: Mala perla može da se kreće bez trenja po žici koja je savijena u prsten radijusa 15 cm kao što je prikazano na slici 6.19. Prsten se uvijek nalazi u vertikalnoj ravni i rotira s periodom 0.45 s. Položaj perle se može opisati uglom θ .

- Pri kojem uglu θ će perla mirovati u odnosu na žičani prsten?
- Kolika je maksimalna ugaona brzina kružnog kretanja prstena za koju će perla ostati u ravnotežnom položaju?

Rješenje:

a) Perla se kreće u horizontalnoj ravni po kružnici radijusa $r = R \sin \theta$ brzinom koja je određena s

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi R \sin \theta}{T}, \quad (6.1)$$

gdje je T period kružnog kretanja žičanog prstena. Na perlu djeluju dvije sile: sila Zemljine teže i sila reakcije podloge, tako da je

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}, \quad (6.2)$$

odnosno

$$ma_{cp} = N \sin \theta, \quad (6.3)$$

$$0 = -mg + N \cos \theta. \quad (6.4)$$

Pri tome smo izabrali referentni sistem kao na slici 6.20 i projektovali vektore na ose izabranog sistema. Iz jednačine (6.4) slijedi da je intenzitet sile reakcije podloge

$$N = \frac{mg}{\cos \theta}, \quad (6.5)$$

pa uvrštavanjem u (6.3) dobijemo

$$\frac{m}{R \sin \theta} \left(\frac{2\pi R \sin \theta}{T} \right)^2 = \frac{mg \sin \theta}{\cos \theta}, \quad (6.6)$$

odnosno

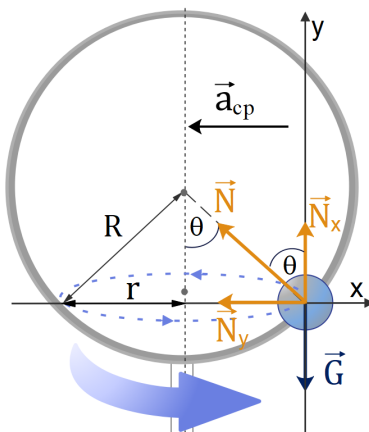
$$\frac{4\pi^2 R \sin \theta}{T^2} = \frac{g \sin \theta}{\cos \theta}. \quad (6.7)$$

Prethodna jednčina ima dva rješenja:

$$\sin \theta = 0, \quad \rightarrow \quad \theta = 0 \quad (6.8)$$

i

$$\cos \theta = \frac{gT^2}{4\pi^2 R}. \quad (6.9)$$



Slika 6.20: Uz rješenje zadatka 6.

Prvo rješenje odgovara situaciji kada se perla nalazi u najnižem položaju, odnosno na osi rotacije. Drugo rješenje daje

$$\cos \theta = \frac{9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot (0,45 \text{ s})^2}{4\pi^2 \cdot 0,15 \text{ m}} = 0,335 \quad (6.10)$$

odnosno

$$\theta = 70,4^\circ. \quad (6.11)$$

b) Iz jednačine (6.9) vidimo da za prsten konstantnog radijusa, ugao pod kojim se nalazi perla zavisi isključivo od perioda kružnog kretanja. Ovo rješenje ima smisla samo ako je period dovoljno mali tako da je $\cos \theta < 1$. Granični period kružnog kretanja pri kome će se perla pomjeriti iz ravnotežnog položaja određen je s

$$1 = \frac{g T_g^2}{4\pi^2 R}, \quad (6.12)$$

odnosno

$$T_g = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}. \quad (6.13)$$

Granična (maksimalna) vrijednost ugaone brzine pri kojoj će perla ostati u ravnotežnom položaju iznosi

$$\omega_g = \frac{2\pi}{T_g} = \sqrt{\frac{g}{R}} = 8,1 \text{ rad s}^{-1}. \quad (6.14)$$

ZADATAK 7: Tijelo mase m se nalazi na kugli poluprečnika R , koja je učvršćena da miruje kao na slici 6.21. Tijelo u jednom trenutku počinje da klizi niz kuglu bez trenja. Odrediti:

- Tangencijalno i centripetalno ubrzanje tijela kao funkciju visine na kojoj se nalazi.
- Visinu na kojoj se tijelo odvaja od kugle.

Rješenje:

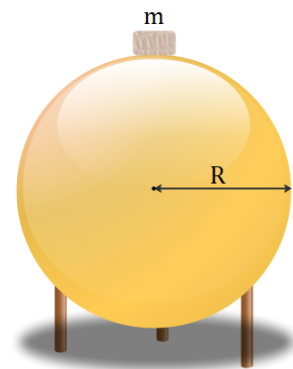
a) Dok se tijelo kreće niz kuglu na njega djeluje sila Zemljine teže i sila reakcije podloge tako da je

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (7.1)$$

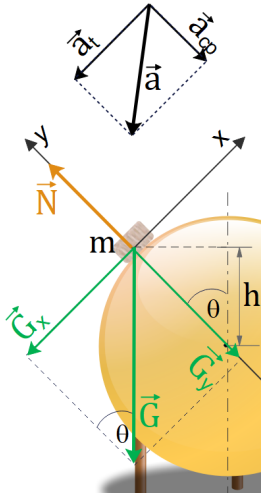
Neka je θ ugao koji zaklapa vektor položaja tijela (određen u odnosu na centar kugle) u trenutku kada je visina tijela, mjerena od centra kugle, h (slika 6.22). Projekcijom vektora iz relacije (7.1) na ose izabranog sistema dobijamo

$$-ma_t = -mg \sin \theta, \quad (7.2)$$

$$-ma_{cp} = -mg \cos \theta + N. \quad (7.3)$$



Slika 6.21: Uz zadatak 7.



Slika 6.22: Uz rješenje zadatka 7.

Sa slike vidimo da je $\cos \theta = \frac{h}{R}$ pa je

$$a_t(h) = g \sqrt{1 - \frac{h^2}{R^2}} \quad (7.4)$$

i

$$a_{cp}(h) = g \frac{h}{R} - \frac{N}{m}. \quad (7.5)$$

Zavisnost sile reakcije podloge od visine h možemo odrediti iz jedinične (7.5) i zakona očuvanja mehaničke energije. Naime, pošto se trenje može zanemariti, mehanička energija je očuvana, te se može pisati

$$mgR = mgh + \frac{mv^2}{2}, \quad (7.6)$$

odakle je

$$v^2 = 2(R - h)g. \quad (7.7)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (7.5) dobijemo

$$\frac{2(R - h)g}{R} = \frac{gh}{R} - \frac{N}{m}, \quad (7.8)$$

odakle je

$$\frac{N}{m} = \frac{3h - 2R}{R}g. \quad (7.9)$$

Ako sada ovu relaciju uvrstimo u jednačinu (7.5) dobijamo zavisnost centripetalnog ubrzanja od visine

$$a_{cp}(h) = \left(1 - \frac{h}{R}\right)g. \quad (7.10)$$

b) Iz jednačine (7.9) vidimo da intenzitet sile reakcije podloge opada kako visina h opada, odnosno kako se tijelo kreće niz kuglu. Tijelo će se odvojiti od kugle na onoj visini za koju sila reakcije podloge postane jednaka nuli. Prema tome, uslov koji mora biti zadovoljen jeste

$$N = \frac{3h_0 - 2R}{R}mg = 0, \quad (7.11)$$

odakle je

$$h_0 = \frac{2}{3}R. \quad (7.12)$$

ZADATAK 8: Pilot mase $m = 80\text{ kg}$ leti u vertikalnom luku radijusa zakrivljenosti $2,7\text{ km}$ brzinom 225 m s^{-1} . Naći silu kojom sjedište djeluje na pilota u najnižoj i najvišoj tački kružne putanje.

Rješenje:

Tokom kretanja po kružnoj putanji na pilota djeluju dvije sile, sila Zemljine teže \vec{G} i sila reakcije podloge (sjedišta) \vec{N} kao što je prikazano na slici 6.23, pa možemo pisati

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (8.1)$$

U najvišoj tački kružne putanje obje ove sile su usmjerene prema dolje, tj. prema centru kružne putanje, pa vrijedi

$$ma_{\text{cp}} = G + N_1. \quad (8.2)$$

Oдавде je intenzitet sile reakcije podloge u najvišoj tački putanje

$$N_1 = ma_{\text{cp}} - mg = m \left(\frac{v^2}{r} - g \right) = 715,2\text{ N}. \quad (8.3)$$

U najnižoj tački sila reakcije podloge je suprotnog smjera u odnosu na smjer sile Zemljine teže (slika 6.23), pa možemo pisati

$$ma_{\text{cp}} = -G + N_2. \quad (8.4)$$

Sila kojom sjedište djeluje na pilota je

$$N_2 = ma_{\text{cp}} + mg = m \left(\frac{v^2}{r} + g \right) = 2285\text{ N}. \quad (8.5)$$

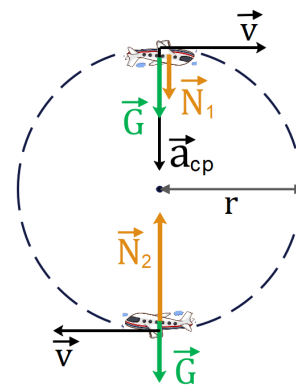
ZADATAK 9: Tijelo mase m_1 kreće se bez trenja na stolu po kružnoj putanji kao na slici 6.24. Ovo tijelo je povezano neistegljivim koncem zanemarive mase s tijelom mase m_2 , tako što je u centru kružne putanje probušena mala rupa. Koliki mora biti najmanji period obrtanja tijela mase m_1 da bi ono ostalo na kružnoj putanji radijusa r ?

Rješenje:

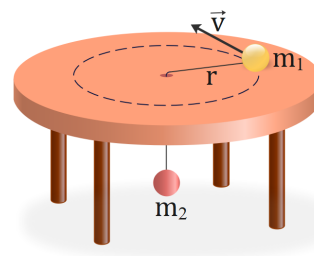
Posmatramo kretanje dva tijela povezana neistegljivim koncem zanemarive mase. Na tijelo mase m_1 djeluju sila Zemljine teže \vec{G}_1 , sila reakcije podloge \vec{N} i sila zatezanja \vec{F}_{z1} , dok na tijelo mase m_2 djeluju sila Zemljine teže \vec{G}_2 i sila zatezanja \vec{F}_{z2} . Drugi Newtonov zakon napisan za ova dva tijela glasi

$$m_1\vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{z1}, \quad (9.1)$$

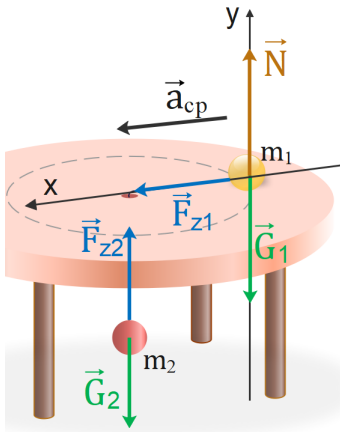
$$m_2\vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{z2}. \quad (9.2)$$



Slika 6.23: Uz rješenje zadatka 8.



Slika 6.24: Uz zadatak 9.



Slika 6.25: Uz rješenje zadatka 9.

Kretanje tijela mase m_1 posmatraćemo iz referentnog sistema u kome je x -osa usmjerena prema centru kružne putanje, a y -osa okomita na sto kao na slici 6.25. Položaj tijela mase m_2 određujemo iz referentnog sistema koji se sastoji od jedne ose (y -ose) koja je usmjerena vertikalno prema gore. Projekcijom jednačine (9.1) na ose izabranog sistema referencije dobijamo

$$m_1 a_{cp} = F_{z1}, \quad (9.3)$$

$$0 = -m_1 g + N, \quad (9.4)$$

a projekcijom jednačine (9.2)

$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{z2}. \quad (9.5)$$

Da bi se tijelo mase m_1 kretalo po kružnoj putanji konstantnog radijusa, tijelo mase m_2 mora mirovati, tj. mora vrijediti $a_2 = 0$. Zbog toga je $F_{z2} = m_2 g$. Obzirom da je masa užeta zanemariva zaključujemo da je $F_{z1} = F_{z2}$, te uvažavajući ove činjenice, jednačina (9.3) postaje

$$m_1 \omega^2 r = m_2 g. \quad (9.6)$$

Odavde je ugaona brzina

$$\omega = \sqrt{\frac{m_2 g}{m_1 r}}, \quad (9.7)$$

odnosno period

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 r}{m_2 g}}. \quad (9.8)$$

ZADATAK 10: Krivina radijusa 30 m nagnuta je tako da automobil mase 950 kg, koji se kreće brzinom 40 km h^{-1} , može proći kroz tu krivinu čak i ako je koeficijent trenja između guma i podloge približno jednak nuli. Odrediti opseg brzina za koje automobil može da prođe kroz krivinu bez proklizavanja ako je koeficijent statičkog trenja između guma i podloge 0,3.

Rješenje:

Tokom kretanja kroz krivinu, nagnutu pod uglom θ , na automobil djeluju sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} i sila trenja \vec{F}_{tr} , te se može pisati

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{tr}. \quad (10.1)$$

Izabraćemo sistem referencije u kojem je x -osa usmjerena prema centru kružne putanje, a y -osa vertikalno prema gore kao na slici 6.26.

Kada se automobil kreće brzinom 40 km h^{-1} sila trenja je zanemariva pa na osnovu prethodne jednačine slijedi

$$ma_{\text{cp}} = N \sin \theta, \quad (10.2)$$

$$0 = -mg + N \cos \theta. \quad (10.3)$$

Rješavanjem ovog sistema dobijamo

$$a_{\text{cp}} = g \operatorname{tg} \theta, \quad (10.4)$$

odnosno

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v^2}{rg} \rightarrow \theta = 22,76^\circ. \quad (10.5)$$

Ako se automobil kreće brzinom različitom od 40 km h^{-1} i ako ne proklizava onda na njega djeluje statička sila trenja. Ako je brzina automobila manja od 40 km h^{-1} statička sila trenja je usmjerena uz strmu ravan kao na slici 6.26 i sprječava da automobil klizi niz strmu ravan, a ako je brzina veća od 40 km h^{-1} , statička sila trenja je usmjerena niz strmu ravan. Ekstremne vrijednosti brzine, pri kojima automobil neće proklizavati određićemo iz uslova da je statička sila trenja, pri ovim vrijednostima brzine, maksimalna.

Projektovanjem jednačine (10.1) na ose izabranog sistema referencije dobijamo

$$m \frac{v_{\text{min}}^2}{r} = N \sin \theta - F_{\text{tr}} \cos \theta, \quad (10.6)$$

$$0 = -mg + N \cos \theta + F_{\text{tr}} \sin \theta. \quad (10.7)$$

Sila trenja je maksimalna statička za koju vrijedi $F_{\text{tr},s,\text{max}} = \mu_s N$, pa iz jednačine (10.6) slijedi

$$m \frac{v_{\text{min}}^2}{r} = N(\sin \theta - \mu_s \cos \theta) \quad (10.8)$$

a iz jednačine (10.7)

$$N = \frac{mg}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}. \quad (10.9)$$

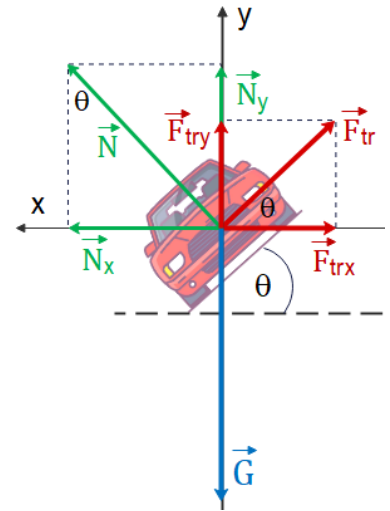
Na osnovu prethodne dvije relacije dobijamo

$$v_{\text{min}} = \sqrt{gr \frac{\sin \theta - \mu_s \cos \theta}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta}} = \sqrt{gr \frac{\operatorname{tg} \theta - \mu_s}{1 + \mu_s \operatorname{tg} \theta}} = 20,12 \text{ km h}^{-1}. \quad (10.10)$$

Za maksimalnu vrijednost brzine vrijedi

$$m \frac{v_{\text{max}}^2}{r} = N \sin \theta + F_{\text{tr}} \cos \theta, \quad (10.11)$$

$$0 = -mg + N \cos \theta - F_{\text{tr}} \sin \theta. \quad (10.12)$$



Slika 6.26: Uz rješenje zadatka 10. Situacija prikazna na slici odgovara slučaju kada sila trenje sprečava klizanja niz strminu.

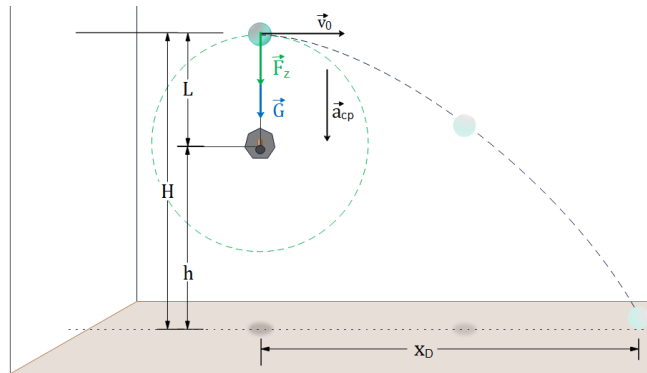
Kombinovanjem ove dvije relacije, uz izraz za maksimalnu statičku silu trenja, dobijamo

$$v_{\max} = \sqrt{gr \frac{\sin \theta + \mu_s \cos \theta}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta}} = \sqrt{gr \frac{\operatorname{tg} \theta + \mu_s}{1 - \mu_s \operatorname{tg} \theta}} = 56 \text{ km h}^{-1}. \quad (10.13)$$

ZADATAK 11: Loptica mase 60 g okačena je o konac dužine 50 cm i rotira u vertikalnoj ravni. Centar kružne putanje se nalazi na visini od 150 cm iznad poda. Loptica se zarotira minimalnom brzinom koja je potrebna da prođe najvišom tačkom kružne putanje. Ako se konac pusti u trenutku kada se loptica nalazi u najvišoj tački, odrediti na koju će udaljenost pasti.

Rješenje:

Slika 6.27: Uz rješenje zadatka 11.



Loptica se kreće u vertikalnoj ravni po kružnoj putanji i pri tome na nju djeluju sila Zemljine teže i sila zatezanja konca (slika 6.27). Jednačina kretanja ovog tijela glasi

$$m \vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_z. \quad (11.1)$$

U najvišoj tački putanje sila Zemljine teže i sila zatezanja konca imaju isti smjer (prema centru kružne putanje). Pored toga, tangencijalno ubrzanje u najvišoj tački putanje jednako je nuli pa je ukupno ubrzanje jednako centripetalnom. Projekcijom na odgovarajuću osu koordinatnog sistema dobijamo

$$ma_{\text{cp}} = G + F_z, \quad (11.2)$$

odnosno

$$m \frac{v^2}{r} = G + F_z, \quad (11.3)$$

gdje je $r = L$ radijus kružne putanje koji je jednak dužini konca. Minimalna brzina kojom kuglica može proći kroz najvišu tačku kružne

putanje odgovara situaciji kada je intenzitet sile zatezanja minimalan, u ovom slučaju kada teži nuli. Prema tome, možemo pisati

$$v_{\min} = \sqrt{gL} = 2,21 \text{ m s}^{-1}. \quad (11.4)$$

Ako se loptica pusti u najvišoj tački kružne putanje onda se ona kreće kao horizontalni hitac s visine $H = 2 \text{ m}$ i s početnom brzinom $v_0 = 2,21 \text{ m s}^{-1}$. Trenutak pada kuglice određen je relacijom

$$t_p = \sqrt{\frac{2H}{g}}, \quad (11.5)$$

a domet relacijom

$$x_D = v_0 t_p = v_0 \sqrt{\frac{2H}{g}} = 1,41 \text{ m}. \quad (11.6)$$

Prema tome, kuglica će pasti na horizontalnu udaljenost od $1,41 \text{ m}$ u odnosu na centar kružne putanje.

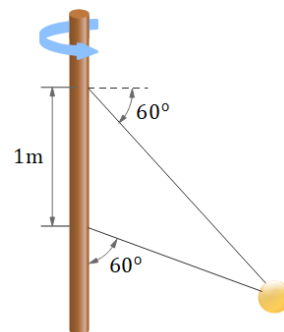
6.6 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Modelarska raketa je pričvršćena za jedan kraj štapa zamenarive mase i dužine 2 m . Drugi kraj štapa je fiksiran tako da se raketa kreće po krugu u horizontalnoj ravni. Raketa ubrzava tangencijalnim ubrzanjem od 1 m s^{-2} u periodu od 10 s , a zatim se ugasi.

- Kolika je ugaona brzina rakete u trenutku njenog gašenja? ($\omega = 5 \text{ rad s}^{-1}$)
- Koliko obrtaja je raketa napravila do ovog trenutka? ($N = 4$)
- Odrediti intenzitet i pravac vektora ubrzanja u trenutku $t = 2 \text{ s}$. ($a = 2,06 \text{ m s}^{-2}$, $\theta = 14^\circ$)

Zadatak 2: Metalno tijelo nalazi se na horizontalnoj podlozi i povezano je preko poluge dužine 80 cm s motorom. Kada se motor uključi tijelo počne kružiti konstantnom ugaonom brzinom, tako da u jednoj minuti napravi 200 obrtaja.

- Nakon kojeg vremena će se metalno tijelo zaustaviti ako se motor isključi?
- Koliko je obrtaja napravilo ovo tijelo do trenutka zaustavljanja?



Slika 6.28: Uz zadatak 3.

Koeficijent trenja između metalnog tijela i podloge je 0,6. ($t_z = 2,85\text{ s}$, $N' = 14,24$)

Zadatak 3: Dvije žice povezuju kuglu mase 2 kg i štap koji rotira konstantnom ugaonom brzinom, kao što je prikazano na slici 6.28. Pri tome se kugla kreće po kružnoj putanji u horizontalnoj ravni.

- a) Za koju vrijednost brzine je sila zatezanja u obje žice jednaka? ($v = 2,9\text{ m s}^{-1}$)
- b) Kolika je ta sila zatezanja? ($F_z = 14,3\text{ N}$)

Zadatak 4: Inženjer treba da projektuje zakrivljeni dio ceste pod sljedećim uslovima: kada je na cesti led (koeficijent statičkog trenja između guma i leda 0,08) automobil koji miruje ne smije da sklizne prema unutrašnjosti krivine, a automobil koji putuje brzinom manjom od 60 km h^{-1} ne smije da počne proklizavati prema vanjskom dijelu krivine. Koliki je ugao nagiba ceste i najmanji radijus zakrivljenosti krivine? ($\theta = 4,57^\circ$, $r = 176\text{ m}$)

Zadatak 5: Roller-coaster vagon ima masu od 1200 kg kada je potpuno opterećen putnicima. Dok vagon prelazi preko vrha brda radijusa zakrivljenosti 18 m, njegova brzina se ne mijenja. Koliki je intenzitet sile reakcije podloge i njen smjer na vrhu brda (gore ili dolje) ako je brzina vagona 11 m s^{-1} odnosno 14 m s^{-1} ? ($N_1 = 3700\text{ N}$, *gore*, $N_2 = 1300\text{ N}$, *dolje*)

Zadatak 6: Avion leti po horizontalnoj kružnici brzinom od 480 km h^{-1} . Ako su mu krila nagnuta pod uglom od 40° u odnosu na horizontalu, koliki je poluprečnik kružnice po kojoj avion leti? Pretpostavimo da je potrebna sila u potpunosti osigurana silom potiska vazduha koja je okomita na površinu krila. ($r = 2,2\text{ km}$)

Zadatak 7: Dijete mase m ljulja se na ljuljački koja je zakačena pomoću dva lanca, svaki dužine R . Ako je sila zatezanja u svakom lancu u najnižoj tački putanje T , odrediti brzinu djeteta u najnižoj tački i silu kojom sjedište pri tome djeluje na dijete. (Zanemariti masu sjedišta.)

$$(R = \sqrt{R \left(\frac{2T}{m} - g \right)}, N = 2T)$$

Zadatak 8: Blok mase m_1 pričvršćen je za uže dužine L_1 , koje je učvršćeno na drugom kraju. Blok se kreće u horizontalnom krugu na stolu bez trenja. Drugi blok mase m_2 je vezan za prvi blok pomoću užeta dužine L_2 i također se kreće u krug. Ako je period kretanja T , odrediti silu zatezanja u svakom užetu (zanemariti njihove mase). (sila zatezanja užeta dužine L_1 $F_{z1} = [m_2(L_1 + L_2) + m_1 L_1] \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2$, sila

zatezanja užeta dužine L_2 $F_{z2} = [m_2 (L_1 + L_2)] \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

Zadatak 9: Jastreb leti u horizontalnom luku poluprečnika 12 m konstantnom brzinom od 4 m s^{-1} . Odrediti njegovo centripetalno ubrzanje. Ukoliko nastavlja da leti duž istog horizontalnog luka, ali tako da povećava intenzitet brzine s ubrzanjem od $1,2 \text{ m s}^{-1}$, odrediti njegovo ukupno ubrzanje (intenzitet i smjer). ($a_{cp} = 1,33 \text{ m s}^{-2}$, $a = 1,79 \text{ m s}^{-2}$, $\theta = 48^\circ$ prema unutra)

Zadatak 10: Zvrk se okreće ugaonim ubrzanjem $\alpha(t) = 5t^3 - 4t$. U trenutku $t = 0$, vrh ima ugaonu brzinu 5 rad s^{-1} , a referentna linija je nagnuta pod uglom od $\theta = 2 \text{ rad}$. Naći izraz za ugaonu brzinu vrha $\omega(t)$ i ugaoni pomak $\theta(t)$. ($\omega(t) = \frac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5$, $\theta(t) = \frac{1}{4}t^5 - \frac{2}{3}t^3 + 5t + 2$)

Zadatak 11: Kamion se kreće kružnim putem poluprečnika 50 m brzinom od 4 m s^{-1} . U trenutku $t = 0$, njegova brzina se počne povećavati s ubrzanjem od $0,4t$. Odrediti brzinu i veličinu ubrzanja kamiona nakon 4 s. ($v = 7,2 \text{ m s}^{-1}$, $a_{cp} = 1,037 \text{ m s}^{-2}$, $a = 1,91 \text{ m s}^{-2}$)

Zadatak 12: Trkaći automobil se kreće po horizontalnoj kružnoj stazi radijusa 300 m. Ako automobil povećava svoju brzinu konstantnim ubrzanjem od 7 m s^{-2} , polazeći iz stanja mirovanja, odrediti vrijeme potrebno da postigne ubrzanje od 8 m s^{-2} . Kolika je njegova brzina u tom trenutku? ($t = 4,87 \text{ s}$, $v = 34,1 \text{ m s}^{-1}$)

ENERGIJA I RAD

7.1	Kinetička energija	158
7.2	Rad	159
7.3	Teorem o energiji i radu	161
7.4	Potencijalna energija	161
7.5	Mehanička energija	163
7.6	Snaga	165
7.7	Riješeni zadaci	166
7.8	Zadaci za vježbu	183

Energija je pojam koji se u različitim kontekstima koristi u svakodnevnom životu. Govorimo o električnoj ili toplotnoj energiji, energiji kretanja, zračenju energije, prenosu energije itd. Međutim, energiju kao pojam nije jednostavno definisati. To je koncept kojim se mogu prikazati ili predvidjeti promjene u prirodi. Čisto formalno, energiju možemo definisati kao skalarnu fizikalnu veličinu koja određuje stanje nekog sistema. Stanje nekog sistema (npr. nekog broja čestica), a time i energija, mijenja se u interakciji s okolinom, pa upravo na osnovu te promjene želimo dobiti informacije o tome kako okolina utiče na sistem i obratno.

Koncept u kojem se interakcija sistema s okolinom analizira praćenjem promjene energije sistema i okoline je bitan iz razloga što je energija veličina koja je očuvana, tj. konstantna. Kada kažemo da je energija očuvana onda mislimo na energiju cjelokupnog Univerzuma. Princip koji kaže da je energija cjelokupnog Univerzuma konstantna naziva se zakon očuvanja energije i ne postoji nijedna pojava i eksperiment u kojem je ovaj princip narušen. Iako je energija cjelokupnog Univerzuma očuvana, dijelovi Univerzuma mogu imati pozitivan prirast, a istovremeno neki drugi dijelovi negativan prirast energije. Stoga je pogodno definisati određeni broj tijela od značaja i

odvojiti ga od ostatka Univerzuma. Taj skup tijela nazivamo sistem, a ostatak Univerzuma okolina. Sistem može biti jedna olovka, može biti olovka i Zemlja, može biti naša galaksija ili bilo šta drugo. Prema tome, princip očuvanja energije koji kaže da je promjena energije Univerzuma jednaka nuli, tj.

$$\Delta E = 0, \quad (7.1)$$

može se pisati i kao

$$\Delta E = \Delta E^s + \Delta E^o = 0, \quad (7.2)$$

gdje su E^s i E^o energija sistema i okoline respektivno. To znači da ako sistem međudjeluje s okolinom njegova energija se može povećavati ili smanjivati samo na račun okoline.

Energija se može javljati u različitim oblicima i transformisati iz jednog u drugi. Tako se npr. kod vodopada gravitaciona potencijalna energija vode transformiše u kinetičku energiju vode, koja se onda koristi kako bi se pokretale turbine koje rotacionu kinetičku energiju pretvaraju u električnu, koja se onda transportuje do korisnika gdje se opet pretvara npr. u toplotnu energiju. Zakon očuvanja energije nam govori da je suma promjena svih vidova energije jednaka nuli, tj.

$$\Delta E_1 + \Delta E_2 + \Delta E_3 + \dots + \Delta E_N = 0, \quad (7.3)$$

gdje su $\Delta E_i, i = 1, \dots, N$ različiti vidovi energije.

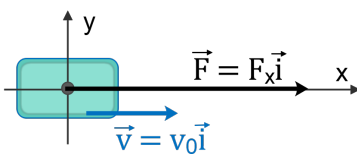
7.1 Kinetička energija

Prvi vid energije koji ćemo detaljnije proučavati je kinetička energija. Kinetička energija je povezana sa stanjem kretanja nekog tijela ili sistema. Za česticu mase m koja se kreće brzinom intenziteta v u proizvoljnom pravcu, kinetičku energiju definišemo kao pozitivnu skalarnu veličinu datu s

$$E_k = \frac{mv^2}{2}. \quad (7.4)$$

Vidimo da će tijela koja se brže kreću imati veću kinetičku energiju od onih koja se kreću sporije ili miruju (kada je $E_k = 0$). SI jedinica za energiju je $[\text{kg m}^2 \text{s}^{-2}]$. Ova kombinacija osnovnih jedinica daje izvedenu koja se naziva džul (Joule) i označava s J.

Ranije smo naveli da međudjelovanje nekog sistema s okolinom želimo opisati promjenom energije tog sistema. Neka se posmatrani sistem sastoji od jedne čestice mase m koja se u trenutku $t = 0$ kreće početnom brzinom $\vec{v}_0 = v_0 \vec{i}$ duž x -ose kao na slici 7.1. Stanje te čestice je određeno energijom $E_{k_0} = \frac{mv_0^2}{2}$. Pretpostavimo da sada ta



Slika 7.1: Na tijelo djeluje konstantna sila u smjeru x -ose.

čestica međudjeluje s okolinom na način da na nju djeluje konstantna sila $\vec{F} = F_x \vec{i}$. Pošto je sila koja djeluje na tijelo konstantna i njegovo ubrzanje će biti konstantno, pa možemo pisati jednačine kretanja

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_x t^2, \quad (7.5)$$

$$v_x(t) = v_0 + a_x t \quad (7.6)$$

iz kojih se eliminisanjem vremena dobije

$$a_x \Delta x = \frac{1}{2} v_x^2 - \frac{1}{2} v_0^2. \quad (7.7)$$

Ako prethodnu jednačinu pomnožimo s masom tijela dobijamo

$$\frac{m v_x^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = m a_x \Delta x, \quad (7.8)$$

odnosno

$$\Delta E_k = F_x \Delta x. \quad (7.9)$$

Ukoliko sila koja djeluje na tijelo nije konstantna onda je promjena energije data s

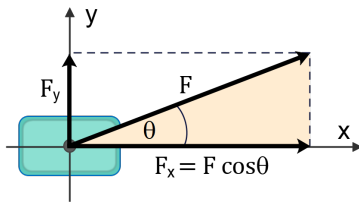
$$\Delta E_k = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx. \quad (7.10)$$

Prema tome, vidimo da će interakcija tijela s okolinom, određena silom \vec{F} , uzrokovati promjenu kinetičke energije tijela.

7.2 Rad

Ranije smo definisali sistem koji je granicom odvojen od svoje okoline i koji može međudjelovati s njom. Naveli smo da ukoliko postoji međudjelovanje onda se energija može prenositi s okoline na sistem i obratno. Međutim, nismo istražili na koji način se to može ostvariti. U principu postoje samo dva mehanizma prenosa energije s okoline na sistem i obratno. Prvi mehanizam je povezan s djelovanjem okoline na sistem odgovarajućom silom i taj mehanizam prenosa energije se naziva rad. Drugi mehanizam prenosa energije je toplota i on nema mehanički karakter pa ga nećemo detaljnije ni razmatrati (nauka koja se bavi prenosom energije toplotom naziva se termodinamika).

U prethodnom odjeljku smo vidjeli da, ako okolina djeluje na sistem silom \vec{F} , onda se mijenja energija sistema i ta promjena je data relacijom (7.9). Prema tome, došlo je do prenosa energije s okoline na sistem djelovanjem sile, pa kažemo da sila \vec{F} vrši rad. Jasno je i da sistem može djelovati silom na okolinu i vršiti rad. Da bismo mogli razlikovati smjer transporta energija (transport energije u sistem ili iz sistema) dogovorom je uzeto da je rad pozitivan ako okolina vrši



Slika 7.2: Komponenta F_x sile F vrši rad na pomijeranju tijela duž x -ose.

rad nad sistemom i pri tome energija sistema raste, odnosno da je rad negativan ako sistem vrši rad nad okolinom i pri tome energija sistema opada.

Pretpostavimo da na tijelo djeluje sila konstantnog intenziteta u pravcu x -ose i da ga pri tome pomjeri za vrijednost pomaka Δx . Rad konstantne sile koja djeluje u pravcu pomaka tijela definiše se kao

$$A = F_x \Delta x. \quad (7.11)$$

Na osnovu prethodne relacije zaključujemo da će rad konstantne sile biti pozitivan ako ona djeluje u smjeru pomaka, odnosno negativan ako djeluje u suprotnom smjeru. Neka sada na tijelo, koje se kreće duž x -ose, djeluje konstantna sila u proizvoljnom pravcu (slika 7.2). Pomaku tijela će doprinositi samo x -komponenta ove sile koja je data s $F_x = F \cos \theta$, gdje je θ ugao između vektora sile i vektora pomaka. Prema tome, rad proizvoljne sile konstantnog intenziteta pri pomjeranju tijela duž x -ose određen je s

$$A = F_x \Delta x = F \Delta x \cos \theta, \quad (7.12)$$

gdje je F intenzitet vektora sile, Δx intenzitet vektora pomaka (u ovom slučaju duž x -ose), a θ ugao između njih. Prethodna relacija se može onda poopštiti na rad konstantne sile pri pomjeranju tijela duž proizvoljnog pravca na slijedeći način

$$A = F \Delta r \cos \theta = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (7.13)$$

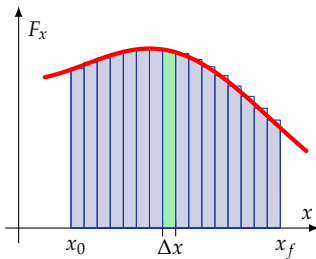
Prema tome, rad konstantne sile \vec{F} pri pomjeranju tijela za $\Delta \vec{r}$ definisan je kao skalarni proizvod vektora sile \vec{F} i vektora pomaka $\Delta \vec{r}$.

Da bismo odredili rad promjenjive sile pri pomjeranju tijela, razmotrićemo ponovo slučaj kretanja duž x -ose. Neka na tijelo djeluje sila promjenjivog intenziteta duž x -ose $\vec{F} = F_x \vec{i}$ i pri tome ga pomjeri od početnog položaja x_0 do konačnog x_f . Rad promjenjive sile ćemo odrediti tako što ćemo pomak $\Delta x = x_f - x_0$ podijeliti na N intervala, svaki širine Δx_j kao na slici 7.3. Neka je \bar{F}_{x_j} srednja vrijednost sile koja djeluje pri pomaku unutar intervala j (sila se mijenja tokom kretanja pa unutar svakog intervala možemo odrediti srednju vrijednost sile). Rad koji izvrši ova sila pri pomjeranju tijela za vrijednost Δx_j iznosi

$$A_j = \bar{F}_{x_j} \Delta x_j. \quad (7.14)$$

Ukupni rad koji promjenjiva sila $\vec{F} = F_x \vec{i}$ izvrši tokom kretanja tijela je onda suma radova unutar svakog intervala (slika 7.3), odnosno

$$A = \sum_{j=1}^N A_j = \sum_{j=1}^N \bar{F}_{x_j} \Delta x_j. \quad (7.15)$$



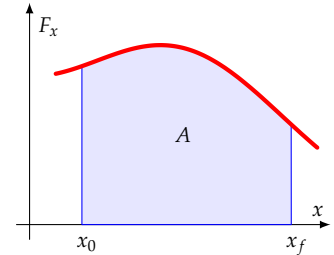
Slika 7.3: Rad promjenjive sile F_x za mali pomak Δx je $F_x \Delta x$ i jednak je površini zelenog pravougaonika. Ukupan rad obavljen za pomak od x_0 do x_f približno je jednak zbiru površina svih pravougaonika.

Vrijednost sile unutar svakog intervala smo aproksimirali njenom srednjom vrijednosti unutar tog intervala. Ova aproksimacija će biti bolja što je širina intervala manja. U graničnom slučaju kada nam širina intervala teži nuli, a broj intervala teži u beskonačnost, vrijednost rada, aproksimirana prethodnom relacijom, prelazi u egzaktnu vrijednost (slika 7.4). Prema tome, možemo pisati

$$A = \lim_{\substack{\Delta x_j \rightarrow 0 \\ N \rightarrow \infty}} \sum_{j=1}^N \bar{F}_{x_j} \Delta x_j = \int_{x_0}^{x_f} F_x dx, \quad (7.16)$$

gdje smo iskoristili definiciju određenog integrala. Ovaj izraz se može poopštiti na slučaj rada promjenjive sile \vec{F} koja djeluje u proizvoljnom pravcu i pomjeri tijelo od \vec{r}_0 do \vec{r}_f , tako da opšti izraz za rad proizvoljne sile \vec{F} glasi

$$A = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_f} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.17)$$



Slika 7.4: Rad koji izvrši neka promjenjiva sila F_x pri pomjeranju tijela materijalne tačke od x_0 do x_f jednak je površini ispod krive $F_x(x)$.

7.3 Teorem o energiji i radu

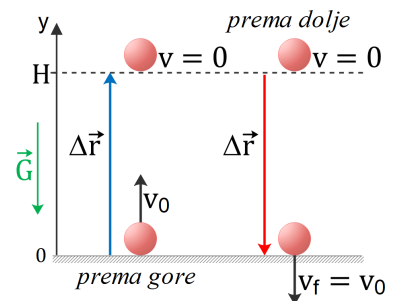
U prethodna dva potpoglavlja smo vidjeli da djelovanje sile \vec{F} pri pomjeranju tijela ima za posljedicu promjenu kinetičke energije tijela, s jedne strane i vršenje rada, s druge strane. Stoga postoji direktna veza između izvršenog rada i promjene kinetičke energije tijela. Poređenjem relacija (7.10) i (7.16) zaključujemo da su i rad i promjena kinetičke energije tijela koje se kreće duž x -ose dati preko $\int F_x dx$. Jednostavnim poopštenjem na kretanje u proizvoljnom pravcu, možemo zaključiti slijedeće: promjena kinetičke energije nekog tijela jednaka je radu svih sila koje djeluju na to tijelo. Ovaj iskaz je poznat kao Teorem o energiji i radu.

7.4 Potencijalna energija

Razmotrimo kretanje tijela koje se s površine Zemlje izbacilo vertikalno uvis početnom brzinom v_0 kao na slici 7.5 i kreće se isključivo pod djelovanjem sile Zemljine teže $\vec{G} = -mg\vec{j}$. Rad koji izvrši sila \vec{G} pri pomjeranju tijela od početnog položaja do najviše tačke, tj. maksimalne visine, dat je s

$$A_1 = \vec{G} \cdot \Delta\vec{r} = -mg\vec{j} \Delta y \vec{j} = -mg\Delta y = -mgH, \quad (7.18)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da se pomak vrši isključivo duž y -ose, te s H označili maksimalnu visinu tijela. Promjena kinetičke energije



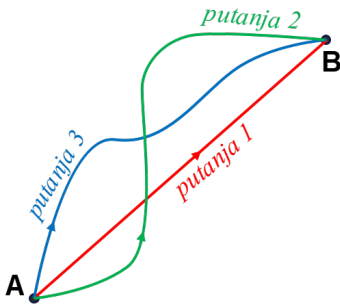
Slika 7.5: Tijelo je izbačeno vertikalno uvis početnom brzinom v_0 i kreće se isključivo pod djelovanjem sile Zemljine teže $\vec{G} = -mg\vec{j}$.

tijela je

$$\Delta E_k = 0 - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}. \quad (7.19)$$

Ako iskoristimo činjenicu da je maksimalna visina tijela koje se izbacila vertikalno uvis $H = v_0^2/2g$, dobijamo da je promjena kinetičke energije $\Delta E_k = -mgH$, tj. jednaka je radu koji je izvršila sila Zemljine teže, a što je u skladu s Teoremom o energiji i radu. Tijelo će nastaviti svoje kretanje, te se vratiti u početni položaj (slika 7.5 desno). Rad sile Zemljine teže pri pomjeranju tijela s visine H do površine Zemlje (pri čemu tijelo izvrši pomak u smjeru suprotnom od smjera izabrane y -ose) iznosi

$$A_2 = \vec{G} \cdot \Delta \vec{r} = -mg\vec{j} \cdot (-\Delta y \vec{j}) = mg\Delta y = mgH. \quad (7.20)$$



Slika 7.6: Rad konzervativnih sila ne zavisi od putanje kojom se tijelo kreće već samo od početnog i konačnog položaja, te je $A_1 = A_2 = A_3$.

Zaključujemo da je ukupan rad $A = A_1 + A_2$ koji je izvršila sila \vec{G} tokom kretanja tijela (do povratka tijela u svoj prvobitni položaj) jednak nuli. Sile kod kojih je rad pri povratku tijela u prvobitni položaj jednak nuli nazivaju se konzervativne sile. Jedna od karakteristika konzervativnih sila je da njihov rad ne zavisi od putanje kojom se tijelo kreće već samo od početnog i konačnog položaja. Dakle, ukoliko se tijelo kreće od tačke A do tačke B po različitim putanjama kao što je prikazano na slici 7.6, izvršeni rad će u svakom slučaju biti isti tj. $A_1 = A_2 = A_3$ neovisno o putanji po kojoj se tijelo kretalo.

Oblik energije koji je usko vezan sa interakcijom konzervativnim silama jeste potencijalna energije. Pretpostavimo da u prethodno navedeno primjeru razmatramo sistem koji se sastoji od tijela i Zemlje. Gravitaciona sila između tijela i Zemlje je unutrašnja konzervativna sila.

U gore navedenom primjeru smo vidjeli da će tijelo, koje se kreće u gravitacionom polju Zemlje, gubiti svoju (kinetičku) energiju, a u isto vrijeme, u interakciji sa Zemljom, vraćati istu vrijednost energije, jer je konačna kinetička energija tijela jednaka početnoj. Oblik energije koji je uzrokovan interakcijom konzervativnim silama unutar jednog sistema i koji je određen količinom (kinetičke) energije koju elementi sistema mogu povratiti u međusobnoj interakciji naziva se potencijalna energija. Naime, za konzervativne sile moguće je interakciju sistema s okolinom opisati putem rada kojeg izvrše te sile ili pomoću promjene potencijalne energije samog sistema. Kada se tijelo, u gore navedenom primjeru, kreće od početnog do položaja najveće visine, sila \vec{G} izvrši rad $A = -mgH$, a količina energije koju tijelo može povratiti u interakciji sa Zemljom u trenutku kada se nalazi na visini H iznosi mgH , tako da je promjena potencijalne energije jednaka negativnoj vrijednosti izvršenog rada. U opštem slučaju

možemo pisati

$$\Delta E_p = -A = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_t} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.21)$$

Treba naglasiti da vrijednost potencijalne energije u nekoj tački prostora nije jednoznačno određena. Naime, prethodnom relacijom možemo odrediti promjenu potencijalne energije između dvije tačke prostora, ali ne i apsolutnu vrijednost energije jer se u tom slučaju pojavljuje neodređeni integral koji sadrži i konstantu integracije. Vrijednost potencijalne energije možemo odrediti samo ako odredimo i konstantu integracije, a to se obično radi tako što se izabere odgovarajući referentni nivo. U prethodnom primjeru bilo bi prirodno izabrati početni položaj kao referentni nivo, te vrijednost potencijalne energije mjeriti u odnosu na ovaj nivo. Za kretanje tijela u blizini površine Zemlje, gdje je sila Zemljine teže približno konstantna, promjena potencijalne energije tijela mase m određena je s

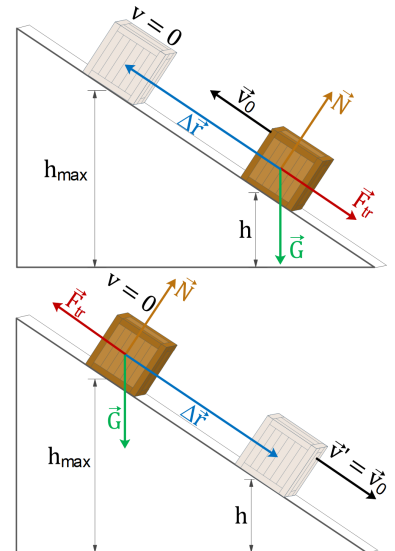
$$\Delta E_p = mg\Delta y, \quad (7.22)$$

gdje je Δy pomak tijela u vertikalnom pravcu.

Razmotrimo sada slučaj u kojem se tijelo mase m gurne uz strmu ravan početnom brzinom v_0 , te, nakon što dostigne maksimalnu visinu, ponovo se vrati u početni položaj. Na tijelo pored sile Zemljine teže djeluje sila reakcije podloge i sila trenja (slika 7.7). Rad sile reakcije podloge je tokom kretanja jednak nuli, jer ta sila djeluje okomito na pravac kretanja, pa je skalarni proizvod te sile i vektora pomaka jednak nuli. Rad sile trenja tokom kretanja tijela uz strmu ravan je negativan, jer je smjer ove sile suprotan smjeru vektora pomaka. Kada se tijelo vraća u svoj početni položaj smjer vektora pomaka se promijeni, ali se promijeni i smjer vektora sile trenja (za razliku od sile Zemljine teže u prethodnom primjeru) pa će rad sile trenja tokom kretanja niz strmu ravan opet biti negativan. Jasno je onda da je ukupan rad sile trenja, pri povratku u početni položaj različit od nule i da sila trenja nije konzervativna sila. Sile kod kojih je rad pri povratku u početni položaj različit od nule ili alternativno sile kod kojih rad zavisi od putanje, nazivaju se nekonzervativne sile.

7.5 Mehanička energija

Razmotrimo sistem koji se sastoji od dva ili više tijela. Na ovaj sistem, odnosno tijela koja čine sistem, mogu djelovati različite sile uzrokovane interakcijom sistema i okoline. Sile kojom okolina djeluje na sistem, odnosno elemente sistema, nazivaju se vanjske sile. Pored toga, moguća je interakcija između samih tijela koja čine sistem. Sve



Slika 7.7: Smjer sile trenja i vektora pomaka je suprotan kada se tijelo kreće uz strmu ravan (slika gore) i niz strmu ravan (slika dolje), te je rad sile trenja u oba slučaja negativan.

interakcije između elemenata pojedinog sistema opisuju se silama koje nazivamo unutrašnje. Ukoliko je suma svih vanjskih sila jednaka nuli, sistem nazivamo zatvoren.

Pretpostavimo da imamo sistem na koji djeluju vanjske i unutrašnje sile. Tada će, prema Teoremu o energiji i radu, promjena kinetičke energije sistema biti jednaka zbiru rada svih vanjskih i rada svih unutrašnjih sila, odnosno

$$\Delta E_k = A^{\text{ext}} + A^{\text{int}}, \quad (7.23)$$

gdje smo s A^{ext} označili rad svih vanjskih sila, a s A^{int} rad svih unutrašnjih sila. Podijelimo sada unutrašnje sile na konzervativne i ne-konzervativne. Prethodna relacija postaje

$$\Delta E_k = A^{\text{ext}} + A_{\text{nekonz}}^{\text{int}} + A_{\text{konz}}^{\text{int}}, \quad (7.24)$$

gdje je $A_{\text{konz}}^{\text{int}}$ rad svih unutrašnjih konzervativnih sila, a $A_{\text{nekonz}}^{\text{int}}$ rad svih unutrašnjih ne-konzervativnih sila. Rad unutrašnjih konzervativnih sila možemo pisati preko promjene potencijalne energije $A_{\text{konz}}^{\text{int}} = -\Delta E_p$, tako da vrijedi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = A^{\text{ext}} + A_{\text{nekonz}}^{\text{int}}. \quad (7.25)$$

U prethodnom izrazu ΔE_p predstavlja promjenu potencijalne energije uzrokovanu svim vidovima interakcije konzervativnim silama. To može biti npr. promjena gravitacione potencijalne, elastične potencijalne, elektrostatičke potencijalne itd. energije, u zavisnosti koje od konzervativnih sila su prisutne u interakciji.

Zbir kinetičke i svih vidova potencijalne energije naziva se mehanička energija. Promjena mehaničke energije je, prema prethodnom izrazu, jednaka

$$\Delta E = A^{\text{ext}} + A_{\text{nekonz}}^{\text{int}}, \quad (7.26)$$

gdje smo s $E = E_k + E_p$ označili ukupnu mehaničku energiju sistema. Iz prethodnog izraza vidimo da ukoliko je sistem zatvoren, tj. ukoliko je rad svih vanjskih sila jednak nuli i uz to rad svih unutrašnjih ne-konzervativnih sila jednak nuli, promjena mehaničke energije jednaka je nuli. Drugim riječima, mehanička energija nekog sistema je očuvana ako je rad vanjskih sila i rad unutrašnjih ne-konzervativnih sila jednak nuli. Ovaj iskaz je predstavlja zakon očuvanja mehaničke energije i često se primjenjuje u analizi različitih mehaničkih problema.

Treba naglasiti da mehanička energije nije bezuslovno očuvana. Prije svakog pokušaja primjene zakona očuvanja mehaničke energije treba ispitati kada i u kojim uslovima je ona očuvana. Prilikom primjene zakona očuvanja mehaničke energije trebalo bi koristiti sljedeću strategiju:

- Definirati sistem od značaja. Ovdje treba voditi računa da ako se analiziraju mehanički sistemi na površini (ili u blizini površine) Zemlje onda i Zemlju treba uključiti da bude dio sistema. Ovo se često prešutno radi, ali jedino u tom slučaju sila Zemljine teže neće biti vanjska već unutrašnja konzervativna sila.
- Identifikovati sve sile koje djeluju na sistem i klasifikovati ih kao unutrašnje, vanjske, konzervativne ili nekonzervativne.
- Odrediti rad svake od identifikovanih sila pri kretanju tijela od početnog do konačnog položaja. Treba voditi računa da na tijelo može djelovati neka sila, a da je njen rad jednak nuli, kao npr. sila reakcije podloge tokom kretanja niz strmu ravan.
- Provjeriti da li je rad vanjskih sila i unutrašnjih nekonzervativnih jednak nuli tokom kretanja od početnog do konačnog položaja. Voditi računa o vremenskom intervalu u kojem je rad ovih sila jednak nuli, odnosno voditi računa da u nekom vremenskom trenutku rad ovih sila može postati različit od nule.
- Ukoliko je u nekom vremenskom intervalu rad svih vanjskih i unutrašnjih nekonzervativnih sila jednak nuli, mehanička energija je očuvana u tom intervalu.
- Ukoliko je ispunjen prethodni uslov, treba definisati početno i konačno stanje i zakon očuvanja energije primijeniti tako da se ukupna mehanička energija (koja se sastoji od kinetičke i svih vidova potencijalne) u početnom stanju izjednači s ukupnom mehaničkom energijom u konačnom stanju. Alternativno, moguće je zakon očuvanja mehaničke energije primijeniti i tako da se uzme da je promjena mehaničke energije između konačnog i početnog stanja jednaka nuli.

7.6 Snaga

Ako na tijelo djelujemo nekom silom i ako je rad koji izvrši ova sila u vremenskom intervalu Δt jednak A , tada srednju snagu tokom tog intervala definišemo kao:

$$\bar{P} = \frac{A}{\Delta t}. \quad (7.27)$$

Na način sličan onome kako smo pristupili definisanju brzine i ubrzanja, definišimo trenutnu snagu P kao graničnu vrijednost srednje snage kada se vremenski interval Δt približava nuli:

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{A}{\Delta t} = \frac{dA}{dt}, \quad (7.28)$$

gdje je dA infinitezimalna vrijednost izvršenog rada. Ako u gornju jednačinu uvrstimo definiciju rada $A = \vec{F} \cdot \vec{r}$, pretpostavljajući da je sila koja djeluje na tijelo konstantna, snagu možemo dobiti kao

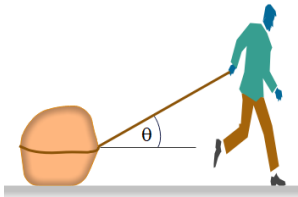
$$P = \frac{d}{dt} (\vec{F} \cdot \vec{r}) = F \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}. \quad (7.29)$$

Snagu možemo općenito definisati i kao brzinu kojom energija prelazi granicu nekog sistema putem nekog mehanizma prenosa

$$P = \frac{dE}{dt}. \quad (7.30)$$

SI jedinica za snagu je $[J s^{-1} = kg m s^{-2} s^{-1}]$. Ova kombinacija osnovnih jedinica daje izvedenu koja se naziva vat (Watt) i označava s W. U upotrebi je i jedinica konjska snaga koja iznosi $1hp = 746 W$. Možemo sada definisati i jedinicu za energiju koristeći jedinicu za snagu. Energija koja se prenese stalnom brzinom od 1 kW u toku jednog sata je kilovatsat i vrijedi da je $1kWh = 3,6 \cdot 10^6 J$.

7.7 Riješeni zadaci



Slika 7.8: Uz zadatak 1.

ZADATAK 1: Čovjek vuče tijelo mase 3 kg po podu silom od 20 N tako da je ugao između užeta i horizontalnog pravca 30° (slika 7.8). Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i podloge je 0,1. Naći rad svake sile koja djeluje na tijelo kao i brzinu tijela nakon što je prešlo put od 5 m.

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od tijela koje se kreće po horizontalnoj podlozi u pravcu x -ose. Na tijelo djeluju četiri sile konstantnog intenziteta: sila Zemljine teže \vec{G} , sila reakcije podloge \vec{N} , sila trenja \vec{F}_{tr} i sila zatezanja \vec{F}_z kao što je prikazano na slici 7.9. Rad konstantne sile definisan je kao

$$A = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r}. \quad (1.1)$$

Skalarni proizvod vektora sile i vektora pomaka moguće je napisati kao

$$\vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z. \quad (1.2)$$

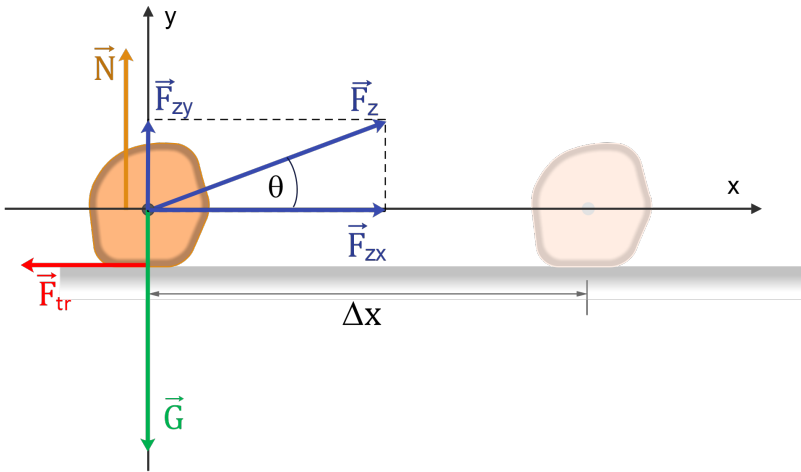
Kako se tijelo kreće isključivo duž x -ose, pomak duž y i z -ose će biti jednak nuli, pa je rad konstantne sile pri pomjeranju tijela duž x -ose jednak

$$A = F_x \Delta x. \quad (1.3)$$

Rad sile Zemljine teže A_G pri pomjeranju tijela duž x -ose jednak je nuli jer je $G_x = 0$. Iz istog razloga je i rad sile reakcije podloge jednak nuli. Rad sile zatezanja iznosi

$$A_{F_z} = F_{zx}\Delta x = F_z \cos \theta \Delta x = 20 \text{ N} \cdot 5 \text{ m} \cos 30^\circ = 86,6 \text{ J}. \quad (1.4)$$

Prema definiciji, rad sile trenja je



Slika 7.9: Uz rješenje zadatka 1.

$$A_{F_{tr}} = F_{tr,x}\Delta x = -F_{tr}\Delta x, \quad (1.5)$$

gdje je $F_{tr} = \mu N$ intenzitet sile trenja, a znak minus je posljedica činjenice da sila trenja djeluje uvijek suprotno u odnosu na pravac kretanja tijela. Intenzitet sile reakcije podloge možemo dobiti na osnovu II Newtonovog zakona

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_z. \quad (1.6)$$

Projekcijom na vertikalnu osu (y -osu) dobijamo

$$0 = -G + N + F_z \sin \theta, \quad (1.7)$$

pa je

$$N = mg - F_z \sin \theta, \quad (1.8)$$

odnosno

$$F_{tr} = \mu mg - \mu F_z \sin \theta. \quad (1.9)$$

Rad sile trenja će onda biti

$$A_{F_{tr}} = -F_{tr}\Delta x = -\mu mg\Delta x + \mu F_z \sin \theta \Delta x = -9,72 \text{ J}. \quad (1.10)$$

Brzinu tijela ćemo odrediti iz Teorema o energiji i radu koji kaže da je promjena kinetičke energije nekog sistema jednaka radu svih sila koje djeluju na taj sistem. U našem slučaju

$$\Delta E_k = A_{F_z} + A_{F_{tr}} + A_G + A_N = 86,6\text{J} - 9,72\text{J} = 76,88\text{J}. \quad (1.11)$$

Ako se tijelo počelo kretati iz stanja mirovanja, onda je

$$\Delta E_k = \frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv^2}{2}, \quad (1.12)$$

pa je brzina tijela nakon što je prešlo put od 5 m

$$v = \sqrt{\frac{2\Delta E_k}{m}} = 7,16\text{ms}^{-1}. \quad (1.13)$$

ZADATAK 2: Opruga konstante $k = 1600\text{ N m}^{-1}$ postavljena je na tlo i sabijena za 6 cm. Tijelo mase 2 kg postavljeno je na oprugu i opruga je puštena. Odrediti maksimalnu visinu koju tijelo dostigne u odnosu na njegov početni položaj.

Rješenje:

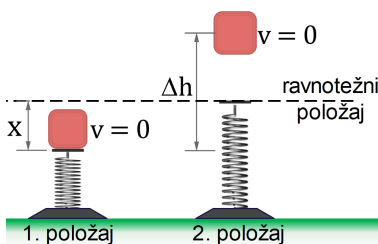
Posmatraćemo sistem koji se sastoji od tijela, opruge i Zemlje. Ovaj sistem je zatvoren, tj. rad vanjskih sila jednak je nuli. Unutrašnje sile između elemenata ovog sistema su sila gravitacije i elastična sila opruge i one su konzervativne sile. Ako se zanemari otpor vazduha onda nema unutrašnjih nekonzervativnih sila pa je mehanička energija našeg sistema očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije pisaćemo u formi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (2.1)$$

gdje je ΔE_p promjena svih vidova potencijalne energije. U razmatranom slučaju sila gravitacije i elastična sila opruge su konzervativne sile, pa za njih možemo odrediti promjenu potencijalne energije, tako da će zakon očuvanja mehaničke energije glasiti

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{p,el} = 0. \quad (2.2)$$

Izabraćemo dva trenutka odnosno dva položaja koja su od interesa (slika 7.10) i za njih odrediti promjenu svih vidova energije u prethodnom izrazu. U razmatranom slučaju to su trenuci kada je opruga maksimalno sabijena i kada se tijelo nađe na maksimalnoj visini. U oba ova trenutka brzina tijela jednaka je nuli pa je promjena kinetičke energije jednaka nuli. Promjena gravitacione potencijalne energije jednaka je



Slika 7.10: Uz rješenje zadatka 2.

$$\Delta E_{p,g} = mg\Delta h. \quad (2.3)$$

Elastična sila opruge $F_{x,\text{el}} = -kx$ nije konstanta sila pa je njen rad pri pomjeranju tijela od tačke x_1 do tačke x_2 dat sa

$$A_{\text{el}} = \int_{x_1}^{x_2} F_{x,\text{el}} dx = -k \int_{x_1}^{x_2} x dx = - \left(\frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2} \right), \quad (2.4)$$

te je promjena elastične potencijalne energije u opštem slučaju

$$\Delta E_{\text{p,el}} = -A_{\text{el}} = \frac{kx_2^2}{2} - \frac{kx_1^2}{2}. \quad (2.5)$$

U našem slučaju, opruga je prvobitno sabijena za vrijednost $x_1 = x$ a u konačnom stanju je u ravnotežnom položaju $x_2 = 0$ pa je promjena elastične potencijalne energije

$$\Delta E_{\text{p,el}} = 0 - \frac{kx^2}{2}. \quad (2.6)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u jednačinu (2.2) dobijamo

$$mg\Delta h - \frac{kx^2}{2} = 0, \quad (2.7)$$

odnosno

$$h_{\text{max}} = \Delta h = \frac{kx^2}{2mg} = 14,7 \text{ cm}. \quad (2.8)$$

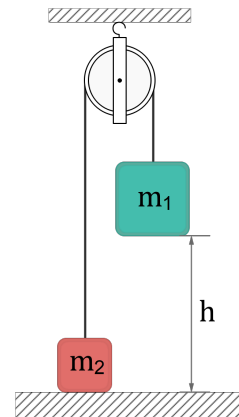
ZADATAK 3: Dva tijela masa $m_1 = 5 \text{ kg}$ i $m_2 = 3 \text{ kg}$ povezana su neistegljivim užetom zanemarive mase, koje je prebačeno preko kotura kao na slici 7.11. Tijelo mase m_1 se nalazi na visini $h = 4 \text{ m}$ u početnom trenutku, a tijelo mase m_2 na podlozi. Koristeći zakon očuvanja energije odrediti:

- brzinu tijela mase m_2 u trenutku kada tijelo mase m_1 dotakne podlogu,
- maksimalnu visinu koju dostigne tijelo mase m_2 .

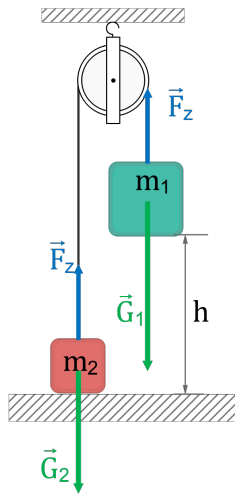
Rješenje:

a) Posmatrajmo sistem koji se sastoji od dva tijela povezana užetom i Zemlje od trenutka kada se prepusti samom sebi pa do trenutka neposredno prije udara većeg tijela o tlo. Ovaj sistem je zatvoren i na njega ne djeluju vanjske sile pa je rad vanjskih sila jednak nuli. Na elemente sistema djeluju sile gravitacije Zemlje (i njima odgovarajuće sile reakcije) te sile zatezanja užeta (slika 7.12). Sila gravitacije Zemlje je konzervativna sila, te se interakcija tijela sa Zemljom može opisati preko promjene gravitacione potencijalne energije. Sila zatezanja nije konzervativna sila i ona će izvršiti rad pri pomjeranju oba tijela koja

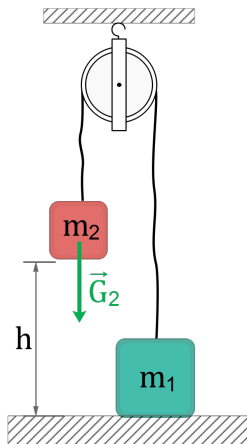
Napomena: pri rješavanju zadataka u kojima se primjenjuje zakon očuvanja mehaničke energije treba voditi računa o pogodnom izboru posmatranog sistema te početnog i konačnog stanja. Prema iskustvu autora, mnogi studenti bi ovaj zadatak rješavali tako da prvo razmatraju sistem koji se sastoji od tijela, opruge i eventualno Zemlje, te računali prirast kinetičke energije do trenutka kada se tijelo odvoji od opruge, a zatim razmatrali kretanje tog tijela u polju Zemljine teže. To bi bilo suvišno jer nije neophodno određivati promjenu kinetičke energije u pojedinim međustanjima, već samo između početnog i konačnog stanja.



Slika 7.11: Uz zadatak 3.



Slika 7.12: Uz rješenje zadatka 3a.



Slika 7.13: Uz rješenje zadatka 3b.

su okačena o uže. Ukoliko je masa užeta zanemariva, intenziteti sile zatezanja su jednaki. Rad koji izvrši sila zatezanja pri pomjeranju tijela mase m_1 je negativan i iznosi $A_1 = -F_z h$, a rad koji izvrši sila zatezanja pri pomjeranju tijela mase m_2 je pozitivan i iznosi $A_2 = F_z h$, tako da je ukupni rad koji izvrši sila zatezanja na naš sistem jednak nuli. Prema tome, možemo zaključiti da je sistem zatvoren i da je rad unutrašnjih nekonzervativnih sila jednak nuli pa je mehanička energija očuvana za gore definisani sistem u razmatranom vremenskom intervalu.

Zakon očuvanja mehaničke energije se može pisati kao

$$\Delta E_{k1} + \Delta E_{p1} + \Delta E_{k2} + \Delta E_{p2} = 0. \quad (3.1)$$

Kako su tijela počela da se kreću iz stanja mirovanja, promjena kinetičke energije oba tijela jednaka je konačnoj kinetičkoj energiji. Pored toga, pošto je uže neistegljivo, brzina oba tijela na kraju posmatranog intervala je jednaka, pa možemo pisati

$$\frac{m_1 v^2}{2} - m_1 g h + \frac{m_2 v^2}{2} + m_2 g h = 0, \quad (3.2)$$

gdje smo uvažili da je promjena potencijalne energije tijela mase m_1 negativna, a tijela mase m_2 pozitivna. Na osnovu prethodnog izraza možemo naći brzinu tijela neposredno prije udara o podlogu

$$v = \sqrt{\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} 2gh} = 4,43 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.3)$$

b) Kada tijelo veće mase dotakne podlogu na njega počne djelovati sila reakcije podloge, koja je nekonzervativna sila i koja će izvršiti rad da bi zaustavila ovo tijelo. To znači da nije ispunjen uslov da je rad svih nekonzervativnih sila jednak nuli te zbog toga nije moguće primijeniti zakon očuvanja energije na sistem koji se sastoji od dva tijela i Zemlje od trenutka kada tijelo veće mase dotakne podlogu.

Međutim u trenutku kada tijelo veće mase dotakne podlogu, uže koje spaja dva tijela nije više zategnuto, pa je i sila zatezanja užeta jednaka nuli (slika 7.13). To znači da će na tijelo manje mase djelovati samo sila gravitacije, koja je konzervativna sila. Drugim riječima, ako želimo primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije, onda moramo izabrati sistem koji se sastoji od tijela mase m_2 i Zemlje i posmatrati ga od trenutka kada tijelo mase m_1 dotakne podlogu pa do trenutka kada tijelo mase m_2 dostigne maksimalnu visinu (inače zakon očuvanja mehaničke energije je primjenjiv na sistem koji se sastoji od manjeg tijela i Zemlje i do trenutka povratka tijela na visinu h , nakon čega ponovo počne djelovati sila zatezanja užeta).

Zakon očuvanja mehaničke energije u ovom slučaju glasi

$$\Delta E_{k2} + \Delta E_{p2} = 0, \quad (3.4)$$

odnosno

$$0 - \frac{m_2 v^2}{2} + m_2 g h_{\max} - m_2 g h = 0, \quad (3.5)$$

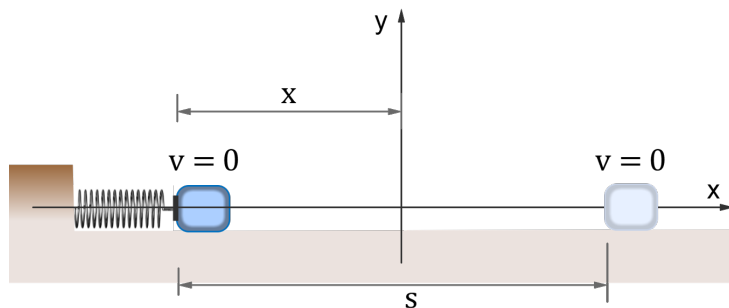
gdje smo uzeli da u je konačnom trenutku, kada se tijelo nalazi na visini h_{\max} , vrijednost brzine tijela jednaka nuli. Iz prethodne jednačine slijedi

$$h_{\max} = h + \frac{v^2}{2g} = 5 \text{ m}. \quad (3.6)$$

ZADATAK 4: Opruga konstante elastičnosti $k = 900 \text{ N m}^{-1}$ sabijena je za 31 cm. Tijelo mase 6 kg postavljeno je ispred opruge. Kada se opruga pusti tijelo se kreće po horizontalnoj podlozi. Koeficijent trenja između tijela i podloge je 0,46. Koliki će put tijelo preći do zaustavljanja?

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od tijela i opruge. Tokom kretanja na tijelo djeluju sila Zemljine teže, sila reakcije podloge, elastična sila opruge i sila trenja kao što je prikazano na slici 7.14. Pošto se tijelo kreće po horizontalnoj podlozi, sila Zemljine teže jednaka je po intenzitetu sili reakcije podloge tako da će se ove dvije sile međusobno poništiti. Elastična sila opruge je konzervativna sila, ali sila trenja nije. Tokom kretanja sila trenja će izvršiti odgovarajući rad (različit od nule) da bi zaustavila tijelo, pa prema tome mehanička energija sistema nije očuvana i ne možemo primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije. Međutim, pri rješavanju ovog zadatka možemo primijeniti



Slika 7.14: Uz rješenje zadatka 4.

Teorem o energiji i radu koji vrijedi bez obzira da li je sistem zatvoren ili nije i da li na njega djeluju konzervativne ili nekonzervativne sile. On kaže da je promjena kinetičke energije nekog sistema jednaka radu svih sila koje djeluju na taj sistem. Ako pretpostavimo da je masa

opruge zanemariva u odnosu na masu tijela onda možemo pisati

$$\Delta E_k = A_{el} + A_{tr}, \quad (4.1)$$

gdje smo s A_{el} označili rad elastične sile opruge, a s A_{tr} rad sile trenja. U početnom trenutku opruga je sabijena i tijelo miruje, a u konačnom tijelo se zaustavilo na udaljenosti s od prvobitnog položaja i također miruje. Promjena kinetičke energije između ova dva trenutka jednaka je nuli. Rad koji izvrši elastična sila opruge pozitivan je (jer elastična sila opruge tokom kretanja tijela djeluje u istom smjeru) i iznosi

$$A_{el} = \frac{kx^2}{2}, \quad (4.2)$$

dok je rad sile trenja negativan (jer sila trenja djeluje u suprotnom smjeru od smjera kretanja tijela) i iznosi

$$A_{tr} = -\mu mgs, \quad (4.3)$$

gdje je s put koji je tijelo prešlo tokom kretanja. Ako gornje relacije uvrstimo u jednačinu (4.1) dobijamo

$$\frac{kx^2}{2} - \mu mgs = 0, \quad (4.4)$$

odnosno

$$s = \frac{kx^2}{2\mu mg}. \quad (4.5)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti u prethodni izraz zaključujemo da će tijelo preći put od $s = 1,6$ m prije zaustavljanja.

ZADATAK 5: Tijelo mase m postavljeno je na horizontalnoj podlozi uz oprugu konstante k . Opruga se sabije za vrijednost x i pusti. Tijelo se kreće bez trenja po podlozi, a zatim nailazi na kružnu petlju radijusa r . Kada tijelo dostigne najvišu tačku sila reakcije podloge je dva puta veća od sile Zemljine teže. Za koliko je opruga bila sabijena?

Rješenje:

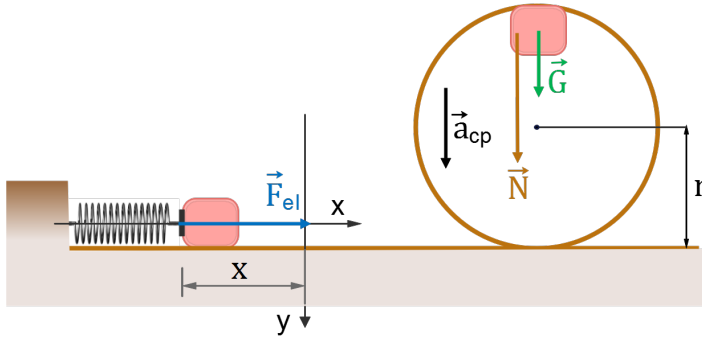
Kada se nađe u najvišoj tački, na tijelo djeluju sila Zemljine teže i sila reakcije podloge. Obje sile su usmjerene vertikalno prema dolje kao što je prikazano na slici 7.15.

U najvišoj tački kružne putanje tijelo ima samo centripetalno ubrzanje pa možemo pisati

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}, \quad (5.1)$$

odnosno

$$m\frac{v^2}{r} = mg + N. \quad (5.2)$$



Kako je prema tekstu zadatka u najvišoj tački kružne putanje $N = 2mg$, dobijamo da je brzina u ovoj tački putanje

$$v = \sqrt{3gr}. \quad (5.3)$$

Posmatrajmo sada sistem koji se sastoji od tijela, opruge i Zemlje. Na ovaj sistem ne djeluju vanjske sile, tj. sistem je zatvoren. Sila reakcije podloge je uvijek okomita na pravac kretanja pa je rad ove sile tokom kretanja $dA_N = \vec{N} \cdot d\vec{r} = 0$. Elastična sila opruge i sila gravitacije su unutrašnje konzervativne sile, a sila trenja se može zanemariti, pa je mehanička energija ovog sistema tokom kretanja tijela očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije se može napisati kao

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{p,el} = 0, \quad (5.4)$$

odnosno

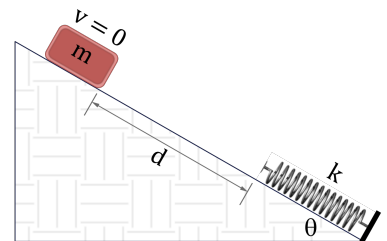
$$\frac{mv^2}{2} + mg2r - \frac{kx^2}{2} = 0, \quad (5.5)$$

gdje smo uvažili činjenicu da se elastična potencijalna energija opruge smanjila, odnosno da je njena promjena negativna. Iz prethodne relacije i izraza (5.3) dobijamo vrijednost početnog sabijanja opruge x

$$x = \sqrt{\frac{m(v^2 + 4gr)}{k}} = \sqrt{\frac{7mgr}{k}}. \quad (5.6)$$

ZADATAK 6: Tijelo mase $m = 0,5 \text{ kg}$ klizi niz strmu ravan nagibnog ugla $\theta = 25^\circ$. Na dnu strme ravni postavljena je opruga konstante elastičnosti $k = 200 \text{ N m}^{-1}$ kao na slici 7.16. U početnom trenutku tijelo miruje i nalazi se na udaljenosti $d = 0,8 \text{ m}$ od opruge.

- Koliko je maksimalno sabijanje opruge ako se pretpostavi da je trenje između tijela i podloge zanemarivo?
- Koliko će se opruga sabiti ako se trenje ne zanemari? Uzeti da je koeficijent trenja između tijela i podloge $\mu_k = 0,2$.



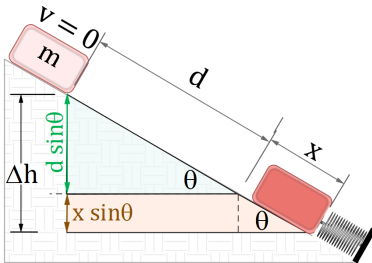
Slika 7.16: Uz zadatak 6.

Slika 7.15: Uz rješenje zadatka 5.

c) Koji dio energije se utrošio na savladavanje sile trenja?

Rješenje:

a) Posmatrajmo sistem koji se sastoji od tijela mase m , strme ravni, opruge i Zemlje. Ovaj sistem je zatvoren, te je rad vanjskih sila jednak nuli. Sila gravitacije Zemlje i elastična sila opruge su konzervativne sile, a rad sile reakcije podloge jednak je nuli. Ukoliko se zanemari sila trenja između tijela i podloge, mehanička energija je očuvana. Od gore pobrojanih elemenata našeg sistema, tijelo mase m i opruga konstante elastičnosti k mijenjaju svoju energiju pa možemo pisati



Slika 7.17: Uz rješenje zadatka 6a.

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{p,el} = 0, \quad (6.1)$$

gdje smo pretpostavili da je masa opruge zanemariva. Prema tekstu zadatka, tijelo u početnom trenutku miruje. U trenutku kada je opruga maksimalno sabijena (slika 7.17) brzina tijela je također nula, pa je promjena kinetičke energije, između početnog trenutka i trenutka kada je opruga maksimalno sabijena, jednaka nuli. Promjena gravitacione potencijalne energije je negativna, a elastične potencijalne pozitivna pa možemo pisati

$$-mg\Delta h + \frac{kx^2}{2} = 0, \quad (6.2)$$

gdje je x vrijednost maksimalnog sabijanja opruge. Sa slike 7.17 vidimo da je promjena visine Δh jednaka

$$\Delta h = (d + x) \sin \theta, \quad (6.3)$$

te nakon uvrštavanja u prethodnu jednačinu dobijamo

$$\frac{k}{2}x^2 - mg \sin \theta \cdot x - mgd \sin \theta = 0. \quad (6.4)$$

Ovo je kvadratna jednačina po x koja ima pozitivno rješenje

$$x = \frac{mg \sin \theta + \sqrt{(mg \sin \theta)^2 + 2kmgd \sin \theta}}{k}. \quad (6.5)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je sabijanje opruge

$$x = 13,96 \text{ cm}. \quad (6.6)$$

b) U slučaju da se trenje ne može zanemariti onda na tijelo djeluje unutrašnja nekonzervativna sila trenja pa mehanička energija nije očuvana. Zakon očuvanja energije ne možemo primijeniti, ali možemo teorem o energiji i radu koji glasi

$$\Delta E_k = A_G + A_{el} + A_{tr}. \quad (6.7)$$

Rad konzervativnih sila jednak je negativnoj vrijednosti promjene potencijalne energije pa je $A_G = mg\Delta h$ i $A_{el} = -kx^2/2$. Rad sile trenja jednak je $A_{tr} = -\mu N(d+x)$, a promjena kinetičke energije između početnog i konačnog stanja jednaka je nuli. Prema tome, vrijedi

$$mg\Delta h - \frac{kx^2}{2} - \mu N(d+x) = 0. \quad (6.8)$$

Ponovo je $\Delta h = (d+x)\sin\theta$, a intenzitet sile reakcije podloge dobijamo iz drugog Newtonovog zakona i on iznosi $N = mg\cos\theta$. Uvrštavanjem ovih izraza u prethodnu jednačinu dobijamo

$$mg(d+x)\sin\theta - \frac{kx^2}{2} - \mu mg\cos\theta(d+x) = 0, \quad (6.9)$$

odnosno

$$\frac{k}{2}x^2 - (\sin\theta - \mu\cos\theta)mg \cdot x - (\sin\theta - \mu\cos\theta)mgd = 0. \quad (6.10)$$

Uvedimo radi jednostavnosti zamjenu $z = mg(\sin\theta - \mu\cos\theta)$, tako da je pozitivno rješenje ove kvadratne jednačine

$$x = \frac{z + \sqrt{z^2 + 2kdz}}{k}. \quad (6.11)$$

Opruga će sada biti sabijena za

$$x = 10,34\text{cm}. \quad (6.12)$$

c) Energija koja se utrošila na savladavanje sile trenja jednaka je radu koji je izvršila sila trenja. Rad sile trenja je

$$A_{tr} = -\mu mg\cos\theta(x+d) = \quad (6.13)$$

$$= -0,2 \cdot 0,5\text{kg} \cdot 9,81\text{m s}^{-2} \cdot \quad (6.14)$$

$$\cdot \cos 25^\circ (0,1034\text{m} + 0,8\text{m}) = 0,8\text{J}. \quad (6.15)$$

Odavde slijedi da je energija utrošena na savladavanje sile trenja jednaka 0,8 J.

ZADATAK 7: Tijelo malih dimenzija nalazi se na vrhu sfere radijusa R . Tijelo se gurne zanemarivom početnom brzinom i počne se kretati po površini sfere bez trenja.

- Na kojoj visini će se tijelo odvojiti od sfere?
- Kolika je brzina tijela u trenutku kada se odvoji?

Rješenje:

a) Posmatrajmo zatvoren sistem koji se sastoji od tijela mase m zanemarivih dimenzija, nepomične kugle radijusa R i Zemlje. Na tijelo djeluje sila gravitacije i sila reakcije podloge. Sila gravitacije je konzervativna, a rad sile reakcije podloge je jednak nuli, pa je mehanička energija sistema očuvana. Na osnovu II Newtonovog zakona možemo pisati

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (7.1)$$

Neka je θ ugao koji zaklapa vektor položaja tijela (određen u odnosu na centar kugle) u trenutku kada je visina tijela, mjerena od centra kugle, h (slika 7.18). Projekcijom vektora iz relacije (7.1) na y -osu izabranog sistema dobijamo

$$m\frac{v^2}{R} = mg \cos \theta - N. \quad (7.2)$$

Pošto je mehanička energija očuvana možemo pisati

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (7.3)$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} + mgh - mgR = 0, \quad (7.4)$$

odakle je

$$v^2 = 2(R - h)g. \quad (7.5)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (7.2) i korištenjem činjenice da je $\cos \theta = \frac{h}{R}$ (vidi sliku 7.18) dobijemo

$$m\frac{2(R - h)g}{R} = \frac{mgh}{R} - N. \quad (7.6)$$

Na osnovu prethodne relacije dobijamo izraz za intenzitet sile reakcije podloge

$$N = \frac{3h - 2R}{R}mg. \quad (7.7)$$

Tijelo će se odvojiti od kugle na onoj visini za koju sila reakcije podloge postane jednaka nuli. Prema tome, uslov koji mora biti zadovoljen jeste

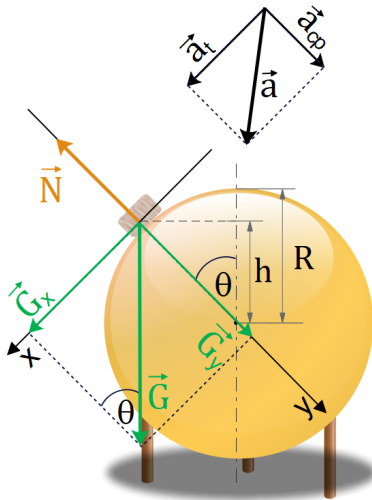
$$N = \frac{3h_0 - 2R}{R}mg = 0, \quad (7.8)$$

odakle je

$$h_0 = \frac{2}{3}R. \quad (7.9)$$

b) Sada, kada znamo visinu odvajanja, možemo na osnovu zakona očuvanja mehaničke energije odrediti i brzinu u trenutku odvajanja. Na osnovu relacije (7.5) slijedi

$$v = \sqrt{2\left(R - \frac{2}{3}R\right)g} = \sqrt{\frac{2}{3}Rg}. \quad (7.10)$$



Slika 7.18: Uz rješenje zadatka 7a.

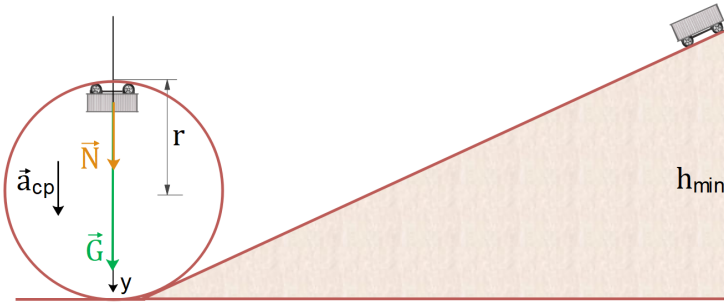
ZADATAK 8: Po šinama koje su postavljene na strmoj ravni koja u podnožju prelazi u petlju radijusa $0,5\text{ m}$ kreću se mala kolica.

- S koje minimalne visine h_{\min} treba pustiti kolica, bez početne brzine, da bi prošla kroz petlju ne odvajajući se od šina?
- Na kojoj će se visini kolica odvojiti od šina ako se puste s visine $0,9h_{\min}$?

Rješenje:

a) Posmatrajmo zatvoren sistem koji se sastoji od kolica, nepomičnih šina i Zemlje. Sila gravitacije koja djeluje na kolica je konzervativna sila, a rad sile reakcije podloge jednak je nuli. Ukoliko se zanemare sve sile otpora i trenja, mehanička energija kolica je očuvana pa možemo pisati

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (8.1)$$



Slika 7.19: Uz rješenje zadatka 8a.

Da bi prošla kroz petlju, kolica moraju imati neku minimalnu vrijednost brzine u najvišoj tački petlje. Tu vrijednost možemo dobiti ako napišemo II Newtonov zakon u najvišoj tački petlje i sve vektore projektujemo na vertikalnu osu kao na slici 7.19, te dobijemo

$$m \frac{v^2}{r} = mg + N. \quad (8.2)$$

Minimalna vrijednost brzine odgovara situaciji kada je sila reakcije podloge minimalna, tj. jednaka nuli, pa dobijamo

$$v_{\min} = \sqrt{gr}. \quad (8.3)$$

Zakon očuvanja mehaničke energije sada možemo pisati kao

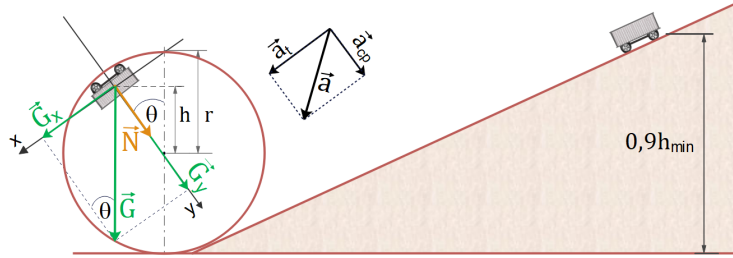
$$\frac{mv_{\min}^2}{2} + mg2r - mgh_{\min} = 0, \quad (8.4)$$

odakle dobijamo minimalnu visinu s koje treba pustiti kolica da bi prošla kroz petlju

$$h_{\min} = \frac{r}{2} + 2r = \frac{5}{2}r. \quad (8.5)$$

b) Neka se sada kolica puste s visine $0,9h_{\min}$. Očito da kolica neće proći kroz kružnu petlju i da će se na nekoj visini h , mjerenu u odnosu na centar kružne petlje, odvojiti. Neka je položaj tijela tokom kretanja kroz kružnu petlju određen uglom θ kao što je prikazano na slici 7.20. Na tijelo djeluje sila Zemljine teže i sila reakcije podloge, tako da možemo pisati

Slika 7.20: Uz rješenje zadatka 8b.



$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (8.6)$$

Projektovanjem gore navedenih vektora na y -osu izabranog koordinatnog sistema dobijamo

$$m\frac{v^2}{r} = mg \cos \theta + N, \quad (8.7)$$

gdje je $\cos \theta = h/r$. S druge strane, primjenom zakona očuvanja energije slijedi

$$\frac{mv^2}{2} + mg(h+r) - 0,9 \cdot mgh_{\min} = 0. \quad (8.8)$$

Uvrštavanjem $h_{\min} = \frac{5}{2}r$ i nakon sređivanja, prethodni izraz postaje

$$mv^2 = \frac{5}{2}mgr - 2mgh. \quad (8.9)$$

Sada prethodnu jednačinu možemo uvrstiti u (8.7) pa dobijamo

$$\frac{5}{2}mgr - 2mgh = mgr \cos \theta + rN, \quad (8.10)$$

odnosno

$$\frac{5}{2}mgr = 2mgh + mgh + rN. \quad (8.11)$$

Iz ove jednačine dobijemo izraz za visinu na kojoj se nalazi tijelo kada na njega djeluje sila reakcije podloge intenziteta N

$$h = \frac{5}{6}r - \frac{rN}{3mg}. \quad (8.12)$$

Tijelo će se odvojiti od podloge u onom trenutku kada na njega prestane djelovati sila reakcije podloge, odnosno kada je $N = 0$. To znači

da je u našem slučaju visina na kojoj se tijelo odvaja, mjerena od centra kružne putanje, jednaka

$$h_0 = \frac{5}{6}r. \quad (8.13)$$

ZADATAK 9: Matematičko klatno se sastoji od konca dužine L i male loptice mase m . Klatno je dovedeno u horizontalni položaj i pušteno. Kada dostigne najnižu tačku, klatno se počne omotavati oko štapa, koji je postavljen horizontalno na visini R iznad te najniže tačke kao što je prikazano na slici 7.21. Pokazati da R mora biti manje od $2L/5$ da bi se klatno jednom omotalo oko štapa.

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od loptice i Zemlje. Na ovaj sistem djeluje sila zatezanja konca koja je nekonzervativna sila. Kako je pravac ove sile uvijek okomit na pravac kretanja kuglice, to je njen rad $dA = \vec{F}_z \cdot d\vec{r}$ jednak nuli, pa je mehanička energija sistema očuvana pod pretpostavkom da se sile otpora mogu zanemariti.

Da bi se konac bar jednom omotao oko štapa, kuglica u najvišoj tački svoje kružne putanje mora imati minimalnu brzinu koja je određena s

$$m \frac{v_{\min}^2}{R} = mg, \quad (9.1)$$

odnosno

$$v_{\min}^2 = gR. \quad (9.2)$$

Pored toga, mehanička energija koju kuglica ima kada se nalazi u horizontalnom položaju mora biti veća ili jednaka od minimalne mehaničke energije koju tijelo ima u najvišoj tački kružne putanje, tj.

$$mgL \geq mg2R + \frac{mv_{\min}^2}{2}. \quad (9.3)$$

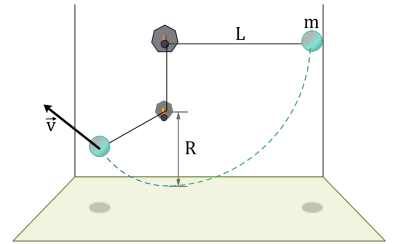
Na osnovu prethodne dvije jednačine slijedi

$$mgL \geq 2mgR + \frac{mgR}{2}, \quad (9.4)$$

odnosno

$$mgL \geq \frac{5}{2}mgR. \quad (9.5)$$

Prema tome, konac će se omotati oko štapa samo ako je $R \leq \frac{2}{5}L$.



Slika 7.21: Uz zadatak 9.

ZADATAK 10: Građevinski radnik želi premjestiti ciglu tako što je gurne početnom brzinom v_0 uz dasku koja je postavljena pod nagibnim uglom α . Daska je djelimično zaleđena na način da je pri dnu daske veći sloj leda nego pri vrhu, te zbog toga koeficijent trenja zavisi od položaja na način da je $\mu_k(x) = \mu_s(x) = cx$, gdje je c pozitivna konstanta. Naći minimalnu brzinu kojom radnik mora gurnuti ciglu da bi ona ostala mirovati na dasci.

Rješenje:

Posmatračemo sistem koji se sastoji od cigle, daske i Zemlje. Na ciglu pored sile Zemljine teže djeluju i sile relacije podloge i sila trenja. Sve sile su unutrašnje sile. Rad sile reakcije podloge jednak je nuli, ali je rad sile trenja različit od nule pa nije moguće primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije. Međutim, kretanje ovog sistema moguće je analizirati primjenom Teorema o energiji i radu. Promjena kinetičke energije pri pomjeranju cigle za vrijednost x jednaka je radu koji izvrše sila Zemljine teže i sila trenja, tj.

$$\Delta E_k = A_G + A_{F_{tr}}. \quad (10.1)$$

Rad sile Zemljine teže je

$$A_G = G_x x = -mg \sin \alpha x. \quad (10.2)$$

Intenzitet sile trenja iznosi $F_{tr} = \mu N = -\mu(x)mg \cos \alpha$. Pošto koeficijent trenja zavisi od x , intenzitet sile trenja nije konstantan pa će rad ove (promjenjive) sile biti

$$\begin{aligned} A_{F_{tr}} &= \int_0^x F_{trx}(x') dx' = \int_0^x -\mu(x') mg \cos \alpha dx' \\ &= \int_0^x -cmg \cos \alpha x' dx' = -cmg \cos \alpha \frac{x^2}{2}. \end{aligned} \quad (10.3)$$

Prema tome, teorem o energiji i radu možemo sada napisati kao

$$0 - \frac{mv_0^2}{2} = -mg \sin \alpha x - cmg \cos \alpha \frac{x^2}{2}, \quad (10.4)$$

odnosno

$$\frac{mv_0^2}{2} = mg \left(\sin \alpha x + c \cos \alpha \frac{x^2}{2} \right). \quad (10.5)$$

Što je početna brzina veća, tijelo će otići na veću udaljenost na kojoj je koeficijent trenja veći, a samim tim je i statička sila trenja veća. Da bi tijelo ostalo mirovati na udaljenosti x od svog početnog položaja, statička sila trenja mora kompenzirati x -komponentu sile Zemljine teže koja nastoji da tijelo vrati u početni položaj. U graničnom slučaju, kada je početna brzina minimalna, sila statičkog trenja mora biti

maksimalna, pa vrijedi

$$mg \sin \alpha = F_{\text{trs,max}}, \quad (10.6)$$

odnosno

$$mg \sin \alpha = cxmg \cos \alpha. \quad (10.7)$$

Iz prethodne relacije možemo dobiti položaj x_m za koji će sila statičkog trenja uravnotežiti silu Zemljine teže pri minimalnoj početnoj brzini, tj.

$$x_m = \frac{\text{tg } \alpha}{c}. \quad (10.8)$$

Uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (10.5) dobijamo

$$v_{0m}^2 = 2g \left(\frac{\sin^2 \alpha}{c \cos \alpha} + \frac{\sin^2 \alpha}{2c \cos \alpha} \right). \quad (10.9)$$

Prema tome, minimalna brzina kojom treba gurnuti ciglu da bi ona ostala u stanju mirovanja iznosi

$$v_{0m} = \sqrt{\frac{3g \sin^2 \alpha}{c \cos \alpha}}. \quad (10.10)$$

ZADATAK 11: Metalni prsten mase $m = 2 \text{ kg}$ postavljen je oko vertikalne osovine po kojoj se može kretati bez trenja. Prsten je vezan za oprugu konstante elastičnosti $k = 70 \text{ N/m}$ i zanemarive mase kao što je prikazano na slici 7.22. Kada je prsten u položaju A, opruga je neistegnuta i ima dužinu od $l_0 = 0.75 \text{ m}$.

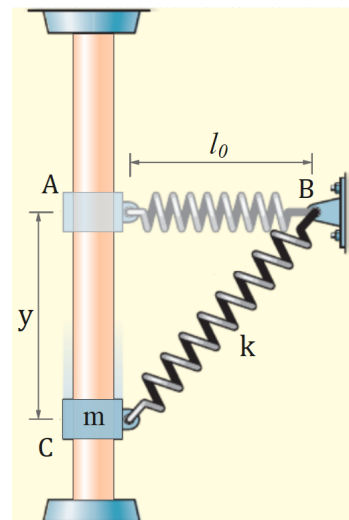
- Kolika će biti brzina prstena, na udaljenosti $y = 1 \text{ m}$ ispod početnog položaja ako se on pusti?
- Kolika će biti brzina prstena, na udaljenosti 1 m ispod početnog položaja ako se prsten gurne naviše brzinom $v_0 = 2 \text{ m s}^{-1}$?
- Gdje će se prsten zaustaviti u prethodna dva slučaja?

Rješenje:

a) Posmatrajmo sistem koji se sastoji od prstena, opruge i Zemlje. Na prsten djeluju sila Zemljine teže i elastična sila opruge. Obje sile su unutrašnje i konzervativne, te se prilikom kretanja prstena od početnog do konačnog položaja može primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije

$$\Delta E_k + \Delta E_{p,g} + \Delta E_{p,el} = 0. \quad (11.1)$$

Kada se prsten pomjeri do tačke C, njegova gravitaciona potencijalna energija će se smanjiti za mgy , tj. $\Delta E_{p,g} = -mgy$. Istovremeno, opruga će se izdužiti za $\Delta x = \sqrt{y^2 + l_0^2} - l_0$, gdje je $l_0 = 0.75 \text{ m}$ dužina



Slika 7.22: Uz zadatak 11.

opruge u položaju A, pa će se elastična potencijalna energija povećati za $k\Delta x^2/2$. Zakon očuvanja mehaničke energije sada možemo pisati kao

$$\frac{mv^2}{2} - 0 - mgy + k\frac{\Delta x^2}{2} = 0. \quad (11.2)$$

Odavde je

$$v = \sqrt{2gy - \frac{k}{m}\Delta x^2} = 3,30 \text{ m s}^{-1}. \quad (11.3)$$

b) U ovom slučaju početna brzina je različita od nule pa zakon očuvanja mehaničke energije pišemo kao

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} - mgy + k\frac{\Delta x^2}{2} = 0. \quad (11.4)$$

Iz prethodne relacije dobijamo

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gy - \frac{k}{m}\Delta x^2} = 3,86 \text{ m s}^{-1}. \quad (11.5)$$

Inače, svejedno je da li će tijelo biti gurnuto početnom brzinom v_0 prema gore ili dolje. Konačna brzina zavisi samo od intenziteta početne brzine, ali ne i od njenog pravca.

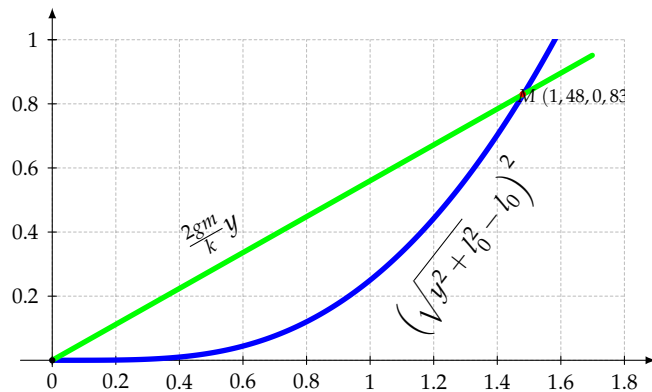
c) Prsten će se zaustaviti na udaljenosti y za koju je konačna brzina jednaka nuli. Iz jednačine (11.3) vidimo da će to biti udaljenost za koju je

$$2gy - \frac{k}{m}\Delta x^2 = 0, \quad (11.6)$$

odnosno

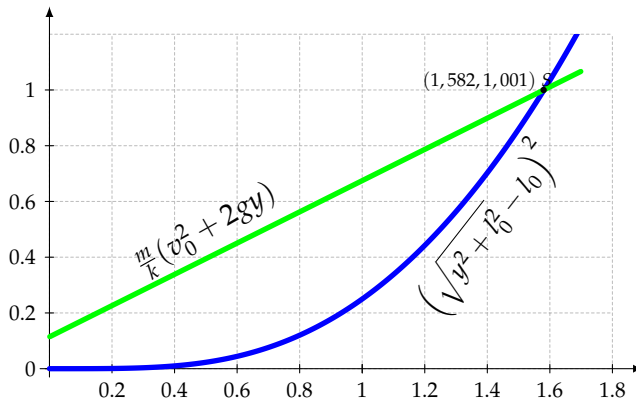
$$\frac{2mg}{k}y = \left(\sqrt{y^2 + l_0^2} - l_0\right)^2. \quad (11.7)$$

Slika 7.23: Uz rješenje prvog dijela zadatka 11c.



Prethodna jednačina se može riješiti grafički tako što ćemo prikazati funkcije na lijevoj i desnoj strani i naći njihov presjek. Ove funkcije su prikazane na slici 7.23, a njihov presjek (tačka M) se dobije za $y = 1,48 \text{ m}$.

Slično kao u prethodnom slučaju, udaljenost na kojoj će se prsten zaustaviti, ako se gurne početnom brzinom v_0 sada određujemo iz jednačine (11.5). Grafičkim prikazom odgovarajućih funkcija (slika 7.24) i traženjem njihovog presjeka (tačka S) dobijamo da je $y = 1,582\text{m}$.



Slika 7.24: Uz rješenje drugog dijela zadatka 11c.

7.8 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Čestica je izvršila pomak $\Delta\vec{r} = (2\vec{i} - 5\vec{j})$ m duž prave linije. Za vrijeme pomicanja na česticu djeluje konstantna sila $\vec{F} = (3\vec{i} + 4\vec{j})$ N. Odrediti rad koji je izvršila sila i komponentu sile u smjeru pomaka. ($A = -14\text{J}$, $F_{\Delta\vec{r}} = -2,6\text{N}$)

Zadatak 2: Kamion mase 3000 kg ukrcava se na brod pomoću dizalice koja na kamion djeluje silom od 31 kN. Ova sila, koja je dovoljno jaka da savlada gravitacionu silu, pomjeri kamion prema gore za 2 m. Odrediti rad koji je izvršila dizalica, rad koji je izvršila gravitacija i brzinu podizanja kamiona nakon 2 m. ($A_F = 62\text{ kJ}$, $A_g = -58,9\text{ kJ}$, $v = 1,45\text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 3: S kraja užeta dužine $L = 12\text{ m}$ visi sanduk od 230 kg. Horizontalno gurate sanduk promjenjivom silom F kako biste ga pomaknuli na udaljenost $d = 4\text{ m}$ u stranu. (a) Koliki je intenzitet sile F kada je sanduk u ovom krajnjem položaju? Tokom pomjeranja sanduka, koliki je (b) ukupan rad na njemu, (c) rad koji je izvršila gravitaciona sila na sanduk i (d) rad izvršen povlačenjem sanduka užetom. Znajući da je sanduk nepomičan prije i nakon njegovog pomjeranja, upotrijebite odgovore na (b), (c) i (d) da pronađete rad sile F na sanduku. Zašto taj rad nije jednak proizvodu horizontalnog po-

maka i odgovora na (a)? ($F = 797\text{ N}$, $A = 0$, $A_g = -1,55\text{ kJ}$, $A_{F_z} = 0$, $A_F = -A_g = 1,55\text{ kJ}$, jer je $F \neq \text{const}$)

Zadatak 4: Uže se koristi za vertikalno spuštanje nepokretnog bloka mase M uz konstantno ubrzanje naniže od $\frac{1}{4}g$. Kada se blok spusti za dužinu d (iz stanja mirovanja), odrediti rad koji vrši sila užeta, rad koji vrši sila gravitacije, kinetičku energiju bloka i brzinu bloka. ($A_F = -\frac{3}{4}Mgd$, $A_g = Mgd$, $E_k = \frac{1}{4}Mgd$, $v = \sqrt{\frac{gd}{2}}$)

Zadatak 5: Automobil mase 1600 kg kreće se uzbrdicom nagiba 5% konstantnom brzinom 60 km h^{-1} . Kolika je neophodna snaga motora automobila? ($P = 13\text{ kW}$)

Zadatak 6: Kutija mase M miruje na dnu strme ravni. Kutija je pričvršćena za uže koje je vuče s konstantnom silom zatezanja $F_z = T$. Odrediti rad koji je izvršila sila zatezanja pomjerajući kutiju za dužinu x duž strme ravni i snagu koju proizvodi zatezanje u užetu kao funkciju x i θ . Trenje između kutije i podloge zanemariti. ($A = Tx$, $P = T\sqrt{2\left(\frac{T}{M} - g\sin\theta\right)x}$)

Zadatak 7: Lift mase 650 kg kreće iz stanja mirovanja prema gore konstantnom akceleracijom. Nakon 3 s lift postigne brzinu od $1,75\text{ m s}^{-1}$ te se nakon toga kreće ravnomjerno. Kolika je prosječna snaga motora lifta tokom prve tri sekunde kretanja? Kakva je ova snaga u poređenju sa snagom motora kada se lift kreće ravnomjerno? ($P_1 = 5,91\text{ kW}$, $P_2 = 11,1\text{ kW}$)

Zadatak 8: Kutija mase $2,4\text{ kg}$ ima početnu brzinu od $3,8\text{ m s}^{-1}$ prema gore, duž strme ravni nagibnog ugla 37° u odnosu na horizontalu. Koeficijent kinetičkog trenja između kutije i ravni je $0,3$. Koliki put pređe kutija krećući se uz strmu ravan? Kolika je njena brzina kada pri povratku niz kosinu prolazi kroz svoj početni položaj? ($L = 0,875\text{ m}$, $v = 2,49\text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 9: Kamion mase $1,2 \cdot 10^4\text{ kg}$, kojem su otkazale kočnice, kreće se prema zaustavnoj rampi nagibnog ugla $\theta = 15^\circ$ (trenje zanemari-vo) brzinom 130 km h^{-1} . (a) Koju minimalnu dužinu L mora imati rampa da bi se kamion uz nju zaustavio? Da li se minimalna dužina L povećava, smanjuje ili ostaje ista ako (b) se masa kamiona i (c) njegova brzina smanjuju. ($L = 257\text{ m}$, ostaje ista pri smanjenju mase, smanjuje se sa smanjenjem brzine)

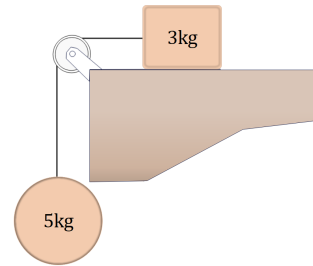
Zadatak 10: Lopta za bejzbol mase $0,17\text{ kg}$ bačena je s krova zgrade visine 12 m iznad zemlje. Početna brzina joj je 30 m s^{-1} pod uglom

od 40° iznad horizontale. a) Koja je maksimalna visina koju lopta dostiže? b) Koliki je rad koji vrši gravitacija dok se lopta kreće od krova do svoje najveće visine? c) Kolika je brzina lopte pri udaru od tlo? d) Zadatak riješiti primjenom zakona očuvanja mehaničke energije. ($H = 31\text{ m}$, $A_g = -31,7\text{ J}$, $v = 33,7\text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 11: Ronilac mase 70 kg skače s tornja visine 10 m i pada ravno u vodu. Ako se zaustavi 5 m ispod površine vode, odrediti srednju silu otpora koju voda vrši na ronioca. ($F_o = 2060\text{ N}$)

Zadatak 12: Koeficijent trenja između bloka mase 3 kg i površine na slici 7.25 je $0,4$. Sistem kreće iz stanja mirovanja. Kolika je brzina kugle mase 5 kg nakon što se spusti za $1,5\text{ m}$? ($v = 3,74\text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 13: Visina mosta iznad rječnog toka iznosi $L = 310\text{ m}$. Bungee skakač mase 60 kg ima elastično užo dužine $d = 50\text{ m}$ pričvršćeno za stopala. Pretpostavimo da se užo ponaša kao opruga konstante elastičnosti k . Skakač skače, jedva dodiruje vodu i nakon brojnih uspona i padova miruje na visini h iznad vode. Odrediti h i maksimalnu brzinu skakača. (Savjet: koristiti ZOE i uslov ekstrema funkcije E_k .) ($h = 151\text{ m}$, $v_{max} = 45,3\text{ m s}^{-1}$)



Slika 7.25: Uz zadatak 12.

8

KOLIČINA KRETANJA I DINAMIKA SISTEMA ČESTICA

8.1	Količina kretanja	187
8.2	Centar masa sistema čestica	188
8.3	Teorem o kretanju centra masa	189
8.4	Zakon očuvanja količine kretanja	191
8.5	Gravitaciona potencijalna energija sistema čestica	192
8.6	Sudari	192
8.7	Riješeni zadaci	195
8.8	Zadaci za vježbu	211

8.1 Količina kretanja

Jedan vid interakcije između dva ili više tijela, koji se odvija neposrednim kontaktom tih tijela, su sudari. Pri analizi sudara nije dovoljno razmatrati samo brzinu tijela prije ili poslije sudara. Ishod sudara dva ili više tijela će znatno zavisiti i od njihove mase. Fizikalna veličina kojom se kvantificira (opisuje) kretanje tijela različitih masa naziva se količina kretanja ili impuls tijela. Količina kretanja je vektorska veličina i definiše se kao proizvod mase tijela i njegove brzine, tj.

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (8.1)$$

što znači ima isti pravac i smjer kao i brzina tijela (slika 8.1). Količina kretanja se mjeri u jedinicama kg m s^{-1} .

Izraz za II Newtonov zakon koji smo pisali do sada je samo specijalan slučaj kojim se opisuje kretanje tijela s konstantnom masom. Opšti oblik II Newtonovog zakona je dat preko promjene količine



Slika 8.1: Količina kretanja (impuls) tijela ima isti pravac i smjer kao i brzina tijela.

kretanja na način

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (8.2)$$

Prema tome, možemo zaključiti da je promjena količine kretanja nekog tijela u jedinici vremena jednaka sumi svih sila koje djeluju na to tijelo i vrši se u pravcu djelovanja rezultujuće sile. Ukoliko je rezultujuća sila jednaka nuli onda je $d\vec{p}/dt = 0$ pa je količina kretanja tijela konstantna. Ako se u prethodni izraz uvrsti definicija količine kretanja i iskoristi pravilo za izvod proizvoda funkcija, dobijamo

$$\vec{v} \frac{dm}{dt} + m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i. \quad (8.3)$$

Prethodni izraz opisuje kretanje tijela čija je masa promjenjiva (npr. raketa čija se masa smanjuje zbog sagorijevanja pogonskog goriva). Ako je masa ipak konstantna onda je $dm/dt = 0$ i prethodni izraz se svodi na oblik II Newtonovog zakona kojeg smo pisali ranije.

8.2 Centar masa sistema čestica

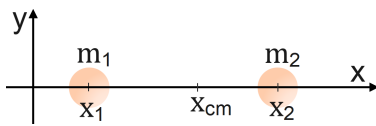
Do sada smo uglavnom razmatrali kretanje jednog ili dva tijela koja su na neki način bila povezana. U opštem slučaju pri analizi različitih fizikalnih situacija neophodno je razmatrati kretanje više elemenata nekog sistema (kojeg onda nazivamo "višečestični sistem"). To može biti kretanje bilo kojeg sistema koji se sastoji od dvije (kao što je sudar dva atoma), pa do teoretski beskonačno mnogo (kao što je rotaciono kretanje krutog tijela) elemenata sistema, odnosno čestica.

Prema tome, razmotrićemo sistem koji se sastoji od N čestica, svaka mase m_i . Da bismo opisali kretanje ovog sistema trebali bismo poznavati položaj, brzinu i ubrzanje svake čestice. U opštem slučaju to nije moguće, međutim bitne informacije o kretanju sistema kao cjeline se mogu dobiti ako se umjesto vektora položaja svake čestice sistema definiše vektor centra masa. Pretpostavimo da se sistem sastoji od dvije čestice mase m_1 i m_2 koje su postavljene duž x -ose u tačkama x_1 i x_2 kao što je prikazano na slici 8.2. Centar masa ovog sistema čestica je tačka koja se također nalazi na x osi, a određena je

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (8.4)$$

Ako bismo umjesto dvije imali N čestica, koje su postavljene duž x -ose, njihov centar masa, odnosno x koordinata centra masa bi bila

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \dots + m_N x_N}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_N} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i x_i, \quad (8.5)$$



Slika 8.2: Položaj centra masa sistema koji se sastoji od dvije čestice mase m_1 i m_2 .

gdje smo s $M = m_1 + m_2 + \dots + m_N$ označili masu sistema čestica. Analogno možemo definisati i y koordinatu centra masa kao

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i y_i, \quad (8.6)$$

odnosno u opštem slučaju (slika 8.3) vektor centra masa relacijom

$$\vec{r}_{\text{cm}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i. \quad (8.7)$$

8.3 Teorem o kretanju centra masa

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od N čestica masa m_i . Na svaku od čestica djeluje neka rezultujuća sila \vec{F}_i , te se ona kreće u skladu II Newtonovim zakonom. Ako jednačinu (8.7) pomnožimo s masom sistema M i diferenciramo po vremenu dobijamo

$$M \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}, \quad (8.8)$$

gdje smo iskoristili pravilo da je izvod sume funkcija jednak sumi izvoda tih funkcija. Veličina

$$\vec{v}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{r}_{\text{cm}}}{dt} \quad (8.9)$$

predstavlja brzinu kretanja centra masa sistema čestica. Prema tome, na osnovu prethodne dvije relacije možemo pisati

$$M \vec{v}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N m_i d\vec{v}_i = \sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \vec{p}_{\text{tot}}, \quad (8.10)$$

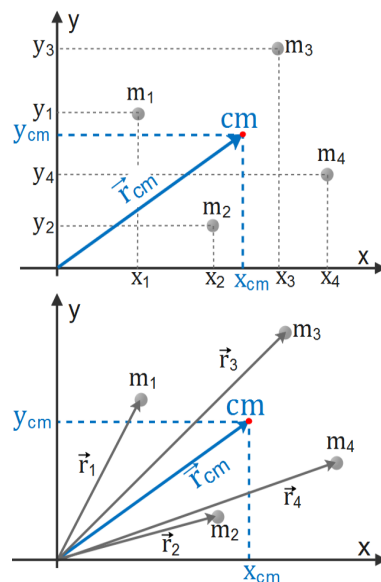
gdje smo s \vec{p}_{tot} označili ukupnu količinu kretanja sistema koji je vektorska suma količina kretanja pojedinih čestica sistema. Iz prethodne relacije možemo zaključiti da je količina kretanja sistema čestica jednaka proizvodu mase tog sistema i vektora brzine centra masa sistema. Kako se svako kruto tijelo može smatrati sistemom (beskonačno) velikog broja čestica, zaključujemo da je količina kretanja krutog tijela jednaka proizvodu njegove mase i vektora brzine centra masa.

Prethodni izraz možemo još jednom diferencirati po vremenu, te ćemo dobiti

$$M \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}. \quad (8.11)$$

Veličina

$$\vec{a}_{\text{cm}} = \frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} \quad (8.12)$$



Slika 8.3: Položaj centra masa u dvije dimenzije.

predstavlja ubrzanje centra masa sistema čestica, dok je $\vec{a}_i = d\vec{v}_i/dt$ ubrzanje pojedine čestice sistema, odnosno $\vec{F}_i = m_i d\vec{v}_i/dt = m_i \vec{a}_i$ rezultujuća sila koja djeluje na česticu i . Prema tome, možemo pisati

$$M\vec{a}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i. \quad (8.13)$$

Sve sile koje djeluje na česticu i možemo podijeliti na vanjske i unutrašnje, pa prethodni izraz postaje

$$M\vec{a}_{\text{cm}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{int}}, \quad (8.14)$$

gdje \vec{F}_i^{ext} predstavlja rezultujuću vanjsku silu koja djeluje na česticu i , dok je \vec{F}_i^{int} rezultujuća unutrašnja sila koja djeluje na česticu i . Suma svih vanjskih sila koje djeluju na svaku od čestica sistema predstavlja rezultujuću vanjsku silu \vec{F}^{ext} koja djeluje na posmatrani sistem, tj. $\vec{F}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i^{\text{ext}}$.

Rezultujuća unutrašnja sila koja djeluje na česticu i je posljedica interakcije te čestice sa svim ostalim česticama sistema, te se može pisati

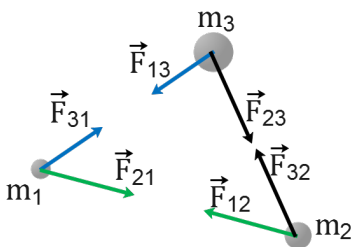
$$\vec{F}_i^{\text{int}} = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}, \quad (8.15)$$

gdje je \vec{F}_{ij} sila kojom čestica j djeluje na česticu i . Prema tome, izraz (8.14) postaje

$$M\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}^{\text{ext}} + \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij}. \quad (8.16)$$

Ako raspišemo nekoliko članova prethodne dvostruke sume dobijemo

$$\sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots + \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23} + \dots + \vec{F}_{31} + \vec{F}_{32} + \dots \quad (8.17)$$



Sila \vec{F}_{12} predstavlja silu kojom čestica 2 djeluje na česticu 1, dok je \vec{F}_{21} sila kojom čestica 1 djeluje na česticu 2. Ove dvije sile, prema III Newtonovom zakonu imaju isti intenzitet, a suprotan smjer, pa je $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, te će se ove dvije sile u prethodnoj sumi poništiti. Ista stvar će se desiti sa svakim parom sila (slika 8.4), jer se unutrašnje sile pojavljuju u parovima i pri tome vrijedi $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ tako da će dvostruka suma koja se pojavljuje u izrazu (8.16) biti jednaka nuli. Ovaj izraz onda postaje

$$M\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{F}^{\text{ext}} \quad (8.18)$$

Slika 8.4: Unutrašnje sile se pojavljuju u parovima i međusobno se poništavaju.

i govori nam da će ubrzanje centra masa nekog sistema čestica biti određeno isključivo djelovanjem vanjskih sila odnosno da je proizvod mase i ubrzanja centra masa nekog sistema jednak vektorskoj sumi svih vanjskih sila koje djeluju na sistem. Ovaj iskaz je poznat kao Teorem o kretanju centra masa sistema čestica.

8.4 Zakon očuvanja količine kretanja

U prethodnom odjeljku smo zaključili da je količina kretanja sistema čestica jednaka proizvodu mase tog sistema i vektora brzine centra masa, odnosno da je $\vec{p}_{\text{tot}} = M\vec{v}_{\text{cm}}$. Diferenciranjem ovog izraza po vremenu dobijamo

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = M\frac{d\vec{v}_{\text{cm}}}{dt} = M\vec{a}_{\text{cm}}. \quad (8.19)$$

Pored toga, na osnovu Teorema o kretanju centra masa, zaključili smo da je proizvod mase sistema i ubrzanja centra masa jednak rezultujućoj vanjskoj sili pa možemo pisati

$$\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}. \quad (8.20)$$

Iz ovog izraza je jasno da je promjena količine kretanja sistema jednaka nuli, odnosno da je količina kretanja sistema očuvana ako je vektorska suma svih vanjskih sila jednaka nuli. Ovaj iskaz predstavlja zakon očuvanja količine kretanja sistema čestica. Slično kao i zakon očuvanja mehaničke energije, ovaj zakon sadrži određeni uslov koji mora biti ispunjen kako bi količina kretanja sistema bila očuvana. Kako bismo ispitali mogućnost i način primjene zakona očuvanja količine kretanja, pogodno je koristiti sljedeći algoritam:

- Definirati sistem od značaja, tj. sistem čestica čije kretanje se posmatra.
- Identifikovati sve vanjske sile koje djeluju na sistem. Ukoliko je suma svih vanjskih sila jednaka nuli, količina kretanja sistema je očuvana.
- Identifikovati trenutak kada je došlo do promjene unutar sistema (to je obično trenutak sudara, udara, raspada itd.) i zatim napisati ukupnu količinu kretanja sistema neposredno prije, odnosno neposredno poslije tog trenutka. Količina kretanja sistema jednaka je vektorskoj sumi količina kretanja svih elemenata tog sistema.
- Primijeniti zakon očuvanja količine kretanja tako što se količina kretanja sistema neposredno prije izjednači s količinom kretanja si-

stema neposredno poslije prethodno identifikovanog trenutka promjene.

- Izabрати pogodan koordinatni sistem i projektovati sve vektore količine kretanja na ose izabranog koordinatnog sistema.
- Iz dobijene jednačine ili sistema jednačina naći nepoznate veličine.

8.5 Gravitaciona potencijalna energija sistema čestica

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od N čestica masa m_i i koji se nalazi u blizini površine Zemlje. Neka se svaka od čestica nalazi na visini y_i u odnosu na dati referentni nivo. Gravitaciona potencijalna energija svake čestice iznosi $E_{pi} = m_i g y_i$ dok je ukupna gravitaciona potencijalna energija sistema

$$E_p = \sum_{i=1}^N E_{pi} = g \sum_{i=1}^N m_i y_i. \quad (8.21)$$

Na osnovu definicije položaja centra masa, odnosno definicije y koordinate centra masa y_{cm} slijedi

$$\sum_{i=1}^N m_i y_i = M y_{cm}, \quad (8.22)$$

gdje je M ukupna masa sistema. Na osnovu prethodna dva izraza zaključujemo da vrijedi

$$E_p = M g y_{cm}, \quad (8.23)$$

odnosno da je gravitaciona potencijalna energija sistema čestica, koji se nalazi u blizini površine Zemlje, jednaka proizvodu mase sistema, ubrzanja Zemljine teže i y koordinate centra masa. Prema tome, za određivanje gravitacione potencijalne energije dovoljno je odrediti (mjeriti) visinu centra masa sistema u odnosu na dati referentni nivo.

8.6 Sudari

Sudari predstavljaju interakciju dva ili više tijela koja se ostvaruje neposrednim kontaktom i čije vrijeme trajanja je relativno kratko. Obično se vremenski interval u kojem se desi sudar tijela mjeri u dijelovima sekundi (najčešće milisekunde). Obzirom da je vremenski interval u kojem se dešava sudar relativno kratak, efekat djelovanja

vanjskih sila na čestice koje se sudaraju je zanemariv. Tako npr. na tenisku loptu koja se kreće kroz vazduh djeluje sila Zemljine teže i mijenja joj količinu kretanja, ali u vremenskom intervalu u kojem se lopta sudara s reketom, efekat djelovanja vanjske sile Zemljine teže na sistem koji se sastoji od lopte i reketa je zanemariv. Zbog toga možemo smatrati da je promjena količine kretanja sistema $\Delta \vec{p}_{\text{tot}} = \vec{F}^{\text{ext}} \Delta t$, uzrokovana djelovanjem vanjskih sila \vec{F}^{ext} u vremenskom intervalu Δt , približno jednaka nuli, pa je količina kretanja sistema u vremenskom intervalu u kojem se dešava sudar očuvana. Prema tome, na procese sudara možemo primijeniti zakon očuvanja količine kretanja tako što ćemo količinu kretanja sistema neposredno prije sudara izjednačiti s količinom kretanja sistema neposredno poslije sudara.

Sudari dva tijela mogu biti centralni (čeonni) ili necentralni. Kod centralnih sudara, centri masa tijela koja se sudaraju nalaze se duž pravca kretanja prije i poslije sudara. Kod necentralnih sudara, tijela se nakon sudara otklone za neki ugao i njihov pravac kretanja se mijenja. Ukoliko kinetička energija sistema prije i poslije sudara ostane nepromijenjena, sudar se naziva idealno elastičnim. Kod ovakve vrste sudara može se primijeniti zakon očuvanja količine kretanja i zakon očuvanja mehaničke energije. Ako se ukupna kinetička energija nakon sudara smanjila, sudar nazivamo neelastičnim. Pri neelastičnom sudaru moguće je primijeniti zakon očuvanja količine kretanja i ukupne energije, ali ne i mehaničke energije. Naime, jedan dio mehaničke energije će se pretvoriti u toplotnu energiju, energiju deformacije itd. Ako se dva tijela nakon sudara kreću jednakim brzinama (jedno uz drugo) onda takav sudar nazivamo idealno neelastičnim ili plastičnim. I ovdje je moguće primijeniti zakon očuvanja količine kretanja i ukupne energije, ali ne i mehaničke energije.

Razmotrimo sada centralni idealno elastični sudar dva tijela masa m_1 i m_2 koja se kreću brzinama \vec{v}_1 i \vec{v}_2 kao na slici 8.5. Za ovaj sudar vrijedi zakon očuvanja količine kretanja sistema i zakon očuvanja mehaničke energije koji se mogu pisati kao

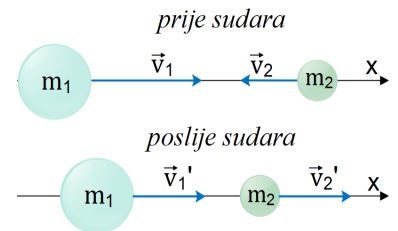
$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \quad (8.24)$$

odnosno

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v_1'^2}{2} + \frac{m_2 v_2'^2}{2}. \quad (8.25)$$

Pošto se radi o centralnom sudaru, tijela se prije i poslije sudara kreću duž istog pravca, pa možemo izabrati x -osu kao pravac kretanja kao na slici 8.5 i vektore iz jednačine (8.24) projektovati na tu osu. Pri tome dobijemo

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}, \quad (8.26)$$



Slika 8.5: Šematski prikaz centralnog idealno elastičnog sudara između dva tijela prije (gore) i poslije sudara (dole).

gdje smo s indeksom x označili komponente vektora brzine. Komponente vektora brzine duž x -ose su $v_x = \pm v$ pa je $v_x^2 = v^2$ odnosno za kretanje duž x -ose kvadrat komponente brzine je isto što i kvadrat intenziteta brzine. Zbog toga u zakonu očuvanja mehaničke energije (8.25) možemo umjesto intenziteta brzine pisati komponente vektora brzine i dobiti

$$m_1 v_{1x}^2 + m_2 v_{2x}^2 = m_1 v_{1x}'^2 + m_2 v_{2x}'^2. \quad (8.27)$$

Jednačine (8.26) i (8.27) predstavljaju sistem jednačina u kojima su nepoznate komponente brzine tijela nakon sudara v_{1x}' i v_{2x}' . Ovaj sistem je najjednostavnije riješiti tako da u obje jednačine članove sa istom masom prebacimo na istu stranu. Pri tome ćemo dobiti

$$m_1 (v_{1x} - v_{1x}') = m_2 (v_{2x}' - v_{2x}) \quad (8.28)$$

$$m_1 (v_{1x}^2 - v_{1x}'^2) = m_2 (v_{2x}'^2 - v_{2x}^2) \quad (8.29)$$

Zagrade u jednačini (8.29) možemo rastaviti preko razlike kvadrata te nakon dijeljenja s jednačinom (8.28) dobiti

$$v_{1x} + v_{1x}' = v_{2x} + v_{2x}'. \quad (8.30)$$

Ova jednačina zajedno s jednačinom (8.29) predstavlja sistem dvije linearne algebarske jednačine koji se može jednostavno riješiti tako da se npr. v_{1x}' izrazi iz (8.30) i uvrsti u (8.29). Nakon nekoliko jednostavnih algebarskih operacija dobijamo izraze za brzinu tijela nakon sudara

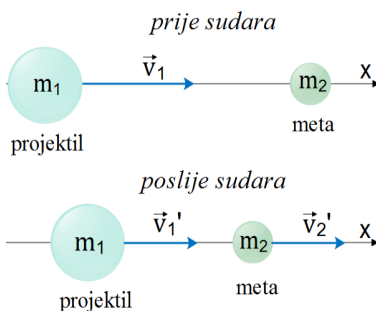
$$v_{1x}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{2x}, \quad (8.31)$$

$$v_{2x}' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_{2x}. \quad (8.32)$$

Nerijetko prilikom sudara imamo situaciju da jedno tijelo miruje, a drugo se kreće i udara o tijelo koje je mirovalo. U tom slučaju govorimo o sudaru projektila i mete (slika 8.6). Ovo je samo specijalan slučaj prethodno razmatranog sudara u kojem je brzina tijela prije sudara jednaka nuli, tj. $v_{2x} = 0$. Iz prethodnog sistema dobijamo da će brzina projektila nakon sudara biti

$$v_{1x}' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{1x}. \quad (8.33)$$

Komponenta brzine projektila nakon sudara će biti pozitivna, tj. projektil će nastaviti da se kreće duž pravca bez promjene smjera, samo ako je masa projektila m_1 veća od mase mete m_2 . Ukoliko je masa projektila manja od mase mete, njegova komponenta brzine će biti



Slika 8.6: Šematski prikaz centralnog idealno elastičnog sudara između projektila i mete prije (gore) i poslije sudara (dole).

negativna i projektil nakon sudara mijenja smjer svog kretanja. Ako su masa mete i projektila iste, projektil će nakon sudara mirovati.

U opštem slučaju, komponenta brzine mete nakon sudara data je relacijom

$$v'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_{1x}, \quad (8.34)$$

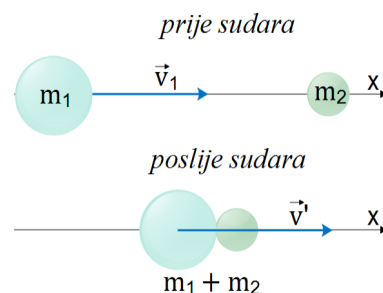
i ona je uvijek pozitivna.

Kod idealno neelastičnog sudara tijela se kreću zajedno nakon sudara kao na slici 8.7, istom brzinom \vec{v} . Na osnovu zakona očuvanja količine kretanja slijedi

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad (8.35)$$

pa je komponenta brzine tijela nakon sudara

$$v_x = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \quad (8.36)$$



Slika 8.7: Šematski prikaz centralnog idealno neelastičnog sudara između dva tijela prije (gore) i poslije sudara (dole).

8.7 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: U posudu cilindričnog oblika mase M i visine H ulije se voda do vrha. Neka je masa usute vode jednaka masi posude. Na dnu posude se zatim izbuši otvor tako da voda počne isticati.

- Ako je u nekom trenutku visina vode u posudi y , kolika je visina centra masa sistema posuda+voda?
- Kolika je najmanja visina centra masa sistema posuda+voda prilikom isticanja vode?

Rješenje:

a) Neka je masa vode koja se nalazi u posudi, u trenutku kada je nivo vode na visini y , jednaka m . Visina centra masa sistema posuda+voda je po definiciji

$$y_{\text{cm}} = \frac{M \frac{H}{2} + m \frac{y}{2}}{M + m}, \quad (1.1)$$

gdje smo uzeli da je centar masa posude na visini $H/2$, a vode na visini $y/2$. Neka je površina poprečnog presjeka posude S . Tada se gustoća vode može pisati kao

$$\rho = \frac{M}{HS} = \frac{m}{yS}. \quad (1.2)$$

Odavde je

$$m = \frac{y}{H} M, \quad (1.3)$$

Napomena: centar masa posude je sigurno nešto ispod visine $H/2$ jer posuda ima dno ali nema poklopac. Ako je masa dna posude zanemariva u odnosu na stijenke posude onda je centar masa približno na visini $H/2$.

pa uvrštavanjem u jednačinu (1.1) dobijamo

$$y_{\text{cm}} = \frac{M\frac{H}{2} + \frac{y}{H}M\frac{y}{2}}{M + \frac{y}{H}M} = \frac{H}{2} \frac{1 + \left(\frac{y}{H}\right)^2}{1 + \frac{y}{H}}. \quad (1.4)$$

b) Označimo s $h = y/H$ visinu nivoa vode mjerenu u odnosu na visinu posude H , a s $h_{\text{cm}} = y_{\text{cm}}/H$ visinu centra masa sistema posuda+voda mjerenu preko visine posude H . Tada je visina centra masa ovog sistema, kao funkcija visine vode u posudi, data relacijom

$$h_{\text{cm}}(h) = \frac{1}{2} \frac{1 + h^2}{1 + h}. \quad (1.5)$$

Kako voda ističe, smanjuje se visina nivoa vode što doprinosi smanjenju visine centra masa sistema. Međutim, istovremeno se smanjuje i masa vode u posudi pa će zbog toga doprinos vode promjeni položaja centra masa sistema posuda+voda biti sve manji. Kada voda u potpunosti isteče centar masa je na visini $H/2$. Prema tome, treba naći visinu nivoa vode na kojoj je položaj centra masa minimalan. To se može uraditi tako da se nađe minimum prethodne funkcije, odnosno prvi izvod izjednači s nulom.

Prvi izvod funkcije $h_{\text{cm}}(h)$ je

$$h'_{\text{cm}}(h) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2h(1+h) - (1+h^2)}{(1+h)^2} = \frac{1}{2} \frac{h^2 + 2h - 1}{(1+h)^2}. \quad (1.6)$$

Prvi izvod iz prethodnog izraza će biti jednak nuli kada je $h^2 + 2h - 1 = 0$. Pozitivno rješenje ove kvadratne jednačine je $h = \sqrt{2} - 1 = 0,414$. Prema tome visina nivoa vode za koju je položaj centra masa sistema posuda+voda minimalan iznosi

$$y = 0,414H. \quad (1.7)$$

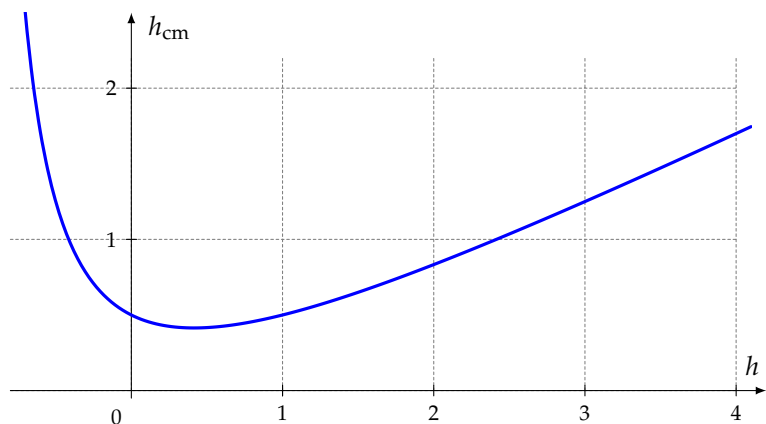
Vrijednost minimalne visine centra masa sistema posuda+voda iznosi

$$h_{\text{cm},\text{min}} = \frac{1}{2} \frac{1 + (\sqrt{2} - 1)^2}{1 + (\sqrt{2} - 1)} = \sqrt{2} - 1, \quad (1.8)$$

tj. nalazi se na visini

$$y_{\text{cm},\text{min}} = 0,414H, \quad (1.9)$$

te se poklapa s trenutnom visinom nivoa vode. Na slici 8.8 prikazana je zavisnost visine centra masa od visine nivoa vode, te vidimo da će upravo za vrijednost $y \approx 0,4H$ centar masa sistema posuda+voda biti minimalan.



Slika 8.8: Uz rješenje zadatka 1.

ZADATAK 2: Homogeni štap mase M i dužine L postavljen je na ledenu horizontalnu podlogu. Disk jednake mase M , koji se kreće okomito na položaj štapa brzinom v_0 , udara o kraj štapa i ostaje zalijepljen za njega. Odrediti položaj, brzinu i ubrzanje centra masa sistema štap+disk kao funkciju vremena.

Rješenje:

Pretpostavimo da je štap postavljen duž y -ose, a da se disk kreće duž x -ose, te udara o onaj kraj štapa koji je postavljen u ishodištu koordinatnog sistema u trenutku $t = 0$. Na sistem koji se sastoji od štapa i diska djeluju sila Zemljine teže i sila reakcije podloge. Ove sile imaju iste intenzitete, a suprotne predznake, pa će rezultujuća vanjska sila na sistem štap+disk biti jednaka nuli. Prema Teoremu o kretanju centra masa, ubrzanje centra masa ovog sistema će onda također biti jednako nuli.

Brzina centra masa je data kao

$$\vec{v}_{\text{cm}}(t) = \frac{m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)}{m_1 + m_2}. \quad (2.1)$$

U trenutku $t = 0$ brzina centra masa iznosi

$$\vec{v}_{\text{cm}}(t = 0) = \frac{Mv_0 \vec{i} + 0}{2M} = \frac{v_0}{2} \vec{i}, \quad (2.2)$$

gdje smo uzeli da se u trenutku $t = 0$ disk kreće brzinom v_0 , a da štap miruje. Kako je ubrzanje centra masa jednako nuli, to će brzina centra masa biti konstantna, tj. brzina centra masa sistema u bilo kojem kasnijem trenutku će biti

$$\vec{v}_{\text{cm}}(t) = \frac{v_0}{2} \vec{i}. \quad (2.3)$$

Položaj centra masa u trenutku t određen je s

$$\vec{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{m_1 \vec{r}_1(t) + m_2 \vec{r}_2(t)}{m_1 + m_2}, \quad (2.4)$$

gdje je $\vec{r}_1(t)$ položaj centra diska, a $\vec{r}_2(t)$ položaj centra masa štapa. Položaj centra masa ovog sistema u trenutku $t = 0$ određen je s

$$\vec{r}_{\text{cm}}(t = 0) = \frac{M\vec{0} + M\frac{L}{2}\vec{j}}{2M} = \frac{L}{4}\vec{j}. \quad (2.5)$$

Pošto ne znamo kako će se mijenjati \vec{r}_1 i \vec{r}_2 nakon sudara, nije moguće direktno iz relacije (2.4) odrediti položaj centra masa kao funkciju vremena. Međutim, moguće je koristiti Teorem o kretanju centra masa prema kojem će na kretanje centra masa sistema uticati samo vanjske sile. Pošto smo zaključili da je rezultujuća vanjska sila jednaka nuli, te je zbog toga i ubrzanje centra masa jednako nuli, odnosno brzina centra masa konstantna, onda će položaj centra masa kao funkcija vremena biti određen s

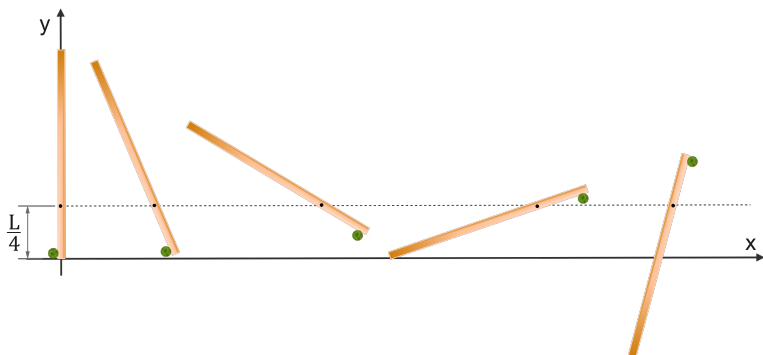
$$\vec{r}_{\text{cm}}(t) = \vec{r}_{0\text{cm}} + \vec{v}_{\text{cm}}t. \quad (2.6)$$

Uvrštavanjem izraza za početni položaj centra masa i brzinu centra masa, dobijamo

$$\vec{r}_{\text{cm}}(t) = \frac{L}{4}\vec{j} + \frac{v_0}{2}\vec{i} \cdot t. \quad (2.7)$$

Nakon što disk udari o štap, sistem štap+disk će vršiti složeno kretanje tako što će disk i štap rotirati oko zajedničkog centra masa dok će se njihov centar masa kretati pravolinijski duž x -ose brzinom konstantnog intenziteta $v_0/2$. Na slici 8.9 je prikazan položaj ovog sistema u nekoliko trenutaka. Vidimo da se mijenja položaj centra masa štapa i položaj diska, dok se centar masa sistema kreće ravnomjerno pravolinijski duž x -ose.

Slika 8.9: Uz rješenje zadatka 2.



ZADATAK 3: Neko tijelo leti brzinom 10 m s^{-1} i rasprsnje se na dva dijela. Veći dio, čija je masa 60% mase tijela, nastavi da se kreće po istom pravcu, ali s povećanom brzinom koja iznosi 25 m s^{-1} . Pretpostavljajući da i manji dio nije promijenio pravac kretanja, naći njegovu brzinu.

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od tijela koje se raspada. Period u kome se desi raspad tijela je veoma kratak pa možemo smatrati da je uticaj vanjskih sila u tom periodu zanemariv. Drugim riječima, sistem koji posmatramo je zatvoren u periodu od neposredno prije raspada do neposredno poslije raspada. Za zatvorene sisteme, kod kojih je suma svih vanjskih sila jednaka nuli, vrijedi zakon očuvanja količine kretanja. Nakon raspada posmatrani sistem čine dva tijela masa $m_1 = 0,6m$ i $m_2 = 0,4m$, tako da se zakon očuvanja količine kretanja sistema u gore navedenom vremenskom intervalu može napisati kao

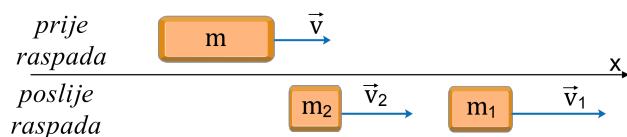
$$m\vec{v} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \quad (3.1)$$

gdje su \vec{v}_1 i \vec{v}_2 brzine tijela masa m_1 i m_2 neposredno nakon raspada. Pošto se prema uslovu zadatka sva tri tijela kreću u istom pravcu, možemo izabrati jednodimenzionalni referentni sistem (slika 8.10) u kojem ćemo projektovati vektore brzina na x -osu te dobiti

$$mv_x = m_1v_{1x} + m_2v_{2x}. \quad (3.2)$$

Pretpostavimo da se tijelo veće mase kreće u prvobitnom pravcu i

Slika 8.10: Uz rješenje zadatka 1.



prvobitnom smjeru. Tada je $v_{1x} = v_1$ pa možemo pisati

$$mv = m_1v_1 + m_2v_{2x} \quad (3.3)$$

odakle je

$$v_{2x} = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = \frac{v - 0,6v_1}{0,4} = -12,5 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.4)$$

To znači da se manje tijelo kreće u suprotnom smjeru brzinom intenziteta $12,5 \text{ m s}^{-1}$.

Pretpostavimo sada da se veće tijelo nastavilo kretati po istom pravcu, ali u suprotnom smjeru. U tom slučaju je komponenta brzine $v_{1x} = -v_1$ negativna pa možemo pisati

$$mv = -m_1v_1 + m_2v_{2x}. \quad (3.5)$$

Sada je brzina manjeg tijela

$$v_{2x} = \frac{mv + m_1v_1}{m_2} = \frac{v + 0,6v}{0,4} = 62,5 \text{ m s}^{-1}. \quad (3.6)$$

To znači da se manje tijelo nastavilo kretati u prvobitnom smjeru brzinom $62,5 \text{ m s}^{-1}$.

ZADATAK 4: Atom kriptona (mase $83,9 \text{ u}$) kreće se brzinom $0,8 \text{ km s}^{-1}$ udesno, dok se molekula vode (mase 18 u) kreće brzinom $0,4 \text{ km s}^{-1}$ ulijevo. Kolika je brzina atoma kriptona nakon elastičnog sudara s molekulom vode, ako se molekula vode nakon sudara kreće udesno brzinom $0,6 \text{ km s}^{-1}$?

Rješenje:

Posmatrajmo sudar dva tijela, atoma kriptona mase m_1 i molekule vode mase m_2 , koji u periodu samog sudara čine zatvoren sistem. Zbog toga je količina kretanja tog sistema očuvana, pa možemo pisati zakon očuvanja na slijedeći način

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2, \quad (4.1)$$

gdje smo s \vec{v}_1 i \vec{v}_2 označili brzine neposredno prije, odnosno s \vec{v}'_1 i \vec{v}'_2 brzine atoma kriptona i molekule vode neposredno poslije sudara. Pošto su svi vektori brzina usmjereni duž jednog pravca (slika 8.11) dovoljno je izabrati jednodimenzionalni koordinatni sistem (x -osu), te zatim projektovati sve vektore iz prethodne jednačine na tu osu

$$m_1v_1 - m_2v_2 = m_1v'_{1x} + m_2v'_2. \quad (4.2)$$

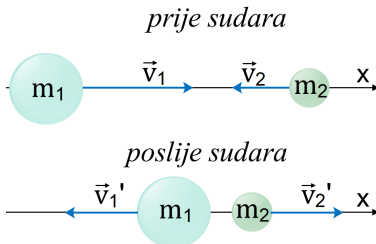
Odavde slijedi

$$v'_{1x} = \frac{m_1v_1 - m_2(v_2 + v'_2)}{m_1} = v_1 - \frac{m_2}{m_1}(v_2 + v'_2). \quad (4.3)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijemo brzinu atoma kriptona neposredno nakon sudara

$$v'_{1x} = 0,8 \text{ km s}^{-1} - \frac{18 \text{ u}}{83,9 \text{ u}}(0,4 \text{ km s}^{-1} + 0,6 \text{ km s}^{-1}) = 0,585 \text{ km s}^{-1}. \quad (4.4)$$

Pošto je komponenta brzine atoma kriptona nakon sudara pozitivna, zaključujemo da se on nakon sudara kreće udesno brzinom intenziteta $0,585 \text{ km s}^{-1}$.



Slika 8.11: Uz rješenje zadatka 4.

ZADATAK 5: Gumeni disk mase 5 kg kreće se po ledu skoro bez trenja brzinom 2 m s^{-1} . Disk se sudara s identičnim diskom koji je prvobitno mirovao i otklanja se za ugao od 30° . Ako se drugi disk nakon sudara počne kretati pod uglom od 60° , odrediti brzine oba diska nakon sudara. Da li je sudar bio elastičan?

Rješenje:

Oba diska se kreću po ledu tako da je trenje zanemarivo. Rezultujuća vanjska sila na sistem koji se sastoji od dva diska jednaka je nuli, tj. sistem je zatvoren, pa je količina kretanja sistema očuvana. Zakon očuvanja količine kretanja možemo pisati kao

$$m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = m\vec{v}'_1 + m\vec{v}'_2. \quad (5.1)$$

Masa oba diska je jednaka, pa se može pokratiti u prethodnom izrazu. Pored toga, ako iskoristimo da je brzina jednog diska prije sudara jednaka nuli (jer je mirovao prije sudara) dobijamo

$$\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 + \vec{v}'_2, \quad (5.2)$$

gdje smo s \vec{v}'_1 i \vec{v}'_2 označili brzine neposredno nakon sudara. Ovaj sudar nije centralni jer se jedan disk nakon sudara otklanja u odnosu na prvobitni pravac za odgovarajući ugao. Neka je taj ugao otklona α . Projekcijom jednačine (5.1) na ose izabranog koordinatnog sistema (slika 8.12) dobijamo sistem jednačina

$$v_1 = v'_1 \cos \alpha + v'_2 \cos \beta, \quad (5.3)$$

$$0 = v'_1 \sin \alpha - v'_2 \sin \beta, \quad (5.4)$$

gdje smo s β označili ugao uzmaka diska koji je prvobitno mirovao. Ako uvrstimo vrijednosti uglova α i β , naš sistem postaje

$$v_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}v'_1 + \frac{1}{2}v'_2, \quad (5.5)$$

$$0 = \frac{1}{2}v'_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}v'_2. \quad (5.6)$$

Iz druge jednačine je $v'_1 = \sqrt{3}v'_2$, pa kada to uvrstimo u prvu dobijamo

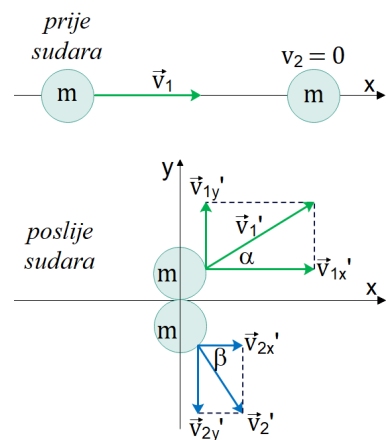
$$v'_2 = \frac{v_1}{2} = 1 \text{ m s}^{-1}, \quad (5.7)$$

odnosno

$$v'_1 = \sqrt{3}v'_2 = 1,732 \text{ m s}^{-1}. \quad (5.8)$$

Da bismo provjerili da li je sudar bio elastičan moramo odrediti mehaničku energiju sistema neposredno prije i neposredno poslije sudara. Energija sistema prije sudara je

$$E_{k1} = \frac{mv_1^2}{2} + 0 = 10 \text{ J}. \quad (5.9)$$

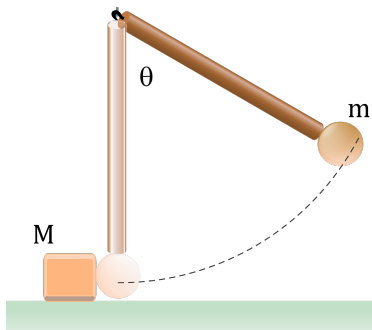


Slika 8.12: Uz rješenje zadatka 5.

Energija sistema poslije sudara iznosi

$$E_{k2} = \frac{mv_1'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} = \frac{3mv_2'^2}{2} + \frac{mv_2'^2}{2} = \frac{4mv_2'^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} = E_{k1} = 10\text{J}. \quad (5.10)$$

Prema tome, mehanička energija sistema prije i poslije sudara je ostala nepromijenjena što znači da je sudar bio idealno elastičan.



Slika 8.13: Uz zadatak 6.

ZADATAK 6: Metalna kugla mase $m = 0,4\text{ kg}$ spojena je sa štapićem zanemarive mase i dužine 2 m tako da zajedno čine klatno kao na slici 8.13. Ovo klatno može oscilovati u vertikalnoj ravni bez gubitaka. Klatno se otkloni tako da zatvara ugao $\theta = 60^\circ$ s prvobitnim položajem i pusti. Kada kugla dođe u najniži položaj elastično se sudara s tijelom mase $M = 0,5\text{ kg}$.

- Odrediti maksimalni ugao otklona klatna nakon sudara.
- Na koju će se udaljenost tijelo pomjeriti ako je koeficijent trenja između njega i podloge $0,1$?

Rješenje:

a) Posmatračemo sistem koji se sastoji od kugle mase m , tijela mase M , Zemlje i podloge. Ovaj sistem je zatvoren i na njega ne djeluju nikakve vanjske sile. Cijeli proces ćemo podijeliti u tri etape: prva je kretanje kugle od položaja maksimalne visine pa do neposredno prije sudara, druga je elastični sudar tijela i treća je kretanje tijela nakon sudara. U prvoj etapi kretanja, pored toga što je sistem zatvoren, na njega ne djeluju nikakve unutrašnje nekonzervativne sile pa se može primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije. Energija tijela mase M i Zemlje se ne mijenja u prvoj etapi kretanja (slika 8.14), pa zakon očuvanja energije glasi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (6.1)$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} - mgh = 0. \quad (6.2)$$

Odavde je brzina tijela neposredno prije sudara

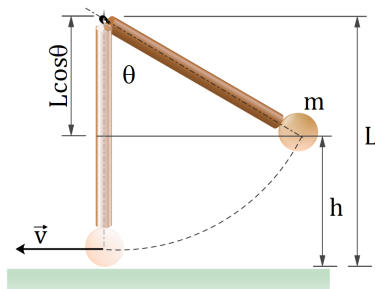
$$v = \sqrt{2gh}, \quad (6.3)$$

gdje je h visina s koje se tijeloпусти. Ona se može odrediti kao

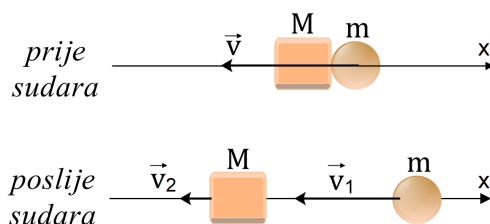
$$h = L - L \cos \theta = L(1 - \cos \theta) = L(1 - \cos 60^\circ) = L/2 = 1\text{ m}. \quad (6.4)$$

Prema tome, brzina tijela neposredno prije sudara iznosi

$$v = \sqrt{2 \cdot 9,81\text{ m s}^{-2} \cdot 1\text{ m}} = 4,43\text{ m s}^{-1}. \quad (6.5)$$



Slika 8.14: Uz rješenje prvog dijela zadatka 6a.



Slika 8.15: Uz rješenje drugog dijela zadatka 6a.

Razmotrimo sada sudar kugle i tijela (slika 8.15). Obzirom da je sudar elastičan, pored zakona očuvanja količine kretanja, moguće je primijeniti i zakon očuvanja mehaničke energije. Ova dva zakona napisana za vremenski interval od neposredno prije do neposredno poslije sudara glase

$$m\vec{v} = m\vec{v}_1 + M\vec{v}_2, \quad (6.6)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}. \quad (6.7)$$

Sva tri vektora brzine su usmjerena duž x -ose tako da su kvadrati njihovih komponenti jednaki kvadratu intenziteta njihovih brzina. Projekcijom prethodne jednačine na x -osu dobijamo

$$mv_x = mv_{1x} + Mv_{2x}, \quad (6.8)$$

$$\frac{mv_x^2}{2} = \frac{mv_{1x}^2}{2} + \frac{Mv_{2x}^2}{2}. \quad (6.9)$$

Sada ćemo, u obje jednačine, članove koji sadrže jednaku masu prebaciti na istu stranu jednakosti te dobiti

$$m(v_x - v_{1x}) = Mv_{2x}, \quad (6.10)$$

$$m(v_x^2 - v_{1x}^2) = Mv_{2x}^2. \quad (6.11)$$

Ako podijelimo ove dvije jednačine i pri tome iskoristimo rastavljanje razlike kvadrata, dobijamo

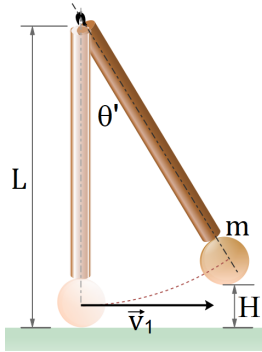
$$v_x + v_{1x} = v_{2x}. \quad (6.12)$$

Sada ovu relaciju možemo kombinovati s relacijom (6.8), te dobiti da su brzine kugle i tijela nakon sudara

$$v_{1x} = \frac{m - M}{m + M}v_x, \quad (6.13)$$

$$v_{2x} = \frac{2m}{m + M}v_x. \quad (6.14)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti zaključujemo da će se nakon elastičnog sudara kugla odbiti (tj. kretati u suprotnom smjeru u odnosu



Slika 8.16: Uz rješenje trećeg dijela zadatka 6a.

na smjer kretanja prije sudara) brzinom intenziteta $v_1 = v/9$, dok će se tijelo mase M početi kretati brzinom intenziteta $v_2 = 8v/9$.

U zadnjoj etapi posmatramo kretanje kugle i tijela odvojeno (slika 8.16). Kugla zajedno sa Zemljom čini zatvoren sistem u kojem nema unutrašnjih nekonzervativnih sila, pa je mehanička energija od trenutka neposredno poslije sudara, pa do trenutka kada kugla dostigne maksimalnu visinu očuvana. Ova visina je na osnovu zakona očuvanja mehaničke energije

$$H = \frac{v_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2 \cdot 81g} = \frac{2gh}{2 \cdot 81g} = \frac{h}{81}. \quad (6.15)$$

Maksimalni ugao odklona nakon sudara određen je s

$$H = L - L \cos \theta', \quad \rightarrow \quad \cos \theta' = 1 - \frac{H}{L} = 1 - \frac{h}{81L} = 0,993, \quad (6.16)$$

odnosno

$$\theta' = 6,37^\circ. \quad (6.17)$$

b) Tijelo mase M se nakon sudara kreće po horizontalnoj hrapavoj površini, te na njega pored sile Zemljine teže i sile reakcije podloge (koje se međusobno ponište) djeluje i sila trenja (slika 8.17). Pošto je ova sila nekonzervativna, mehanička energija ovog tijela nakon sudara nije očuvana. Mjesto na kojem će se zaustaviti ovo tijelo možemo odrediti na osnovu Teorema o energiji i radu, koji u ovom slučaju glasi

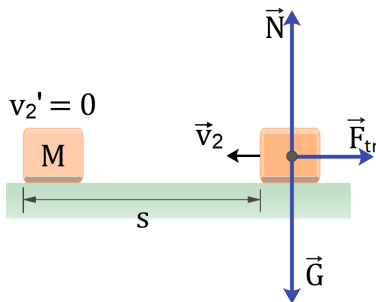
$$\Delta E_k = A_{tr}, \quad (6.18)$$

gdje je A_{tr} rad sile trenja jednak $A_{tr} = -F_{tr}s = -\mu Mgs$. U trenutku zaustavljanja brzina tijela jednaka je nuli, pa je promjena kinetičke energije $\Delta E_k = -\frac{Mv_2^2}{2}$. Prema tome, dobijamo

$$-\frac{Mv_2^2}{2} = -\mu Mgs, \quad (6.19)$$

odakle je pređeni put do zaustavljanja

$$s = \frac{v_2^2}{2\mu g} = \frac{64v^2}{2 \cdot 81\mu g} = \frac{64h}{81\mu} = 7,9 \text{ m}. \quad (6.20)$$



Slika 8.17: Uz rješenje zadatka 6b.

ZADATAK 7: Kuglica mase m leti velikom brzinom po (približno) horizontalnom pravcu. Ona udari o trostranu prizmu mase M , koja može da klizi bez trenja po horizontalnoj podlozi, pa se pri tome odbije vertikalno do visine h . Kolika je brzina prizme nakon sudara ako je sudar kuglice i prizme idealno elastičan?

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od kuglice mase m i prizme mase M (slika 8.18). Na ovaj sistem djeluju sila Zemljine teže i sila reakcije podloge, te on zbog toga nije zatvoren. To znači da ukupna količina kretanja sistema nije očuvana. Međutim duž horizontalnog pravca ne djeluju vanjske sile pa se može primijeniti zakon očuvanja x -komponente količine kretanja (napomena: $\frac{dp_x}{dt} = F_x$). U ovom slučaju on glasi

$$mv_x = MV_x, \quad (7.1)$$

gdje je V_x x -komponenta vektora brzine prizme neposredno nakon sudara. Oba vektora pokazuju u pozitivnom smjeru x -ose pa možemo pisati

$$v = \frac{M}{m}V. \quad (7.2)$$

Sudar kuglice i prizme se može smatrati elastičnim, pa vrijedi zakon očuvanja mehaničke energije u vremenskom intervalu u kojem se dešava sudar

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv'^2}{2}, \quad (7.3)$$

gdje je v' intenzitet brzine kuglice neposredno nakon sudara. Ako nakon sudara posmatramo sistem koji se sastoji od kuglice i Zemlje (slika 8.19) onda je

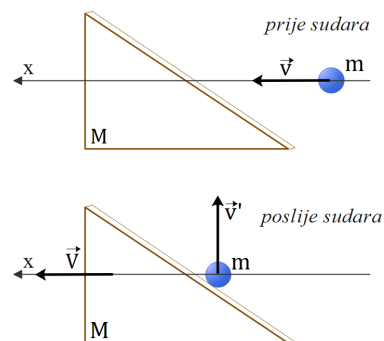
$$\frac{mv'^2}{2} = mgh, \quad (7.4)$$

gdje je h maksimalna visina koju dostigne kuglica. Kombinovanjem prethodne tri jednačine dobijemo

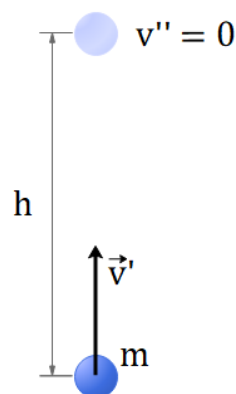
$$\frac{M^2}{m}V^2 = MV^2 + 2mgh, \quad (7.5)$$

odakle je brzina prizme neposredno nakon sudara

$$V = \sqrt{\frac{2m}{\frac{M^2}{m} - M}}gh. \quad (7.6)$$



Slika 8.18: Uz rješenje prvog dijela zadatka 7.



Slika 8.19: Uz rješenje drugog dijela zadatka 7.

ZADATAK 8: Balističko klatno se koristi za mjerenje brzine metaka ispaljenih iz vatrenog oružja. Metak mase m_1 pogađa drvenu metu mase m_2 i ostaje u njoj. Cijeli sistem se otkloni do visine h . Kako se mjerenje visine h može iskoristiti za određivanje brzine metka?

Rješenje:

Neka se metak mase m_1 prvobitno kreće brzinom v_1 i neelastično sudara s drvenom metom mase m_2 koja miruje. Cijeli proces ćemo posmatrati u dvije etape: prva je sudar metka i mete, a druga kretanje metka i mete do maksimalne visine. Pošto je sudar neelastičan nije moguće primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije na sam proces sudara. Međutim pošto duž horizontalne ose ne djeluju nikakve vanjske sile na sistem koji se sastoji od metka i mete (slika 8.20), može se primijeniti zakon očuvanja x komponente količine kretanja, koji u ovom slučaju glasi

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v, \quad (8.1)$$

gdje je v brzina metka i mete neposredno nakon sudara.

U drugoj etapi, tj. vremenskom intervalu od neposredno poslije sudara pa do dostizanja maksimalne visine (slika 8.21), metak i meta se kreću pod uticajem gravitacione sile Zemljine i sile zatezanja konca. Rad sile zatezanja jednak je nuli, a gravitaciona sila Zemlje je konzervativna sila, pa ako izaberemo sistem koji se sastoji od metka, mete i Zemlje, možemo u pomenutom intervalu kretanja primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (8.2)$$

odnosno

$$-\frac{(m_1 + m_2)v^2}{2} + (m_1 + m_2)gh = 0. \quad (8.3)$$

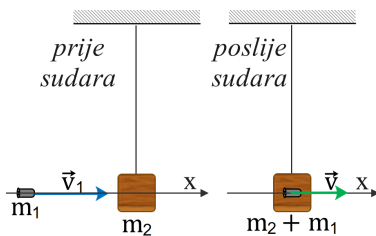
Odavde je

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (8.4)$$

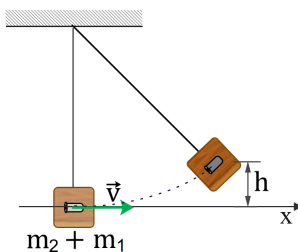
Kombinujući relacije (8.1) i (8.4) zaključujemo da je visina koju dostigne klatno funkcija brzine metka prije sudara i povezana je s brzinom na slijedeći način

$$v_1 = \frac{m_1 + m_2}{m_1} \sqrt{2gh}. \quad (8.5)$$

Prema tome, ako poznajemo masu metka i mete, mjerenjem maksimalne visine h , koju dostigne meta s metkom, na osnovu prethodne relacije možemo odrediti brzinu metka neposredno prije udara u metu.



Slika 8.20: Uz rješenje prvog dijela zadatka 8.



Slika 8.21: Uz rješenje drugog dijela zadatka 8.

ZADATAK 9: Tijelo mase m_1 koje ima početnu brzinu v_0 sudara se s tijelom mase m_2 koje je mirovalo. Odrediti relativni gubitak kinetičke energije sistema ova dva tijela, ako je sudar bio centralni idealno neelastični.

Rješenje:

Centralni idealno neelastični sudar podrazumijeva da se tijela nakon sudara kreću zajedno, jedno uz drugo kao na slici 8.22, brzinom v . Sistem koji se sastoji od dva tijela je zatvoren, pa je količina kretanja ovog sistema očuvana. Zakon očuvanja količine kretanja glasi

$$m_1 \vec{v}_0 + 0 = (m_1 + m_2) \vec{v}, \quad (9.1)$$

gdje je \vec{v} vektor brzine oba tijela nakon sudara. Kod centralnog sudara tijela se prije i poslije sudara kreću duž istog pravca pa projekcijom vektora iz prethodne jednačine na jednu osu izabranog koordinatnog sistema dobijamo

$$m_1 v_0 = (m_1 + m_2) v. \quad (9.2)$$

Odavde je brzina tijela nakon sudara

$$v = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0. \quad (9.3)$$

Relativni gubitak kinetičke energije ova dva tijela određen je s

$$\varepsilon = \frac{\Delta E_k}{E_{ko}} = \frac{E_{ko} - E_k}{E_{ko}} = 1 - \frac{E_k}{E_{ko}} = 1 - \frac{(m_1 + m_2) v^2}{\frac{m_1 v_0^2}{2}}. \quad (9.4)$$

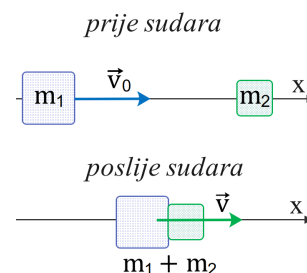
Ako uvrstimo izraz za brzinu tijela nakon sudara, prethodna relacija postaje

$$\varepsilon = 1 - \frac{m_1}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}. \quad (9.5)$$

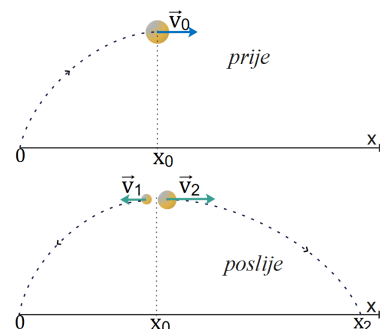
ZADATAK 10: Tijelo mase m kreće se kao kosi hitac i u trenutku kada dostigne maksimalnu visinu raspadne se na dva dijela. Masa većeg dijela je tri puta veća od mase manjeg dijela. Horizontalna udaljenost mjesta gdje je tijelo izbačeno i mjesta gdje se raspalo iznosi x_0 . Nakon raspada tijelo manje mase pada ponovo na isto mjesto odakle je tijelo mase m izbačeno. Odrediti mjesto gdje će pasti tijelo veće mase.

Rješenje:

Na tijelo koje se kreće kao kosi hitac djeluje sila Zemljine teže pa sistem koji se sastoji od tijela koje se raspada nije zatvoren (slika 8.23). Kako je, međutim vremenski interval u kojem se desi raspad veoma



Slika 8.22: Uz rješenje zadatka 9.



Slika 8.23: Uz rješenje zadatka 10.

kratak, efekat djelovanja sile Zemljine teže u tom intervalu se može zanemariti, pa je moguće primijeniti zakon očuvanja količine kretanja na sistem koji se sastoji od tijela koje se raspada u vremenskom intervalu u kojem se desi raspad. Ovaj zakon se može pisati kao

$$m\vec{v}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2, \quad (10.1)$$

gdje je \vec{v}_0 brzina tijela prije raspada, a \vec{v}_1 i \vec{v}_2 brzine dijelova nastalih nakon raspada. Masa većeg dijela je tri puta veća od mase manjeg pa je $m_2 = 3m_1$ i uz to je $m = m_1 + m_2$ pa prethodnu relaciju možemo pisati kao

$$4\vec{v}_0 = \vec{v}_1 + 3\vec{v}_2. \quad (10.2)$$

Ako sada projektujemo vektore brzina na x -osu dobijamo

$$4v_0 = -v_1 + 3v_2. \quad (10.3)$$

Da bi se tijelo manje mase vratilo u početnu tačku kretanja tijela mase m , intenzitet njegove brzine nakon raspada v_1 mora biti jednak intenzitetu brzine koju je tijelo imalo prije raspada, tj. $v_1 = v_0$. Ako ovu jednakost uvrstimo u prethodnu relaciju, nalazimo brzinu većeg dijela neposredno nakon raspada

$$4v_0 = -v_0 + 3v_2, \quad \rightarrow \quad v_2 = \frac{5}{3}v_0. \quad (10.4)$$

Oba tijela se nakon raspada kreću kao horizontalni hitac. Domet prvog tijela je $x_{1D} = v_1 t_{p1}$, a drugog $x_{2D} = v_2 t_{p2}$, gdje su t_{p1} i t_{p2} vremena leta tijela masa m_1 i m_2 . Vrijeme leta tijela koje se kreće kao horizontalni hitac zavisi samo od visine s koje se tijelo izbacilo. Pošto je početna visina za oba tijela jednaka, to će i vrijeme leta biti isto pa iz prethodnih relacija dobijamo

$$x_{2D} = \frac{v_2}{v_1} x_{1D} = \frac{\frac{5}{3}v_0}{v_0} x_0 = \frac{5}{3}x_0. \quad (10.5)$$

Prema tome, tijelo veće mase će pasti na horizontalnoj udaljenosti $5/3x_0$ mjereno od mjesta raspada. Tačka u koju pada tijelo veće mase, mjereno iz ishodišta koordinatnog sistema, određena je s

$$x_2 = x_0 + x_{2D} = \frac{8}{3}x_0. \quad (10.6)$$

Ovaj zadatak se može također (znatno jednostavnije) riješiti primjenom Teorema o kretanju centra masa. Naime, kako je sila Zemljine teže jedina vanjska sila, centar masa sistema, prije i poslije raspada, kretaće se upravo pod uticajem samo ove sile, odnosno kretaće se kao kosi hitac. Položaj centra masa u trenutku pada oba tijela nalazi se u tački $x_{cm} = 2x_0$ (jer će u tu tačku "pasti" centar masa koji

se kreće kao kosi hitac, odnosno, u tu tačku bi palo tijelo da se nije raspalo). X -komponenta položaja centra masa u bilo kojem trenutku data je kao

$$x_{\text{cm}} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \quad (10.7)$$

U trenutku pada položaj centra masa je

$$2x_0 = \frac{m_1 0 + m_2 x_2}{m}, \quad (10.8)$$

odakle je

$$x_2 = \frac{m}{m_2} 2x_0 = \frac{m}{\frac{3}{4}m} 2x_0 = \frac{8}{3} x_0. \quad (10.9)$$

ZADATAK 11: Neutron mase m sudara se s jezgrom ugljika mase M , koja miruju. Ako se sudar smatra centralnim idealno elastičnim, izračunati koliko sudara n treba da doživi neutron da bi mu se energija smanjila k puta. Izračunati n u slučaju da je $m = m_0$, $M = 12m_0$ i $k = 150$.

Rješenje:

Neka je brzina neutrona prije sudara jednaka v_0 . Kako je sistem koji se sastoji od neutrona i jezgra ugljika zatvoren, a sudar ove dvije čestice centralni idealno elastični, količina kretanja sistema i mehanička energija su očuvane veličine. Zakone očuvanja količine kretanja i mehaničke energije možemo pisati kao

$$m\vec{v}_0 = m\vec{v}_1 + M\vec{V}, \quad (11.1)$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{MV^2}{2}, \quad (11.2)$$

gdje je \vec{V} brzina jezgre ugljika, a \vec{v}_1 brzina neutrona nakon sudara. Ako pretpostavimo da se neutron prije sudara kretao u pozitivnom smjeru x -ose (slika 8.24), prethodne dvije jednačine, nakon projektovanja svih vektora na x -osu, postaju

$$mv_0 = mv_{1x} + MV, \quad (11.3)$$

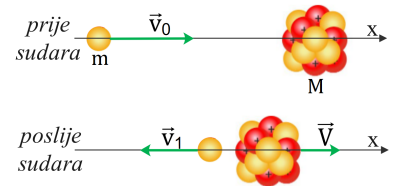
$$mv_0^2 = mv_{1x}^2 + MV^2. \quad (11.4)$$

Ako u gornjim jednačinama prebacimo članove koji sadrže istu masu na jednu stranu, rastavimo razliku kvadrata u drugoj jednačini, te tako dobijene dvije jednačine podijelimo jednu s drugom, dobijamo

$$v_0 + v_{1x} = V, \quad (11.5)$$

što u kombinaciji s jednačinom (11.3) daje

$$v_{1x} = \frac{m - M}{m + M} v_0. \quad (11.6)$$



Slika 8.24: Uz rješenje zadatka 9.

Pošto je masa neutrona m manja od mase jezgre ugljika M komponenta brzine neutrona nakon sudara je negativna, tj. neutron je prilikom sudara promijenio smjer svog kretanja. Intenzitet brzine neutrona nakon sudara iznosi

$$v_1 = |v_{1x}| = \frac{M - m}{M + m} v_0. \quad (11.7)$$

Nakon drugog sudara brzina neutrona će biti

$$v_2 = \frac{M - m}{M + m} v_1 = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^2 v_0, \quad (11.8)$$

a nakon n -tog

$$v_n = \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^n v_0. \quad (11.9)$$

Prema uslovu zadatka, energija neutrona nakon n sudara smanji se k puta pa vrijedi

$$E_0 = k E_n, \quad (11.10)$$

gdje je E_0 početna energija neutrona, a E_n njegova energija nakon n sudara. Na osnovu prethodne dvije relacije možemo pisati

$$\frac{m v_0^2}{2} = k \frac{m v_n^2}{2}, \quad (11.11)$$

odnosno

$$v_0^2 = k \left(\frac{M - m}{M + m} \right)^{2n} v_0^2. \quad (11.12)$$

Nakon logaritmiranja dobijamo

$$2n \log \left(\frac{M - m}{M + m} \right) = -\log k. \quad (11.13)$$

Odavde je

$$n = \frac{\log k}{2 \log \left(\frac{M + m}{M - m} \right)}. \quad (11.14)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je $n = 15$. To znači da neutron mora 15 puta da se sudari s jezgrom ugljika da bi mu se energija smanjila 150 puta.

8.8 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Vagon mase $2,5 \cdot 10^4$ kg kreće se brzinom od 4 m s^{-1} , sudari se i spoji s još tri spojena vagona, od kojih svaki ima istu masu kao i taj vagon i koji se kreću u istom smjeru brzinom od 2 m s^{-1} . Kolika je brzina ta četiri vagona nakon sudara? Koliko je mehaničke energije izgubljeno prilikom sudara? ($v = 2,5 \text{ m s}^{-1}$, $Q = 3,75 \cdot 10^4 \text{ J}$)

Zadatak 2: Lopta mase $m = 0,425 \text{ kg}$ i brzine $v = 1,3 \text{ m s}^{-1}$ se kotrlja preko ravnog stola i ulazi u otvorenu kutiju mase $m = 0,327 \text{ kg}$. Kutija s loptom u njoj otkliže po stolu na udaljenost $x = 0,520 \text{ m}$. Koliki je koeficijent kinetičkog trenja između kutije i stola? ($\mu_k = 0,0529$)

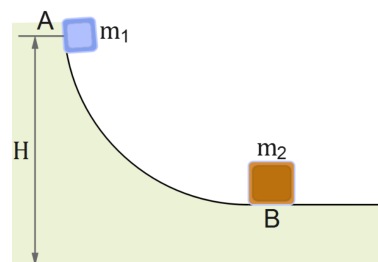
Zadatak 3: Metak mase m i brzine v u potpunosti prolazi kroz klatno mase M , te izlazi brzinom $0,5v$. Klatno je obješeno za krutu šipku dužine ℓ i zanemarive mase. Koja je minimalna vrijednost brzine metka v pri kojoj će klatno opisati cijeli (vertikalni) krug? ($v = \frac{4M}{m} \sqrt{g\ell}$)

Zadatak 4: Proton, koji se kreće brzinom $v_i \vec{i}$, sudara se elastično s drugim protonom koji u početku miruje. Ako dva protona imaju jednake intenzitete brzine nakon sudara, odrediti brzinu svakog protona nakon sudara kao funkciju v_i i uglove pod kojim se protoni kreću nakon sudara. ($v = \frac{v_i}{\sqrt{2}}, 45^\circ, -45^\circ$)

Zadatak 5: Dva automobila jednake mase prilaze raskrsnici. Jedno vozilo se kreće brzinom 13 m s^{-1} prema istoku, a drugo na sjever brzinom v_{2i} . Nijedan vozač ne vidi drugog. Vozila se sudaraju na raskrsnici i lijepe se, ostavljajući paralelne tragove klizanja pod uglom od 55° u pravcu sjeveroistoka. Ograničenje brzine za oba puta je 50 km h^{-1} , a vozač vozila koje se kretao prema sjeveru tvrdi da je bio unutar ograničenja brzine u trenutku sudara. Govori li istinu? (ne, $v_{2i} = 66,8 \text{ km h}^{-1}$)

Zadatak 6: Lopta mase $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ ima brzinu od $\vec{v}_1 = 150 \vec{i} \text{ m s}^{-1}$, dok lopta mase $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ ima brzinu od $\vec{v}_2 = -0,4 \vec{i} \text{ m s}^{-1}$. Lopte se sudaraju centralno idealno elastično. Odrediti njihove brzine nakon sudara i brzinu njihovog centra mase poslije sudara. ($\vec{v}'_1 = -0,78 \vec{i} \text{ m s}^{-1}$, $\vec{v}'_2 = 1,12 \vec{i} \text{ m s}^{-1}$, $\vec{v}_{\text{cm}} = 0,36 \vec{i} \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 7: Mali predmet mase m klizi niz klin mase $2m$ i glatko izlazi na sto bez trenja. Klin u početku miruje na stolu. Ako predmet u početku miruje na visini h iznad stola, odrediti brzinu klina u trenutku kada ga predmet napusti. ($v = \sqrt{\frac{8h}{3}}$)



Slika 8.25: Uz zadatak 8.

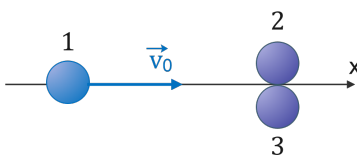
Zadatak 8: Dva bloka mogu slobodno kliziti bez trenja duž drvene staze prikazane na slici 8.25. Blok mase $m_1 = 5 \text{ kg}$ se pusti iz tačke A koja se nalazi na visini $H = 5 \text{ m}$. Iz njegovog prednjeg kraja viri sjeverni pol jakog magneta, koji odbija sjeverni pol identičnog magneta ugrađenog u stražnji kraj bloka mase $m_2 = 10 \text{ kg}$, koji u početku miruje u tački B . Dva bloka se nikada ne dodiruju. Izračunati maksimalnu visinu na koju se m_1 podigne nakon elastičnog sudara. ($h = 0,556 \text{ m}$)

Zadatak 9: Izotop bora B^9 je nestabilan i raspada se na proton i dvije α čestice. Ukupna energija oslobođena kao kinetička energija proizvoda raspada je $4,4 \cdot 10^{-14} \text{ J}$. U jednom takvom događaju, u kojem je jezgra B^9 mirovala prije raspada, izmjerena je brzina protona od $6 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$. Ako dvije α čestice imaju jednake energije, odrediti veličinu i smjer njihovih brzina u odnosu na smjer protona. ($v_\alpha = 1,44 \cdot 10^6 \text{ m s}^{-1}$, $\pm 121^\circ$)

Zadatak 10: Dvije metalne sfere, obješene o neistegljivi konac, vise tako da se međusobno dodiruju. Sfera mase $m_1 = 0,03 \text{ kg}$, povuče se ulijevo do visine $h_1 = 8 \text{ cm}$, a zatim pusti (iz stanja mirovanja). Nakon puštanja elastično se sudari sa drugom sferom mase $m_2 = 0,075 \text{ kg}$. Kolika je brzina sfere mase m_1 neposredno nakon sudara? ($v'_1 = -0,54 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 11: Metak od $0,01 \text{ kg}$, koji se kreće direktno prema gore, pri brzini od 1000 m s^{-1} udara i prolazi kroz centar mase bloka od 5 kg koji je okačen o užu. Metak izlazi iz bloka krećući se direktno prema gore brzinom 400 m s^{-1} . Do koje maksimalne visine se blok tada podiže iznad svog početnog položaja? ($h = 0,073 \text{ m}$)

Zadatak 12: Tri identične kuglice postavljene su kao na slici 8.26. Loptice 2 i 3 dodiruju jedna drugu i poravnate su okomito na putanju lopte 1. Brzina lopte 1 intenziteta $v_0 = 10 \text{ m s}^{-1}$ usmjerena je na dodirnu tačku kuglica 2 i 3. Nakon sudara, odrediti smjer i intenzitet brzina sve tri loptice. ($v'_2 = 6,9 \text{ m s}^{-1}$, $\theta_2 = 30^\circ$, $v'_3 = 6,9 \text{ m s}^{-1}$, $\theta_3 = -30^\circ$, $v'_1 = 2 \text{ m s}^{-1}$, $\theta_1 = -180^\circ$)



Slika 8.26: Uz zadatak 12.

GRAVITACIONO MEĐUDJELOVANJE

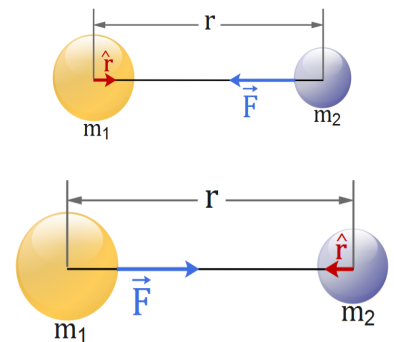
9.1	Sila gravitacije	213
9.2	Gravitaciona potencijalna energija	214
9.3	Kretanje tijela u gravitacionom polju Zemlje	215
9.4	Gravitaciono polje	219
9.5	Riješeni zadaci	220
9.6	Zadaci za vježbu	234

9.1 Sila gravitacije

Gravitaciona sila je jedna od četiri fundamentalne sile prirode. Gravitaciono međudjelovanje između dva ili više tijela prenosi se putem gravitacionog polja i nije neophodan bilo kakav kontakt. Kada se dva tijela masa m_1 i m_2 nađu na međusobnoj udaljenosti r kao na slici 9.1, između njih će djelovati gravitaciona sila čiji je intenzitet proporcionalan masama tijela, a obrnuto proporcionalan kvadratu njihovog rastojanja. Do ovog zaključka je prvi došao Newton pa se zakon gravitacionog međudjelovanja naziva i Newtonov zakon gravitacije. Ovaj zakon se u opštem obliku može pisati kao

$$\vec{F} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (9.1)$$

gdje je γ univerzalna gravitaciona konstanta čija je vrijednost $\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$, a \hat{r} jedinični vektor koji leži na pravcu koji spaja centre masa tijela koja međudjeluju kao na slici 9.1. Predznak minus u prethodnom izrazu nam govori da je smjer sile suprotan smjeru jediničnog vektora \hat{r} , tj. da je gravitaciona sila uvijek privlačna. Pravac vektora sile se poklapa s pravcem vektora \hat{r} , a intenzitet sile gravitacionog međudjelovanja dva tijela masa m_1 i m_2 koji se na-



Slika 9.1: Između dva tijela masa m_1 i m_2 koja su nađu na međusobnoj udaljenosti r djeluje privlačna gravitaciona sila \vec{F} .

laze na rastojanju r iznosi

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}. \quad (9.2)$$

Kada se tijelo mase m nađe na površini Zemlje, na njega djeluje sila gravitacije Zemlje, čiji je intenzitet

$$F = \gamma \frac{m M_Z}{R_Z^2}, \quad (9.3)$$

gdje je M_Z masa Zemlje, a R_Z srednji radijus Zemlje koji iznosi $R_Z = 6370$ km. Ako bi se tijelo našlo na visini h iznad površine Zemlje, na njega bi djelovala sila intenziteta

$$F = \gamma \frac{m M_Z}{(R_Z + h)^2}. \quad (9.4)$$

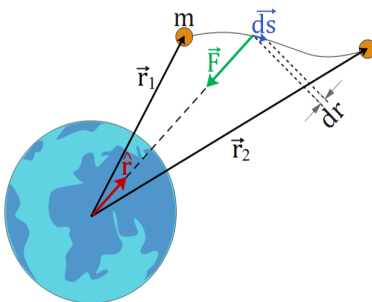
Ukoliko je visina h mnogo manja od radijusa Zemlje, što je slučaj za kretanje tijela na visinama do nekoliko desetina kilometara iznad površine Zemlje, gravitaciona sila će biti približno konstantna pa će se i tijelo na visinama koje su znatno manje od radijusa Zemlje, kretati s približno konstantnim ubrzanjem. Ovo ubrzanje se može naći na osnovu relacije

$$ma = \gamma \frac{m M_Z}{R_Z^2}, \quad (9.5)$$

odakle je

$$a = \gamma \frac{M_Z}{R_Z^2}. \quad (9.6)$$

Gravitaciono ubrzanje se razlikuje na različitim geografskim širinama iz sljedeća tri razloga: Zemlja nije homogena sfera, Zemlja nije idealna sfera (ona je spljoštena na polovima, tj. radijus mjeren od centra do pola je manji nego onaj koji je mjeren od centra do ekvatora) i Zemlja rotira konstantnom ugaonom brzinom pa se na različitim geografskim širinama javlja različita centrifugalna sila. Kada se ova tri faktora uzmu u obzir zajedno s gravitacionim međudjelovanjem, onda govorimo o ubrzanju Zemljine teže, označavamo ga s g i uzimamo da iznosi $g = 9,81 \text{ m s}^{-2}$.



Slika 9.2: Određivanje rada gravitacione sile Zemlje.

9.2 Gravitaciona potencijalna energija

Ranije (u poglavlju 7) smo naveli da je promjena gravitacione potencijalne energije tijela mase m koje se nalazi u blizini površine Zemlje (gdje je gravitaciona sila približno konstantna) određena izrazom $\Delta E_p = mg\Delta y$. Ovaj izraz je samo specijalan slučaj kada tijelo međudjeluje sa Zemljom i pri tome se nalazi u blizini površine Zemlje. U opštem slučaju sila gravitacije Zemlje koja djeluje na tijelo

mase m nije konstantna i ona zavisi od udaljenosti tijela od centra Zemlje. Promjena gravitacione potencijalne energije tijela mase m pri pomjeranju od tačke koja je određena vektorom položaja \vec{r}_1 do tačke određene s \vec{r}_2 (kao na slici 9.2) jednaka je negativnoj vrijednosti rada kojeg izvrši sila gravitacije Zemlje i možemo pisati

$$\Delta E_p = -A_{12} = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{s} = \gamma m M_Z \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} \hat{r} \cdot d\vec{s}. \quad (9.7)$$

Kako je intenzitet vektora \hat{r} jednak jedinici ($|\hat{r}| = 1$), a vektori \hat{r} i $d\vec{r}$ su kolinearni, onda je $\hat{r} \cdot d\vec{r} = dr$, a skalarni proizvod $\hat{r} \cdot d\vec{s} = |\hat{r}| ds \cos \alpha = dr$ (sa slike 9.3 vidimo da je $\cos \alpha = \frac{dr}{ds}$), prethodni izraz postaje

$$\begin{aligned} \Delta E_p &= \gamma m M_Z \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = -\gamma m M_Z \frac{1}{r} \Big|_{r_1}^{r_2} = \\ &= -\gamma m M_Z \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) = E_{p2} - E_{p1}. \end{aligned} \quad (9.8)$$

Ako želimo odrediti apsolutnu vrijednost gravitacione potencijalne energije neophodno je izabrati referentni nivo. U ovom slučaju najpogodnije je izabrati da je potencijalna energija u beskonačnosti jednaka nuli, tj. da je za $r_1 \rightarrow \infty$ potencijalna energija $E_{p1} = 0$. U tom slučaju je potencijalna energija tijela mase m u gravitacionom polju Zemlje data izrazom

$$E_p = -\gamma \frac{m M_Z}{r}. \quad (9.9)$$

Ovaj izraz vrijedi samo za $r \geq R_Z$. U opštem slučaju, gravitaciona potencijalna energija dva tijela masa m_1 i m_2 određena je s

$$E_p = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}, \quad (9.10)$$

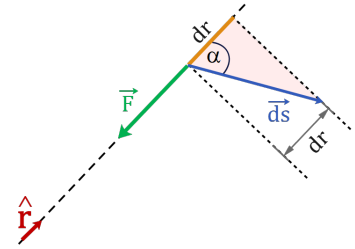
gdje je r udaljenost između njihovih centara.

9.3 Kretanje tijela u gravitacionom polju Zemlje

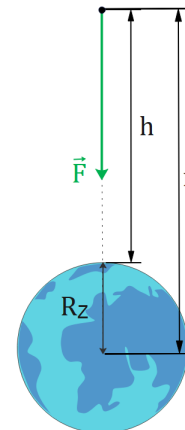
Na svako tijelo koje se nađe u gravitacionom polju Zemlje djeluje sila gravitacije u skladu s Newtonovim zakonom gravitacije (9.1), te će vrijediti

$$ma = \gamma \frac{m M_Z}{r^2}, \quad (9.11)$$

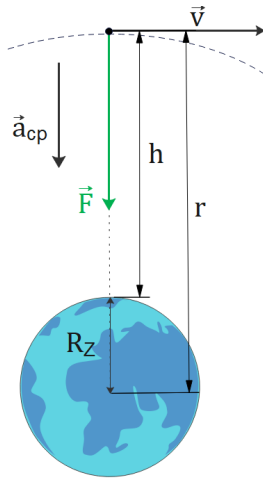
gdje je r udaljenost tijela od centra Zemlje, tj. $r = R_Z + h$ ako se tijelo nalazi na visini h iznad površine Zemlje kao na slici 9.4. Ukoliko se tijelo pusti s visine h bez početne brzine ili s početnom brzinom koja ima samo radijalnu komponentu, tijelo će se kretati pravolinijski prema centru Zemlje. Ukoliko tijelo ima tangencijalnu komponentu



Slika 9.3: Uvećan prikaz jednog dijela slike 9.2.



Slika 9.4: Na svako tijelo u gravitacionom polju Zemlje djeluje sila gravitacije.



Slika 9.5: Ukoliko tijelo ima tangencijalnu komponentu brzine i kreće se po kružnoj putanji ono ima isključivo centripetalno ubrzanje.

početne brzine, kretaće se po krivolinijskoj putanji. U specijalnom slučaju, kada se tijelo kreće po kružnoj putanji (ili približno kružnoj putanji), kao što je slučaj s kretanjem satelita, tijelo ima isključivo centripetalno ubrzanje (slika 9.5), pa vrijedi

$$\frac{v^2}{r} = \gamma \frac{M_Z}{r^2}, \quad (9.12)$$

odnosno

$$v^2 = \gamma \frac{M_Z}{r}. \quad (9.13)$$

Period kružnog kretanja tijela koje se nalazi u gravitacionom polju određen je sa

$$T = \frac{2\pi r}{v}, \quad (9.14)$$

odnosno uvrštavanjem izraza (10.13)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\gamma M_Z}}. \quad (9.15)$$

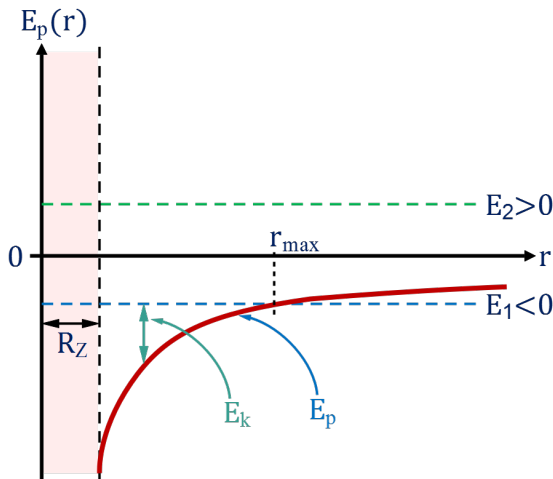
Prema tome, zaključujemo da je kvadrat perioda revolucije tijela oko Zemlje direktno proporcionalan trećem stepenu radijusa njegove putanje. Do sličnog zaključka je došao njemački astronom Johannes Kepler analizirajući kretanje planeta oko Sunca. Naime, on je zaljučio da je kvadrat perioda revolucije svake planete proporcionalan trećem stepenu velike poluose njene eliptične putanje. Ovaj iskaz je poznat kao III Keplerov zakon.

Energija tijela koje se kreće u gravitacionom polju Zemlje određena je kao zbir kinetičke i potencijalne energije

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM_Z}{r}. \quad (9.16)$$

Pošto je kinetička energija uvijek pozitivna onda i razlika $E - E_p$ uvijek mora biti pozitivna. To znači da su moguća samo ona stanja (trajektorije) za koja je ukupna energija tijela veća od njegove potencijalne energije. Kretanje tijela u zavisnosti od njegove ukupne energije često se analizira pomoću grafikona koji predstavlja zavisnost potencijalne energije od udaljenosti r . Na slici 9.6 prikazana je zavisnost gravitacione potencijalne energije tijela kao funkcija njegove udaljenosti od centra Zemlje. Ukoliko je ukupna energija tijela E_1 konstantna i negativna (plava isprekidana horizontalna linija na slici 9.6), tijelo će se nalaziti samo na onim udaljenostima r za koje je ukupna energija veća od potencijalne. To znači da će se tijelo kretati na onim rastojanjima koja su određena s $R_Z < r < r_{\max}$. Kretanje tijela je ograničeno pa kažemo da se nalazi u vezanom stanju (ono je gravitacionim poljem Zemlje vezano za Zemlju i ne može napustiti uticaj tog gravitacionog

polja). Ukoliko je pak ukupna energija tijela E_2 veće od nule (zelena isprekidana horizontalna linija na slici 9.6), tijelo se može naći na bilo kojoj udaljenosti r (jer je ukupna energija uvijek veća od potencijalne) pa kažemo da se tijelo nalazi u slobodnom (nevezanom) stanju. Ovo tijelo može napustiti uticaj gravitacionog polja Zemlje. Prema tome, sva stanja s energijama koje su manje od nule su vezana stanja i trajektorija tijela je zatvorena kriva (elipsa ili u specijalnom slučaju kružnica), dok je za energije veće ili jednake nuli, tijelo u nevezanom stanju i trajektorije su otvorene krive (hiperbola za $E > 0$ ili parabola za $E = 0$). Energija tijela koje se kreće po kružnoj putanji u gravitacionom polju Zemlje je



Slika 9.6: Analiza kretanja tijela u gravitacionom polju na osnovu grafičke zavisnosti potencijalne energije od udaljenosti r .

$$\begin{aligned}
 E &= E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{r} = \\
 &= \frac{1}{2} \gamma \frac{mM_z}{r} - \gamma \frac{mM_z}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM_z}{r} < 0, \quad (9.17)
 \end{aligned}$$

gdje smo iskoristili relaciju (9.13). To znači da je ukupna energija tijela koje se kreće po kružnoj putanji jednaka polovini njegove potencijalne energije.

Nerijetko se postavlja pitanje kolika bi bila minimalna brzina kojom bi se tijelo trebalo izbaciti s površine Zemlje da bi se ono kretalo oko Zemlje, odnosno napustilo uticaj Zemljinog gravitacionog polja, a u slučaju da se otpor atmosfere Zemlje može zanemariti. Minimalna brzina kojom tijelo treba izbaciti da bi se kretalo po kružnoj orbiti oko Zemlje naziva se prva kosmička brzina, dok se najmanja brzina kojom tijelo treba izbaciti s površine Zemlje da bi ono napustilo

uticaj Zemljinog gravitacionog polja naziva druga kosmička brzina. Vrijednosti obje ove brzine se mogu dobiti primjenom zakona očuvanja mehaničke energije.

U prvom slučaju, ukupna mehanička energija tijela koje se nalazi na površini Zemlje jednaka je mehaničkoj energiji tijela koje se kreće oko Zemlje po kružnoj putanji radijusa r

$$\frac{mv_1^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{R_z} = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{r}, \quad (9.18)$$

gdje je v_1 brzina kojom se tijelo izbacilo, a v brzina koju tijelo ima na orbiti radijusa r . Korištenjem izraza za brzinu tijela na udaljenosti r od centra Zemlje (9.13) prethodna relacija postaje

$$v_1^2 = \gamma \frac{M_z}{r} - 2\gamma \frac{M_z}{r} + 2\gamma \frac{M_z}{R_z}, \quad (9.19)$$

odnosno

$$v_1^2 = -\gamma \frac{M_z}{r} + 2\gamma \frac{M_z}{R_z}. \quad (9.20)$$

Minimalna vrijednost brzine v_1 se dobije kada je radijus orbite minimalan, a to je u slučaju kada $r \rightarrow R_z$. Prema tome, vrijednost prve kosmičke brzine iznosi

$$v_1 = \sqrt{\frac{\gamma M_z}{R_z}} = \sqrt{gR_z}, \quad (9.21)$$

gdje smo iskoristili relaciju $\gamma M_z = gR_z^2$. Numerička vrijednost prve kosmičke brzine iznosi $v_1 = 7,91 \text{ kms}^{-1}$.

Vrijednost druge kosmičke brzine također dobijemo primjenom zakona očuvanja mehaničke energije (9.18). Da bi tijelo napustilo uticaj Zemljinog gravitacionog polja, udaljenost r mora težiti ka beskonačnosti tako da je njegova gravitaciona potencijalna energija u konačnom stanju jednaka nuli, pa vrijedi

$$\frac{mv_2^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{R_z} = \frac{mv^2}{2}, \quad (9.22)$$

gdje je v brzina koju tijelo ima u konačnom stanju na beskonačno velikoj udaljenosti, kada je već napustilo uticaj gravitacionog polja Zemlje. Brzina v_2 će biti minimalna upravo kada je brzina v minimalna, tj. jednaka nuli. Iz ovog uslova i prethodne relacije dobijamo da je druga kosmička brzina jednaka

$$v_2 = \sqrt{2 \frac{\gamma M_z}{R_z}} = \sqrt{2gR_z}. \quad (9.23)$$

Numerička vrijednost druge kosmičke brzine iznosi $v_2 = 11,19 \text{ kms}^{-1}$.

9.4 Gravitaciono polje

Interakcije koje su uzrokovane jednom od četiri fundamentalne sile prirode odvijaju se posredstvom odgovarajućeg fizikalnog polja. Gravitaciono međudjelovanje između dva tijela prenosi se putem gravitacionog polja. Naime, oko svakog tijela mase m formira se odgovarajuće gravitaciono polje koje je usmjereno ka centru mase tog tijela kao na slici 9.7. Kada se neko drugo tijelo nađe u gravitacionom polju tijela mase m , onda će ova dva tijela međudjelovati. Za opisanje međudjelovanja putem fizikalnog polja pogodno je definisati veličinu koja mjeri (određuje) jačinu tog polja u datoj tački prostora. U slučaju gravitacionog međudjelovanja ta veličina se naziva jačina gravitacionog polja i definiše kao odnos sile koja bi u datoj tački prostora djelovala na tijelo mase m_p i same mase m_p (slika 9.8). Prema tome jačina gravitacionog polja tijela mase m na udaljenosti r od centra mase tog tijela iznosi

$$\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m_p} = -\gamma \frac{mm_p}{r^2} \hat{r} = -\gamma \frac{m}{r^2} \hat{r}, \quad (9.24)$$

gdje je \hat{r} jedinični vektor vektora \vec{r} koji spaja centar masa tijela m i tačku u kojoj se određuje jačina gravitacionog polja. Dakle, jačina gravitacionog polja je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti od mase koja je izvor tog polja, tj. intenzitet polja opada kako se udaljavamo od njegovog izvora kao što je to prikazano na slici 9.7, a pravac vektora polja je pri tome usmjeren prema izvoru polja. Takvo polje naziva se radijalno polje. Međutim, ako posmatramo mali dio prostora u blizini izvora polja, polje možemo smatrati homogenim, tj. polje će imati istu jačinu u svakoj tački tog dijela prostora, a vektori jačine polja će biti međusobno paralelni, istog intenziteta i usmjereni okomito na površinu posmatranog tijela kao na slici 9.9.

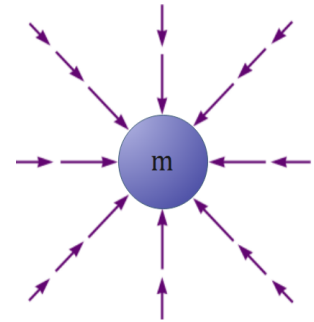
Relacija (9.24) vrijedi u slučaju da se radi o tačkastom tijelu (čestici) mase m . U slučaju da imamo više izvora gravitacionog polja, tj. više čestica, rezultujuće gravitaciono polje će biti suma gravitacionih polja svakog izvora, tj.

$$\vec{g} = \sum_i \vec{g}_i. \quad (9.25)$$

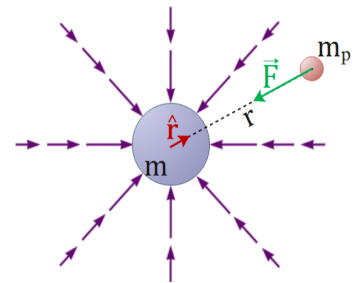
Kod kontinuirane raspodjele mase, kao što je slučaj krutog tijela, neophodno je naći jačinu gravitacionog polja $d\vec{g}$ koje potiče od elementa mase dm , a onda integrirati po svim elementima mase, tako da je

$$\vec{g} = \int d\vec{g}. \quad (9.26)$$

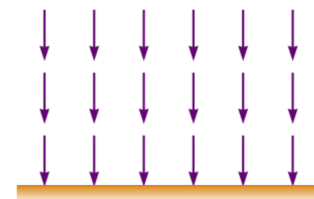
Koristeći ovu definiciju i integralni račun može se pokazati da je gra-



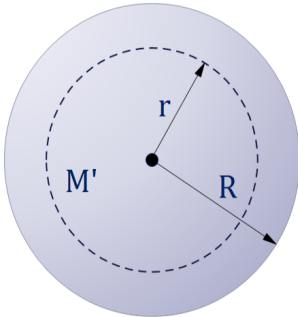
Slika 9.7: Gravitaciono polje u blizini homogene sferne mase je usmjereno ka centru te mase i njegov intenzitet se mijenja.



Slika 9.8: Tijelo mase m djeluje gravitacionom silom \vec{F} na tijelo mase m_p koje se nalazi na rastojanju r .



Slika 9.9: Gravitaciono polje u blizini tijela koje je izvor tog polja možemo smatrati homogenim.



Slika 9.10: Određivanje jačine gravitacionog polja homogene sfere u bilo kojoj tački unutar ili izvan sfere.

vitaciono polje sfere mase M i radijusa R na udaljenostima $r > R$ dato s

$$\vec{g} = -\gamma \frac{M}{r^2} \hat{r}. \quad (9.27)$$

Pored toga moguće je pokazati da je gravitaciono polje sferne ljuske mase M jednako nuli u bilo kojoj tački koja se nalazi unutar te ljuske, a da je različito od nule i određeno prethodnom relacijom za tačke koji se nalaze izvan sferne ljuske.

Prethodna dva zaključka nam omogućavaju da nađemo jačinu gravitacionog polja homogene sfere u bilo kojoj tački unutar ili izvan sfere. Naime, da bismo odredili jačinu gravitacionog polja unutar sfere, na udaljenosti r od centra sfere, neophodno je sferu podijeliti na dva dijela: na sferu radijusa r i sfernu ljusku unutrašnjeg radijusa r i vanjskog radijusa R kao na slici 9.10. Pošto se radi o homogenom tijelu konstantne gustoće, masu M' sfere radijusa r možemo odrediti kao

$$M' = M \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = M \frac{r^3}{R^3}. \quad (9.28)$$

Gravitaciono polje sferne ljuske unutar same ljuske jednako je nuli pa će rezultujuća jačina gravitacionog polja za $r < R$ biti

$$g = \gamma \frac{M'}{r^2} = \gamma \frac{M}{r^2} \frac{r^3}{R^3} = \gamma \frac{M}{R^3} r. \quad (9.29)$$

Prema tome vidimo da jačina gravitacionog polja homogene sfere linearno opada s udaljenošću r i jednaka je nuli u samom centru sfere. Jačina gravitacionog polja na površini sfere $r = R$ jednaka je

$$g = \gamma \frac{M}{R^2}. \quad (9.30)$$

Na udaljenostima r koje su veće od radijusa sfere R jačinu gravitacionog polja možemo odrediti relacijom

$$g = \gamma \frac{M}{r^2}, \quad r > R. \quad (9.31)$$

9.5 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Satelit mase 320 kg kreće se po kružnoj orbiti na udaljenosti $5 \cdot 10^7$ m iznad površine Zemlje.

- Kolika je gravitaciona sila na satelit?
- Kolika je brzina satelita?
- Koliki je period revolucije satelita?

Radius Zemlje je $6.37 \cdot 10^6$ m.

Rješenje:

a) Satelit se kreće po kružnoj orbiti tako da na njega djeluje jedino sila gravitacije Zemlje \vec{F} koja je usmjerena prema centru kružne putanje kao na slici 9.11. Pošto nema tangencijalne komponente sile, tangencijalno ubrzanje satelita će biti jednako nuli, pa je intenzitet brzine satelita konstantan. Satelit posjeduje isključivo centripetalno ubrzanje uzrokovano silom gravitacije (koja u ovom slučaju ima karakter centripetalne sile). Neka je r radijus kružne putanje satelita. Tada je intenzitet sile gravitacije jednak

$$F = \gamma \frac{m_s M_z}{r^2} = \gamma \frac{m_s M_z}{(R_z + h)^2}, \quad (1.1)$$

gdje su R_z i M_z radijus i masa Zemlje respektivno.

Kada se bilo koje tijelo nađe na površini Zemlje onda na njega djeluje sila gravitacije F_g koja uzrokuje gravitaciono ubrzanje g tako da možemo pisati

$$mg = \gamma \frac{m M_z}{R_z^2}, \quad (1.2)$$

odakle je $\gamma M_z = g R_z^2$. Uvrštavanjem ovog izraza u jednačinu (1.1) dobijamo intenzitet sile gravitacije koja djeluje na satelit

$$F = \left(\frac{R_z}{R_z + h} \right)^2 m_s g. \quad (1.3)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti zaključujemo da će intenzitet sile gravitacije koja djeluje na satelit biti $F = 40,1$ N.

b) Satelit se kreće po kružnoj putanji brzinom konstantnog intenziteta s centripetalnim ubrzanjem a_{cp} pod djelovanjem sile gravitacije \vec{F} . Drugi Newtonov zakon za kretanje satelita glasi

$$m_s \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{m_s M_z}{r^2}, \quad (1.4)$$

odakle je

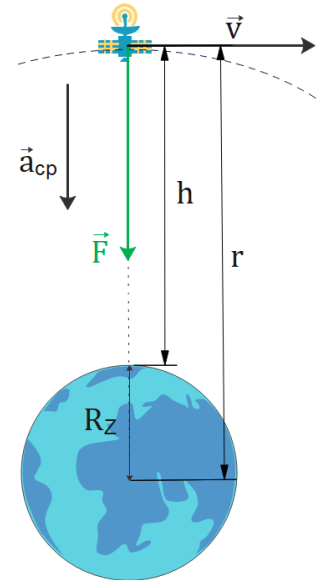
$$v = \sqrt{\frac{\gamma M_z}{r}} = \sqrt{\frac{g R_z^2}{r}} = \sqrt{\frac{g R_z^2}{R_z + h}} = 2657 \text{ m s}^{-1}. \quad (1.5)$$

c) Kretanje satelita je periodično i ponavlja se nakon jednog punog kruga. Za vrijeme od jednog perioda T satelit pređe put koji odgovara obimu kružnice radijusa r tako da vrijedi

$$2\pi r = vT, \quad (1.6)$$

odnosno

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (1.7)$$



Slika 9.11: Uz rješenje zadatka 1.

Period revolucije satelita također možemo dobiti ako u jednačinu (1.4) za centripetalno ubrzanje uvrstimo $a_{cp} = m\omega^2 r$, te pri tome dobijamo

$$\omega = \sqrt{\frac{gR_z^2}{r^3}}, \quad (1.8)$$

odnosno

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{gR_z^2}}. \quad (1.9)$$

U oba slučaja dobijamo da je period revolucije satelita 37 sati.

ZADATAK 2: Tijelo je izbačeno vertikalno uvis prema gore početnom brzinom $v_0 = 8 \text{ km s}^{-1}$. Odrediti maksimalnu visinu koju dostigne tijelo zanemarujući otpor vazduha.

Rješenje:

Ako posmatramo sistem koji se sastoji od tijela i Zemlje, zaključujemo da je ovaj sistem zatvoren, a jedina sila koja djeluje na elemente ovog sistema je sila gravitacije koja je unutrašnja konzervativna sila, pa je mehanička energija sistema očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije glasi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (2.1)$$

U slučaju da se tijelo kreće u blizini površine Zemlje (gdje je visina mnogo manja od radijusa Zemlje), sila gravitacije je približno konstantna, pa smo promjenu gravitacione potencijalne energije određivali kao $\Delta E_p = mg\Delta h$. Međutim, za početne brzine koje su uporedive s prvom kosmičkom brzinom, tijelo čije kretanje posmatramo će doći na visinu koja je uporediva s radijusom Zemlje, pa ne možemo smatrati da je sila gravitacije konstantna. Gravitacionu potencijalnu energiju možemo odrediti kao negativnu vrijednost rada kojeg izvrši sila gravitacije odnosno kao

$$E_p = -A_g = -\int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F dr = \int \gamma \frac{mM_z}{r^2} dr = \gamma mM_z \int \frac{dr}{r^2}, \quad (2.2)$$

odnosno

$$E_p = -\gamma \frac{mM_z}{r} + C, \quad (2.3)$$

gdje je C konstanta integracije koja se obično bira tako da je gravitaciona potencijalna energija na beskonačno velikim udaljenostima jednaka nuli. Ako se izabere referentni nivo u beskonačnosti, gdje je gravitaciona potencijalna energija jednaka nuli, konstanta C je onda također jednaka nuli.

Sada zakon očuvanja mehaničke energije možemo pisati kao

$$0 - \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{r} + \gamma \frac{mM_z}{R_z} = 0, \quad (2.4)$$

gdje smo uzeli da je u trenutku kada tijelo dostigne maksimalnu visinu, njegova brzina jednaka nuli. Iz prethodne relacije dobijamo

$$\frac{1}{R_z} - \frac{1}{r} = \frac{v^2}{2\gamma M_z}, \quad (2.5)$$

odnosno

$$r = \left(\frac{1}{R_z} - \frac{v^2}{2gR_z^2} \right)^{-1} = 13,055 \cdot 10^6 \text{ m}. \quad (2.6)$$

Maksimalna visina koju dostigne tijelo je $h_{\max} = r - R_z = 6,685 \cdot 10^6 \text{ m}$.

ZADATAK 3: Tijelo je izbačeno brzinom 15 km s^{-1} vertikalno prema gore. Odrediti brzinu tijela kada je na velikoj udaljenosti od Zemlje.

Rješenje:

Ukoliko se otpor vazduha zanemari, jedina sila koja djeluje na tijelo je sila gravitacije Zemlje. Ukoliko se izabere sistem koji se sastoji od tijela i Zemlje, onda je ova sila unutrašnja i uz to konzervativna pa je mehanička energija sistema očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije glasi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (3.1)$$

odnosno

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} + E_{p\infty} - E_{pR_z} = 0. \quad (3.2)$$

Gravitaciona potencijalna energija na beskonačno velikoj udaljenosti od izvora gravitacije jednaka je nuli, a gravitaciona potencijalna energija na površini Zemlje

$$E_{pR_z} = -\gamma \frac{mM_z}{R_z} = -mgR_z. \quad (3.3)$$

Na osnovu prethodne dvije jednačine zaključujemo da je brzina tijela na beskonačno velikoj udaljenosti

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{v_0^2 - 2gR_z} = \\ &= \sqrt{(1,5 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1})^2 - 2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-2} \cdot 6,37 \cdot 10^6 \text{ m}} = \\ &= 10^4 \text{ m s}^{-1}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

ZADATAK 4: Pokazati da je ukupna energija satelita koji se kreće po kružnoj orbiti oko Zemlje jednaka polovini njegove potencijalne energije.

Rješenje:

Satelit se kreće po kružnici radijusa $r = R_z + h$ brzinom konstantnog intenziteta v . Na satelit djeluje samo sila gravitacije Zemlje pa se može pisati

$$ma_{cp} = \gamma \frac{mM_z}{r^2}, \quad (4.1)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da satelit ima isključivo centripetalno ubrzanje. Iz prethodne relacije nalazimo da je

$$mv^2 = \gamma \frac{mM_z}{r}. \quad (4.2)$$

Ukupna energija satelita jednaka je zbiru njegove kinetičke i potencijalne energije, odnosno

$$E = E_k + E_p = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM_z}{r} = \gamma \frac{mM_z}{2r} - \gamma \frac{mM_z}{r} = -\frac{1}{2} \gamma \frac{mM_z}{r} = \frac{1}{2} E_p, \quad (4.3)$$

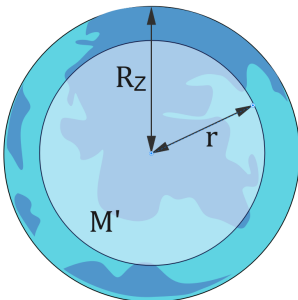
što je i trebalo dokazati.

ZADATAK 5: Da li je težina tijela na dnu rudnika veća ili manja nego na površini? Prije odgovora na pitanje pokazati

- da je gravitaciona sila uniformne sfere proporcionalna udaljenosti od sfere,
- da se težina linearno povećava sa smanjenjem udaljenosti od centra Zemlje uslijed efekta rotacije Zemlje,
- koji od ova dva efekta je dominantan?

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je Zemlja uniformna sfera konstantne gustoće ρ . Da bismo odredili intenzitet sile gravitacije na udaljenosti $r < R_z$ "podijelimo" Zemlju na sferu radijusa r i sfernu ljusku unutrašnjeg radijusa r i vanjskog R_z kao na slici 9.12. Gravitaciono polje u tački koja se nalazi na udaljenosti r od centra sfere jednako je zbiru gravitacionog polja koje potiče od sfere radijusa r i sferne ljuske. Za sile koje kvadratično opadaju s rastojanjem, kakva je sila gravitacije, pokazuje se da će intenzitet te sile na proizvoljno tijelo koje se nalazi u unutrašnjosti "šupljih" tijela, kao što je sferna ljuska, biti jednak nuli. To znači da je gravitaciono polje koje potiče od sferne ljuske, u unutrašnjosti te ljuske, jednako nuli, pa će gravitaciono polje na udaljenosti



Slika 9.12: Uz rješenje zadatka 5.

r uzrokovati samo sfera radijusa r . Intenzitet ovog gravitacionog polja je

$$g = \gamma \frac{M'}{r^2}, \quad (5.1)$$

gdje je M' masa sfere radijusa r . Pošto se radi o homogenom tijelu konstantne gustoće, možemo pisati izraz za gustoću preko mase sfere i zapremine sfere kao

$$\rho = \frac{M'}{\frac{4}{3}\pi r^3}, \quad (5.2)$$

odnosno koristeći masu cijele Zemlje i radijus Zemlje na sljedeći način

$$\rho = \frac{M_z}{\frac{4}{3}\pi R_z^3}. \quad (5.3)$$

Na osnovu prethodne dvije relacije dobijemo masu sfere radijusa r

$$M' = M_z \frac{r^3}{R_z^3}. \quad (5.4)$$

Ako sada uvrstimo ovaj izraz u jednačinu (5.1) dobijamo intenzitet gravitacionog polja u unutrašnjosti Zemlje na udaljenosti r od centra Zemlje:

$$g(r) = \gamma \frac{M_z}{R_z^3} r. \quad (5.5)$$

Gravitaciona sila na proizvoljno tijelo mase m , koje se nalazi ispod površine Zemlje na udaljenosti r od centra Zemlje, će biti

$$F = mg(r) = \gamma \frac{mM_z}{R_z^3} r, \quad (5.6)$$

te zaključujemo da je ona proporcionalna udaljenosti od centra Zemlje.

b) Zemlja rotira konstantnom ugaonom brzinom ω koja je jednaka $\omega = 2\pi/T$, gdje je T period rotacije koji iznosi 24 sata. Ako posmatramo kretanje bilo kojeg tijela iz sistema koji je vezan za Zemlju, onda, da bismo primijenili II Newtonov zakon, moramo uvažiti činjenicu da je ovaj sistem neinercijalan (zbog rotacije Zemlje) te zbog toga moramo uvesti centrifugalnu silu kao inercijalnu silu. Intenzitet ove sile jednak je mv^2/R , gdje je R radijus kružne putanje, a sila je usmjerena od centra kružnice. Ako želimo mjeriti težinu tijela onda će centrifugalna sila djelovati u pravcu rezultujuće kontaktne sile (npr. sile reakcije podloge ako stojimo na vagi) te će zbog toga težina tijela biti manja nego kada bi Zemlja mirovala, odnosno ne bi rotirala. Dakle, efekat rotacije Zemlje smanjuje težinu tijela koje se nalazi na ili ispod površine Zemlje upravo za onu vrijednost koliki je intenzitet centrifugalne sile.

Pretpostavimo da se tijelo nalazi ispod površine Zemlje na udaljenosti R od ose rotacije Zemlje. Intenzitet centrifugalne sile u ovom slučaju je

$$F_{cf} = m \frac{v^2}{R} = m\omega^2 R. \quad (5.7)$$

Kako se intenzitet centrifugalne sile povećava s povećanjem udaljenosti od ose rotacije Zemlje, to će se težina tijela uslijed efekta rotacije Zemlje smanjivati s povećanjem ove udaljenosti.

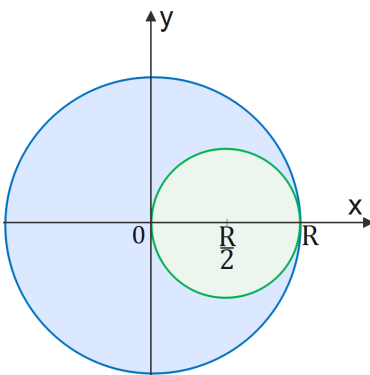
c) Intenzitet sile gravitacije na tijelo jedinične mase koje se nalazi na udaljenosti r od centra Zemlje iznosi

$$\frac{F}{m} = \gamma \frac{M_Z}{R_Z^3} r = \frac{g}{R_Z} r = 1,54 \cdot 10^{-6} (\text{s}^{-2}) r. \quad (5.8)$$

Intenzitet centrifugalne sile na tijelo jedinične mase, koje se nalazi na udaljenosti R od ose rotacije Zemlje iznosi

$$\frac{F_{cf}}{m} = \omega^2 R = \frac{4\pi^2}{T^2} R = \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 3600 \text{s})^2} R = 5,29 \cdot 10^{-9} (\text{s}^{-2}) R. \quad (5.9)$$

Kada idemo od površine Zemlje prema unutrašnjosti onda se težina tijela smanjuje zbog smanjenja intenziteta sile gravitacije i povećava uslijed efekta rotacije Zemlje. Prvi od ova dva efekta je za oko tri reda veličine jači u slučaju kada se rudnik nalazi na ekvatoru gdje je udaljenost rudnika od centra Zemlje r jednaka njegovoj udaljenosti od ose rotacije R , te će se zbog toga pri kretanju od površine ka unutrašnjosti Zemlje težina tijela smanjivati. Prema tome, težina tijela na dnu rudnika koji se nalazi na ekvatoru je manja od težine tijela na površini. Ukoliko bi se rudnik nalazio na nekoj proizvoljnoj geografskoj širini, onda bi radijus kružnog kretanja R , tj. udaljenost tog rudnika od ose rotacije Zemlje, bio manji od njegove udaljenosti od centra Zemlje r , pa bi efekat centrifugalne sile bio još manje izražen. Tako npr. na polovima rotaciono kretanje Zemlje ne bi uopšte uticalo na težinu tijela. Prema tome, možemo zaključiti da će, bez obzira na kojoj geografskoj širini se nalazio rudnik, težina tijela na dnu rudnika biti manja od težine tijela na površini Zemlje.



Slika 9.13: Uz zadatak 6.

ZADATAK 6: Sfera radijusa R postavljena je u centar koordinatnog sistema. Sfera ima uniformnu gustoću ρ_0 osim što se u njoj nalazi sferna šupljina radijusa $r = R/2$ s centrom u $x = R/2$ (slika 9.13).

- Naći jačinu gravitacionog polja na x osi za $|x| > R$.
- Pokazati da je gravitaciono polje unutar šupljine uniformno i odrediti njegov intenzitet.

Rješenje:

a) Da bismo odredili gravitaciono polje sfere u kojoj se nalazi šupljina, modeliraćemo sferu kao sistem koji se sastoji od dva tijela: pune sfere radijusa R i gustoće ρ i sfere radijusa r i negativne gustoće $-\rho$ koja se nalazi unutar sfere radijusa R . Jasno je onda da će ovakvom kombinacijom gustoća same šupljine biti jednaka nuli. Rezultujuće gravitaciono polje odredićemo kao vektorski zbir gravitacionog polja pune sfere radijusa R i sfere negativne gustoće i radijusa r :

$$\vec{g} = \vec{g}_1 + \vec{g}_2, \quad (6.1)$$

gdje je \vec{g}_1 gravitaciono polje sfere radijusa R , a \vec{g}_2 gravitaciono polje sfere radijusa r . Rezultujuće gravitaciono polje duž x ose ima komponentu

$$g_x = g_{1x} + g_{2x} = -g_1 + g_2, \quad (6.2)$$

gdje predznak $-$ govori da gravitaciono polje sfere radijusa R pokazuje prema izvoru polja, odnosno da predznak $+$ ukazuje da je gravitaciono polje sfere negativne gustoće usmjereno od izvora samog polja (slika 9.14). Intenzitet gravitacionog polja sfere radijusa R na udaljenosti x je

$$g_1 = \gamma \frac{M}{x^2} = \frac{4\pi\rho\gamma R^3}{3x^2}, \quad (6.3)$$

dok je intenzitet gravitacionog polja sfere radijusa r u istoj tački na x osi

$$g_2 = \gamma \frac{m}{x'^2} = \frac{4\pi\rho\gamma r^3}{3x'^2}, \quad (6.4)$$

gdje je $x' = x - r = x - \frac{R}{2}$. Rezultujuće polje u tački x je prema tome

$$g_x = -\frac{4\pi\rho\gamma}{3} \left(\frac{R^3}{x^2} - \frac{r^3}{x'^2} \right) = \frac{4\pi\rho\gamma R^3}{3} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{8(x - \frac{R}{2})^2} \right). \quad (6.5)$$

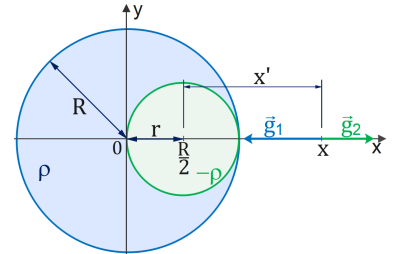
b) Koristićemo isti pristup da odredimo jačinu gravitacionog polja unutar sferne šupljine u tački koja je određena vektorom $\vec{r}_1 = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j}$. Komponente gravitacionog polja koje potiče od sfere radijusa R su

$$g_{1x} = -g_1 \cos \theta_1 = -g_1 \frac{x_1}{r_1}, \quad (6.6)$$

$$g_{1y} = -g_1 \sin \theta_1 = -g_1 \frac{y_1}{r_1}. \quad (6.7)$$

Kako smo pokazali u prethodnom zadatku, gravitaciono polje unutar uniformne sfere radijusa R na udaljenosti $r_1 < R$ uzrokuje samo sfera radijusa r_1 i mase M' pa je intenzitet gravitacionog polja koje potiče od sfere radijusa R na udaljenosti r_1 jednak

$$g_1 = \gamma \frac{M'}{r_1^2} = \gamma \frac{4\pi\rho r_1^3}{3r_1^2} = \frac{4\pi\rho\gamma r_1}{3}. \quad (6.8)$$



Slika 9.14: Uz rješenje zadatka 6.

Prema tome, komponente gravitacionog polja koje potiče od sfere radijusa R su

$$g_{1x} = -\frac{4\pi\rho\gamma x}{3}, \quad (6.9)$$

$$g_{1y} = -\frac{4\pi\rho\gamma y}{3}. \quad (6.10)$$

Potpuno analogno možemo pokazati da je gravitaciono polje sfere radijusa $r = \frac{R}{2}$ i negativne gustoće $-\rho$ u istoj tački prostora

$$g_{2x} = \frac{4\pi\rho\gamma x'}{3}, \quad (6.11)$$

$$g_{2y} = \frac{4\pi\rho\gamma y'}{3} \quad (6.12)$$

gdje je $x' = x - \frac{R}{2}$ i $y' = y$. X-komponenta rezultujućeg polja je

$$g_x = -\frac{4\pi\rho\gamma x}{3} + \frac{4\pi\rho\gamma(x - \frac{R}{2})}{3} = -\frac{2\pi\rho\gamma R}{3}, \quad (6.13)$$

dok je y komponenta jednaka nuli. Prema tome, vektor gravitacionog polja unutar sferne šupljine iznosi

$$\vec{g} = -\frac{2\pi\rho\gamma R}{3} \vec{i}, \quad (6.14)$$

pokazuje u negativnom smjeru x ose i ima intenzitet

$$g = \frac{2\pi\rho\gamma R}{3} \quad (6.15)$$

koji ne zavisi od koordinata položaja x ili y , te je zbog toga gravitaciono polje unutar sferne špljine uniformno.

ZADATAK 7: Pretpostaviti da je planeta Zemlja uniformna sfera radijusa R_z i da je na neki način kroz njen centar prokopan tunel. Također pretpostaviti da možemo jabuku postaviti bilo gdje u tunelu ili izvan tunela. Neka je F intenzitet gravitacione sile na jabuku kada se ona nalazi na površini Zemlje. Na kojoj udaljenosti od površine se nalaze tačke u kojima je intenzitet sile na jabuku $\frac{1}{2}F$ ako jabuku pomjeramo

- iznad površine Zemlje, odnosno
- ispod površine Zemlje kroz tunel?
- Kolika je promjena gravitacione potencijalne energije tijela mase m ako ga pomjerimo od tačke gdje je sila gravitacije $\frac{1}{2}F$ iznad površine Zemlje do tačke gdje je intenzitet sile gravitacije $\frac{1}{2}F$ ispod površine Zemlje?

Rješenje:

a) Pretpostavimo da je Zemlja homogena sfera radijusa R_z i mase M_z . Zavisnost intenziteta sile gravitacije na tijelo mase m od udaljenosti $r > R_z$ data je sa

$$F' = \gamma \frac{mM_z}{r^2}. \quad (7.1)$$

Intenzitet sile gravitacije na tijelo mase m na površini Zemlje iznosi

$$F = \gamma \frac{mM_z}{R_z^2}, \quad (7.2)$$

pa je iz uslova zadatka

$$\gamma \frac{mM_z}{r^2} = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM_z}{R_z^2}, \quad (7.3)$$

odnosno

$$r = \sqrt{2}R_z. \quad (7.4)$$

Dakle, na udaljenosti $r = \sqrt{2}R_z$ intenzitet sile gravitacije Zemlje na tijelo mase m će biti dva puta manji od intenziteta ove sile kada se tijelo nalazi na površini Zemlje.

b) Ako bismo bili u mogućnosti da kroz Zemlju prokopamo tunel onda bi na udaljenosti $r < R_z$ sila gravitacije na tijelo mase m proizilazila isključivo iz interakcije tog tijela i sfere radijusa r pa će vrijediti

$$F'' = \gamma \frac{mM'}{r^2} = \gamma \frac{m\rho V'}{r^2} = \gamma \frac{mM_z V'}{V_z r^2} = \gamma \frac{mM_z}{R_z^3} r, \quad (7.5)$$

gdje je M' masa sfere radijusa r , a $V' = \frac{4}{3}\pi r^3$ njena zapremina, dok je $V_z = \frac{4}{3}\pi R_z^3$ zapremina cjelokupne Zemlje. Prema tome, kako idemo prema centru Zemlje, intenzitet sile gravitacije linearno opada. Iz uslova $F'' = \frac{1}{2}F$ slijedi

$$\gamma \frac{mM_z}{R_z^3} r = \frac{1}{2} \gamma \frac{mM_z}{R_z^2}, \quad (7.6)$$

odnosno

$$r = \frac{1}{2}R_z. \quad (7.7)$$

c) Kako je sila gravitacije konzervativna sila možemo definisati promjenu gravitacione potencijalne energije između dvije tačke kao negativnu vrijednost rada pri pomjeranju tijela mase m od jedne do druge tačke

$$\Delta E_p = - \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (7.8)$$

U slučaju kada je $r > R_z$ vrijedi

$$\Delta E'_p = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{mM_z}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM_z}{r_2} + \gamma \frac{mM_z}{r_1}. \quad (7.9)$$

Ako tijelo pomjerimo s udaljenosti $r_1 = \sqrt{2}R_z$ do površine Zemlje ($r_2 = R_z$) potencijalna energija će se promijeniti za

$$\Delta E'_p = \gamma m M_z \left(-\frac{1}{R_z} + \frac{1}{\sqrt{2}R_z} \right) = -\gamma \frac{m M_z}{R_z} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) \quad (7.10)$$

U slučaju kada se tijelo pomjera u unutrašnjosti Zemlje, promjena potencijalne energije tog tijela jednaka je

$$\Delta E''_p = \int_{r_1}^{r_2} F dr = \int_{r_1}^{r_2} \gamma \frac{m M_z}{R_z^3} r dr = \gamma \frac{m M_z}{2R_z^3} (r_2^2 - r_1^2). \quad (7.11)$$

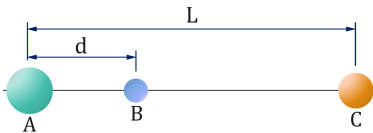
Kada se tijelo pomjери s površine Zemlje ($r_1 = R_z$) prema unutrašnjosti do udaljenosti $r_2 = \frac{1}{2}R_z$, njegova potencijalna energija se smanji za vrijednost

$$\Delta E''_p = -\gamma \frac{m M_z}{2R_z^3} \left(R_z^2 - \frac{R_z^2}{4} \right) = -\gamma \frac{3m M_z}{8R_z}. \quad (7.12)$$

Prema tome, ukupna promjena potencijalne energije pri pomjeranju tijela s udaljenosti $r = \sqrt{2}R_z$ na udaljenost $r = \frac{1}{2}R_z$ iznosi

$$\Delta E_p = \Delta E'_p + \Delta E''_p = -\gamma \frac{m M_z}{R_z} \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{8} \right) = -0,668\gamma \frac{m M_z}{R_z}. \quad (7.13)$$

ZADATAK 8: Tri sfere masa $m_A = 80$ g, $m_B = 10$ g i $m_C = 20$ g postavljene su duž zajedničkog pravca kao na slici 9.15. Sfere A i C su fiksirane na međusobnoj udaljenosti $L = 12$ cm, dok se sfera B može pomjerati duž pravca sve dok udaljenost od jedne od fiksnih sfera ne dostigne vrijednost $d = 4$ cm. Sfera B se u početnom trenutku nalazi na udaljenosti d od sfere A, a zatim se pomjери na udaljenost d od sfere C. Koliki rad je izvršilo rezultujuće gravitaciono polje pri ovom pomjeranju? Koliki rad je izvršila vanjska sila pri ovom pomjeranju?



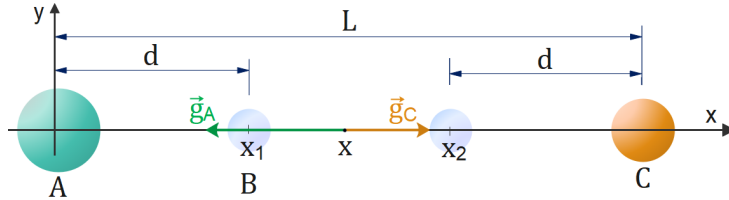
Slika 9.15: Uz zadatak 8.

Rješenje:

Prvo ćemo odrediti jačinu gravitacionog polja u proizvoljnoj tački između početnog i konačnog položaja, a zatim odrediti rad pri pomjeranju tijela između ove dvije tačke. Neka je x osa postavljena duž pravca koji spaja tijela A i C i neka je ishodište koordinatnog sistema u sredini tijela A kao na slici 9.16. Tada je jačina gravitacionog polja, koje potiče od tijela A i C, u proizvoljnoj tački x između ova dva tijela

$$g(x) = -\gamma \frac{m_A}{x^2} + \gamma \frac{m_C}{(L-x)^2}, \quad (8.1)$$

gdje smo uvažili da je gravitaciono polje tijela A u suprotnom smjeru u odnosu na pozitivan smjer x ose, a gravitaciono polje tijela C u



Slika 9.16: Uz rješenje zadatka 8a.

smjeru x ose. Rad koji se izvrši pri pomjeranju tijela mase m_B do tačke $x_1 = d$ do tačke $x_2 = L - d$ iznosi

$$A = \int_{x_1}^{x_2} m_B g(x) dx = -\gamma m_A m_B \int_d^{L-d} \frac{dx}{x^2} + \gamma m_C m_B \int_d^{L-d} \frac{dx}{(L-x)^2}. \quad (8.2)$$

Vrijednost oba integrala koji se pojavljuju u prethodnom izrazu iznosi

$$\int_d^{L-d} \frac{dx}{x^2} = \int_d^{L-d} \frac{dx}{(L-x)^2} = -\frac{1}{L-d} + \frac{1}{d} = \frac{L-2d}{(L-d)d} \quad (8.3)$$

tako da je rad pri pomjeranju tijela do početnog do konačnog položaja

$$A = -\gamma m_B (m_A - m_C) \frac{L-2d}{(L-d)d}. \quad (8.4)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo

$$A = -5 \cdot 10^{-13} \text{ J}. \quad (8.5)$$

Predznak minus nam govori da je rad izvršila vanjska sila da pomjeri tijelo iz početne u krajnju tačku. Rad vanjske sile iznosi $A = 5 \cdot 10^{-13} \text{ J}$.

ZADATAK 9: a) Kolika je druga kosmička brzina sa asteroida sfernog oblika radijusa 500 km a čije gravitaciono ubrzanje na površini iznosi 3 m s^{-2} ? b) Koju najveću udaljenost mjerenu od centra asteroida će dostići tijelo izbačeno brzinom 1000 m s^{-1} s njegove površine? c) Kojom brzinom će neko tijelo udariti u asteroid ako je pušteno s visine 1000 km iznad površine asteroida?

Rješenje:

a) Druga kosmička brzina je minimalna brzina kojom se neko tijelo mora izbaciti da bi napustilo uticaj gravitacionog polja asteroida. Vrijednost druge kosmičke brzine se može dobiti primjenom zakona očuvanja mehaničke energije

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (9.1)$$

Zakon očuvanja mehaničke energije u slučaju interakcije tijela mase m i asteroida mase M i radijusa R možemo napisati kao

$$\frac{mv_k^2}{2} - \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} + \gamma \frac{mM}{R} = 0, \quad (9.2)$$

gdje je v_k konačna brzina asteroida, v početna brzina, a r njegov konačni položaj. Brzina v će biti druga kosmička brzina ako pretpostavimo da se tijelo nalazi ne beskonačno velikoj udaljenosti od asteroida i da mu je pri tome brzina jednaka nuli. U tom slučaju zakon očuvanja energije postaje

$$-\frac{mv^2}{2} + \gamma \frac{mM}{R} = 0, \quad (9.3)$$

odnosno

$$v^2 = \frac{2\gamma M}{R}. \quad (9.4)$$

Uvažavajući činjenicu da je $\gamma M = gR^2$ konačno dobijamo da je druga kosmička brzina sa asteroida radijusa R i gravitacionog ubrzanja g jednaka

$$v = \sqrt{2gR} = 1732 \text{ m s}^{-1}. \quad (9.5)$$

b) Udaljenost r na kojoj će se zaustaviti tijelo izbačeno, a površine asteroida brzinom $v = 1000 \text{ m s}^{-1}$ dobijamo iz jednačine (9.2) ako stavimo da je konačna brzina $v_k = 0$:

$$\gamma \frac{mM}{r} = \gamma \frac{mM}{R} - \frac{mv^2}{2}, \quad (9.6)$$

odnosno

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{v^2}{2gR^2}. \quad (9.7)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je udaljenost koju tijelo dostigne

$$r = 500,166 \text{ km}. \quad (9.8)$$

c) Zakon očuvanja energije u ovom slučaju glasi

$$\frac{mv_k^2}{2} - \gamma \frac{mM}{R} + \gamma \frac{mM}{r} = 0, \quad (9.9)$$

gdje smo pretpostavili da je početna brzina tijela jednaka nuli. Na osnovu prethodne relacije dobijamo brzinu tijela pri udaru u asteroid

$$v_k = \sqrt{2gR^2 \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)} = 1224,7 \text{ m s}^{-1}. \quad (9.10)$$

ZADATAK 10: Satelit mase 220 kg kreće se po kružnoj orbiti na visini 640 km iznad površine Zemlje. Srednji radijus Zemlje iznosi 6370 km.

a) Kolika je brzina satelita i period njegove revolucije?

Pretpostaviti da satelit gubi mehaničku energiju tako da je gubitak energije pri svakoj revoluciji $1.4 \cdot 10^5 \text{ J}$. Odrediti

b) visinu satelita,

c) njegovu brzinu, i

d) period

nakon 1500 revolucija.

e) Kolika je srednja sila otpora na satelit?

Rješenje:

a) Na satelit koji se kreće po kružnoj orbiti radijusa $r = R + h$ djeluje sila gravitacije koja ima karakter centripetalne, tako da možemo pisati

$$m \frac{v^2}{r} = \gamma \frac{mM}{r^2}, \quad (10.1)$$

odnosno

$$v = \sqrt{\frac{\gamma M}{r}} = \sqrt{\frac{gR^2}{R+h}} = 7535 \text{ m s}^{-1}. \quad (10.2)$$

Period revolucije satelita određen je sa

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 5845 \text{ s} = 97,41 \text{ min}. \quad (10.3)$$

b) Ukupna energija satelita jednaka je sumi njegove kinetičke i potencijalne energije

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r}. \quad (10.4)$$

Na osnovu relacije (10.1) zaključujemo da je

$$\frac{mv^2}{2} = \gamma \frac{mM}{2r}, \quad (10.5)$$

pa je ukupna energija satelita na udaljenosti r od centra Zemlje

$$E = -\gamma \frac{mM}{2r}. \quad (10.6)$$

Ukupna energija satelita na prvobitnoj visini $h_1 = 640 \text{ km}$ iznosi

$$E_1 = -\gamma \frac{mgR^2}{2(R+h_1)} = -6,246 \cdot 10^9 \text{ J}. \quad (10.7)$$

Nakon što napravi 1500 revolucija energija satelita se smanji na vrijednost

$$E_2 = E_1 - 1500\Delta E = -6,246 \cdot 10^9 \text{ J} - 1500 \cdot 1,4 \cdot 10^5 \text{ J} = -6,456 \cdot 10^9 \text{ J}. \quad (10.8)$$

Visinu satelita možemo odrediti iz izraza za ukupnu energiju (10.6) i ona sada iznosi

$$h_2 = -\gamma \frac{m g R^2}{2E_2} - R = 412 \text{ km.} \quad (10.9)$$

c) Brzina satelita nakon 1500 revolucija iznosi

$$v_2 = \sqrt{\frac{\gamma M}{r_2}} = \sqrt{\frac{g R^2}{R + h_2}} = 7661 \text{ m s}^{-1}, \quad (10.10)$$

te vidimo da se ona povećala. Kinetička energija sada iznosi

$$E_{k2} = \frac{m v_2^2}{2} = 6,456 \cdot 10^9 \text{ J} \quad (10.11)$$

i ona je dvostruko manja od apsolutne vrijednosti potencijalne energije (koja je negativna) tako da u sumi daju ukupnu energiju od $-6,456 \cdot 10^9 \text{ J}$ što je u skladu s rezultatom (10.8).

d) Period revolucije satelita sada iznosi

$$T_2 = \frac{2\pi r_2}{v_2} = 5562 \text{ s} = 92,7 \text{ min.} \quad (10.12)$$

e) Pri svakoj revoluciji, zbog djelovanja sile otpora, satelit gubi energiju od $1,4 \cdot 10^5 \text{ J}$. Na osnovu teorema o energiji i radu, promjena mehaničke energije jednaka je radu sile otpora, pa možemo pisati

$$\Delta E = A = \int \vec{F}_{\text{otp}} \cdot d\vec{r}. \quad (10.13)$$

Srednja sila otpora je konstantna i može izaći ispred integrala, tako da prethodna jednačina postaje

$$\Delta E = F_{\text{otp}} \int d\vec{r} = 2\pi \bar{r} F_{\text{otp}}, \quad (10.14)$$

odakle je

$$F_{\text{otp}} = \frac{\Delta E}{2\pi \bar{r}} = 0,042 \text{ N.} \quad (10.15)$$

U prethodnoj relaciji smo uzeli da je \bar{r} jednako aritmetičkoj sredini početnog i krajnjeg radijusa i da iznosi 526 km.

9.6 Zadaci za vježbu

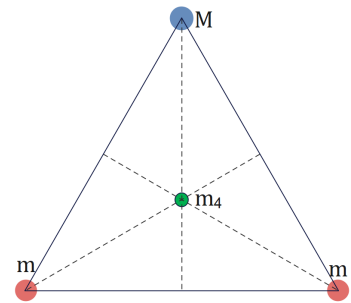
Zadatak 1: Satelit kruži oko planete nepoznate mase po kružnici radijusa $2 \cdot 10^7 \text{ m}$. Veličina gravitacione sile kojom planeta djeluje na satelit je $F = 80 \text{ N}$. Kolika je kinetička energija satelita u ovoj orbiti? Kolika bi bila sila F kada bi se radijus orbite povećao na $3 \cdot 10^7 \text{ m}$? ($E_k = 8 \cdot 10^8 \text{ J}$, $F' = 36 \text{ N}$)

Zadatak 2: Neke neutronske zvijezde (ekstremno velikih gustoća) rotiraju tako da za jednu sekundu naprave jednu punu rotaciju. Ako ovakva jedna zvijezda ima radijus 20 km, kolika je njena minimalna masa tako da materija na njoj površini ostane nepomaknuta uslijed visoke frekvencije rotacije? ($M = 4,7 \cdot 10^{24}$ kg)

Zadatak 3: Tijelo je izbačeno vertikalno prema gore brzinom koja je manja od druge kosmičke brzine. Pokazati da je maksimalna visina koju dostigne tijelo jednaka $H = \frac{R_z H'}{R_z - H'}$, gdje je H' visina koju bi dostiglo tijelo da je gravitaciono polje konstantno.

Zadatak 4: Dvije čestice masa m i jedna čestica mase M postavljene su u vrhove jednakostraničnog trougla kao na slici 9.17. Čestica mase m_4 se nalazi u centru trougla, i ukupna gravitaciona sila na ovu česticu jednaka je nuli.

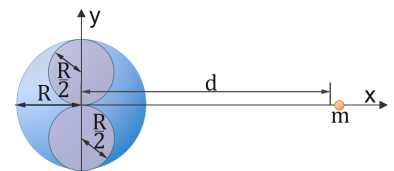
- Kolika je masa M izražena preko m ? ($M = m$)
- Ako masu m_4 udvostručimo, kolika je rezultujuća gravitaciona sila na česticu u sredini trougla? ($F = 0$)



Slika 9.17: Uz zadatak 4.

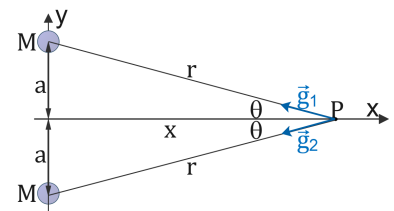
Zadatak 5: Dvije identične sferne šupljine napravljene su u olovnoj sferi poluprečnika R . Šupljine imaju poluprečnik $0,5R$. One dodiruju vanjsku površinu sfere i njen centar kao na slici 9.18. Masa čvrste uniformne olovne sfere je M . Odrediti silu kojom ovo tijelo djeluje na česticu mase m , koja se nalazi na poziciji prikazanoj na slici. Kolika je sila na česticu ako se ona nalazi na x osi u položaju $x = R$? ($\vec{F} =$

$$-\frac{\gamma M m}{d^2} \left[1 - \frac{\frac{d^3}{4}}{\left(d^2 + \frac{R^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}} \right] \vec{i}, \vec{F}(R) = -0,821 \frac{\gamma M m}{R^2} \vec{i}$$



Slika 9.18: Uz zadatak 5.

Zadatak 6: Dvije čestice, svaka mase M , fiksirane su na y osi na $y = +a$ i $y = -a$ (slika 9.19). Pronaći jačinu gravitacionog polja u svim tačkama na x osi kao funkciju od x . ($\vec{g} = -\frac{2\gamma M x}{(x^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{i}$)



Slika 9.19: Uz zadatak 6.

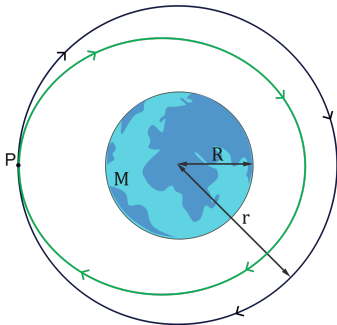
Zadatak 7: Od površine Zemlje do njenog središta probušena je rupa. Zanemariti Zemljinu rotaciju i otpor zraka te aproksimirati Zemlju kao homogenu sferu. Koliki je rad potreban da bi se čestica mase m podigla iz središta Zemlje do površine? Ako je čestica ispuštena iz mirovanja na površini Zemlje, kolika je njena brzina kada stigne do centra Zemlje? Kolika je potrebna brzina čestice kojom je treba izbaciti iz centra Zemlje da napusti gravitaciono polje Zemlje? Veličine m , g i R_Z smatrati poznatim. ($A = \frac{g m R_Z}{2}$, $v = \sqrt{g R_Z}$, $v' = 13,7 \text{ km s}^{-1}$)

Zadatak 8: Posmatranja svjetlosti određene zvijezde pokazuju da je ona dio binarnog sistema (dvije zvijezde). Ova vidljiva zvijezda ima

orbitalnu brzinu $v = 270 \text{ km s}^{-1}$, orbitalni period $T = 1,7$ dana i približnu masu $m_1 = 6M_S$, gdje je M_S masa Sunca, $1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$. Pretpostavimo da se vidljiva zvijezda m_1 i zvijezda njen pratilac, koja je tamna i nevidljiva, obje kreću po kružnim orbitama. Kolika je masa m_2 tamne zvijezde izražena preko M_S ? ($m_2 \approx 9M_S$)

Zadatak 9: Dvije neutronske zvijezde su razdvojene na udaljenosti od 10^{10} m . Svaka od njih ima masu 10^{30} kg i radijus od 10^5 m . U početku miruju jedna u odnosu na drugu. Koliko se brzo kreću u trenutku kada se njihovo rastojanje smanji na polovinu početne vrijednosti i u trenutku neposredno prije sudara? ($v_1 = 8,2 \cdot 10^4 \text{ m s}^{-1}$, $v_2 = 1,8 \cdot 10^7 \text{ m s}^{-1}$)

Zadatak 10: Raketa od 150 kg koja se kreće radijalno od Zemlje ima brzinu od $3,7 \text{ km s}^{-1}$ u trenutku kada joj se motor ugasi 200 km iznad Zemljine površine. Uz pretpostavku zanemarivog otpora zraka, odrediti kinetičku energiju rakete kada se nalazi 1000 km iznad Zemljine površine. Koju maksimalnu visinu iznad površine je dostigla raketa? ($E_k = 3,83 \cdot 10^7 \text{ J}$, $h_{max} = 1034,9 \text{ km}$)



Slika 9.20: Uz zadatak 11.

Zadatak 11: Mala svemirska stanica mase 2000 kg nalazi se u kružnoj orbiti na visini 400 km iznad površine Zemlje.

a) Kolika je brzina i period revolucije svemirske stanice? ($v_0 = 7,68 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$, $T_0 = 5,54 \cdot 10^3 \text{ s}$)

U tački P svemirska stanica redukuje svoju brzinu za 1% i prelazi u eliptičku putanju prikazanu na slici 9.20.

b) Kolike su kinetička i potencijalna energija stanice neposredno nakon smanjenja brzine? ($E_k = 5,78 \cdot 10^{10} \text{ J}$, $E_p = -1,18 \cdot 10^{11} \text{ J}$)

c) Kolika je ukupna energija u novoj orbiti i vrijednost velike poluose eliptičke orbite? ($E = -6,02 \cdot 10^{10} \text{ J}$, $a = 6,63 \cdot 10^6 \text{ m}$)

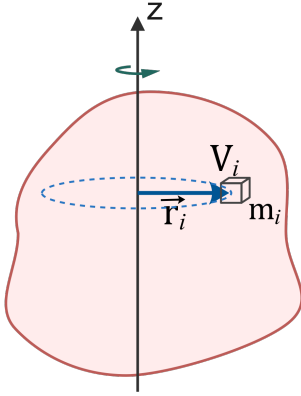
d) Koliki je sada period revolucije stanice? ($T = 5,37 \cdot 10^3 \text{ s}$)

DINAMIKA KRUTOG TIJELA

10.1 Rotaciona kinetička energija	238
10.2 Moment inercije	239
10.3 Moment sile	242
10.4 Kretanje oko pokretne ose rotacije	245
10.5 Riješeni zadaci	248
10.6 Zadaci za vježbu	269

Do sada smo uglavnom razmatrali kretanje tijela koja su se mogla opisati u okviru modela materijalne tačke. Naime, ako se tijelo kreće translatorno, onda se svaki element tog tijela kreće na isti način pa je bilo dovoljno opisati kretanje samo jedne tačke tog tijela. Najčešće je to bila tačka koja odgovara centru masa, jer smo pokazali da je kretanje centra masa svakog tijela određeno isključivo djelovanjem vanjskih sila. Iako je translatorno kretanje u prirodi često zastupljeno, ono nije jedini oblik kretanja. Tijela često izvode različite oblike složenog kretanja. Jedan specijalan oblik takvog kretanja je rotaciono (obrotno) kretanje. Naime, kod rotacionog kretanja svaka tačka nekog tijela se kreće po kružnici određenog radijusa oko ose koja može biti fiksna ili se i sama kretati. Svaka tačka tijela se pri tome kreće istom ugaonom brzinom ω koja je s linearnom brzinom povezana relacijom $v = \omega r$, gdje je r radijus kružne putanje. Prema tome, kako se krećemo od ose rotacije prema periferiji tijela, linearna brzina pojedinih elemenata tog tijela raste, dok je ugaona brzina ista za svaki element.

U opisivanju rotacionog kretanja tijela, uglavnom ćemo koristiti model krutog tijela. Naime, kruto tijelo je idealizacija u kojoj je rastojanje između bilo koje dvije tačke konstantno, tj. ne mijenja se tokom vremena. Tako se npr. sudar dvije bilijarske kugle može opisati modelom krutog tijela. Isto tako ukoliko se istezanje, sabijanje, uvrtnje i druge deformacije mogu zanemariti, rotaciono kretanje većine tijela



Slika 10.1: Kruto tijelo se podijeli na N dijelova, svaki mase m_i i zapremine V_i , te se onda posmatra kao sistem od N čestica.

se može opisati u okviru modela krutog tijela jer se onda rastojanje između pojedinih tačaka tog tijela ne mijenja.

Pri analizi kretanja krutog tijela korist ćemo pristup u kojem ćemo kruto tijelo prvo podijeliti na N dijelova, svaki mase m_i i zapremine V_i kao na slici 10.1. Kruto tijelo ćemo onda razmatrati kao sistem od N čestica i primijeniti sve zakone, zaključke i formule koje smo ranije dobili analizirajući višečestične sisteme. U zadnjem koraku ćemo uzeti limes u kojem broj čestica sistema N teži u beskonačnosti, a pri tome zapremina svakog elementa teži nuli, odnosno masa m_i teži infinitezimalnom elementu mase dm . Sume koje se budu pojavljivale u izrazima zamijenit ćemo odgovarajućim integralima. Ovim pristupom smo prvobitno izvršili (prostornu i materijalnu) diskretizaciju tijela (podijelili tijelo na konačan broj elemenata), a zatim prešli na kontinuiranu raspodjelu mase, gdje broj elemenata tijela teži u beskonačno. Ovakav pristup analizi kretanja krutog tijela ćemo prvo demonstrirati kod određivanja kinetičke energije tijela koje rotira.

10.1 Rotaciona kinetička energija

Razmotrimo kruto tijelo koje rotira oko nepomične ose konstantnom ugaonom brzinom ω . Tijelo ćemo podijeliti na N dijelova tako da svaki dio ima masu m_i . Kinetička energija svakog elementa mase je

$$E_{ki} = \frac{m_i v_i^2}{2}, \quad (10.1)$$

gdje je v_i linearna brzina elementa krutog tijela mase m_i . Ukupna kinetička energija krutog tijela jednaka je sumi kinetičkih energija pojedinih elemenata tog tijela, odnosno

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (10.2)$$

Svaki element krutog tijela se kreće po kružnici radijusa r_i . Linearna brzina pojedine čestice (tj. elementa krutog tijela) povezana je s njenom ugaonom brzinom relacijom $v_i = r_i \omega$. Kada se rastojanje između pojedinih čestica ne mijenja, što je slučaj u modelu krutog tijela, svaka čestica za jednake vremenske intervale opiše isti ugaoni pomak, tako da je ugaona brzina svake čestice ista, pa možemo izostaviti indeks i kod ugaone brzine. Izraz za kinetičku energiju sada postaje

$$E_k = \sum_{i=1}^N \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \omega^2. \quad (10.3)$$

Veličina koja se pojavljuje u zagradi u prethodnom izrazu za kinetičku energiju naziva se moment inercije i za sistem od N čestica se

definiše kao

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2. \quad (10.4)$$

Moment inercije samo jedne čestice mase m koja se kreće po kružnici radijusa r je dat kao

$$I = mr^2, \quad (10.5)$$

dok se moment inercije krutog tijela dobija tako da se uzima limes u kojem $N \rightarrow \infty$ pa izraz (10.4) postaje

$$I = \int r^2 dm, \quad (10.6)$$

gdje smo sa sume, koja se pojavljuje u izrazu (10.4), prešli na integral, a s konačne mase m_i na element mase dm . Kasnije ćemo pokazati da moment inercije pri rotacionom kretanju fizikalno predstavlja analogon mase tijela pri translacionom kretanju. Drugim riječima, moment inercije tijela predstavlja stepen inertnosti tog tijela pri rotacionom kretanju, odnosno on mjeri koliko se neko tijelo protivi promjeni stanja svog rotacionog kretanja. Moment inercije je različit za različita kruta tijela i zavisi od ose rotacije u odnosu na koju tijelo rotira.

Nakon što smo definisali moment inercije izraz za rotacionu kinetičku energiju poprima oblik

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \quad (10.7)$$

Zanimljivo je to da ne samo da postoje analogoni između veličina koje opisuju translaciono i rotaciono kretanje, već postoje i analogoni između fizikalnih zakona i definicija. Prethodna relacija je analogna definiciji kinetičke energije kod translacionog kretanja materijalne tačke ako se uvaži činjenica da je moment inercije analogon masi, a ugaona brzina analogon linearnoj brzini.

10.2 Moment inercije

U prethodnom odjeljku je relacijama (10.4), (10.5) i (10.6) definisan moment inercije sistema čestica, jedne čestice i krutog tijela, respektivno. Pored toga, navedeno je da, fizikalno, moment inercije predstavlja veličinu kojom se mjeri stepen inertnosti čestice, sistema čestica ili krutog tijela pri rotacionom kretanju. Pri određivanju momenta inercije krutog tijela, pokazuje se da on zavisi od ose u odnosu na koju tijelo rotira (vidjeti zadatak 10.1). Tako je npr. moment inercije štapa mase m i dužine L u odnosu na osu koja je okomita na štap i prolazi kroz njegov centar $I = mL^2/12$, dok je moment inercije istog tog štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz jedan njegov kraj dat

s $I = mL^2/3$. To znači da je štap znatno lakše rotirati oko njegovog centra nego oko njegovog kraja.

Veza između momenta inercije krutog tijela mase m u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar masa I_0 i momenta inercije istog tijela u odnosu na osu koja je paralelna osi koja prolazi kroz centar masa i nalazi se na udaljenosti d data je relacijom koja se naziva Steinerov teorem

$$I = I_0 + md^2. \quad (10.8)$$

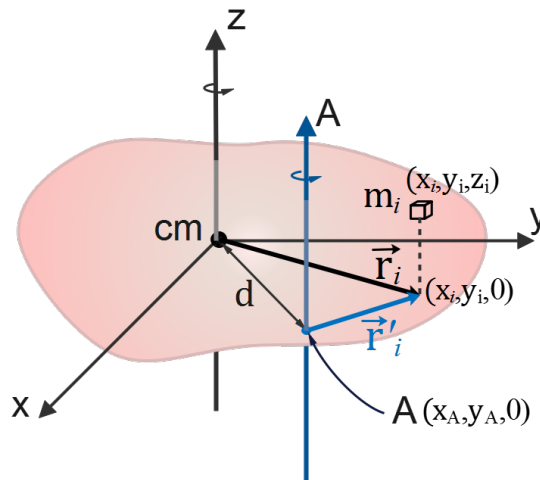
Da bismo dokazali ovu tvrdnju, posmatraćemo presjek proizvoljnog krutog tijela koji je postavljen u xy ravni. Osa rotacije tijela A je u tom slučaju paralelna z osi koordinatnog sistema (slika 10.2). Izabraćemo ishodište koordinatnog sistema tako da je postavljeno u centru masa tijela. S I_0 ćemo označiti moment inercije tijela u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa. Moment inercije u odnosu na proizvoljnu osu A (u pravcu z ose) koja se nalazi na udaljenosti d od centra masa označićemo s I .

Kruto tijelo možemo sada podijeliti na sistem od N čestica mase m_i , tako da će moment inercije ovog tijela u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa biti

$$I_0 = \sum_{i=1}^N m_i r_i^2, \quad (10.9)$$

gdje je \vec{r}_i vektor položaja i -te čestice s koordinatama x_i i y_i (slika 10.2). Moment inercije tijela u odnosu na osu koja prolazi kroz tačku

Slika 10.2: Kruto tijelo rotira oko ose A koja ne prolazi kroz centar mase.



A dat je s

$$I = \sum_{i=1}^N m_i r_i'^2, \quad (10.10)$$

gdje je \vec{r}'_i vektor koji spaja osu rotacije koja prolazi kroz tačku A i česticu mase m_i (slika 10.2). Kako je $x'_i = x_i - x_A$ i $y'_i = y_i - y_A$, gdje su (x_A, y_A) koordinate tačke A kroz koju prolazi osa rotacije, prethodni izraz postaje

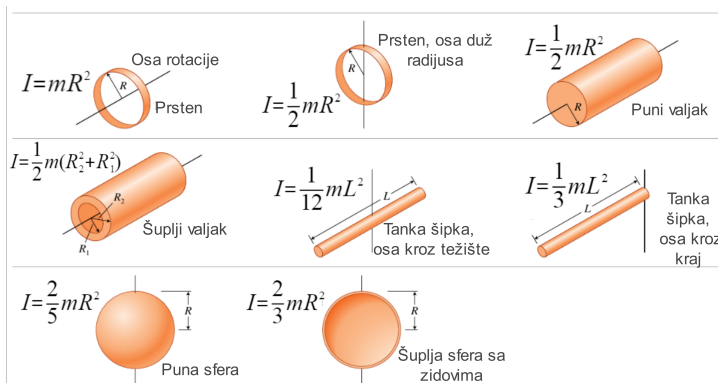
$$\begin{aligned} I &= \sum_{i=1}^N m_i \left[(x_i - x_A)^2 + (y_i - y_A)^2 \right] \quad (10.11) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - \sum_{i=1}^N m_i 2x_i x_A - \sum_{i=1}^N m_i 2y_i y_A + \sum_{i=1}^N m_i (x_A^2 + y_A^2) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (x_i^2 + y_i^2) - 2x_A \sum_{i=1}^N m_i x_i - 2y_A \sum_{i=1}^N m_i y_i + (x_A^2 + y_A^2) \sum_{i=1}^N m_i \end{aligned}$$

Prvi član u prethodnom izrazu je moment inercije tijela u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa I_0 . Suma masa u zadnjem članu predstavlja masu tijela, a $(x_A^2 + y_A^2) = d^2$, gdje je d udaljenost ose rotacije koja prolazi kroz tačku A od centra masa. Na osnovu definicije centra masa sistema zaključujemo da je $\sum_{i=1}^N m_i x_i = m x_{\text{cm}}$ i $\sum_{i=1}^N m_i y_i = m y_{\text{cm}}$. Kako je koordinatni sistem postavljen u centar masa tijela, $x_{\text{cm}} = 0$ i $y_{\text{cm}} = 0$, pa su drugi i treći član u prethodnom izrazu jednaki nuli, tako da vrijedi

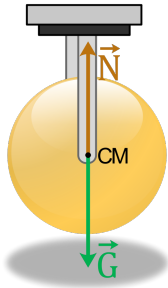
$$I = I_0 + m d^2, \quad (10.12)$$

što predstavlja Steinerovu teoremu.

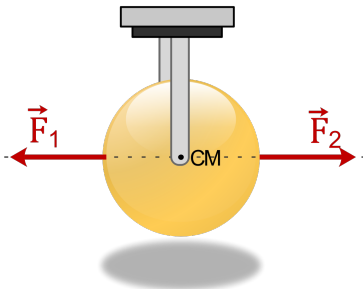
Na slici 10.3 su prikazani momenti inercije nekoliko krutih tijela oko odabranih osa rotacije.



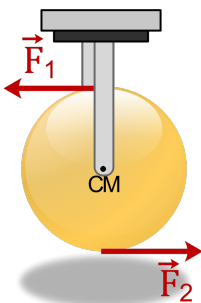
Slika 10.3: Momenti inercije nekoliko različitih krutih tijela oko odabranih osa rotacije.



Slika 10.4: Na homogenu kuglu okačenu o fiksnu osovinu koja prolazi kroz njen centar masa, djeluju sile Zemljine teže i sile reakcije objesišta tako da je $\vec{G} = \vec{N}$.



Slika 10.5: Sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 djeluju duž pravca koji prolazi kroz centar masa i ne uzrokuju kretanje tijela.



Slika 10.6: Sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 imaju tangencijalne komponente i uzrokuju rotaciono kretanje tijela.

10.3 Moment sile

Posmatrajmo kretanje homogene kugle koja je okačena o fiksnu osovinu koja prolazi kroz njen centar masa kao na slici 10.4. Na nju djeluju sile Zemljine teže \vec{G} i sile reakcije objesišta \vec{N} tako da je rezultujuća sile jednaka nuli. Pretpostavimo da sada na kuglu počnu djelovati dvije sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 , jednakih intenziteta, ali suprotnog smjera. Neka je prvobitno napadna tačka ovih sila na horizontalnom pravcu koji prolazi kroz centar masa, kao što je prikazano na slici 10.5. Rezultujuća sile je i dalje jednaka nuli tako da se centar masa kugle neće kretati translatorno. Obje ove sile imaju isključivo normalne komponente i zbog toga neće uzrokovati rotaciono kretanje tijela.

Neka sada iste ove dvije sile djeluju u tačkama koje su prikazane na slici 10.6. Rezultujuća sile je i dalje jednaka nuli i centar masa se ne kreće. Međutim sile \vec{F}_1 i \vec{F}_2 sada imaju tangencijalne komponente koje će dovesti do toga da kugla rotira u smjeru suprotnom od smjera kretanja kazaljke na satu.

Na osnovu gore navedena dva primjera zaključujemo da nije dovoljno samo poznavati sile koje djeluju na kruto tijelo već i napadne tačke ovih sila. Veličina koja kvantificira (mjeri) djelovanje vanjskih sila na kruto tijelo u različitim tačkama tog tijela naziva se moment sile i definiše se kao

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}, \quad (10.13)$$

gdje je \vec{r} vektor koji spaja osu rotacije i napadnu tačku sile \vec{F} . Intenzitet momenta sile je određen s

$$M = rF \sin \angle(\vec{r}, \vec{F}), \quad (10.14)$$

i mjeri su u Nm. Ukoliko su vektori \vec{r} i \vec{F} kolinearni, kao što je to u prvom primjeru (slika 10.5), ugao između ovih vektora jednak je nuli pa je i moment sile jednak nuli, te zbog toga nema uzroka rotacionog kretanja. Ako su vektori \vec{r} i \vec{F} okomiti, kao u drugom primjeru (slika 10.6), intenzitet momenta sile je $M = rF$. Ovo je ujedno maksimalan moment koji može uzrokovati neka sile i tijelo će vršiti rotaciono kretanje. Ukoliko je napadna tačka sile u osi rotacije, kao što je slučaj sa silom Zemljine teže i silom objesišta u prethodnim primjerima, intenzitet vektora \vec{r} jednak je nuli pa je i intenzitet moment sile jednak nuli. Zbog toga ove dvije sile ne uzrokuju rotaciono kretanje tijela.

Pretpostavimo sada da na kruto tijelo djeluje proizvoljna sile \vec{F} i da ono može slobodno rotirati oko nepomične ose. Izabraćemo koordinatni sistem tako da je z osa koordinatnog sistema usmjerena u pravcu ose rotacije. Kruto tijelo ćemo podijeliti na N dijelova, tako da je masa svakog dijela m_i . U opštem slučaju, sile koja djeluje na

pojedine elemente mase je različita. Označimo s \vec{F}_i silu koja djeluje na element mase m_i . Ishodište koordinatnog sistema ćemo postaviti u tačku O , koja se nalazi na osi rotacije kao na slici 10.7, tako da je \vec{r}_i vektor položaja elementa mase m_i . Ovaj vektor položaja možemo razložiti na dvije komponente: komponentu duž z ose \vec{r}_{iz} i radijalnu komponentu $\vec{r}_{i\perp}$, tako da je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{iz} + \vec{r}_{i\perp} = z_i \vec{k} + r_{i\perp} \hat{r}_{i\perp}, \quad (10.15)$$

gdje je $\hat{r}_{i\perp}$ jedinični vektor radijalne ose.

Moment sile koja djeluje na element mase m_i dat je sa

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = (z_i \vec{k} + r_{i\perp} \hat{r}_{i\perp}) \times \vec{F}_i = z_i \vec{k} \times \vec{F}_i + r_{i\perp} \hat{r}_{i\perp} \times \vec{F}_i. \quad (10.16)$$

Vanjsku silu \vec{F}_i , koja djeluje na element krutog tijela mase m_i , možemo rastaviti na radijalnu, tangencijalnu i z komponentu, tako da je

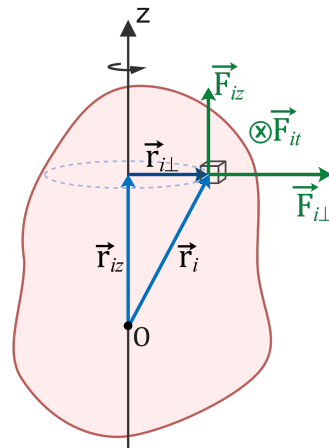
$$\vec{F}_i = F_{i\perp} \hat{r}_{i\perp} + F_{it} \hat{r}_{it} + F_{iz} \vec{k}. \quad (10.17)$$

Međutim, neće svaka od ove tri komponente uzrokovati promjenu stanja kretanja oko fiksne ose. Naime, komponenta sile duž z-ose neće doprinosti promjeni stanja rotacionog kretanja tijela, odnosno elementa mase, oko te ose. Ona može samo eventualno uticati na translatorno kretanje tijela duž z-ose (ukoliko se to tijelo može kretati u tom pravcu). Radijalna komponenta sile također neće uzrokovati promjenu stanja rotacionog kretanja tijela. Naime ova sila će biti uravnotežena silom reakcije kojom osovina djeluje na tijelo tako da će rezultujuća sila u pravcu radijusa biti jednaka nuli. Jedina komponenta sile koja, prema tome, može uzrokovati promjenu stanja rotacionog kretanja elementa mase m_i je tangencijalna komponenta, tako da je rezultujući moment sile na element mase m_i dat sa

$$\vec{M}_i = z_i F_{it} \vec{k} \times \hat{r}_{it} + r_{i\perp} F_{it} \hat{r}_{i\perp} \times \hat{r}_{it}. \quad (10.18)$$

Slično kao što svaka komponenta sile ne uzrokuje promjenu rotacionog kretanja, tako ni svaka komponenta momenta sile neće mijenjati rotaciono kretanje tijela oko fiksne ose. Naime, samo ona komponenta momenta sile koja je usmjerena duž date ose može mijenjati stanje rotacionog kretanja tijela oko te ose. U našem slučaju vektorski proizvod $\vec{k} \times \hat{r}_{it}$ u jednačini (10.18) je okomit na z-osu pa ova komponenta momenta sile neće uzrokovati promjenu rotacionog kretanja duž z-ose. Vektorski proizvod $\hat{r}_{i\perp} \times \hat{r}_{it}$ jednak je jediničnom vektoru z-ose \vec{k} , pa je moment vanjske sile koji djeluje na element mase m_i i uzrokuje promjenu stanja njegovog rotacionog kretanja oko z-ose, dat sa

$$\vec{M}_i = r_{i\perp} F_{it} \vec{k}. \quad (10.19)$$



Slika 10.7: Na element mase m_i djeluje sila $\vec{F}_i = \vec{F}_{iz} + \vec{F}_{it} + \vec{F}_{i\perp}$, pri čemu njena komponenta \vec{F}_{it} ima smjer prema crtežu. Položaj elementa mase određen je vektorom položaja $\vec{r}_i = \vec{r}_{iz} + \vec{r}_{i\perp}$.

Napomena: Svaki element mase se kreće po kružnici radijusa $r_{i\perp}$. Zbog toga ćemo komponente vektora položaja, brzine, ubrzanja, sile itd. pored z komponente, rastavljati na radijalnu komponentu (komponentu u pravcu koji spaja centar kružne putanje i tačku u kojoj se nalazi element mase m_i) i tangencijalnu komponentu (komponentu koja je u pravcu tangente na kružnu putanju).

Intenzitet vektora $\hat{r}_{i\perp}$ jednak je radijusu kružne putanje elementa mase m_i , dok je intenzitet tangencijalne komponente sile jednak proizvodu mase m_i i tangencijalnog ubrzanja, tj. $F_{it} = m_i a_{it}$. Prethodna jednačina postaje

$$\vec{M}_i = m_i r_i a_{it} \vec{k}. \quad (10.20)$$

Tangencijalno ubrzanje svakog elementa mase je povezano s njegovim ugaonim ubrzanjem relacijom $a_{it} = r_i \alpha$. Ukupni vanjski moment sile na tijelo mase m jednak je sumi momenata sile na svaki element tog tijela mase m_i . Prema tome, ukupni vanjski moment sile koji djeluje na tijelo dat je s

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \left(\sum_{i=1}^N m_i r_i^2 \right) \alpha \vec{k}. \quad (10.21)$$

U limesu kada $N \rightarrow \infty$ zagrada u prethodnom izrazu predstavlja moment inercije tijela, a $\alpha \vec{k} = \vec{\alpha}$ predstavlja vektor ugaonog ubrzanja, pa konačno dobijamo

$$I \vec{\alpha} = \vec{M}, \quad (10.22)$$

gdje je \vec{M} ukupni vanjski moment sile koji djeluje na tijelo momenta inercije I . Ukoliko na tijelo djeluju više vanjskih momenata sila, onda je proizvod momenta inercije tog tijela i njegovog ugaonog ubrzanja jednak sumi svih vanjskih momenata sila, tj.

$$I \vec{\alpha} = \sum_j \vec{M}_j. \quad (10.23)$$

Prethodni iskaz i relacija (10.23) predstavljaju analogon II Newtonovom zakonu za translatorno kretanje pa se često nazivaju II Newtonov zakon za rotaciono kretanje.

Pogledajmo sada koliki je moment sile Zemljine teže koji djeluje na kruto tijelo. Izabraćemo element mase m_i koje se nalazi na rastojanju \vec{r}_i od fiksne ose rotacije. Moment sile Zemljine teže na ovaj element mase je

$$\vec{M}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{g}. \quad (10.24)$$

Moment sile gravitacije na kruto tijelo mase m je onda jednak sumi momenata sila na pojedini element tog tijela, tj.

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i = \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \times \vec{g} = m \vec{r}_{\text{cm}} \times \vec{g} = \vec{r}_{\text{cm}} \times m \vec{g}, \quad (10.25)$$

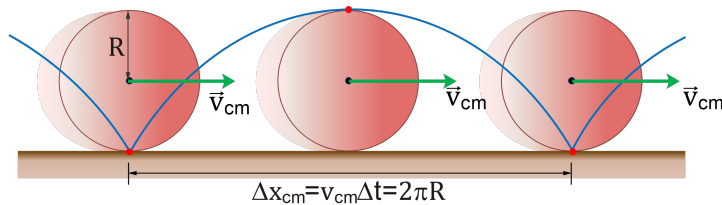
gdje smo prema definiciji centra masa sistema iskoristili $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = m \vec{r}_{\text{cm}}$. Prema tome, vidimo da je napadna tačka momenta sile Zemljine teže uvijek u centru masa krutog tijela. Ukoliko i osa rotacije prolazi kroz centar masa onda je moment sile Zemljine teže jednak nuli i ova sila ne mijenja stanje rotacionog kretanja krutog tijela.

10.4 Kretanje oko pokretne ose rotacije

Do sada smo posmatrali rotaciono kretanje krutog tijela oko fiksne ose rotacije. Međutim, nerijetko se pojavljuju situacije gdje se i sama osa rotacije kreće. Jedan tipičan primjer rotacionog kretanja s pokretnom osom rotacije je kotrljanje tijela kojeg ćemo ovdje detaljnije analizirati (složena kretanja oko pokretne ose rotacije kao što je žiroskop prevazilaze predmet proučavanja ovog udžbenika). Postoje dva ekvivalentna pristupa proučavanju kotrljanja krutog tijela:

- kotrljanje se može posmatrati kao složeno kretanje koje se sastoji od translatornog kretanja centra masa i rotacionog kretanja tijela oko ose koja prolazi kroz centar masa,
- kotrljanje se posmatra kao čisto rotaciono kretanje oko ose rotacije koja se nalazi u dodirnoj tački tijela i podloge.

U prvom pristupu se pretpostavlja da se osa rotacije, koja prolazi kroz centar masa, kreće translatorno brzinom v_{cm} . Pri tome se svaka tačka tijela kreće po kružnici ugaonom brzinom ω .



Slika 10.8: Kotrljanje tijela oko pokretne ose koja prolazi kroz centar masa.

Posmatrajmo kretanje valjka ili kugle radijusa R (slika 10.8). Za vrijeme od jednog perioda rotacije T , centar masa pređe put od $v_{cm}T$, dok tačka na obodu valjka pređe put koji je jednak obimu $2\pi R$. Translatorno pomjeranje i centra masa i tačke na obodu je jednako, pa vrijedi

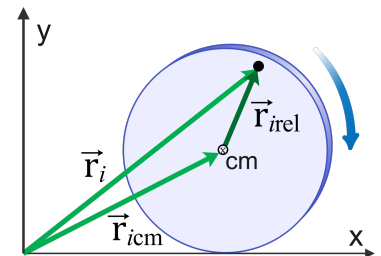
$$v_{cm}T = 2\pi R, \quad (10.26)$$

odnosno

$$v_{cm} = \omega R. \quad (10.27)$$

Prethodna relacija povezuje translatornu brzinu kretanja centra masa i rotacionu brzinu kružnog kretanja oko centra masa i vrijedi ukoliko se tijelo kotrlja bez proklizavanja.

Da bismo odredili brzinu proizvoljne tačke tijela koje se kotrlja, primijetimo sa slike 10.9 da je vektor položaja te tačke dat kao $\vec{r}_i =$



Slika 10.9: Položaj proizvoljne tačke na tijelu koje se kotrlja.

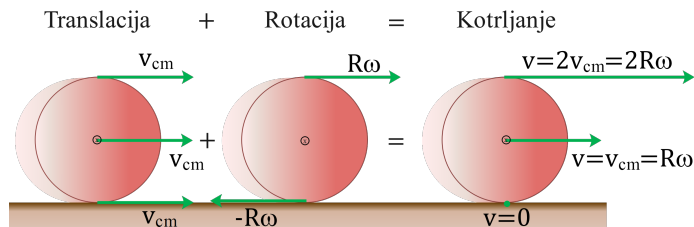
$\vec{r}_{icm} + \vec{r}_{irel}$, gdje je \vec{r}_{icm} vektor položaja centra masa, a \vec{r}_{irel} relativni položaj tačke u odnosu na centar masa. Prvi izvod prethodne relacije vodi ka

$$\vec{v}_i = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{irel}. \quad (10.28)$$

Prema tome, možemo zaključiti da je brzina svake tačke jednaka vektorskom zbiru translatorne brzine centra masa i relativne brzine u odnosu na centar masa.

Pogledajmo, kolika je brzina tačke koja se nalazi na obodu tijela u trenutku kada se nađe na vrhu odnosno dnu tijela (slika 10.10). Relativna brzina tačke na vrhu tijela jednaka je $R\omega$ i ima isti pravac i smjer kao i vektor brzine centra masa, tako da je brzina tačke koja se nalazi na vrhu tijela jednaka $2R\omega$. Intenzitet relativne brzine tačke na dnu tijela (dodirna tačka tijela i podloge) je također $R\omega$. Međutim, smjer vektora relativne brzine je suprotan od smjera vektora centra masa, tako da je rezultujuća brzina dodirne tačke tijela i podloge jednaka nuli.

Slika 10.10: Kotrljanje tijela oko pokretne ose koja prolazi kroz centar masa.



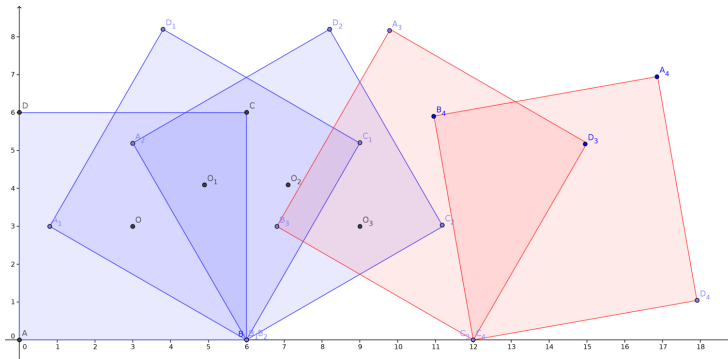
Kinetička energija tijela koje se kotrlja sastoji se od translatorne kinetičke energije kretanja centra masa i kinetičke energije rotacionog kretanja oko centra masa, te se može pisati kao

$$E_k = \frac{mv_{cm}^2}{2} + \frac{I_0\omega^2}{2}, \quad (10.29)$$

gdje je I_0 moment inercije tijela u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa.

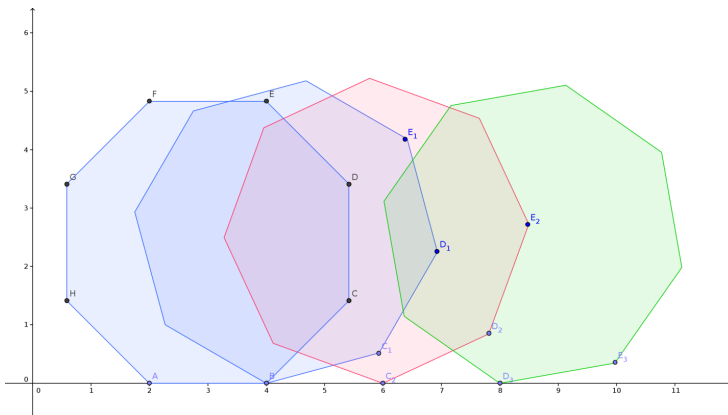
Činjenica da je brzina dodirne tačke između tijela koje se kotrlja i podloge jednaka nuli na prvi pogled je kontraintuitivna. Naime, tijelo koje se kotrlja, pomjera se u cijelosti pa bismo očekivali da ne postoji tačka na tom tijelu čija brzina je jednaka nuli. Ovu dilemu ćemo razriješiti korištenjem drugog od gore spomenuta dva pristupa pri opisivanju kotrljanja tijela. Naime, kotrljanje tijela ćemo posmatrati kao čisto rotaciono kretanje oko trenutne ose rotacije koja se nalazi u dodirnoj tački tijela i podloge. Da bi ovaj pristup bio u potpunosti

jasan, prvo ćemo posmatrati "kotrljanje"jedne kocke, odnosno prebacivanje kocke oko njenih ivica (slika 10.11). Kada kocku prebacujemo oko ivice onda svaka tačka te kocke vrši kružno kretanje oko ose rotacije koja se nalazi na ivici kocke. Sama ivica predstavlja trenutnu osu rotacije i ona miruje, tj. njena brzina jednaka je nuli sve dok se kocka kotrlja oko te ivice. Kada se kocka prebaci preko jedne ivice, onda naredna ivica postaje trenutna osa rotacije i ona miruje sve dok tijelo rotira oko te ose. Zatim naredna ivica postaje trenutna osa rotacije itd. Centar masa kocke se kreće po kružnoj putanji radijusa $R = d/2$, gdje je d dijagonala kocke, pa je brzina centra masa $v_{cm} = \omega R$.



Slika 10.11: "Kotrljanje" kocke oko jedne ivice koja predstavlja trenutnu osu rotacije.

Sada ćemo povećati broj stranica N tijela koje se "kotrlja" tako da ćemo posmatrati "kotrljanje", tj. prebacivanje oko ivice, jedne osmostrane prizme (10.12). Slično kao i kod kocke i ovdje je ivica osmostrane prizme trenutna osa rotacije koja miruje sve dok tijelo rotira oko te ose. Nakon vremenskog intervala Δt naredna ivica postaje trenutna osa rotacije itd. Ovaj pristup možemo sada poopštiti tako da broj stranica prizme teži ka beskonačno. U tom slučaju ćemo dobiti kretanje jednog valjka radijusa R . Dodirna tačka valjka i podloge je trenutna osa rotacije i ona miruje. Nakon infinitezimalnog vremenskog inter-



Slika 10.12: "Kotrljanje" osmostrane prizme oko jedne ivice koja predstavlja trenutnu osu rotacije.

vala dt naredna tačka na valjku postaje trenutna osa rotacije. Svaka naredna tačka na obodu valjka će postati trenutna osa rotacije oko koje će se tijelo zarotirati u vremenskom intervalu dt . Centar masa se sada kreće po pravcu, na udaljenosti R od ose rotacije pa je brzina centra masa jednaka $v_{\text{cm}} = \omega R$, gdje je R radijus valjka. Pristup opisivanju pojave, odnosno kretanja u ovom slučaju, u kojem se krene od pojednostavljene situacije, a onda uzima ekstreman slučaj (minimum, maksimum, najveći ili najmanji broj u nekoj situaciji itd.) naziva se ekstremno rezonovanje. Pomoću ovog pristupa smo na jednostavan način objasnili činjenicu da je brzina dodirne tačke podloge i tijela koje se kotrlja jednaka nuli.

Koristeći pristup u kojem kotrljanje posmatramo kao čisto rotaciono kretanje oko trenutno ose rotacije možemo dobiti izraz za kinetičku energiju tijela

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (10.30)$$

gdje je I moment inercije tijela u odnosu na osu rotacije. Korištenjem Steinerove teoreme zaključujemo da je $I = I_0 + mR^2$, gdje je I_0 moment inercije u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa. Uvrštavanjem ovog izraza u prethodnu relaciju dobijamo

$$E_k = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2} = \frac{I_0\omega^2}{2} + \frac{mv_{\text{cm}}^2}{2}, \quad (10.31)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je $v_{\text{cm}} = \omega R$. Prema tome, dobijamo isti izraz za kinetičku energiju tijela koje se kotrlja kao i ranije.

10.5 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Odrediti moment inercije štapa mase m i dužine L u odnosu na osu koja je okomita na štap i prolazi kroz

- njegov centar masa,
- njegov kraj.

Rješenje:

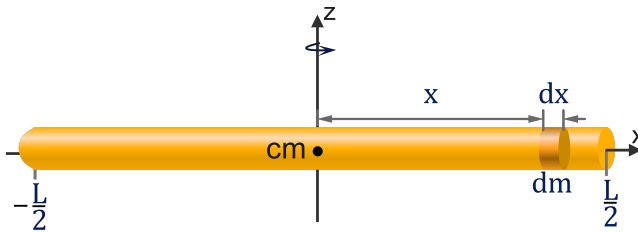
a) Postavimo štap duž x ose tako da je ishodište koordinatnog sistema u njegovom centru masa (slika 10.13), a s obzirom da se radi o tankom štapu i sva masa mu je raspoređena duž x -ose. Neka je linijska gustoća (masa po jedinici dužine) štapa λ , tako da je $m = \lambda L$. Izabraćemo element mase $dm = \lambda dx$ na udaljenosti x od ishodišta.

Moment inercije štapa je po definiciji

$$I = \int r^2 dm, \quad (1.1)$$

gdje je r udaljenost elementa mase dm od ose rotacije i u našem slučaju jednaka je x . Ako iskoristimo činjenicu da je $dm = \lambda dx$, prethodna relacija postaje

$$I = \int x^2 \lambda dx = \lambda \int x^2 dx. \quad (1.2)$$



Slika 10.13: Uz rješenje zadatka 1a.

Granice integracije su u ovom slučaju određene početkom i krajem štapa, tj. idu od $-L/2$ do $L/2$, pa je moment inercije štapa

$$I = \lambda \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{\lambda}{3} \left(\frac{L^3}{8} + \frac{L^3}{8} \right) = \lambda \frac{L^3}{12}. \quad (1.3)$$

Korištenjem relacije $\lambda = m/L$ konačno dobijamo izraz za moment inercije štapa oko ose koja prolazi kroz centar masa

$$I = \frac{mL^2}{12}. \quad (1.4)$$

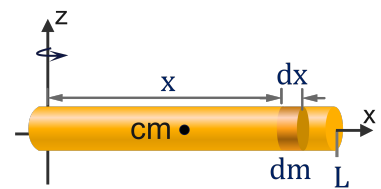
b) Sada ćemo postaviti štap duž x -ose tako da je ishodište koordinatnog sistema u njegovom kraju kao na slici 10.14. Možemo koristiti identičan pristup kao i u prethodnom zadatku samo što će sada granice integracije biti od 0 do L . Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz jedan njegov kraj je

$$I = \lambda \int_0^L x^2 dx = \lambda \frac{x^3}{3} \Big|_0^L = \lambda \frac{L^3}{3} = \frac{mL^2}{3}. \quad (1.5)$$

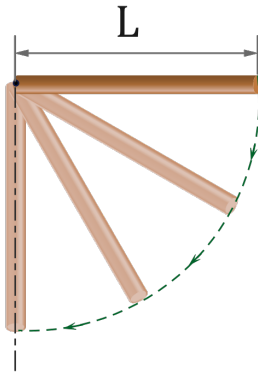
Vidimo da je moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov kraj četiri puta veći nego u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar masa, te da su ova dva momenta inercije povezana Steinerovom teoremom.

ZADATAK 2: Štap dužine L i mase M može da rotira bez trenja u vertikalnoj ravni oko objesišta koje prolazi kroz jedan njegov kraj (slika 10.15). Štap je doveden u horizontalnu poziciju i pušten. Moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar masa iznosi $\frac{1}{12}mL^2$.

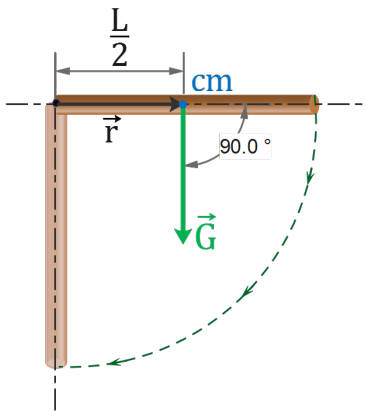
a) Koliko je ugaono ubrzanje štapa u trenutku kada je pušten?



Slika 10.14: Uz rješenje zadatka 1b.



Slika 10.15: Uz zadatak 2.



Slika 10.16: Uz rješenje zadatka 2a.

- b) Koliko je linearno ubrzanje kraja štapa u ovom trenutku?
- c) Na koju najveću udaljenost od objesišta štapa možemo staviti kovanicu pa da se ona u početnom trenutku ne odvoji od štapa?
- d) Naći ugaonu brzinu štapa u trenutku kada prolazi kroz ravnotežni položaj.
- e) Kolika je sila kojom objesište djeluje na štap u ovom trenutku?

Rješenje:

a) Štap može vršiti rotaciono kretanje u vertikalnoj ravni oko ose koja prolazi kroz jedan njegov kraj. Na štap djeluju dvije sile: sila Zemljine teže \vec{G} i sila objesišta \vec{F}_0 . Sila objesišta ima napadnu tačku u osi rotacije pa je njen moment sile jednak nuli. Moment sile Zemljine teže iznosi

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{G}, \quad (2.1)$$

a intenzitet ovog vektora je

$$M = |\vec{r}| \cdot |\vec{G}| \sin 90^\circ = \frac{L}{2} mg, \quad (2.2)$$

gdje je \vec{r} vektor koji spaja osu rotacije i napadnu tačku sile (slika 10.16). Kretanje štapa je opisano II Newtonovim zakonom za rotaciono kretanje kojeg možemo pisati kao

$$I \vec{\alpha} = \vec{M}, \quad (2.3)$$

gdje je I moment inercije štapa u odnosu na tačku koja prolazi kroz njegov kraj, a $\vec{\alpha}$ vektor ugaonog ubrzanja. Moment inercije štapa u odnosu na njegov kraj možemo odrediti pomoću Steinerove teoreme

$$I = I_0 + md^2, \quad (2.4)$$

gdje je I_0 moment inercije u odnosu na tačku koja prolazi kroz centar masa, a d udaljenost ose rotacije od centra masa (tačka cm na slici 10.16). Uvrštavanjem izraza za moment inercije u odnosu na centar masa I_0 dobijamo moment inercije štapa u odnosu na tačku koja prolazi kroz njegov kraj

$$I = \frac{mL^2}{12} + m \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{mL^2}{3}. \quad (2.5)$$

Vektor ugaonog ubrzanja kao i vektor momenta sile su usmjereni okomito na ravan rotacije štapa pa projektovanjem ovih vektora na

osu koja je okomita na ravan rotacije i uvrštavanjem izraza za moment inercije i moment sile dobijamo

$$\frac{mL^2}{3}\alpha = \frac{mLg}{2}. \quad (2.6)$$

Odavde je intenzitet ugaonog ubrzanja u trenutku kada je pušten

$$\alpha = \frac{3g}{2L}. \quad (2.7)$$

b) Veza između linearnog ubrzanja tačke koja se nalazi na udaljenosti r od ose rotacije i ugaonog ubrzanja tijela data je relacijom

$$a = r\alpha. \quad (2.8)$$

Udaljenost kraja štapa od ose rotacije je $r = L$, pa je linearno ubrzanje kraja štapa

$$a = L\frac{3g}{2L} = \frac{3}{2}g. \quad (2.9)$$

c) Ako želimo da se kovanica ne odvoji od štapa onda ubrzanje tačke štapa u kojoj se nalazi kovanica ne smije biti veće od ubrzanja kovanice kada se pusti da slobodno pada, tj. od ubrzanja Zemljine teže \vec{g} . Kovanicu možemo staviti na najveću udaljenost x od objesišta na kojoj je linearno ubrzanje date tačke štapa jednako g . Na osnovu relacija (2.7) i (2.8) možemo pisati

$$g = x\alpha, \quad (2.10)$$

odnosno

$$g = x\frac{3g}{2L}, \quad \rightarrow \quad x = \frac{2}{3}L. \quad (2.11)$$

Prema tome, najveća udaljenost na koju možemo postaviti kovanicu, a da se ona pri tome ne odvoji od štapa je $2L/3$.

d) Posmatrajmo sistem koji se sastoji od štapa i Zemlje. Jedina sila koja uzrokuje moment sile jeste sila Zemljine teže koja je u ovom slučaju unutrašnja konzervativna sila. Ukoliko se sile otpora i trenja zanemare, onda je mehanička energija štapa očuvana pa možemo pisati

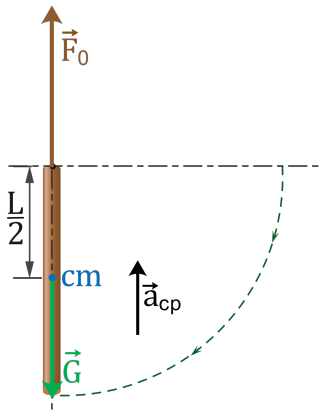
$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0. \quad (2.12)$$

Kinetička energija štapa u početnom trenutku jednaka je nuli, a u konačnom

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}, \quad (2.13)$$

gdje je ω ugaona brzina štapa. Potencijalna energija sistema čestica, a time i krutog tijela, određuje se u odnosu na centar masa, pa je promjena potencijalne energije štapa $\Delta E_p = -mgL/2$. Zakon očuvanja energije sada možemo pisati kao

$$\frac{I\omega^2}{2} - mg\frac{L}{2} = 0. \quad (2.14)$$



Slika 10.17: Uz rješenje zadatka 2e.

Odavde je ugaona brzina štapa pri prolasku kroz ravnotežni položaj

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{L}}. \quad (2.15)$$

e) U trenutku prolaska kroz ravnotežni položaj na štap djeluje sila objesišta usmjerena vertikalno prema gore i sila Zemljine teže usmjerena vertikalno prema dolje (slika 10.17). Kretanje centra masa ovog štapa određeno je, prema Teoremi o kretanju centra masa sistema čestica, isključivo djelovanjem vanjskih sila. Kako se centar masa štapa kreće po putanji koja predstavlja kružnicu, to će ubrzanje centra masa u ravnotežnom položaju biti isključivo centripetalno (tangencijalno ubrzanje u najnižoj tački putanje centra masa jednako je nuli). Prema tome, možemo pisati

$$m \frac{v_{\text{cm}}^2}{r} = F_0 - mg. \quad (2.16)$$

Linearna brzina centra masa u ravnotežnom položaju iznosi

$$v = r\omega = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{3g}{L}} = \frac{1}{2} \sqrt{3gL}, \quad (2.17)$$

pa možemo pisati

$$F_0 = m \frac{3gL}{4r} + mg = m \frac{3gL}{2L} + mg = \frac{5}{2} mg. \quad (2.18)$$

ZADATAK 3: Oko kotura mase M i radijusa R omotano je neistegljivo uže zanemarive mase na koje je obješen teg mase m . Odrediti ugaono ubrzanje kotura, linearno ubrzanje tega i silu zatezanja užeta. Moment inercije diska je $\frac{1}{2}MR^2$.

Rješenje:

Posmatramo sistem koji se sastoji od kotura mase M i tijela mase m koje je preko neistegljivog užeta povezano s koturom. Tijelo mase m vrši translatorno kretanje, a kotur rotaciono oko fiksne ose. Identifikovat ćemo sve sile koje djeluju na ova dva tijela, odrediti sve momente sile na kotur i napisati II Newtonov zakon za oba tijela ponaosob. Na kotur djeluju sila Zemljine teže \vec{G}_1 , sila objesišta \vec{F}_0 i sila zatezanja \vec{F}_{z1} kao na slici 10.18. Pri tome je moment sile Zemljine teže i moment sile objesišta jednak nuli, jer ove dvije sile imaju napadnu tačku u osi rotacije, pa je rotaciono kretanje diska uzrokovano jedino djelovanjem momenta sile zatezanja

$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}_{z1} \quad (3.1)$$

čiji je intenzitet

$$M_z = RF_{z1}, \quad (3.2)$$

gdje je udaljenost napadne tačke sile zatezanja od ose rotacije jednaka radijusu kotura R , a ugao između vektora \vec{r} i \vec{F}_{z1} 90° . Drugi Newtonov zakon, kojim je opisano rotaciono kretanje kotura, glasi

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}_Z, \quad (3.3)$$

odnosno projektovanjem na osu koja je okomita na ravan rotacije

$$\frac{1}{2}MR^2\alpha = RF_{z1}, \quad (3.4)$$

gdje smo iskoristili izraz za moment inercije diska.

Na tijelo mase m djeluju sila Zemljine teže $m\vec{g}$ i sila zatezanja \vec{F}_{z2} kao na slici 10.18, tako da II Newtonov zakon, kojim je opisano kretanje ovog tijela, glasi

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{z2}, \quad (3.5)$$

odnosno projekcijom na vertikalnu osu,

$$ma = mg - F_{z2}. \quad (3.6)$$

Pošto je masa užeta zanemariva, intenzitet sile zatezanja \vec{F}_{z1} jednak je intenzitetu sile \vec{F}_{z2} . Pored toga, obzirom da je uže neistegljivo, put koji pređe tijelo mase m u jedinici vremena jednak je putu koji pređe svaki element užeta u jedinici vremena, pa je ubrzanje svakog dijela užeta jednako. Ukoliko uže ne proklizava po koturu, onda će i linearno ubrzanje dodirne tačke užeta i kotura, tj. linearno ubrzanje oboda kotura, biti jednako ubrzanju svakog dijela užeta, odnosno ubrzanju tijela mase m . Zbog toga možemo pisati da za obod kotura vrijedi

$$a = \alpha R. \quad (3.7)$$

Uvažavajući ovu relaciju, sada nam jednačine (3.4) i (3.6) čine sistem jednačina

$$\frac{1}{2}MR^2\frac{a}{R} = RF_z, \quad (3.8)$$

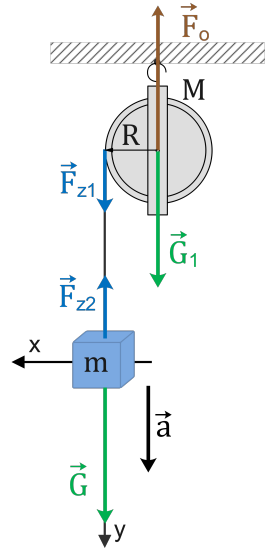
$$ma = mg - F_z. \quad (3.9)$$

Sabiranjem ove dvije relacije dobijamo

$$\left(\frac{1}{2}M + m\right)a = mg, \quad (3.10)$$

odnosno

$$a = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m}g. \quad (3.11)$$



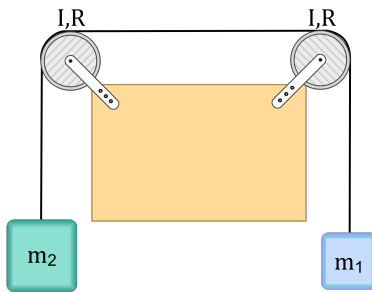
Slika 10.18: Uz rješenje zadatka 3.

Ugaono ubrzanje kotura je

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{m}{\frac{1}{2}M + m} \frac{g}{R}, \quad (3.12)$$

a intenzitet sile zatezanja

$$F_z = m(g - a) = \frac{M}{M + 2m} mg. \quad (3.13)$$



Slika 10.19: Uz zadatak 4.

ZADATAK 4: Dva tijela masa m_1 i m_2 povezana su užetom koje je prebačeno preko dva kotura kao što je prikazano na slici 10.19. Svaki kotur ima moment inercije I i radijus R . Naći ubrzanje svakog tijela kao i sile zatezanja užeta.

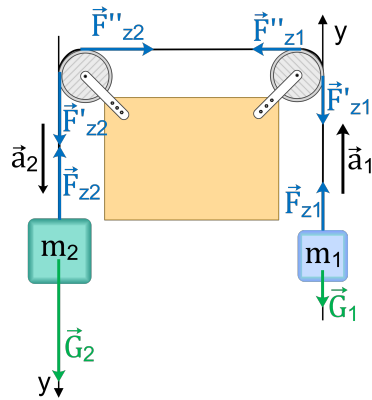
Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od četiri tijela: tijelo mase m_1 , tijelo mase m_2 i dva kotura momenta inercije I . Neophodno je identifikovati sve sile koje djeluju na ova tijela te odrediti momente sila na koturove. Na slici 10.20 su prikazane sve relevantne sile koje djeluju na ova tijela pa se II Newtonov zakon za sva tijela može pisati kao

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{F}_{z1} \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{F}_{z2} \\ I \vec{\alpha}_1 &= \vec{M}'_{z1} + \vec{M}''_{z1} \\ I \vec{\alpha}_2 &= \vec{M}'_{z2} + \vec{M}''_{z2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Projektovanjem na ose izabranog koordinatnog sistema, uz pretpostavku da je masa m_2 veća od mase m_1 , dobijamo sistem od četiri jednačine

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{z1} - m_1 g \\ m_2 a_2 &= m_2 g - F_{z2} \\ I \alpha_1 &= M'_{z1} - M''_{z1} \\ I \alpha_2 &= M'_{z2} - M''_{z2} \end{aligned} \quad (4.2)$$



Slika 10.20: Uz rješenje zadatka 4.

U prethodnoj relaciji smo iskoristili činjenicu da su smjerovi momenta sila \vec{M}'_{z1} i \vec{M}''_{z1} (isto kao i \vec{M}'_{z2} i \vec{M}''_{z2}) suprotni, pa se projekcijom na osu, okomitu na ravan rotacije diska, razlikuju po predznaku. Ako iskoristimo da je užo neistegljivo i pri tome ne proklizava po koturu, možemo pisati

$$a_1 = a_2 = \alpha_1 R = \alpha_2 R = a. \quad (4.3)$$

Sada sistem jednačina postaje

$$\begin{aligned} m_1 a &= F_{z1} - m_1 g \\ m_2 a &= m_2 g - F_{z2} \\ I \frac{a}{R} &= R(F'_{z1} - F'_{z1}) \\ I \frac{a}{R} &= R(F'_{z2} - F'_{z2}) \end{aligned} \quad (4.4)$$

Kako je masa užeta zanemariva, onda vrijedi $F_{z1} = F'_{z1}$, $F_{z2} = F'_{z2}$ i $F'_{z1} = F'_{z2}$. Ako iskoristimo ovu činjenicu i podijelimo zadnje dvije jednačine u prethodnom sistemu s R , sabiranjem svih jednačina sistema dobijamo

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{2I}{R^2} \right) a = (m_2 - m_1)g, \quad (4.5)$$

odnosno

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{2I}{R^2}} g. \quad (4.6)$$

Ugaono ubrzanje oba kotura je jednako i iznosi

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{2I}{R^2}} \frac{g}{R}. \quad (4.7)$$

Intenziteti sila zatezanja iznose

$$F_{z1} = F'_{z1} = m_1(g + a), \quad (4.8)$$

$$F_{z2} = F'_{z2} = m_2(g - a), \quad (4.9)$$

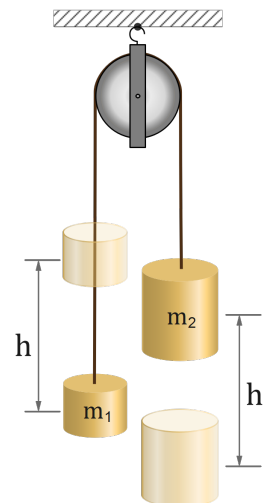
$$F'_{z1} = F'_{z2} = \frac{Ia}{R^2} + m_1(g + a), \quad (4.10)$$

gdje je a dato izrazom (4.6).

ZADATAK 5: Dva valjka masa m_1 i m_2 povezana su užetom koje je prebačeno preko kotura mase M i radijusa R kao na slici 10.21. Uže ne klizi po koturu i sistem je prepušten samom sebi. Naći brzinu valjka 1 ako se visina valjka 2 smanji za vrijednost h . Kolika je ugaona brzina kotura? Zadatak riješiti primjenom Newtonovih zakona i zakona očuvanja energije. Sva trenja i otpore zanemariti.

Rješenje:

Posmatramo kretanje tri tijela: dva valjka masa m_1 i m_2 i kotura mase M . Na oba valjka djeluju sila Zemljine teže i sila zatezanja užeta, dok na kotur, pored ove dvije sile, djeluje i sila objesišta. Oba valjka se kreću translatorno, a kotur rotaciono oko nepomične ose, pa se II



Slika 10.21: Uz zadatak 5.

Newtonov zakon za kretanje ova tri tijela može pisati kao

$$\begin{aligned} m_1 \vec{a}_1 &= m_1 \vec{g} + \vec{F}_{z1} \\ m_2 \vec{a}_2 &= m_2 \vec{g} + \vec{F}_{z2} \\ I \vec{\alpha} &= \vec{M}'_{z1} + \vec{M}'_{z2}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da je moment sile teže i sile objesišta na kotur jednak nuli budući da je napadna tačka ovih sila u osi rotacije kotura. Projektovanjem na ose izabranog koordinatnog sistema kao na slici 10.22, uz pretpostavku da je masa m_2 veća od mase m_1 , dobijamo slijedeći sistem jednačine

$$\begin{aligned} m_1 a_1 &= F_{z1} - m_1 g \\ m_2 a_2 &= m_2 g - F_{z2} \\ I \alpha &= M'_{z2} - M'_{z1}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Momenti sile zatezanja su određeni relacijama $M'_{z1} = R F'_{z1}$ i $M'_{z2} = R F'_{z2}$. Ako još iskoristimo činjenicu da je uže neistegljivo i pri tome ne proklizava po koturu, možemo pisati

$$a_1 = a_2 = \alpha R \equiv a, \quad (5.3)$$

pa prethodni sistem jednačina postaje

$$m_1 a = F_{z1} - m_1 g \quad (5.4)$$

$$m_2 a = m_2 g - F_{z2} \quad (5.5)$$

$$I \frac{a}{R} = R (F'_{z2} - F'_{z1}). \quad (5.6)$$

Pored toga, uže je neistegljivo i zanemarive mase pa vrijedi $F_{z1} = F'_{z1}$ i $F_{z2} = F'_{z2}$. Ako ove dvije jednakosti iskoristimo i saberemo prethodne tri jednačine, dobijemo ubrzanje sistema

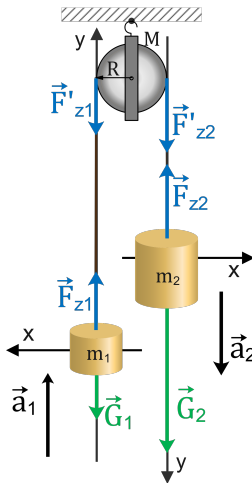
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} g, \quad (5.7)$$

gdje smo također iskoristili činjenicu da je moment inercije diska jednak $1/2MR^2$. Veza između pređenog puta, u ovom slučaju visine h , početne i konačne brzine i ubrzanja data je relacijom

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{2a}. \quad (5.8)$$

Kako se tijelo počelo kretati iz stanja mirovanja, njegova brzina nakon pređenog puta h će biti

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M} 2gh}. \quad (5.9)$$



Slika 10.22: Uz rješenje zadatka 5.

Da bismo primijenili zakon očuvanja mehaničke energije, prvo moramo provjeriti da li je sistem zatvoren i da li je rad unutrašnjih nekonzervativnih sila jednak nuli. Posmatrajmo sistem koji se sastoji od dva valjka, kotura i Zemlje. Sve sile koje djeluju na sistem su unutrašnje sile. Sila Zemljine teže je konzervativna sila, a rad sile objesišta jednak je nuli. Rad svake sile zatezanja pojedinačno je različit od nule. Konkretno $A_{F_{z1}} = F_{z1}h$, $A_{F_{z2}} = -F_{z2}h$, $A_{F'_{z1}} = -M'_{z1}\varphi$ i $A_{F'_{z2}} = M'_{z2}\varphi$, gdje je φ ugaoni pomak koji napravi kotur za vremenski interval za koji se valjak pomjeri za visinu h . Kada kotur napravi ugaoni pomak φ , obod kotura će preći put $h = \varphi R$, pa ako ovu relaciju uvrstimo u izraze za rad sile zatezanja, te iskoristimo da je $M'_{z1} = RF'_{z1}$, odnosno $M'_{z2} = RF'_{z2}$, zaključujemo da će suma svih radova sila zatezanja biti jednaka nuli, pa je mehanička energija datog sistema očuvana.

Zakon očuvanja mehaničke energije, primijenjen na gore definisan sistem, glasi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (5.10)$$

odnosno

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} - 0 + \frac{m_2 v_2^2}{2} - 0 + \frac{I\omega^2}{2} - 0 + m_1 gh - m_2 gh = 0, \quad (5.11)$$

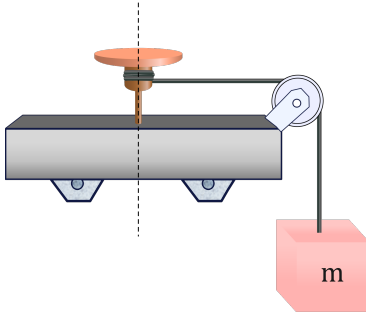
gdje smo uvažili da je promjena gravitacione potencijalne energije tijela mase m_1 pozitivna, a tijela mase m_2 negativna. Pošto je uže neistegljivo, konačne brzine oba tijela će biti jednake $v_1 = v_2 \equiv v$. Konačna ugaona brzina kotura ω može se povezati s linearnom brzinom tačke na obodu kotura relacijom $\omega = v/R$ jer je brzina bilo kojeg dijela užeta (a samim tim i valjka) ista kao i brzina oboda kotura, obzirom da uže ne proklizava po koturu. Uvažavajući ove činjenice, prethodna relacija postaje

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2}\right)v^2 = (m_2 - m_1)2gh. \quad (5.12)$$

Ako još iskoristimo izraz za moment inercije diska, konačno dobijamo

$$v = \sqrt{\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}M}2gh}, \quad (5.13)$$

što je identično izrazu kojeg smo dobili primjenom II Newtonovog zakona.



Slika 10.23: Uz zadatak 6.

ZADATAK 6:

Uređaj za mjerenje momenta inercije nekog tijela prikazan je na slici 10.23. Kružna platforma se nalazi na valjku radijusa 10 cm oko kojeg je omotan konac na čiji kraj je zakačeno tijelo mase m . Tijelo seпусти iz stanja mirovanja i mjeri se vrijeme t_1 za koje ono pređe udaljenost D . Poslije toga se na platformu stavi tijelo, čiji moment inercije se određuje i procedura se ponovi, tj. mjeri se vrijeme t_2 . Naći izraz za računanje momenta inercije nepoznatog tijela. Kolika je numerička vrijednost momenta inercije ako je $D = 1,8 \text{ m}$, $m = 2,5 \text{ kg}$, $t_1 = 4,2 \text{ s}$ i $t_2 = 6,8 \text{ s}$? Pretpostaviti da uže klizi bez trenja preko nepomičnog kotura, koji povezuje platformu i tijelo mase m .

Rješenje:

Na sistem, koji se sastoji od platforme i tijela mase m primijenimo II Newtonov zakon kako bismo našli ubrzanje tijela. Zatim ćemo odrediti moment inercije same platforme, a onda moment inercije platforme i nepoznatog tijela. Na osnovu toga moći ćemo odrediti moment inercije nepoznatog tijela. Na platformu pored sile Zemljine teže djeluje i sila reakcije podloge te sila zatezanja užeta. Sila Zemljine teže i sila reakcije podloge će se međusobno poništiti pa je rezultujući moment sile na platformu $M_z = RF'_z$. Na tijelo mase m djeluje sila Zemljine teže i sila zatezanja užeta pa se za kretanje ovog sistema može pisati

$$m\vec{a} = \vec{G} + \vec{F}_z, \quad (6.1)$$

$$I\vec{\alpha} = R\vec{F}'_z. \quad (6.2)$$

Projekcijom na ose izabranog koordinatnog sistema kao na slici 10.24 dobijamo

$$ma = mg - F_z \quad (6.3)$$

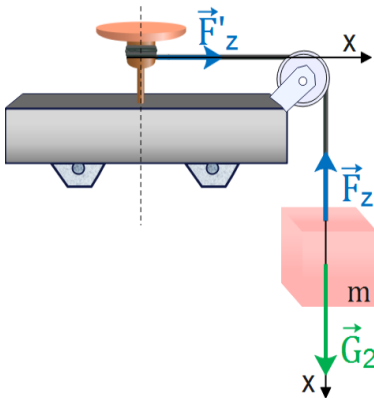
$$I\alpha = F'_z. \quad (6.4)$$

Kako je uže neistegljivo, linearno ubrzanje oboda valjka na kojem se nalazi platforma jednako je ubrzanju tijela mase m . Pored toga, zbog male mase konca, sile zatezanja \vec{F}_z i \vec{F}'_z će biti jednake po intenzitetu, pa korištenjem relacije $\alpha = a/R$ iz prethodnog sistema jednačina slijedi

$$a = \frac{m}{m + \frac{I}{R^2}} g. \quad (6.5)$$

Put D koji tijelo mase m pređe za vrijeme t dat je s

$$D = \frac{1}{2}at^2, \quad (6.6)$$



Slika 10.24: Uz rješenje zadatka 6.

pa kombinovanjem prethodne dvije relacije dobijamo

$$I = mR^2 \left(\frac{gt^2}{2D} - 1 \right). \quad (6.7)$$

Moment inercije same platforme je

$$I_1 = mR^2 \left(\frac{gt_1^2}{2D} - 1 \right) = 1,177 \text{ kg m}^2. \quad (6.8)$$

Moment inercije platforme zajedno s nepoznatim tijelom iznosi

$$I_2 = mR^2 \left(\frac{gt_2^2}{2D} - 1 \right) = 3,125 \text{ kg m}^2. \quad (6.9)$$

Konačno, moment inercije nepoznatog tijela je

$$I = I_2 - I_1 = 3,125 \text{ kg m}^2 - 1,177 \text{ kg m}^2 = 1,948 \text{ kg m}^2.$$

ZADATAK 7: Oko kotura mase m i radijusa R prebačeno je neistegljivo uže zanemarive mase. Jedan kraj užeta vezan je za tijelo mase m_1 , koje se nalazi na strmoj ravni nagibnog ugla θ , a drugi za tijelo mase m_2 kao što je prikazano na slici 10.25. Kinetički koeficijent trenja između tijela i podloge iznosi μ_k , a statički μ_s . Odrediti ubrzanje ovog sistema u zavisnosti od odnosa masa m_1 i m_2 .

Rješenje:

Drugi Newtonov zakona napisan za sistem tijela-kotur glasi

$$m_1 \vec{a}_1 = \vec{G}_1 + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}} + \vec{F}_{z1}, \quad (7.1)$$

$$m_2 \vec{a}_2 = \vec{G}_2 + \vec{F}_{z2}, \quad (7.2)$$

$$I \vec{\alpha} = \vec{M}'_{z1} + \vec{M}'_{z2}. \quad (7.3)$$

Pretpostavimo da je $m_1 > m_2$. U tom slučaju će tijelo mase m_1 mirovati ili se kretati niz strmu ravan. Projekcijom prethodnih jednačina na ose odabranog koordinatnog sistema kao na slici 10.26 dobijamo

$$m_1 a_1 = m_1 g \sin \theta - F_{\text{tr}} - F_{z1}, \quad (7.4)$$

$$0 = -m_1 g \cos \theta + N, \quad (7.5)$$

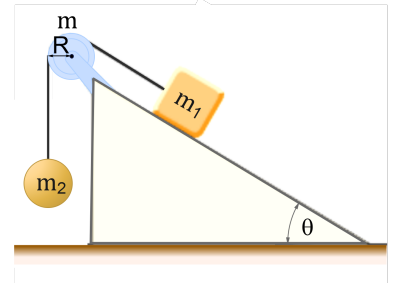
$$m_2 a_2 = -m_2 g + F_{z2}, \quad (7.6)$$

$$I \alpha = R (F'_{z1} - F'_{z2}). \quad (7.7)$$

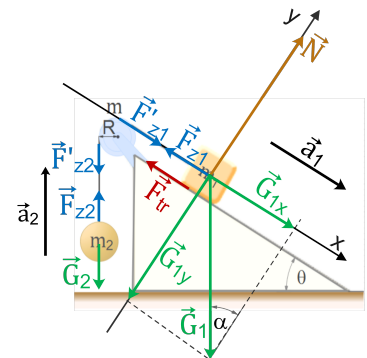
Sabiranjem jednačina (7.4), (7.6) i (7.7) dobijamo izraz za ubrzanje tijela

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a = m_1 g \sin \theta - F_{\text{tr}} - m_2 g, \quad (7.8)$$

gdje smo iskoristili $F_{z1} = F'_{z1}$ i $F_{z2} = F'_{z2}$. Tijelo će se kretati niz strmu ravan samo u slučaju da je x -komponenta sile Zemljine teže



Slika 10.25: Uz zadatak 7.



Slika 10.26: Uz rješenje zadatka 7.

$m_1 g \sin \theta$ veća od sila koje djeluju u suprotnom smjeru. Maksimalna vrijednost sile koja djeluje u suprotnom smjeru se dobije kada je sila trenja statička i uz to maksimalna, tj. $F_{\text{tr}} = F_{\text{tr},s,\text{max}} = \mu_s N$, pa uslov koji mora biti ispunjen da bi se tijelo kretalo niz strmu ravan glasi

$$m_1 g \sin \theta > \mu_s m_1 g \cos \theta + m_2 g, \quad (7.9)$$

odnosno

$$\frac{m_2}{m_1} < \sin \theta - \mu_s \cos \theta. \quad (7.10)$$

Ubrzanje tijela u tom slučaju iznosi

$$a = \frac{m_1 \sin \theta - \mu_k m_1 \cos \theta - m_2}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g. \quad (7.11)$$

Pretpostavimo sada da je $m_1 < m_2$. U tom slučaju tijelo mase m_1 miruje ili se kreće uz strmu ravan. Projekcijom jednačina (7.1)-(7.3) na ose koordinatnog sistema dobijamo

$$m_1 a_1 = -m_1 g \sin \theta - F_{\text{tr}} + F_{z1}, \quad (7.12)$$

$$0 = -m_1 g \cos \theta + N, \quad (7.13)$$

$$m_2 a_2 = m_2 g - F_{z2}, \quad (7.14)$$

$$I \alpha = R (F'_{z2} - F'_{z1}), \quad (7.15)$$

tako da je ubrzanje sistema određeno relacijom

$$\left(m_1 + m_2 + \frac{I}{R^2} \right) a = m_2 g - m_1 g \sin \theta - F_{\text{tr}}. \quad (7.16)$$

Tijelo će se kretati uz strmu ravan ukoliko je sila $m_2 g$ veća od zbiru x -komponente sile Zemljine teže koja djeluje na tijelo mase m_1 i maksimalne statičke sile trenja, što možemo zapisati kao

$$m_2 g > m_1 g \sin \theta + \mu_s m_1 g \cos \theta. \quad (7.17)$$

Iz ovog uslova dobijamo

$$\frac{m_2}{m_1} > \sin \theta + \mu_s \cos \theta. \quad (7.18)$$

Ubrzanje tijela u ovom slučaju iznosi

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta - \mu_k m_1 \cos \theta}{m_1 + m_2 + \frac{1}{2}m} g. \quad (7.19)$$

Na osnovu jednačina (7.10) i (7.18) koje određuju uslove kada će se tijelo kretati ubrzano niz, odnosno uz strmu ravan, zaključujemo da će tijelo mirovati ukoliko je

$$\sin \alpha - \mu_s \cos \alpha < \frac{m_2}{m_1} < \sin \alpha + \mu_s \cos \alpha. \quad (7.20)$$

ZADATAK 8: Cilindar mase m_1 i radijusa R može da rotira bez trenja oko ose koja prolazi okomito na ravan slike 10.27. Cilindar se nalazi na vrhu strme ravni nagibnog ugla θ . Oko cilindra je omotano neistegljivo uže zanemarive mase koje ga povezuje s tijelom mase m_2 kao što je prikazano na slici 10.27. Tijelo seпусти iz stanja mirovanja s visine h i ono se počne kretati po podlozi s koeficijentom trenja μ .

- Koliko je ubrzanje tijela?
- Kolika je sila zatezanja užeta?
- Kolika je brzina tijela na dnu strme ravni?
- Kolika je promjena mehaničke energije pri pomjeranju tijela s visine h do dna strme ravni?

Rješenje:

a) Analizirajmo sistem koji se sastoji od cilindra mase m_1 i tijela mase m_2 . Na cilindar djeluje sila Zemljine teže, sila reakcije osovine i sila zatezanja. Cilindar vrši isključivo rotaciono kretanje koje je određeno intenzitetom sile zatezanja jer su momenti sile Zemljine teže i sile reakcije osovine jednaki nuli (napadna tačka ovih sila je u centru masa pa je intenzitet vektora položaja koji spaja centar masa i napadnu tačku sile jednak nuli). Na tijelo mase m_2 djeluje sila Zemljine teže, sila reakcije podloge, sila zatezanja i sila trenja kao na slici 10.28. Drugi Newtonov zakon napisan za ova tijela glasi

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}'_z, \quad (8.1)$$

$$m_2\vec{a} = \vec{G}_2 + \vec{N} + \vec{F}_{tr} + \vec{F}_z. \quad (8.2)$$

Projekcijom prethodnih jednačina na ose odabranog koordinatnog sistema dobijamo

$$I\alpha = RF'_z, \quad (8.3)$$

$$m_2a = m_2g \sin \theta - F_{tr} - F_z, \quad (8.4)$$

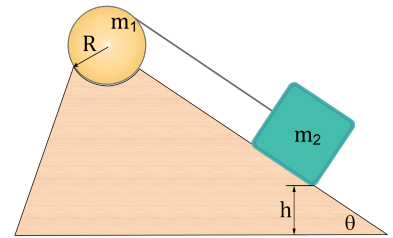
$$0 = -m_2g \cos \theta + N. \quad (8.5)$$

Pošto je masa užeta zanemariva, intenziteti sile \vec{F}_z i \vec{F}'_z su jednaki pa sabiranjem jednačina (8.3) i (8.4), uz uvažavanje činjenice da je $F_{tr} = \mu N = \mu m_2g \cos \theta$, dobijamo

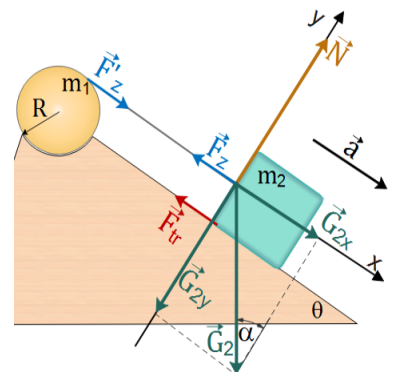
$$I\frac{\alpha}{R} + m_2a = m_2g \sin \theta - \mu m_2g \cos \theta. \quad (8.6)$$

Slično kao i ranije, možemo zaključiti da je linearno ubrzanje oboda diska jednako ubrzanju tijela mase m_2 (jer je uže neistegljivo), tj. $\alpha = a/R$ pa prethodna jednačina postaje

$$a = \frac{m_2}{\frac{1}{2}m_1 + m_2} (\sin \theta - \mu \cos \theta)g, \quad (8.7)$$



Slika 10.27: Uz zadatak 8.



Slika 10.28: Uz rješenje zadatka 8a.

gdje smo još iskoristili $I = \frac{1}{2}m_1R^2$.

b) Intenzitet sile zatezanja možemo jednostavno odrediti iz jednačine (8.3). Naime,

$$F_z = \frac{1}{2}m_1R^2 \frac{a}{R^2} = \frac{1}{2}m_1a = \frac{m_1m_2}{m_1 + 2m_2}(\sin\theta - \mu \cos\theta)g. \quad (8.8)$$

c) Brzina tijela na dnu strme ravni može se odrediti na osnovu relacije

$$v = \sqrt{2as}, \quad (8.9)$$

gdje je $s = h / \sin\theta$ put koji tijelo pređe od položaja koji je određen visinom h do dna strme ravni. Na osnovu prethodnih relacija dobijamo da je brzina tijela na dnu strme ravni

$$v = \sqrt{\frac{4m_2}{m_1 + 2m_2} \frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta} gh}. \quad (8.10)$$

d) Ako pretpostavimo da je dno strme ravni referentni nivo na kojem je gravitaciona potencijalna energija jednaka nuli, onda je ukupna mehanička energija na visini h jednaka potencijalnoj energiji m_2gh , a ukupna mehanička energija na dnu strme ravni jednaka kinetičkoj energiji. Promjena mehaničke energije je prema tome

$$\Delta E = \Delta E_k - \Delta E_p = \frac{m_2v^2}{2} - m_2gh. \quad (8.11)$$

Uvrštavanjem izraza za brzinu tijela na dnu strme ravni dobijamo

$$\Delta E = \frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta} m_2gh - m_2gh, \quad (8.12)$$

odnosno

$$\Delta E = \left(\frac{2m_2}{m_1 + 2m_2} \frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta} - 1 \right) m_2gh. \quad (8.13)$$

Veličina $\frac{2m_2}{m_1 + 2m_2}$ je manja od jedinice. Slično tome, veličina

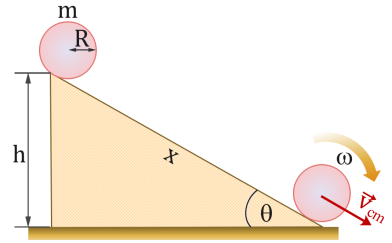
$$\frac{\sin\theta - \mu \cos\theta}{\sin\theta} = 1 - \mu \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \quad (8.14)$$

je također manja od jedinice jer su u prvom kvadrantu i sinus i kosinus pozitivne funkcije. To znači da će promjena mehaničke energije tijela mase m_2 , data relacijom (8.13), uvijek biti negativna, odnosno da se mehanička energija tijela smanjila. Ukoliko bi trenje bilo zanemarivo, tj. ukoliko bi koeficijent trenja bio jednak nuli i ako bi masa cilindra m_1 bila zanemarivo mala, promjena energije tijela mase m_2 bila bi jednaka nuli, pa bi njegova energija bila očuvana. Ako je sila

trenja zanemariva onda je energija sistema koji se sastoji od tijela i cilindra očuvana.

ZADATAK 9: Na vrhu strme ravni dužine x i nagibnog ugla θ nalazi se homogena sfera mase m i radijusa R (slika 10.29). Moment inercije homogene sfere je $I = \frac{2}{5}mR^2$.

- Odrediti linearnu brzinu centra masa na kraju strme ravni.
- Odrediti intenzitet vektora ubrzanja centra masa.
- Koliki je intenzitet sile trenja između sfere i podloge?
- Pri kojem će nagibnom uglu strme ravni sfera početi proklizavati ako je koeficijent statičkog trenja između sfere i podloge μ_s ?



Slika 10.29: Uz zadatak 9.

Rješenje:

a) Posmatrajmo kotrljanje sfere mase m i radijusa R niz strmu ravan. Na sferu djeluje sila Zemljine teže, sila reakcije podloge i sila trenja. Ako pretpostavimo da sfera ne proklizava po podlozi onda je sila trenja statička sila. Iako se tijelo kreće u cijelosti, rad statičke sile trenja prilikom kotrljanja jednak je nuli. Naime, do ovog zaključka možemo najjednostavnije doći ako razmotrimo "kotrljanje", tj. prevrtanje jedne kocke. Dok se kocka prevrće oko svoje ivice, između te ivice i podloge se javlja statička sila trenja. Međutim, sve dok ivica miruje, tj. ne proklizava po podlozi, rad sile trenja jednak je nuli jer je pomak dodirne tačke tijela i podloge jednak nuli. Ako povećavamo broj ivica, i u limesu kada on teži u beskonačno dođemo do razmatranja kotrljanja sfere, analogno zaključujemo da će dodirna tačka sfere i podloge mirovati pa će rad statičke sile trenja biti jednak nuli. Pošto je i rad sile reakcije podloge jednak nuli, a sila Zemljine teže je konzervativna sila, onda je moguće primijeniti zakon očuvanja energije na sistem koji se sastoji od sfere i Zemlje. Neka je podnožje strme ravni referentni nivo. Tada zakon očuvanja energije

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0 \quad (9.1)$$

možemo pisati kao

$$\frac{mv_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - 0 - mgh = 0. \quad (9.2)$$

Uvrštavanjem izraza za moment inercije i korištenjem relacije $v_{\text{cm}} = \omega R$ iz prethodnog izraza dobijamo

$$\frac{mv_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mR^2 \frac{v_{\text{cm}}^2}{R^2}}{2} = mgh, \quad (9.3)$$

odnosno

$$\frac{7}{10}v_{\text{cm}}^2 = gh. \quad (9.4)$$

Konačno, korištenjem relacije $h = x \sin \theta$ dobijamo izraz za brzinu centra masa na kraju strme ravni

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{10}{7}gx \sin \theta}. \quad (9.5)$$

Primijetimo da je brzina centra masa u ovom slučaju manja nego brzina tijela koje bi klizilo niz strmu ravan bez trenja (umjesto faktora $\frac{10}{7}$ imali bi faktor 2).

b) Centar masa sfere se kreće po pravcu, tako da je veza između brzine i ubrzanja centra masa u svakom trenutku data s

$$v_{\text{cm}}^2 = 2a_{\text{cm}}x. \quad (9.6)$$

Odavde je ubrzanje centra masa na kraju strme ravni jednako

$$a_{\text{cm}} = \frac{v_{\text{cm}}^2}{2x} = \frac{\frac{10}{7}gx \sin \theta}{2x} = \frac{5}{7}g \sin \theta. \quad (9.7)$$

Prema tome, ubrzanje centra masa sfere koja se kotrlja niz strmu ravan je konstantno i manje od ubrzanja tijela koje klizi bez trenja.

c) Prema Teoremu o kretanju centra masa, ubrzanje centra masa je određeno djelovanjem vanjskih sila na sistem pa II Newtonov zakon napisan za kretanje sfere niz strmu ravan glasi

$$m\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}}. \quad (9.8)$$

Projekcijom na ose koordinatnog sistema odabranog kao na slici 10.30 dobijamo

$$ma_{\text{cm}} = mg \sin \theta - F_{\text{tr}}, \quad (9.9)$$

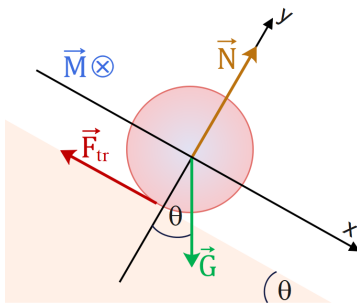
$$0 = -mg \cos \theta + N. \quad (9.10)$$

Intenzitet statičke sile trenja je onda

$$F_{\text{tr}} = mg \sin \theta - ma_{\text{cm}} = mg \sin \theta - \frac{5}{7}mg \sin \theta = \frac{2}{7}mg \sin \theta. \quad (9.11)$$

Vidimo da je intenzitet statičke sile trenja konstantan i da zavisi od nagibnog ugla θ . Inače statička sila trenja je jedina sila koja proizvodi moment sile različit od nule. Ovaj moment sile intenziteta $M = RF_{\text{tr}}$ doprinosi kotrljanju tijela ugaonim ubrzanjem $\alpha = M/I$ odnosno

$$\alpha = \frac{R^2 mg \sin \theta}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{7} \frac{g \sin \theta}{R}, \quad (9.12)$$



Slika 10.30: Uz rješenje zadatka 9c.

što je jednako a_{cm}/R . Sve dok tijelo ne proklizava vrijedi relacija $a_{\text{cm}} = \alpha R$.

d) Kako smo pokazali u prethodnom dijelu zadatka intenzitet sile trenja zavisi od nagibnog ugla θ . Povećanjem ovog ugla povećava se i intenzitet statičke sile trenja. Pri određenom uglu θ_g intenzitet statičke sile trenja će postati maksimalan i svako daljnje povećanje ugla će dovesti do toga da će sfera početi proklizavati. U tom slučaju će ubrzanje centra masa biti veće od proizvoda αR . U graničnom slučaju intenzitet statičke sile trenja iznosi $F_{\text{tr}} = \mu_s N = \mu_s mg \cos \theta$ pa iz II Newtonovog zakona slijedi

$$ma_{\text{cm}} = mg \sin \theta - \mu_s mg \cos \theta. \quad (9.13)$$

U graničnom slučaju kada je intenzitet statičke sile trenja maksimalan, još uvijek vrijedi $a_{\text{cm}} = \alpha R$, pa slijedi

$$a_{\text{cm}} = \frac{M}{I} R = \frac{F_{\text{tr}} R}{\frac{2}{5} m R^2} R = \frac{5 F_{\text{tr}}}{2 m} = \frac{5 \mu_s mg \cos \theta}{2 m} = \frac{5}{2} \mu_s mg \cos \theta. \quad (9.14)$$

Na osnovu prethodne dvije relacije dobijamo

$$\frac{5}{2} \mu_s \cos \theta = \sin \theta - \mu_s \cos \theta, \quad (9.15)$$

odnosno

$$\frac{7}{2} \mu_s \cos \theta = \sin \theta. \quad (9.16)$$

Odavde konačno dobijamo granični ugao pri kojem je statička sila trenja maksimalna

$$\text{tg } \theta = \frac{7}{2} \mu_s. \quad (9.17)$$

Za sve nagibne uglove za koje vrijedi $\text{tg } \theta > 7/2\mu_s$ sfera će proklizavati po strmoj ravni.

ZADATAK 10: Prilikom kuglanja igrač baci kuglu mase M i radijusa R tako da kada kugla dotakne podlogu kreće se početnom brzinom 5 m s^{-1} bez obrtanja.

- Opisati kretanje kugle.
- Naći vremenski interval nakon kojeg će kugla prestati da proklizava.
- Naći put koji će kugla preći prije nego što prestane da proklizava.

Koeficijent trenja između kugle i podloge je $0,08$.

Rješenje:

a) Sve dok ne dotakne podlogu kugla se kreće bez obrtanja tako da je linearna brzina centra masa neposredno prije dodira podloge jednaka 5 m s^{-1} . U trenutku kada kugla dotakne podlogu na nju počne djelovati sila reakcije podloge i kinetička sila trenja, te kugla počinje klizati po podlozi. Istovremeno kinetička sila trenja uzrokuje moment sile koji dovodi do toga da kugla počne rotirati. Kako je početna ugaona brzina kugle (tj. ugaona brzina u trenutku dodira) jednaka nuli, a linearna brzina centra masa različita od nule, očito da ne vrijedi relacija $v_{\text{cm}} = \omega R$. Zbog djelovanja kinetičke sile trenja u smjeru koji je suprotan od smjera kretanja kugle, linearna brzina centra masa će se smanjivati. Istovremeno, moment sile koji je usmjeren u pravcu vektora ugaone brzine će povećavati ugaonu brzinu kugle. Sve dok je $v_{\text{cm}} > \omega R$ kugla će proklizavati. Onog trenutka kada se v_{cm} izjednači s ωR kugla će prestati proklizavati i kotrljati će se konstantnom ugaonom brzinom. Pri tome će kinetička sila trenja prestati djelovati, tj. njena vrijednost će pasti na nulu.

b) Napisaćemo II Newtonov zakon za translatorno kretanje centra masa i rotaciono kretanje kugle oko centra masa

$$m\vec{a}_{\text{cm}} = \vec{G} + \vec{N} + \vec{F}_{\text{tr}}, \quad (10.1)$$

$$I\vec{\alpha} = \vec{M}, \quad (10.2)$$

gdje je \vec{M} moment sile trenja. Projekcijom jednačina na odabrane ose koordinatnog sistema dobijamo

$$ma_{x\text{cm}} = -F_{\text{tr}}, \quad (10.3)$$

$$0 = -mg + N, \quad (10.4)$$

$$I\alpha = RF_{\text{tr}}. \quad (10.5)$$

Iz prethodnih jednačina slijedi

$$a_{x\text{cm}} = -\mu g, \quad (10.6)$$

odnosno

$$\alpha = \frac{R\mu mg}{\frac{2}{5}mR^2} = \frac{5}{2} \frac{\mu g}{R}. \quad (10.7)$$

Obzirom da tijelo proklizava, očito ne vrijedi relacija $v_{\text{cm}} = \omega R$. Linearna brzina centra masa je određena jednačinama kretanja

$$v_{\text{cm}}(t) = v_0 + a_{x\text{cm}}t. \quad (10.8)$$

Analogno, ugaona brzina rotacionog kretanja kugle je određena s

$$\omega(t) = \alpha t, \quad (10.9)$$

gdje smo uvažili činjenicu da je početna ugaona brzina jednaka nuli. Obzirom da se linearna brzina centra masa smanjuje, a ugaona brzina raste, tijelo će prestati proklizavati onog trenutka t_p kada je $v_{cm}(t_p) = R\omega(t_p)$, odnosno

$$v_0 + a_{xcm}t_p = R\alpha t_p. \quad (10.10)$$

Uvrštavanjem izraza za linearno ubrzanje centra masa i ugaono ubrzanje rotacionog kretanja dobijamo

$$v_0 - \mu g t_p = \frac{5}{2} \mu g t_p. \quad (10.11)$$

Na osnovu prethodne relacije zaključujemo da je trenutak kada tijelo prestane proklizavati određen s

$$t_p = \frac{2}{7} \frac{v_0}{\mu g}. \quad (10.12)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je $t_p = 1,82$ s.

c) Pređeni put prije prestanka proklizavanja možemo odrediti pomoću jednačine kretanja

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} a_{xcm} t^2. \quad (10.13)$$

Pređeni put u trenutku prestanka proklizavanja je

$$x(t_p) = v_0 t_p - \frac{1}{2} \mu g t_p^2 = 7,8 \text{ m}. \quad (10.14)$$

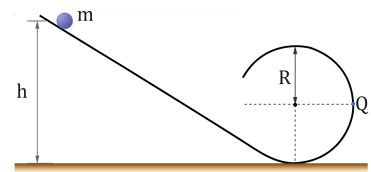
ZADATAK 11: Mala plastična kuglica mase $m = 2,8$ g puštena je sa strme ravni s visine h . Kuglica nailazi na zatvorenu petlju radijusa $R = 14$ cm kao na slici 10.31. Radijus kuglice r je mnogo manji od radijusa petlje R .

- Kolika je minimalna visina h potrebna da kuglica prođe kroz petlju?
- Ako je kuglica puštena s visine $h = 6R$, koliki je intenzitet sile reakcije podloge u tački Q ?

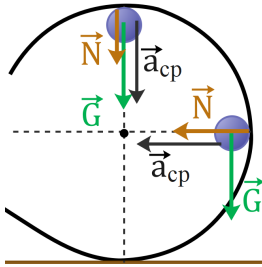
Rješenje:

a) Nakon što je puštena, kuglica se kotrlja niz strmu ravan i nailazi na kružnu petlju. Kretanje centra masa kuglice je određeno isključivo djelovanjem vanjskih sila. Kada pređe u kružnu petlju, centar masa kuglice se kreće po kružnici pod djelovanjem sile Zemljine teže i sile reakcije podloge, te vrijedi

$$m \vec{a}_{cm} = \vec{G} + \vec{N}. \quad (11.1)$$



Slika 10.31: Uz zadatak 11.



Slika 10.32: Uz rješenje zadatka 11.

U najvišoj tački putanje ove dvije sile i vektor ubrzanja centra masa imaju isti pravac i smjer kao što je prikazano na slici 10.32, pa je

$$ma_{\text{cm}} = mg + N. \quad (11.2)$$

U najvišoj tački putanje kuglica ima samo centripetalno ubrzanje $a_{\text{cm}} = v_{\text{cm}}^2/R$. Na osnovu prethodne jednačine dobijamo brzinu centra masa u najvišoj tački putanje kao

$$v_{\text{cm}}^2 = gR + \frac{RN}{m}. \quad (11.3)$$

Minimalna brzina kuglice u najvišoj tački putanje se dobije u граничном slučaju kada intenzitet sile reakcije podloge teži nuli i jednaka je $v_{\text{cm min}} = \sqrt{gR}$.

Minimalnu visinu h , s koje treba pustiti kuglicu da bi prošla petlju, određujemo iz zakona očuvanja mehaničke energije

$$\frac{mv_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - 0 + mg2R - mgh = 0. \quad (11.4)$$

Odavde je

$$gh = 2gR + \frac{v_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{\frac{2}{5}mr^2 \frac{v_{\text{cm}}^2}{r^2}}{2m} = 2gR + \frac{7}{10}v_{\text{cm}}^2. \quad (11.5)$$

Minimalna visina s koje se tijelo pusti odgovara minimalnoj brzini centra masa kuglice u najvišoj tački putanje, tako da je

$$h_{\text{min}} = 2R + \frac{7}{10}R = \frac{27}{10}R = 2,7R = 37,8\text{cm}. \quad (11.6)$$

b) U tački Q sila reakcije podloge ima normalnu komponentu i uzrokuje centripetalno (normalno) ubrzanje, dok sila Zemljine teže ima isključivo tangencijalnu komponentu. Prema tome vrijedi

$$N = m \frac{v_{\text{cm}}^2}{R}. \quad (11.7)$$

Brzinu centra masa kuglice u tački Q određujemo na osnovu zakona očuvanja mehaničke energije

$$\frac{mv_{\text{cm}}^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} - 0 + mgR - mg6R = 0, \quad (11.8)$$

odnosno

$$\frac{7}{10}mv_{\text{cm}}^2 = 5mgR. \quad (11.9)$$

Odavde je

$$v_{\text{cm}}^2 = \frac{50}{7}gR. \quad (11.10)$$

Prema tome, intenzitet sile reakcije podloge u tački Q iznosi

$$N = \frac{50}{7}mg = 0,2N. \quad (11.11)$$

10.6 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Disk radijusa $2,83\text{ cm}$ ubrzan je iz stanja mirovanja ugaonim ubrzanjem od $14,2\text{ rad s}^{-2}$ do njegove ugaone brzine koja je određena sa 2760 obrtaja u minuti. Koliko je tangencijalno ubrzanje tačke na obodu diska tokom rotacije? Koliko je radijalno ubrzanje ove tačke kada disk postigne maksimalnu brzinu? Koliki put pređe tačka koja se nalazi na rubu diska do trenutka kada disk postigne maksimalnu brzinu? ($a_t = 0,402\text{ m s}^{-2}$, $a_r = 2360\text{ m s}^{-2}$, $s = 83,2\text{ m}$)

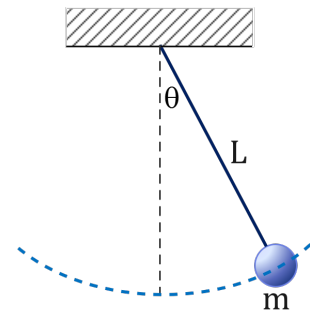
Zadatak 2: Točak parne mašine radi s konstantnom ugaonom brzinom od 150 obrtaja u minuti. Kada se para isključi, trenje ležajeva i zraka zaustavlja točak za $2,2\text{ h}$. (a) Koliko je konstantno ugaono ubrzanje točka tokom usporavanja, izraženo u obrtajima u minuti na kvadrat? (b) Koliko obrtaja točak napravi prije nego što se zaustavi? (c) U trenutku kada se točak okreće brzinom od 75 obrtaja u minuti, kolika je tangencijalna komponenta linearnog ubrzanja tačaka na točku koje su 50 cm udaljene od ose rotacije i koliko je njihovo ukupno linijsko ubrzanje? ($\alpha = -1,14\text{ obrtaj/min}^2$, $n = 9900$ obrtaja, $a_t = -0,99 \cdot 10^{-3}\text{ m s}^{-2}$, $a \approx a_r = 31\text{ m s}^{-2}$)

Zadatak 3: Gramofonska ploča rotira brzinom od 331 obrtaja u minuti. Sjemenka lubenice se nalazi na ploči 6 cm od ose rotacije. (a) Izračunati ubrzanje sjemenke uz pretpostavku da ona ne klizi. (b) Koja je minimalna vrijednost koeficijenta statičkog trenja između sjemenke i gramofonske ploče ako sjemenka ne klizi? (c) Pretpostavimo da ploča postigne svoju ugaonu brzinu pokretanjem iz stanja mirovanja i podvrgavanjem konstantnom ugaonom ubrzanju u trajanju od $0,25\text{ s}$. Izračunati minimalni koeficijent statičkog trenja potreban da sjemenka ne bi skliznula tokom ubrzanja. ($a = 0,73\text{ m s}^{-2}$, $\mu_{s,min} = 0,075$, $\mu'_{s,min} = 0,11$)

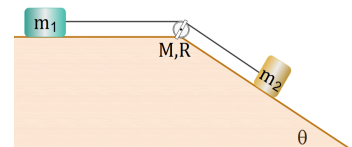
Zadatak 4: Matematičko klatno se sastoji od niti zanemarive mase dužine L i kuglice mase m obješene o nit kao na slici 10.33. Klatno može rotirati u vertikalnoj ravni. Ako je ugaon otklona klatna θ .

- Kolika je tangencijalna komponenta ubrzanja kuglice? ($a_t = g \sin \theta$)
- Koliki je moment sile u odnosu na objesište? ($M = mgL \sin \theta$)
- Pokazati da će II Newtonov zakon za rotaciono kretanje dati isti rezultat kao pod a).

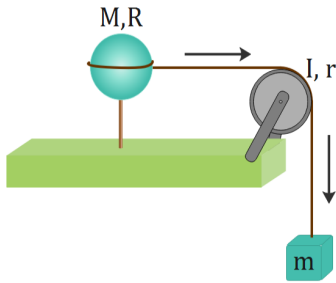
Zadatak 5: Dva tijela masa $m_1 = 2\text{ kg}$ i $m_2 = 6\text{ kg}$ povezana su nistepljivim užetom zanemarive mase. Uže je prebačeno preko kotura



Slika 10.33: Uz zadatak 4.



Slika 10.34: Uz zadatak 5.



Slika 10.35: Uz zadatak 6.

radijusa $R = 0,25\text{ m}$ i mase $M = 10\text{ kg}$, koji može da rotira bez gubitka energije (slika 10.34). Tijelo mase m_2 nalazi se na strmini nagibnog ugla 30° . Koeficijent kinetičkog trenja između tijela i podloge iznosi $0,36$ za oba tijela. Odrediti:

- ubrzanje oba tijela, ($a = 0,309\text{ m s}^{-1}$)
- sile zatezanja s obje strane kotura. ($F_{z1} = 7,67\text{ N}$, $F_{z2} = 9,22\text{ N}$)

Zadatak 6: Lopta (sferna ljuska) mase $M = 4,5\text{ kg}$ i radijusa $R = 8,5\text{ cm}$ može da rotira oko vertikalne ose bez trenja. Uže zanemarive mase, prebačeno preko kotura momenta inercije $I = 3 \cdot 10^{-3}\text{ kg m}^2$, povezuje loptu s tijelom mase $m = 0,6\text{ kg}$ kao na slici 10.35. Kotur rotira bez trenja, a uže ne proklizava po koturu. Odrediti brzinu tijela u trenutku kada pređe put od 82 cm ako je pušteno iz stanja mirovanja. ($v = 1,4\text{ m s}^{-1}$)

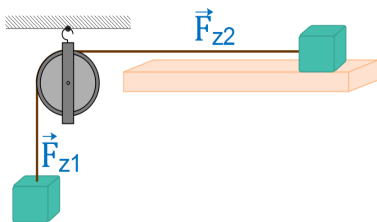
Zadatak 7: Homogeni šuplji valjak tankih zidova i homogeni puni valjak se kotrljaju horizontalno bez klizanja. Brzina šupljeg valjka je v . Valjci nailaze na nagib po kojem se penju bez klizanja. Ako je maksimalna visina koju dostižu ista, odrediti početnu brzinu punog valjka. ($v' = \sqrt{\frac{4}{3}}v$)

Zadatak 8: Homogena kugla se kotrlja bez klizanja niz kosinu. Koliki mora biti ugao nagiba kosine ako linearno ubrzanje centra mase kugle iznosi $0,2g$? ($\theta = 16,3^\circ$)

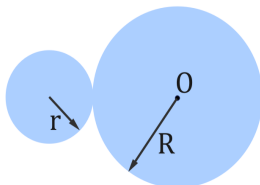
Zadatak 9: Dvije tačkaste čestice masa m_1 i m_2 povezane su štapom zanemarive mase dužine L da bi se formirala bučica koja rotira oko svog centra mase ugaonom brzinom ω . Pokazati da je odnos kinetičkih energija čestica $\frac{E_{k1}}{E_{k2}} = \frac{m_2}{m_1}$.

Zadatak 10: Dva bloka jednakih masa $m = 6,2\text{ kg}$ povezana su konopcem zanemarive mase koji je prebačen preko kotura poluprečnika $2,4\text{ cm}$ i momenta inercije $7,4 \cdot 10^{-4}\text{ kg m}^2$ kao na slici 10.36. Konopac ne proklizava na koturu a trenje između kotura i njegove osovine se može zanemariti. Pored toga, nije poznato da li postoji trenje između stola i bloka koji klizi po njemu. Kada se ovaj sistem pusti iz stanja mirovanja, kotur u vremenskom intervalu od 91 ms napravi ugaoni pomak od $1,3\text{ rad}$, dok je ubrzanje blokova konstantno. Odrediti ugaono ubrzanje kotura, ubrzanje blokova, kao i sile zatezanja konopca F_{z1} i F_{z2} . ($\alpha = 314\text{ rad s}^{-2}$, $a = 7,54\text{ m s}^{-2}$, $F_{z1} = 14\text{ N}$, $F_{z2} = 4,36\text{ N}$)

Zadatak 11: Mali disk radijusa $r = 2\text{ cm}$ zalijepljen je na ivicu većeg diska poluprečnika $R = 4\text{ cm}$ tako da diskovi leže u istoj ravni (slika 10.37). Diskovi mogu rotirati oko okomite ose koja prolazi kroz tačku



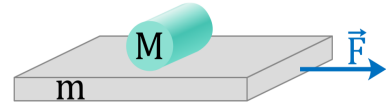
Slika 10.36: Uz zadatak 10.



Slika 10.37: Uz zadatak 11.

O u centru većeg diska. Oba diska imaju istu gustinu od 1400 kg m^{-3} i debljinu od 5 mm. Koliki je moment inercije ta dva diska oko ose rotacije koja prolazi kroz tačku O? ($I = 6,16 \cdot 10^{-5} \text{ kg m}^2$)

Zadatak 12: Homogeni cilindar mase M i poluprečnika R miruje na bloku mase m , koji miruje na glatkom horizontalnom stolu kao na slici 10.38 (trenje zanemariti). Ako se na blok primijeni horizontalna sila F , on se ubrzava i cilindar se kotrlja bez klizanja. Pronađi ubrzanje bloka i ugaono ubrzanje cilindra. Rotira li se cilindar u smjeru kazaljke na satu ili suprotno? ($a_B = \frac{3F}{M+3m}$, $\alpha = \frac{2F}{R(M+3m)}$, *suprotno*)

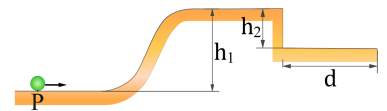


Slika 10.38: Uz zadatak 12.

Zadatak 13: Centri dva homogena diska od 20 kg i poluprečnika 30 cm spojeni su kratkom šipkom poluprečnika 2 cm i mase 1 kg. Kada se šipka postavi na ravan nagnutu pod uglom od 30° , tako da diskovi vise sa strane, sklop se kotrlja bez klizanja. Odrediti linearno i ugaono ubrzanje sistema. Izračunati kinetičku energiju translacije i rotacije sistema nakon što se sklop otkotrlja 2 m niz ravan, krenuvši iz stanja mirovanja. ($a = 0,0443 \text{ m s}^{-2}$, $\alpha = 2,21 \text{ rad s}^{-2}$, $E_{k,t} = 3,63 \text{ J}$, $E_{k,r} = 399 \text{ J}$)

Zadatak 14: Disk, koji može da rotira oko ose koja prolazi kroz centar masa, nalazi se u stanju mirovanja. Vanjski moment sile, konstantnog intenziteta od 50 Nm, djeluje u vremenskom intervalu od 20 s i pri tome se disk ubrza do ugaone brzine od 600 obrtaja u minuti. Vanjski moment sile prestane djelovati i disk se zaustavi 120s nakon toga. Naći vrijednost momenta sile trenja pod pretpostavkom da je on konstantan. ($M_{tr} = 8,33 \text{ Nm}$)

Zadatak 15: Mala kuglica se počne kotrljati iz tačke P prema rampi i penje se na plato visine h_1 . Kuglica napušta plato u horizontalnom smjeru i pada na podlogu na udaljenosti d (slika 10.39). Visine označene na slici su $h_1 = 5 \text{ cm}$ i $h_2 = 1,6 \text{ cm}$. Kolika mora biti početna brzina kuglice da bi pala na udaljenost od 6 cm nakon napuštanja platoa? ($v_0 = 1,34 \text{ m s}^{-1}$)



Slika 10.39: Uz zadatak 15.

Zadatak 16: Šuplji cilindar tankih zidova i puna kugla pušteni su s vrha strme ravni dužine 3 m. Cilindar stiže do dna strme ravni 0,4 s nakon kugle. Odrediti ugao strme ravni. ($\theta = 11,7^\circ$)

MOMENT IMPULSA

11.1	Moment impulsa jedne čestice	273
11.2	Moment impulsa sistema čestica	275
11.3	Moment impulsa krutog tijela	277
11.4	Riješeni zadaci	278
11.5	Zadaci za vježbu	297

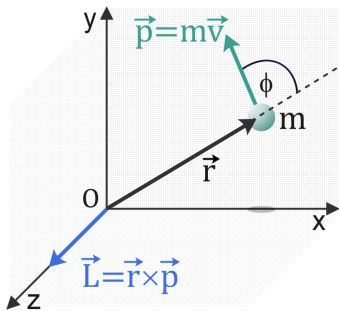
U prethodnom poglavlju smo vidjeli da postoje veličine kojima se opisuje rotaciono kretanje krutog tijela, a koje su analogon veličinama koje opisuju translatorno kretanje. Tako je npr. moment inercije analogon masi tijela, a moment sile analogon sili. Pored ovih veličina moguće je definisati i veličinu koja se naziva moment impulsa ili ugaoni moment, a predstavlja analogon impulsu odnosno količini kretanja tijela. Moment impulsa je vektorska fizikalna veličina. Za česticu mase m koja se kreće brzinom \vec{v} definiše se kao

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (11.1)$$

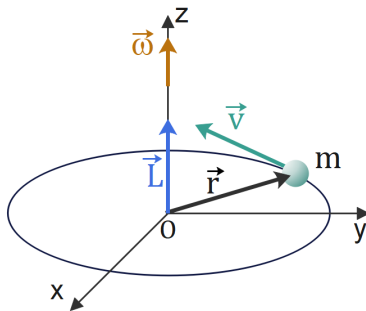
gdje je \vec{r} radijus vektor položaja čestice.

11.1 Moment impulsa jedne čestice

Iz same definicije momenta impulsa čestice zaključujemo da ova veličina, za razliku od impulsa, zavisi od izbora koordinatnog sistema. Na slici 11.1 prikazana je situacija u kojoj se u datom trenutku vektor položaja čestice i vektor brzine nalaze u xy -ravni. Za ovakav izbor koordinatnog sistema vektor momenta impulsa usmjeren je u pravcu z -ose. Ukoliko bismo izabrali novi koordinatni sistem čije ishodište je npr. translirano duž z -ose, vektor položaja ne bi bio u xy -ravni pa ni vektor momenta impulsa ne bi više bio usmjeren duž z -ose. Zbog toga je prilikom određivanja vektora momenta impulsa



Slika 11.1: Vektori brzine, položaja i momenta impulsa prikazani u datom koordinatnom sustavu.



Slika 11.2: Vektori brzine, položaja i momenta impulsa prikazani za slučaj kružnog kretanja čestice.

važno voditi računa o izboru koordinatnog sistema.

Postoje situacije kada se vektor položaja čestice i vektor brzine čestice mijenjaju u vremenu, a da je pri tome vektor momenta impulsa konstantan. Jedna od takvih situacija je ravnomjerno kružno kretanje čestice. Naime, čestica se kreće po kružnoj putanji u ravni tako da je pravac vektora momenta impulsa okomit na tu ravan (slika 11.2). Intenzitet momenta impulsa dat je s

$$L = |\vec{r}||\vec{p}| \sin \angle(\vec{r}, \vec{p}). \quad (11.2)$$

Ako izaberemo koordinatni sistem tako da je ishodište u centru kružne putanje, onda je vektor položaja tokom kretanja uvijek okomit na vektor impulsa, pa je ugao između ova dva vektora uvijek 90° . Zbog toga je intenzitet momenta impulsa određen s

$$L = mvr = \text{const.} \quad (11.3)$$

U opštem slučaju vektor momenta impulsa čestice koja se kreće po kružnoj putanji ugaonom brzinom ω , određen u odnosu na koordinatni sistem s ishodištem u centru kružne putanje, iznosi

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = mvr\vec{k} = mr^2\omega\vec{k}. \quad (11.4)$$

Kako je veličina mr^2 jednaka momentu inercije čestice, zaključujemo da je moment impulsa čestice koja vrši kružno kretanje dat s

$$\vec{L} = I\vec{\omega}. \quad (11.5)$$

Iz ove relacije vidimo da je moment impulsa analogon impulsu odnosno količini kretanja čestice.

Pogledajmo sada šta je vremenska promjena momenta impulsa jedne čestice. Prvi izvod momenta impulsa po vremenu dat je kao

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}, \quad (11.6)$$

gdje smo iskoristili pravilo za određivanje izvoda proizvoda funkcija. Prvi član u prethodnom izrazu je

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} = \vec{v} \times m\vec{v} = 0, \quad (11.7)$$

jer su vektori \vec{v} i $m\vec{v}$ kolinearni, dok je izvod vektora impulsa po vremenu u drugom članu jednak rezultujućoj sili koja djeluje na česticu. Prema tome, zaključujemo da je

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}, \quad (11.8)$$

odnosno da je vremenska promjena vektora momenta impulsa jednaka vektoru rezultujućeg momenta sile koji djeluje na česticu. Ova relacija je analogon II Newtonovom zakonu za translatorno kretanje po kojem je vremenska promjena vektora impulsa jednaka vektoru rezultujuće sile.

Na osnovu prethodne relacije zaključujemo da ukoliko je ukupni moment sile na jednu česticu jednak nuli onda je i prvi izvod momenta impulsa jednak nuli, tj. vremenska promjena momenta impulsa jednaka je nuli. U tom slučaju moment impulsa ostaje nepromijenjen. Iskaz da će moment impulsa čestice biti konstantan tokom vremena ukoliko je rezultujući moment sile jednak nuli predstavlja zakon očuvanja momenta impulsa. Ovaj zakon je, zajedno sa zakonom očuvanja mehaničke energije i zakonom očuvanja impulsa, jedan od fundamentalnih zakona mehanike.

11.2 Moment impulsa sistema čestica

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od N čestica svaka mase m_i i brzine \vec{v}_i , tako da je impuls pojedine čestice \vec{p}_i . Izaberimo koordinatni sistem tako da je položaj pojedine čestice određen vektorom položaja \vec{r}_i , a ugao između vektora položaja i vektora impulsa dat s θ_i . Tada je vektor momenta impulsa date čestice određen s

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i. \quad (11.9)$$

Moment impulsa je aditivna veličina pa će moment impulsa sistema čestica biti jednak vektorskoj sumi momenata impulsa pojedinih čestica, tj.

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{p}_i. \quad (11.10)$$

Slično kao što smo uradili za slučaj jedne čestice i za sistem čestica ćemo naći vremensku promjenu momenta impulsa. Na osnovu činjenice da je izvod sume funkcija jednak sumi izvoda funkcija slijedi

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N \vec{L}_i = \sum_{i=1}^N \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i, \quad (11.11)$$

gdje je \vec{M}_i ukupni (rezultujući) moment sile koji djeluje na česticu i . Rezultujući moment sile na česticu i se može prikazati kao suma doprinosa unutrašnjih momenata sila \vec{M}_i^{int} i vanjskih momenata sila \vec{M}_i^{ext} , tj.

$$\vec{M}_i = \vec{M}_i^{\text{int}} + \vec{M}_i^{\text{ext}}. \quad (11.12)$$

Unutrašnji momenti sile na česticu i su uzrokovani interakcijom te čestice sa svim ostalim česticama sistema, pa je rezultujući unutrašnji

moment sile na česticu i moguće prikazati kao

$$\vec{M}_i^{\text{int}} = \sum_{j \neq i} \vec{M}_{ij} = \vec{M}_{i1} + \vec{M}_{i2} + \cdots + \vec{M}_{i(i-1)} + \vec{M}_{i(i+1)} + \cdots + \vec{M}_{iN}, \quad (11.13)$$

gdje je \vec{M}_{ij} moment sile koji je uzrokovan djelovanjem čestice j na česticu i . Ovaj moment sile se po definiciji može pisati kao

$$\vec{M}_{ij} = \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}, \quad (11.14)$$

gdje je \vec{F}_{ij} sila kojom čestica j djeluje na česticu i .

Rezultujući unutrašnji moment sile na posmatrani sistem jednak je sumi unutrašnjih momenata sile na svaku česticu sistema, odnosno

$$\vec{M}^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{int}} = \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \vec{M}_{ij}. \quad (11.15)$$

Nakon što izvršimo sumiranje po i i po j u prethodnom izrazu, pojavie se parovi momenata sile \vec{M}_{12} i \vec{M}_{21} , zatim \vec{M}_{13} i \vec{M}_{31} itd. Pogledajmo sada čemu će biti jednaka suma para momenata sile \vec{M}_{12} i \vec{M}_{21} . Po definiciji to je

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \vec{F}_{21}. \quad (11.16)$$

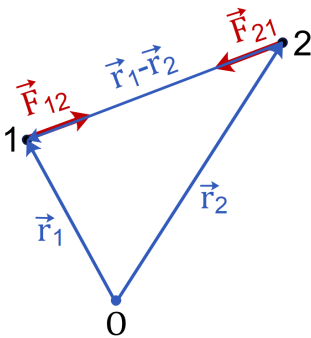
Kako sile \vec{F}_{12} i \vec{F}_{21} čine par sile akcije i reakcije, to je prema III Newtonovom zakonu $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$ pa prethodni izraz postaje

$$\vec{M}_{12} + \vec{M}_{21} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_{12}. \quad (11.17)$$

Neka su \vec{r}_1 i \vec{r}_2 vektori položaja čestica 1 i 2 u odnosu na isto referentno tijelo, odnosno tačku O (slika 11.3). U tom slučaju je vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ kolinearisan s vektorom \vec{F}_{12} pa je vektorski proizvod u prethodnom izrazu jednak nuli. Analogno će se svi parovi unutrašnjih momenata sile poništiti pa je rezultujući unutrašnji moment sile \vec{M}^{int} jednak nuli. Vremenska promjena momenta impulsa sistema čestica je prema tome

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^N \vec{M}_i^{\text{ext}} = \vec{M}^{\text{ext}}, \quad (11.18)$$

gdje je \vec{M}^{ext} rezultujući vanjski moment sile koji djeluje na posmatrani sistem čestica. Ukoliko je rezultujući vanjski moment sile \vec{M}^{ext} jednak nuli, vremenska promjena momenta impulsa sistema čestica jednaka je nuli pa je moment impulsa sistema čestica očuvana veličina. Ovaj iskaz predstavlja zakon očuvanja momenta impulsa sistema čestica.



Slika 11.3: Vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ ima početak u tački 2, a kraj u tački 1 i kolinearisan je s vektorom \vec{F}_{12} .

11.3 Moment impulsa krutog tijela

Prethodno smo definisali moment impulsa jedne čestice i sistema čestica. Sada ćemo izvesti izraz za moment impulsa krutog tijela čiji je moment inercije I i koje rotira oko fiksne ose rotacije ugaonom brzinom $\vec{\omega}$. Neka je osa rotacije z-osa, tako da je $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$. Kruto tijelo ćemo podijeliti na N dijelova masa m_i tako da se svaki dio kreće po kružnici radijusa $r_{i\perp}$ linearnom brzinom intenziteta $v_i = r_{i\perp}\omega$. Moment impulsa pojedinog dijela krutog tijela, tj. elementa krutog tijela koji se može smatrati česticom, dat je sa

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i, \quad (11.19)$$

gdje je \vec{r}_i radijus vektor položaja čestice mase m_i . Neka je ishodište koordinatnog sistema postavljeno dož ose rotacije krutog tijela tako da se vektor položaja može razložiti na komponentu duž z-ose \vec{r}_{iz} i radijalnu komponentu $\vec{r}_{i\perp}$, tako da je

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{iz} + \vec{r}_{i\perp} = z_i \vec{k} + r_{i\perp} \hat{r}_{i\perp}, \quad (11.20)$$

gdje je $\hat{r}_{i\perp}$ jedinični vektor radijalne ose.

Svaka čestica se kreće po kružnici koja je okomita na z-osu, tako je pravac momenta impulsa svake čestice usmjeren duž z-ose. Rezultujući moment impulsa krutog tijela jednak je vektorskoj sumi momenata impulsa pojedinih elemenata tog tijela pa je pravac vektora momenta impulsa krutog tijela također usmjeren duž z-ose. Odgovarajuća z-komponenta momenta impulsa krutog tijela će onda biti

$$\begin{aligned} L_z &= \left(\sum_{i=1}^N \vec{L}_i \right)_z = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i \right)_z \\ &= \left[\sum_{i=1}^N (\vec{r}_{iz} \times m_i \vec{v}_i + \vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{v}_i) \right]_z. \end{aligned} \quad (11.21)$$

Prvi član u prethodnom izrazu, tj. $\vec{r}_{iz} \times m_i \vec{v}_i$ je okomit na z-osu, tako da on ne doprinosi z-komponenti momenta impulsa, te ovaj izraz sada postaje

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^N \vec{r}_{i\perp} \times m_i \vec{v}_i \right)_z. \quad (11.22)$$

Vektori $\vec{r}_{i\perp}$ i \vec{v}_i su međusobno okomiti i leže u ravni rotacije pojedinog elementa krutog tijela, tako da je njihov vektorski proizvod jednak

$$\vec{r}_{i\perp} \times \vec{v}_i = r_{i\perp} v_i \sin 90^\circ \vec{k} = r_{i\perp}^2 \omega \vec{k} = r_{i\perp}^2 \vec{\omega}, \quad (11.23)$$

gdje smo iskoristili $v_i = r_{i\perp}\omega$. Prema tome, z-komponenta ugaonog momenta krutog tijela postaje

$$L_z = \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2 \omega, \quad (11.24)$$

pa je vektor ugaonog moment krutog tijela, koje je podijeljeno na N elemenata i rotira ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ dat sa

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^N m_i r_{i\perp}^2 \vec{\omega}. \quad (11.25)$$

Ako sada uzmemo da broj elemenata sistema teži u beskonačno, te da je masa pojedinog elementa dm , dobijamo konačno izraz za moment impulsa krutog tijela

$$\vec{L} = \left(\int r^2 dm \right) \vec{\omega} = I \vec{\omega}, \quad (11.26)$$

gdje je I moment inercije krutog tijela.

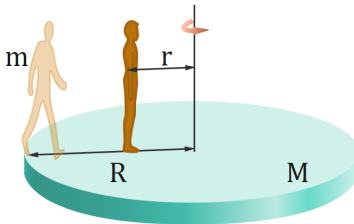
Iz prethodne relacije je jednostavno naći prvi izvod po vremenu momenta impulsa krutog tijela, tako da dobijamo

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = I \frac{d\vec{\omega}}{dt} = I \vec{\alpha} = \vec{M}. \quad (11.27)$$

Drugim riječima, promjena momenta impulsa u jedinici vremena krutog tijela jednaka je rezultujućem momentu sile koji djeluje na to tijelo.

11.4 Riješeni zadaci

ZADATAK 1: Horizontalna platforma u obliku diska može da rotira bez trenja oko vertikalne ose (slika 11.4). Masa platforme je $M = 100$ kg, a njen radijus $R = 2$ m. Student, čija je masa $m = 60$ kg kreće se polako od oboda diska prema centru. Ako je ugaona brzina diska 2 rad s^{-1} kada se student nalazi na obodu, kolika je ugaona brzina diska kada je udaljen $r = 0,5$ m od centra diska?



Slika 11.4: Uz zadatak 1.

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od studenta i diska i izaberimo koordinatni sistem tako da je z-osa postavljena u centar diska i usmjerena okomito na površinu diska. Vanjske sile koje djeluju na ovaj sistem su sila Zemljine teže i kontaktna sila između diska i osovine. Sila Zemljine teže koja djeluje na studenta proizvodi moment sile koji nastoji zakrenuti ravan rotacije diska, međutim sve dok disk rotira u

horizontalnoj ravni (oko vertikalne ose) moment sile između diska i osovine će uravnotežiti moment sile Zemljine teže tako da je ukupni vanjski moment sile koji djeluje na sistem jednak nuli. U tom slučaju je moment impulsa, tj. ugaoni moment sistema očuvan. Zakon očuvanja momenta impulsa sistema se može pisati kao

$$\vec{L}_p + \vec{L}_s = \vec{L}'_p + \vec{L}'_s, \quad (1.1)$$

gdje su \vec{L}_p i \vec{L}_s (\vec{L}'_p i \vec{L}'_s) momenti impulsa platforme i studenta u početnom (konačnom) stanju, respektivno. Moment impulsa platforme je određen s $\vec{L}_p = I\omega\vec{k}$ dok je moment impulsa studenta

$$\vec{L}_s = \vec{r} \times \vec{p} = rmv\vec{k} = mr^2\omega\vec{k}. \quad (1.2)$$

Svi ugaoni momenti koji se javljaju i izrazu (1.1) su usmjereni u pozitivnom smjeru z ose (slika 11.5) tako da projekcijom vektora ugaonih momenata na z osu dobijamo

$$I\omega + mR^2\omega = I\omega' + mr^2\omega', \quad (1.3)$$

gdje je ω (ω') ugaona brzina platforme i studenta na njoj u početnom (konačnom) stanju. Pored toga, s R i r smo označili radijus kružne putanje studenta u početnom, odnosno konačnom stanju. Na osnovu prethodnog izraza zaključujemo da je

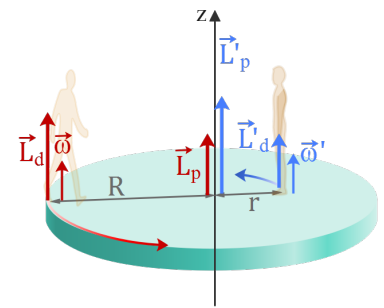
$$\omega' = \frac{I + mR^2}{I + mr^2}\omega = \frac{\frac{1}{2}MR^2 + mR^2}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}\omega = \frac{MR^2 + 2mR^2}{MR^2 + 2mr^2}\omega. \quad (1.4)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je ugaona brzina diska nakon pomjeranja studenta $3,08 \text{ rad s}^{-1}$. Obzirom da se moment inercije sistema platforma+student smanjio nakon pomjeranja studenta, a ugaoni moment sistema ostao nepromijenjen, bilo je za očekivati da će se ugaona brzina sistema povećati, što je i pokazano.

ZADATAK 2: Disk mase 2 kg, koji se kreće brzinom 3 m s^{-1} udara u kraj štapa dužine 4 m i mase 1 kg koji je položen na ledu (trenje se može zanemariti). Pretpostaviti da je sudar elastičan i da disk ne odstupa od prvobitnog pravca kretanja. Naći brzinu diska, kao i translatornu i rotacionu brzinu štapa nakon sudara.

Rješenje:

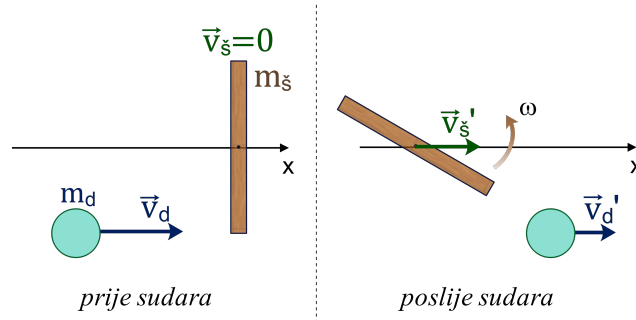
Posmatrajmo sistem koji se sastoji od diska i štapa. Na ovaj sistem djeluju sila Zemljine teže i sila reakcije podloge. Ove dvije sile se međusobno ponište, pa pošto se sila trenja između ova dva tijela i podloge (leda) može zanemariti, zaključujemo da je sistem zatvoren, tj. da je suma svih vanjskih sila jednaka nuli. Zbog toga je impuls našeg sistema očuvan. Kako nema vanjskih sila, onda nema ni vanjskih



Slika 11.5: Uz rješenje zadatka 1.

momenata sila, pa je i moment impulsa sistema očuvan. Pored toga, na sistem ne djeluju nikakve unutrašnje nekonzervativne sile i sudar između diska i štapa je elastičan, pa je i mehanička energija sistema očuvana. Zakon očuvanja impulsa možemo pisati kao

Slika 11.6: Uz rješenje zadatka 2.



$$m_d \vec{v}_d + \vec{0} = m_d \vec{v}'_d + m_s \vec{v}'_s, \quad (2.1)$$

gdje je \vec{v}_d (\vec{v}'_d) brzina diska prije (poslije) sudara (slika 11.6), a \vec{v}'_s brzina centra masa štapa nakon sudara. Projekcijom na osu koja je usmjerena u pravcu kretanja diska i uz pretpostavku da disk nije promijenio pravac i smjer kretanja (jer je masa diska veća od mase štapa) dobijamo

$$m_d v_d = m_d v'_d + m_s v'_s. \quad (2.2)$$

Zakon očuvanja mehaničke energije se može pisati kao

$$\frac{m_d v_d^2}{2} = \frac{m_d v'^2_d}{2} + \frac{m_s v'^2_s}{2} + \frac{I \omega^2}{2}, \quad (2.3)$$

gdje su ω i I ugaona brzina i moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz centar masa. Zakon očuvanja momenta impulsa za sudar diska i štapa može se pisati u formi

$$\vec{r} \times \vec{p}_d = \vec{r} \times \vec{p}'_d + \vec{L}'_s, \quad (2.4)$$

gdje je \vec{r} vektor koji spaja ishodište koordinatnog sistema i položaj centra diska neposredno prije i poslije sudara. Pošto štap vrši rotacijsko kretanje u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar masa, pogodno je izabrati ishodište koordinatnog sistema u centru masa štapa. Pri tome vrijedi

$$\frac{L}{2} m_d v_d \vec{k} = \frac{L}{2} m_d v'_d \vec{k} + I \omega \vec{k}, \quad (2.5)$$

odnosno

$$\frac{L}{2} m_d v_d = \frac{L}{2} m_d v'_d + I \omega. \quad (2.6)$$

Jednačine (2.2), (2.3) i (2.6) predstavljaju sistem od tri jednačine u kojima je nepoznata brzina diska, brzina centra masa štapa i ugaona brzina štapa, a sve nakon sudara. Na osnovu jednačina (2.2) i (2.6) dobijamo

$$m_{\text{s}}v'_{\text{s}} = \frac{2I\omega}{L}, \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{6v'_{\text{s}}}{L}, \quad (2.7)$$

gdje smo iskoristili da je moment inercije štapa u odnosu na osu koja prolazi kroz njegov centar masa $I = m_{\text{s}}L^2/12$. Ako prethodni izraz uvrstimo u jednačinu (2.3) dobijamo

$$m_{\text{d}}v_{\text{d}}^2 - m_{\text{d}}v'_{\text{d}}{}^2 = m_{\text{s}}v'_{\text{s}}{}^2 + 3m_{\text{s}}v'_{\text{s}}{}^2. \quad (2.8)$$

Iz prethodne jednačine dobijamo

$$m_{\text{d}}(v_{\text{d}} - v'_{\text{d}})(v_{\text{d}} + v'_{\text{d}}) = 4m_{\text{s}}v'_{\text{s}}{}^2. \quad (2.9)$$

Kada ovu jednačinu podijelimo s jednačinom (2.2) napisanu u obliku $m_{\text{d}}(v_{\text{d}} - v'_{\text{d}}) = m_{\text{s}}v'_{\text{s}}$, dobijamo linearnu vezu brzine diska i štapa prije i poslije sudara

$$v_{\text{d}} + v'_{\text{d}} = 4v'_{\text{s}}. \quad (2.10)$$

Ova jednačina sada zajedno s jednačinom (2.2) predstavlja sistem od dvije linearne jednačine s dvije nepoznate veličine. Ako iz druge izrazimo brzinu štapa i uvrstimo u prvu dobijamo

$$m_{\text{d}}v_{\text{d}} = m_{\text{d}}v'_{\text{d}} + \frac{1}{4}m_{\text{s}}v_{\text{d}} + \frac{1}{4}m_{\text{s}}v'_{\text{d}}, \quad (2.11)$$

odnosno

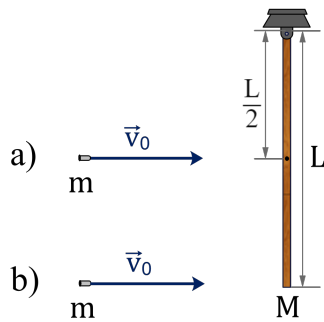
$$v'_{\text{d}} = \frac{4m_{\text{d}} - m_{\text{s}}}{4m_{\text{d}} + m_{\text{s}}}v_{\text{d}} = \frac{7}{3} \text{ m s}^{-1}. \quad (2.12)$$

Sada možemo odrediti linearnu brzinu centra masa štapa nakon sudara

$$v'_{\text{s}} = \frac{1}{4}(v_{\text{d}} + v'_{\text{d}}) = \frac{4}{3} \text{ m s}^{-1}. \quad (2.13)$$

Ugaona brzina štapa je

$$\omega = \frac{6v'_{\text{s}}}{L} = 2 \text{ rad s}^{-1}. \quad (2.14)$$



Slika 11.7: Uz zadatak 3.

ZADATAK 3: Drvena greda dužine $L = 2$ m mase $M = 5$ kg obješena je za jedan kraj i miruje kao što je prikazano na slici 11.7. U gredu udari metak mase $m = 12$ g koji leti u horizontalnom pravcu brzinom $v_0 = 500$ m s⁻¹.

- a) Za koji ugao će se otkloniti greda ako metak udari u sredinu grede i ostane u njoj?
- b) Koliki je ugao otklona kada metak udari u slobodni kraj grede i ostane u njoj?

Rješenje:

a) Posmatrajmo dva događaja unutar sistema koji se sastoji od metka mase m i grede mase M i dužine L : sudar metka i grede i kretanje metka i grede nakon sudara. Na posmatrani sistem djeluje sila Zemljine teže i sila objesišta. Kada je greda u ravnotežnom položaju ove dvije sile će se međusobno poništiti. Međutim, ako se greda pomjeri iz početnog položaja, što će se desiti sudarom s metkom, rezultujuća sila je različita od nule pa impuls sistema nije očuvan. Pošto metak ostaje u gredi, on je jednim djelom deformiše tako da je sudar metka i grede idealno neelastičan pa mehanička energija prilikom sudara nije očuvana. Ukoliko izaberemo ishodište koordinatnog sistema u osi rotacije grede (objesište grede, slika 11.8) onda je vektor sile Zemljine teže kolinearan s vektorom koji spaja osu rotacije i napadnu tačku ove sile (centar masa), te je moment sile Zemljine teže u trenutku sudara jednak nuli. Pored toga, moment sile objesišta je također jednak nuli (jer ova sila ima napadnu tačku u osi rotacije), pa je moment impulsa sistema metak-greda prilikom sudara očuvan.

Zakon očuvanja momenta impulsa za sudar metka impulsa \vec{p}_0 i grede glasi

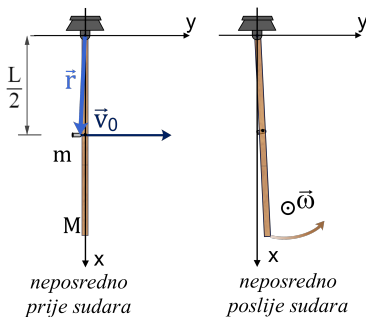
$$\vec{r} \times \vec{p}_0 = I\omega\vec{k}, \quad (3.1)$$

gdje je \vec{r} radijus vektor položaja metka neposredno prije sudara, zbog čega možemo uzeti da je njegov intenzitet $r = \frac{L}{2}$, a I je moment inercije metka i grede koji se kreću nakon sudara. Iz prethodne jednačine dobivamo

$$\frac{L}{2}mv_0 = (mr^2 + I_g)\omega \quad (3.2)$$

gdje je $r = \frac{L}{2}$, a $I_g = \frac{ML^2}{3}$ moment inercije grede u odnosu na osu koja prolazi kroz njen kraj. Iz prethodne jednačine slijedi da je ugaona brzina grede i metka neposredno poslije sudara jednaka

$$\frac{L}{2}mv_0 = \left(m\frac{L^2}{4} + \frac{ML^2}{3}\right)\omega \quad \rightarrow \quad \omega = \frac{6m}{3m + 4M} \frac{v_0}{L} = 0,9 \text{ rad s}^{-1}. \quad (3.3)$$



Slika 11.8: Uz rješenje zadatka 3a.

Nakon sudara, metak i greda se kreću zajedno, početnom ugaonom brzinom ω . Tokom kretanja ova dva tijela, moment sile Zemljine teže je različit od nule pa moment impulsa ovog sistema nije očuvan, dok je rad sile objesišta $A = M\Delta\phi$ pri pomjeranju tijela za ugao $\Delta\phi$ jednak nuli (jer je moment sile objesišta jednak nuli). S obzirom da je sila Zemljine teže konzervativna sila, mehanička energija sistema metak-greda-Zemlja tokom kretanja je očuvana. Zakon očuvanja mehaničke energije glasi

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (3.4)$$

odnosno

$$0 - \frac{I\omega^2}{2} + (m + M)g\Delta h = 0, \quad (3.5)$$

gdje je Δh prirast visine centra masa sistema metak-greda (slika 11.9). Iz prethodne jednačine slijedi

$$\Delta h = \frac{\left(m\frac{L^2}{4} + M\frac{L^2}{3}\right)\omega^2}{2(m + M)g} = \frac{3m + 4M}{24(m + M)} \frac{\omega^2 L^2}{g} = 5,5 \text{ cm} \quad (3.6)$$

Veza između ugla otklona i prirasta visine se može dobiti kao (slika 11.9)

$$\cos \Delta\phi = \frac{\frac{L}{2} - \Delta h}{\frac{L}{2}} = 1 - \frac{2\Delta h}{L}. \quad (3.7)$$

Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je ugao otklona $\Delta\phi = 19,1^\circ$.

b) Zakon očuvanja momenta impulsa sistema metak-greda prilikom sudara ova dva tijela sada glasi

$$Lmv_0 = \left(mL^2 + \frac{ML^2}{3}\right)\omega' \quad (3.8)$$

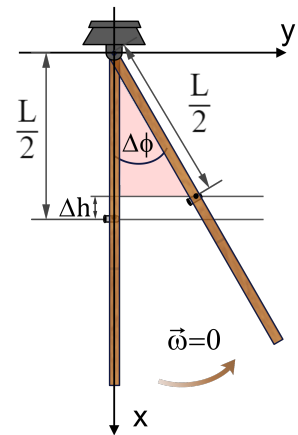
gdje je ω' ugaona brzina sistema metak-greda neposredno nakon udara. Odavde dobijamo da je

$$\omega' = \frac{3m}{3m + M} \frac{v_0}{L} = 1,79 \text{ rad s}^{-1} \quad (3.9)$$

Nakon što metak udari u kraj grede i ostane u njoj, položaj centra masa sistema ova dva tijela će se promijeniti u odnosu na položaj centra masa sistema iz prethodnog dijela zadatka (metak je udario u centar masa grede pa se on nije mijenjao). Položaj centra masa sistema metak-greda određen je s

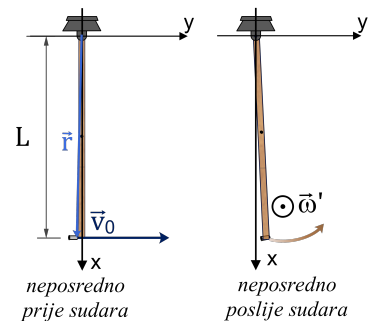
$$x_{\text{cm}} = \frac{M\frac{L}{2} + mL}{m + M} = 1,0024 \text{ m}. \quad (3.10)$$

Vidimo da se centar masa pomjerio samo za nešto više od dva milimetra, što je uzrokovano relativno malom masom metka u odnosu na masu grede.



Slika 11.9: Uz rješenje zadatka 3a.

Napomena: Pošto je masa grede za oko tri reda veličine veća od mase metka onda se masa metka u izrazu (3.6) može zanemariti u odnosu na masu grede pa se dobije $\Delta h = \frac{\omega^2 L^2}{6g} = 5,5 \text{ cm}$



Slika 11.10: Uz rješenje zadatka 3b.

Promjenu visine centra masa možemo odrediti iz zakona očuvanja energije (3.5) na osnovu kojeg dobijamo

$$\Delta h = \frac{(mL^2 + M\frac{L^2}{3})\omega'^2}{2(m+M)g} = \frac{3m+M}{6(m+M)}\frac{\omega'^2 L^2}{g} = 21,88 \text{ cm} \quad (3.11)$$

Veza između ugla otklona i prirasta visine centra masa sistema data je kao

$$\cos \Delta\phi = \frac{x_{\text{cm}} - \Delta h}{x_{\text{cm}}} = 1 - \frac{\Delta h}{x_{\text{cm}}}, \quad (3.12)$$

pa uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobijamo da je ugao otklona $\Delta\phi = 38,58^\circ$.

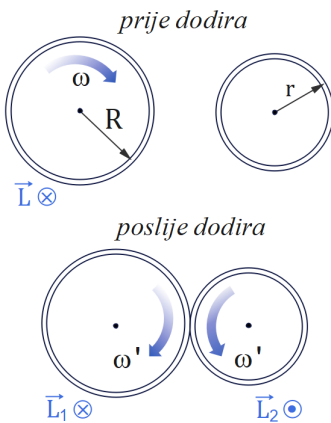
ZADATAK 4: Cilindar mase M i radijusa R obrće se oko svoje ose ugaonom brzinom ω . Drugi cilindar mase m i radijusa r miruje. Oba cilindra su šuplja i imaju veoma tanke zidove. Cilindri se dovedu u dodir tako da njihove ose ostanu paralelne i nakon određenog vremena cilindri se počnu obrtati bez proklizavanja. Naći kolika količina energije se pretvorila u toplotnu energiju uslijed proklizavanja. Moment inercije šupljeg cilindra je $I = mr^2$.

Rješenje:

Na sistem koji se sastoji od dva cilindra i koji rotiraju oko osa koje prolaze kroz centar masa ne djeluju vanjski momenti sile (moment sile objesišta i sile Zemljine teže jednak je nuli jer obje sile imaju napadnu tačku u osi rotacije). U trenutku kada se ova dva cilindra dovedu u dodir, počne djelovati kinetička sila trenja koja uzrokuje moment sile i na jedan i na drugi cilindar, te se zbog toga ugaona brzina cilindra počinje mijenjati (slika 11.11). Sila trenja između dva cilindra je unutrašnja nekonzervativna sila, pa mehanička energija sistema neće biti očuvana. Međutim, pošto nema vanjskih momenata sila ukupni moment impulsa sistema je očuvan, pa se zakon očuvanja momenta impulsa može pisati kao

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2, \quad (4.1)$$

gdje je \vec{L} vektor momenta impulsa cilindra koji rotira prije dodira, a \vec{L}_1 i \vec{L}_2 vektori momenta impulsa cilindra nakon dodira (slika 11.11). Ova relacija vrijedi tokom kretanja oba cilindra bez obzira kolika je vrijednost sile trenja. Nakon dodira cilindar mase M nastavi rotirati u istom smjeru, ali njegova ugaona brzina se zbog djelovanja momenta sile počne smanjivati. Cilindar mase m počne rotirati u suprotnom smjeru i njegova ugaona brzina počne rasti. Nakon određenog vremena cilindri će prestati proklizavati te će se kretati ugaonom brzinom konstantnog intenziteta, ali suprotnih smjerova. Kako



Slika 11.11: Uz rješenje zadatka 4.

su vektori ugaone brzine orijentisani duž istog pravca, ali suprotnog smjera i vektori momenta impulsa cilindra će nakon dodira imati suprotne smjerove, pa projekcijom vektora iz prethodne jednačine dobijamo

$$L = L_1 - L_2, \quad (4.2)$$

odnosno

$$I_1\omega = I_1\omega' - I_2\omega'. \quad (4.3)$$

Ako u prethodnu relaciju uvrstimo izraze za moment inercije šupljeg cilindra tankih zidova, dobijamo ugaonu brzinu cilindra ω' nakon dovoljno dugog vremena, kada cilindri prestanu proklizavati

$$\omega' = \frac{MR^2}{MR^2 - mr^2}\omega. \quad (4.4)$$

Obzirom da na ova dva tijela djeluje kinetička sila trenja, ukupna mehanička energija nije očuvana. Zbog djelovanja sile trenja jedan dio mehaničke energije pretvorio se u toplotnu energiju. Razlika mehaničke energije sistema prije i poslije djelovanja sile trenja jednaka je količini toplotne energije koja se pri tome oslobodila, pa je

$$Q = E_{k1} - E_{k2} = \frac{I_1\omega^2}{2} - \frac{(I_1 + I_2)\omega'^2}{2}. \quad (4.5)$$

Na osnovu prethodne dvije relacije slijedi

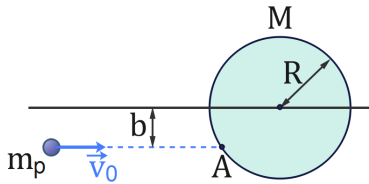
$$Q = \frac{MR^2\omega^2}{2} - \frac{(MR^2 + mr^2)\frac{M^2R^4}{(MR^2 - mr^2)^2}\omega^2}{2}, \quad (4.6)$$

odnosno

$$Q = \left(1 - \frac{(MR^2 + mr^2)MR^2}{(MR^2 - mr^2)^2}\right) \frac{MR^2\omega^2}{2}. \quad (4.7)$$

Nakon sređivanja prethodnog izraza konačno dobijamo da je količina toplote koja se oslobodila

$$Q = \frac{mr^2 - 3MR^2}{(MR^2 - mr^2)^2} \frac{mMr^2R^2\omega^2}{2}. \quad (4.8)$$



Slika 11.12: Uz zadatak 5.

ZADATAK 5: Projektil mase m_p se kreće konstantnom brzinom v_0 prema stacionarnom disku mase M i poluprečnika R koji može slobodno da rotira oko osovine koja prolazi kroz njegov centar. Prije udara, projektil se kreće duž linije pomjerene za rastojanje b ispod ose. Projektil udari u disk i zalijepi se za njega u tački A (slika 11.12). Projektil smatramo tačkastim tijelom.

- Koliki je ukupni moment impulsa projektila i diska prije udara?
- Kolika je ugaona brzina sistema disk-projektil neposredno nakon udara?
- Kolika je kinetička energija tog sistema nakon udara?
- Koliko se mehaničke energije gubi pri udaru?

Rješenje:

Posmatrajmo sistem koji se sastoji od projektila i diska. Na disk djeluju sila Zemljine teže i sila objesišta koje se međusobno ponište. Na projektil djeluje sila Zemljine teže koja neće bitno uticati na njegovo kretanje u vremenskom intervalu u kojem se sudar desi. Nakon sudara disk i projektil se kreću zajedno, pa će sila Zemljine teže na ovaj sistem biti uravnotežena silom objesišta koja se nakon sudara povećala. Nakon svega, možemo zaključiti da je ukupan moment vanjskih sila koje djeluju na sistem jednak nuli, te je zbog toga moment impulsa sistema očuvan.

a) Neposredno prije udara moment impulsa diska jednak je nuli, s obzirom da je bio u stanju mirovanja, te je ukupan moment sistema jednak momentu impulsa projektila

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_p = \vec{r} \times \vec{p}_p \quad (5.1)$$

gdje je \vec{r} radijus vektor položaja projektila neposredno prije sudara. Izabraćemo referentni sistem tako da mu je ishodište postavljeno u centar diska kao što je prikazano na slici 11.13. Tada je ukupan moment impulsa neposredno prije sudara

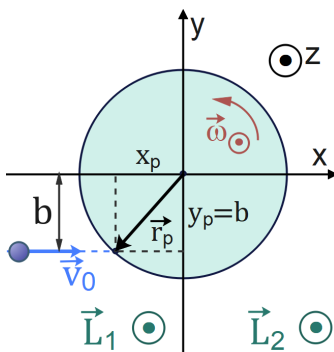
$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times \vec{p}_p = (x_p \vec{i} + y_p \vec{j}) \times m_p v_0 \vec{i} = m_p y_p v_0 \vec{j} \times \vec{i} = m_p b v_0 \vec{k}, \quad (5.2)$$

gdje smo iskoristili da je $y_p = -b$, $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ i $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$.

b) Ukupan moment impulsa sistema je očuvan te možemo pisati da je

$$\vec{L}_1 = \vec{L}_2, \quad (5.3)$$

gdje je \vec{L}_2 moment impulsa sistema nakon sudara. Nakon sudara, disk će početi rotirati u smjeru suprotnom od smjera kazaljke na satu pa je vektor ugaone brzine usmjeren u pozitivnom smjeru z-ose,



Slika 11.13: Uz rješenje zadatka 5.

te zbog toga i vektor momenta impulsa sistema nakon sudara ima pozitivan smjer z-ose. Zbog toga možemo pisati

$$L_1 = L_2, \quad (5.4)$$

odnosno

$$bm_p v_0 = I\omega \quad (5.5)$$

odakle dobijamo da je tražena ugaona brzina

$$\omega = \frac{bm_p v_0}{I}, \quad (5.6)$$

gdje je moment inercije sistema I jednak sumi momenata inercije projektila i diska

$$I = \frac{1}{2}MR^2 + m_p b^2. \quad (5.7)$$

Iz prethodne dvije jednačine dobivamo da je ugaona brzina sistema neposredno nakon sudara

$$\omega = \frac{bm_p v_0}{\frac{1}{2}MR^2 + m_p b^2} = \frac{2bm_p v_0}{MR^2 + 2m_p b^2}. \quad (5.8)$$

c) Kinetičkoj energiji sistema nakon sudara doprinosi samo kinetička energija rotacije sistema projektil-disk koju možemo izraziti preko momenta impulsa L_2 kao

$$E_{k2} = \frac{L_2^2}{2I}, \quad (5.9)$$

što nakon sređivanja daje

$$E_{k2} = \frac{(bm_p v_0)^2}{2\left(\frac{1}{2}MR^2 + m_p b^2\right)} = \frac{(bm_p v_0)^2}{MR^2 + 2m_p b^2}. \quad (5.10)$$

d) Energija koja je izgubljena pri sudaru jednaka je razlici kinetičke energije sistema prije i poslije sudara

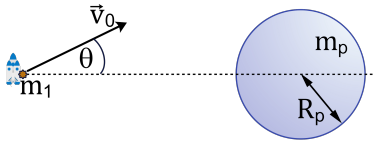
$$\Delta E_k = E_{k1} - E_{k2}. \quad (5.11)$$

Prije sudara kinetičku energiju je imao samo projektil uslijed translatornog kretanja brzinom v_0 , te je ukupna energija neposredno prije sudara

$$E_{k1} = \frac{m_p v_0^2}{2}. \quad (5.12)$$

Količina energije koja se izgubila u sudaru je

$$\Delta E_k = \frac{m_p v_0^2}{2} - \frac{(bm_p v_0)^2}{MR^2 + 2m_p b^2} = \frac{m_p v_0^2}{2} \left(1 - \frac{2b^2 m_p}{MR^2 + 2m_p b^2}\right). \quad (5.13)$$



Slika 11.14: Uz zadatak 6.

ZADATAK 6: Svemirska letjelica je poslana u cilju istraživanja planete mase m_p i radijusa R_p . Dok stoji nepomično u svemiru na rastojanju $5R_p$ od centra planete, iz letjelice se ispaljuje paket s instrumentima za mjerenje čija je masa m_1 mnogo manja od mase letjelice. Paket je ispaljen brzinom v_0 pod uglom θ u odnosu na pravac koji spaja centar planete i letjelicu kao na slici 11.14. Pri kojoj vrijednosti ugla θ će paket samo okružiti površinu planete?

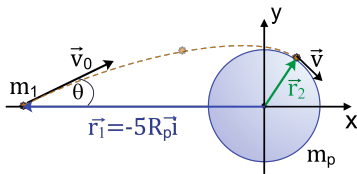
Rješenje:

Posmatračemo sistem koji se sastoji od planete i paketa koji je izbačen sa letjelice i kreće se pod uticajem gravitacionog polja planete. Gravitaciona sila kojom planeta djeluje na paket \vec{F}_p usmjerena je uvijek prema centru planete. Izaberimo koordinatni sistem tako da mu je ishodište u centru planete, a ose usmjerene kao na slici 11.15. Tada će vektor položaja paketa \vec{r} i vektor gravitacione sile na paket imati iste pravce i suprotne smjerove pa će moment sile gravitacije u odnosu na osu koja prolazi kroz centar planete

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_p, \quad (6.1)$$

biti jednak nuli. U tom slučaju, moment impulsa sistema paket-planeta u odnosu na izabrani referentni sistem je očuvan. Moment impulsa planete se ne mijenja, pa prema tome moment impulsa paketa mora biti očuvan.

Početni moment impulsa paketa u odnosu na osu koja prolazi kroz centar planete je



Slika 11.15: Uz rješenje zadatka 6.

$$\begin{aligned} \vec{L}_1 &= \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_0 = -5R_p \vec{i} \times (m_1 v_{0x} \vec{i} + m_1 v_{0y} \vec{j}) = \\ &= -5R_p m_1 v_{0y} \vec{i} \times \vec{j} = -5R_p m_1 v_0 \sin \theta \vec{k}, \end{aligned} \quad (6.2)$$

pri čemu smo radijus vektor paketa izrazili preko jediničnog vektora x ose kao $\vec{r}_1 = -5R \vec{i}$, vektor početne brzine smo razložili na komponente $\vec{v} = v_{0x} \vec{i} + v_{0y} \vec{j} = v_0 \cos \theta \vec{i} + v_0 \sin \theta \vec{j}$, te iskoristili činjenicu da je vektorski proizvod $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$ i $\vec{i} \times \vec{i} = 0$.

Moment impulsa paketa kada je neposredno pored površine planete je

$$\vec{L}_2 = \vec{r}_2 \times m_1 \vec{v} = -R_p m_1 v \sin 90^\circ \vec{k} = -R_p m_1 v \vec{k}, \quad (6.3)$$

gdje smo uzeli da je $r_2 = R$ jer paket dodiruje površinu planete, v njegova brzina u tom trenutku, a njegov smjer smo odredili na osnovu pravila vektorskog proizvoda. Također smo iskoristili činjenicu da paket samo okružuje planetu u smislu da brzina \vec{v} ima pravac tangente na planetu, što nas je dovelo do zaključka da su vektori \vec{r}_2 i \vec{v} međusobno okomiti.

Napomena: Intenzitet momenta impulsa $\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_0$ smo mogli odrediti i preko formule vektorskog proizvoda kao $L_1 = r_1 m v_0 \sin \angle(\vec{r}_1, \vec{v}_0) = r_1 m v_0 \sin(180^\circ - \theta) = 5R m_1 v_0 \sin \theta$.

S obzirom da je moment impulsa očuvan, te da su oba usmjerena u negativnom smjeru z ose, možemo izjednačiti prethodne dvije jednačine i dobiti

$$5R_p m_1 v_0 \sin \theta = R_p m_1 v, \quad (6.4)$$

što nakon sređivanja daje krajnju brzinu

$$v = 5v_0 \sin \theta. \quad (6.5)$$

Na paket ne djeluju nikakve nekonzervativne sile, pa je i mehanička energija očuvana

$$E_1 = E_2. \quad (6.6)$$

Ako uzmemo da je potencijalna energija jednaka nuli na beskonačnoj udaljenosti od planete, zakon održanja mehaničke energije možemo napisati u obliku

$$\frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \gamma \frac{m_1 m_p}{5R_p} = \frac{1}{2} m_1 v^2 - \gamma \frac{m_1 m_p}{R_p}. \quad (6.7)$$

Nakon uvrštavanja izraza za brzinu (6.5) i sređivanja dobijenog izraza slijedi:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m_1 v_0^2 - \gamma \frac{m_1 m_p}{5R_p} &= \frac{1}{2} m_1 (5v_0 \sin \theta)^2 - \gamma \frac{m_1 m_p}{R_p} \\ \gamma \frac{4m_p}{5R_p} &= \frac{1}{2} v_0^2 (25 \sin^2 \theta - 1) \end{aligned} \quad (6.8)$$

odakle možemo izraziti traženi ugao kao

$$\sin \theta = \frac{1}{5} \sqrt{\frac{8\gamma m_p}{5R_p v_0^2} + 1}, \quad (6.9)$$

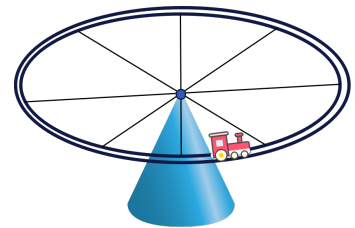
odnosno

$$\theta = \arcsin \left(\frac{1}{5} \sqrt{\frac{8\gamma m_p}{5R_p v_0^2} + 1} \right). \quad (6.10)$$

ZADATAK 7: Igračka lokomotiva mase m_L kreće se po horizontalnoj kružnoj stazi radijusa R i mase m kao na slici 11.16. Staza je na obodu točka zanemarive mase koji može da rotira oko vertikalne ose koja prolazi kroz njegov centar. Lokomotiva kreće iz stanja mirovanja i ubrzava bez proklizavanja do konačne brzine v u odnosu na stazu. Kolika je krajnja brzina lokomotive v' u odnosu na pod?

Rješenje:

Na sistem lokomotiva-staza ne djeluje moment neke vanjske sile u odnosu na osu koja prolazi kroz centar točka, zbog čega možemo



Slika 11.16: Uz zadatak 7.

¹ **Napomena:** strogo gledajući, na sistem djeluje moment sile Zemljine teže i moment sile reakcije osovine, ali sve dok se ne mijenja ravan točka ova dva momenta se poništavaju pa je rezultujući moment sile jednak nuli.

smatrati da je moment impulsa u odnosu na tu osu očuvan ¹. Početni moment impulsa je jednak nuli jer sistem u početnom trenutku miruje. Krajnji moment impulsa je jednak sumi momenta impulsa lokomotive i staze $\vec{L}_2 = \vec{L}_L + \vec{L}_S$.

Prema slici 11.16 lokomotiva se obrće u smjeru suprotnom od smjera kazaljki na satu, što znači da će staza onda rotirati u smjeru kazaljki. Ako izaberemo z-osu tako da je usmjerena od poda prema gore i prolazi kroz centar staze, momenti impulsa lokomotive i staze će biti u pravcu izabrane ose, ali suprotnog smjera. Moment impulsa staze je

$$\vec{L}_{S,2} = -I_S \omega_S \vec{k} = -mR^2 \omega_S \vec{k}, \quad (7.1)$$

gdje smo uzeli da je staza oblika prstena, te joj je moment inercije $I_S = mR^2$. Moment impulsa lokomotive je

$$\vec{L}_L = I_L \omega_L \vec{k} = mR^2 \frac{v'}{R} \vec{k} = mRv' \vec{k}, \quad (7.2)$$

gdje je v' relativna brzina lokomotive u odnosu na pod

$$\vec{v}' = \vec{v} + \vec{v}_S, \quad (7.3)$$

što nakon projekcije daje

$$v' = v - \omega_S R \quad (7.4)$$

gdje smo iskoristili činjenicu da su linijske brzine lokomotive i tačke na stazi (na mjestu gdje se nalazi lokomotiva) suprotnog smjera. Iz posljednje jednačine ćemo izraziti ugaonu brzinu kao

$$\omega_S = \frac{v - v'}{R}. \quad (7.5)$$

Sada možemo napisati zakon očuvanja momenta impulsa kao

$$0 = \vec{L}_L + \vec{L}_S, \quad (7.6)$$

$$0 = mRv' \vec{k} - mR^2 \frac{v - v'}{R} \vec{k}, \quad (7.7)$$

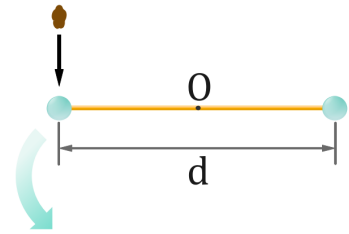
odakle ćemo dobiti traženu brzinu:

$$m_L R v' = m R (v - v'), \quad (7.8)$$

odnosno

$$v' = \frac{m}{m_L + m} v. \quad (7.9)$$

ZADATAK 8: Dvije loptice jednakih masa $M = 2 \text{ kg}$ pričvršćene su na krajeve tankog štapa dužine $d = 50 \text{ m}$ i zanemarive mase kao na slici 11.17. Štap može slobodno rotirati u vertikalnoj ravni bez trenja oko horizontalne ose koja prolazi kroz njegovo središte. Štap je zajedno sa kuglicama prvobitno postavljen u horizontalni položaj. Na jednu od kuglica pada $m = 50 \text{ g}$ mokre gline, udarajući je brzinom od $v = 3 \text{ m s}^{-1}$, a zatim se zalijepi za nju.



Slika 11.17: Uz zadatak 8.

- Kolika je ugaona brzina sistema odmah nakon udarca gline?
- Koliki je omjer kinetičke energije sistema nakon sudara u odnosu na kinetičku energiju gline neposredno prije udarca?
- Za koji ugao će se sistem zarotirati prije nego što se zaustavi?

Rješenje:

a) Štap i dvije kugle ćemo posmatrati kao jedno kruto tijelo sa centrom masa u osi rotacije. Jasno je da je rezultujuća sila a i moment sile na ovo tijelo jednak nuli (sila Zemljine teže i sila reakcije objesa su istog intenziteta a suprotnog smjera i obje djeluju u osi rotacije). U veoma kratkom vremenskom intervalu od trenutka neposredno prije nego što glina udari štap, pa sve do trenutka kada udari i zalijepi se, efekat djelovanja sile Zemljine teže na kretanje gline je zanemariv pa je moment impulsa sistema tijelo-glina, u vremenskom intervalu u kojem se desi sudar, očuvan. Izabraćemo koordinatni sistem tako da je njegovo ishodište u osi rotacije i da je pri tome z-osa okomita na ravan u kojoj štap rotira. Tada je moment impulsa komada gline određen sa

$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m \vec{v} = mv \frac{d}{2} \vec{k}, \quad (8.1)$$

dok je moment impulsa tijela prije udara jednak nuli. Nakon što glina udari u kuglicu, sistem počne da rotira ugaonom brzinom ω i momentom impulsa $\vec{L}_2 = I \omega \vec{k}$ pri čemu je I moment inercije sistema. S obzirom da je masa štapa zanemariva, uzimamo da se sistem sastoji od kuglica i gline, te je moment inercije jednak

$$I = 2M \left(\frac{d}{2}\right)^2 + m \left(\frac{d}{2}\right)^2 = (2M + m) \left(\frac{d}{2}\right)^2. \quad (8.2)$$

Sada će zakon očuvanja momenta impulsa glasiti

$$mv \frac{d}{2} = (2M + m) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega, \quad (8.3)$$

iz kojeg dobijamo traženu ugaonu brzinu

$$\omega = \frac{2mv}{(2M + m)d} = 0,148 \text{ rad s}^{-1}. \quad (8.4)$$

b) Početna kinetička energija sistema jednaka je kinetičkoj energiji gline

$$E_{k1} = \frac{1}{2}mv^2, \quad (8.5)$$

dok je kinetička energija poslije udara jednaka kinetičkoj energiji rotacije sistema

$$E_{k2} = \frac{1}{2}I\omega^2. \quad (8.6)$$

Omjer kinetičke energije sistema nakon sudara u odnosu na kinetičku energiju gline neposredno prije udarca je

$$\frac{E_{k2}}{E_{k1}} = \frac{I\omega^2}{mv^2} = \frac{(2M+m) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \left(\frac{2mv}{(2M+m)d}\right)^2}{mv^2} = \frac{m}{2M+m} = 0,0123. \quad (8.7)$$

c) Nakon sudara rezultujući moment sile na sistem različit je od nule jer na komad gline djeluje sila Zemljine teže, te zbog toga moment impulsa sistema tokom kretanja u gravitacionom polju nije očuvan. Međutim, pošto je sila Zemljine teže unutrašnja konzervativna sila (ako našem sistemu pridodamo i Zemlju), onda je ukupna mehanička energija sistema očuvana. Ako se jedna od kuglica spusti za visinu h , druga kuglica će se podići za istu tu visinu i suma potencijalnih energija kuglica se ne mijenja. Potrebno je razmotriti samo gravitacionu potencijalnu energiju gline. Glina se kreće duž luka od 90° da bi dostigla najnižu tačku svoje putanje, pri čemu dobija kinetičku energiju i gubi gravitacionu potencijalnu energiju. Zatim se penje za neki ugao θ , gubeći kinetičku energiju, na račun potencijalne energije, dok se ne zaustavi. Neka najniža tačka na putanji bude tačka s nultom potencijalnom energijom. Dakle, glina kreće s visine $\frac{d}{2}$ na kojoj joj je potencijalna energija

$$E_{p1} = mg\frac{d}{2}. \quad (8.8)$$

U trenutku kada se glina zaustavi, štap je otklonjen za ugao θ u odnosu na vertikalu kao na slici 11.18, pa je njena potencijalna energija jednaka

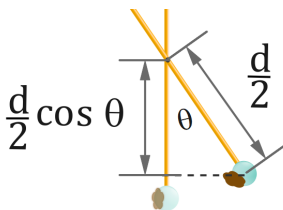
$$E_{p2} = mg\frac{d}{2}(1 - \cos\theta). \quad (8.9)$$

Početna kinetička energija sistema jednaka je sumi kinetičkih energija kuglica i gline

$$E_{k1} = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(2M+m) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2. \quad (8.10)$$

Krajnja kinetička energija je jednaka nuli, te zakon održanja mehaničke energije možemo napisati kao

$$mg\frac{d}{2} + \frac{1}{2}(2M+m) \left(\frac{d}{2}\right)^2 \omega^2 = mg\frac{d}{2}(1 - \cos\theta). \quad (8.11)$$



Slika 11.18: Uz rješenje zadatka 8c.

Rješavanjem gornje jednačine po θ dobijamo

$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \frac{2M + m}{mg} \frac{d}{2} \omega^2 = -0,0226, \quad (8.12)$$

$$\theta = \arccos 0,0226 = 91,3^\circ. \quad (8.13)$$

Prema tome, ugao za koji će se zarotirati štap sa kuglicama, nakon pada komada gline, iznosi $\alpha = \theta + 90^\circ = 181,3^\circ$.

ZADATAK 9: Metalni štap dužine $L_1 = 1,2$ m i mase $M = 2$ kg obješen je o jedan svoj kraj tako da može slobodno rotirati u vertikalnoj ravni. U početnom trenutku štap se nalazi u horizontalnom položaju. O istu tačku obješena je kuglica mase m pomoću tanke niti dužine $L_2 = 0,8$ m kao na slici 11.19. Nakon što se pusti iz horizontalnog položaja, štap se sudara s kuglicom i oba tijela se nastavljuju kretati zajedno sve dok ne dostignu maksimalni ugao odklona $\theta_{\max} = 37^\circ$.

- Naći masu kuglice m .
- Odrediti gubitak energije prilikom sudara štapa i kuglice.

Rješenje:

a) U analizi ovog zadatka posmatračemo tri uzastopna procesa: kretanje štapa do trenutka sudara, sudar štapa i kuglice i kretanje štapa i kuglice nakon sudara. Tokom kretanja štapa od početnog položaja pa do trenutka sudara na njega djeluju sila objesišta i sila Zemljine teže. Moment sile objesišta jednak je nuli, a sila Zemljine teže je unutrašnja konzervativna sila (ako izaberemo sistem koji se sastoji od štapa i Zemlje), pa je moguće primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije na sistem Zemlja-štap pri kretanju od početnog položaja do trenutka sudara.

Neka je referentni nivo na udaljenosti L_1 ispod objesišta kao na slici 11.20. Zakon očuvanja mehaničke energije do trenutka sudara možemo pisati kao

$$\Delta E_k + \Delta E_p = 0, \quad (9.1)$$

odnosno

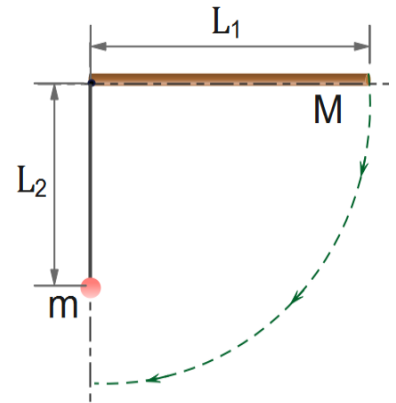
$$\frac{I\omega^2}{2} + \left(Mg \frac{L_1}{2} - MgL_1 \right) = 0. \quad (9.2)$$

Moment inercije štapa u odnosu na osu rotacije iznosi

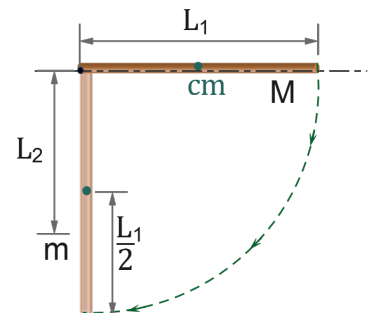
$$I = I_0 + M \left(\frac{L_1}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ML_1^2 + \frac{1}{4} ML_1^2 = \frac{1}{3} ML_1^2, \quad (9.3)$$

pa iz zakona čuvanja mehaničke energije dobijemo:

$$\frac{1}{6} ML_1^2 \omega^2 - \frac{MgL_1}{2} = 0, \quad (9.4)$$



Slika 11.19: Uz zadatak 9.



Slika 11.20: Uz rješenje zadatka 9a.

odnosno

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L_1}}. \quad (9.5)$$

Kako ne djeluju nikakvi vanjski momenti sile u trenutku sudara, možemo primijeniti zakon održanja momenta impulsa na sistem štap-kuglica:

$$I\omega = I\omega' + mL_2^2\omega' \quad (9.6)$$

gdje je ω' ugaona brzina štapa i kuglice neposredno nakon sudara, a koordinatni sistem smo izabrali tako da je njegovo ishodište u obje-stištu štapa i kuglice. Uvrštavanjem izraza za moment inercije štapa i rješavanjem po ω' dobijamo

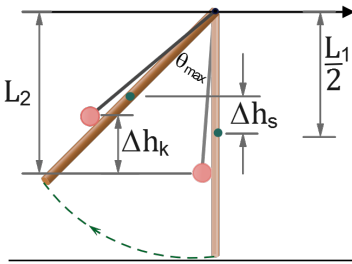
$$\omega' = \frac{\frac{1}{3}ML_1^2\omega}{\frac{1}{3}ML_1^2 + mL_2^2} = \frac{ML_1^2}{ML_1^2 + 3mL_2^2} \sqrt{\frac{3g}{L_1}}. \quad (9.7)$$

Sada ćemo posmatrati sistem koji se sastoji od štapa, kuglice i Zemlje i ponovo primijeniti zakon očuvanja mehaničke energije od trenutka neposredno nakon sudara pa do zaustavljanja štapa i kuglice

$$(\Delta E_k)_s + (\Delta E_k)_k + (\Delta E_p)_s + (\Delta E_p)_k = 0, \quad (9.8)$$

odnosno

$$-\frac{1}{2}I\omega'^2 - \frac{1}{2}mL_2^2\omega'^2 + Mg\Delta h_s + mg\Delta h_k = 0. \quad (9.9)$$



Slika 11.21: Uz rješenje zadatka 9a.

Promjena visine štapa Δh_s računa se u odnosu na centar masa štapa (slika 11.21) i jednaka je $\Delta h_s = L_1/2(1 - \cos \theta_{\max})$, dok je promjena visine kuglice $\Delta h_k = L_2(1 - \cos \theta_{\max})$. Uvrštavanjem ovih izraza kao i izraza za ugaonu brzinu neposredno nakon sudara u izraz koji predstavlja zakon očuvanja mehaničke energije dobijamo

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{3}ML_1^2 + mL_2^2 \right) \left(\frac{ML_1^2}{ML_1^2 + 3mL_2^2} \right)^2 \frac{3g}{L_1} = \left(Mg \frac{L_1}{2} + mgL_2 \right) \times (1 - \cos \theta_{\max}). \quad (9.10)$$

Nakon sređivanja ova relacija postaje

$$\frac{M^2L_1^2}{1 - \cos \theta_{\max}} = (ML_1 + 2mL_2) (ML_1^2 + 3mL_2^2). \quad (9.11)$$

Množenjem zagrada na desnoj strani ovaj izraz se svodi na kvadratnu jednačinu po m

$$6L_2^3m^2 + ML_1L_2(3L_2 + 2L_1)m - M^2L_1^3 \frac{\cos \theta_{\max}}{1 - \cos \theta_{\max}} = 0. \quad (9.12)$$

Uvrštavajući vrijednosti dužine u metrima, a masu u kilogramima i $\cos \theta_{\max} \approx 0,8$ dobijamo kvadratnu jednačinu

$$m^2 + 3m - 9 = 0, \quad (9.13)$$

čije pozitivno rješenje iznosi $m = 1,85 \text{ kg}$.

b) Gubitak energije prilikom sudara određen je razlikom energije sistema štap-kuglica u konačnom i početnom stanju. Kako je kinetička energija ovog sistema u konačnom i početnom stanju jednaka nuli, promjena energije će biti jednaka promjeni potencijalne energije u ova dva stanja i iznosi

$$\Delta E = \Delta E_p = E_{pf} - E_{pi} = \left(Mg \frac{L_1}{2} + mgL_2 \right) (1 - \cos \theta_{\max}) - Mg \frac{L_1}{2}. \quad (9.14)$$

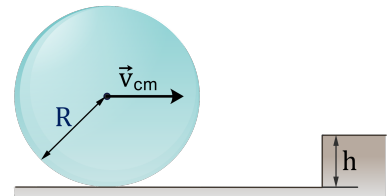
Uvrštavanjem brojnih vrijednosti dobivamo $\Delta E = -6,51 \text{ J}$. Predznak minus nam govori da se mehanička energija smanjila.

ZADATAK 10: Metalna kugla radijusa R kotrlja se po ravnoj površini brzinom v_{cm} i udara u stepenicu visine h ($h < R$) kao što je prikazano na slici 11.22. Sudar kugle i stepenice smatrati neelastičnim. Naći najmanju brzinu kugle, izraženu preko R i h , potrebnu da se ona popne na stepenicu. Moment inercije kugle u odnosu na osu koja prolazi kroz centar iznosi $I_0 = \frac{2}{5}MR^2$.

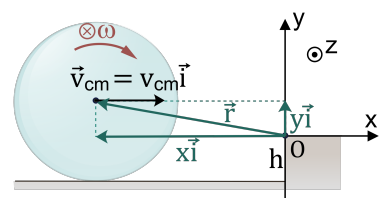
Rješenje:

Kugla se prvobitno kreće po horizontalnoj podlozi bez proklizavanja tako da je njena brzina centra masa v_{cm} povezana s ugaonom brzinom relacijom $v_{\text{cm}} = \omega R$. Kugla zatim udara o ivicu stepenice (tačka O na slici 11.23) i pri tome mijenja svoje kretanje. Kako je sudar kugle i stepenice neelastičan, mehanička energija sistema kugla-stepenica u procesu sudara nije očuvana. U trenutku sudara na kuglu djeluje sila Zemljine teže i sila reakcije podloge, koje se međusobno ponište, kao i kontaktna sila između kugle i stepenice. Zbog djelovanja ove sile, impuls kugle prilikom udara nije očuvan. Ukoliko izaberemo vrh stepenice kao ishodište koordinatnog sistema, moment kontaktne sile između kugle i stepenice biće jednak nuli, pa je moment impulsa kugle prilikom sudara sa stepenicom očuvan (pretpostavljamo da je stepenica dovoljno kruta da se ne pomjera i ne mijenja svoj impuls i moment impulsa).

Kao što smo naglasili u prethodnom poglavlju, kotrljanje tijela možemo smatrati kao superpoziciju translatornog kretanja centra masa i rotacionog kretanja oko ose koja prolazi kroz centar masa ili kao čisto rotaciono kretanje oko ose koja prolazi kroz dodirnu tačku tijela i podloge. Moment impulsa kugle prije sudara se prema tome može



Slika 11.22: Uz zadatak 10.



Slika 11.23: Uz rješenje zadatka 10.

prikazati kao suma momenta impulsa translatornog kretanja centra masa i momenta impulsa rotacionog kretanja oko centra masa, tj

$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times m\vec{v}_{\text{cm}} + I_0\vec{\omega}, \quad (10.1)$$

gdje je \vec{r} vektor položaja centra masa u odnosu na ishodište koordinatnog sistema. Vektor položaja se može prikazati kao $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, a vektor brzine centra masa kao $\vec{v}_{\text{cm}} = v_{\text{cm}}\vec{i}$, pa je

$$\vec{L}_1 = m(x\vec{i} + y\vec{j}) \times v_{\text{cm}}\vec{i} - I_0\omega\vec{k} = -myv_{\text{cm}}\vec{k} - I_0\omega\vec{k}, \quad (10.2)$$

gdje smo iskoristili da je $\vec{i} \times \vec{i} = 0$ i $\vec{i} \times \vec{j} = -\vec{k}$, te činjenicu da je smjer vektora ugaone brzine $\vec{\omega}$ suprotan smjeru z-ose. Kako je $y = R - h$ i $\omega = v_{\text{cm}}/R$ iz prethodne relacije dobijamo da je moment impulsa kugle neposredno prije sudara

$$\vec{L}_1 = - \left(mv_{\text{cm}}(R - h) + \frac{2}{5}mR^2\frac{v_{\text{cm}}}{R} \right) \vec{k} = - \left(\frac{7}{5}mv_{\text{cm}}R - mv_{\text{cm}}h \right) \vec{k}. \quad (10.3)$$

Neposredno nakon sudara kugla počinje rotirati oko dodirne tačke kugle i stepenice, tj. oko tačke O. Minimalna brzina kugle prije sudara se dobije za slučaj kada nema translatornog kretanja centra masa poslije sudara. Tako da je moment impulsa kugle neposredno poslije sudara određen čisto rotacionim kretanjem kugle u odnosu na tačku O i dat s

$$\vec{L}_2 = I\vec{\omega}_2 = - \left(I_0 + mR^2 \right) \omega_2\vec{k} = - \frac{7}{5}mR^2\omega_2\vec{k}. \quad (10.4)$$

Na osnovu zakona očuvanja momenta impulsa za sudar kugle i stepenice dobijamo

$$\frac{7}{5}mv_{\text{cm}}R - mv_{\text{cm}}h = \frac{7}{5}mR^2\omega_2, \quad (10.5)$$

odakle je ugaona brzina kugle neposredno nakon udara

$$\omega_2 = \left(1 - \frac{5h}{7R} \right) \frac{v_{\text{cm}}}{R}. \quad (10.6)$$

Da bi se popela na stepenicu kinetička energija kugle neposredno poslije sudara mora biti veća ili jednaka njenoj potencijalnoj energiji koju ima na vrhu stepenice. U graničnom slučaju, kada tražimo minimalnu početnu brzinu v_{cm} , konačna kinetička energija kugle jednaka je nuli, tj. razmatramo granični slučaj kada će se kugla popeti na stepenicu i ostati mirovati na njoj. U tom slučaju je vrijedi

$$\frac{I\omega_2^2}{2} = mg\Delta h, \quad (10.7)$$

gdje je $\Delta h = h$ promjena visine centra masa kugle kada se popne na stepenicu, a $I = I_0 + mR^2$ moment inercije kugle u odnosu na trenutnu osu rotacije koja se nalazi u dodirnoj tački kugle i stepenice. Iz prethodne relacije zaključujemo da je minimalna ugaona brzina kugle neposredno nakon udara, a za koju će se kugla popeti na stepenicu, data s

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{10gh}{7R^2}}. \quad (10.8)$$

Nakon uvrštavanja ovog izraza u jednačinu (10.6) i sređivanja dobijamo minimalnu početnu brzinu centra masa za koju će se kugla popeti na stepenicu

$$v_{\text{cm}} = \frac{R}{7R - 5h} \sqrt{70gh}. \quad (10.9)$$

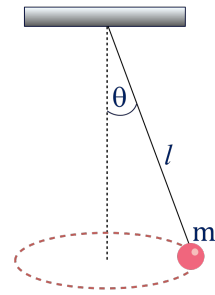
11.5 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Na krajevima šipke dužine 1 m učvršćene su dvije kuglice, mase 4 kg i 3 kg. Taj sistem se obrće u horizontalnoj ravni xy oko oslonca koji se nalazi na sredini. Odrediti moment impulsa sistema kada je brzina kuglica 5 m s^{-1} . ($\vec{L} = 17,5 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1} \vec{k}$)

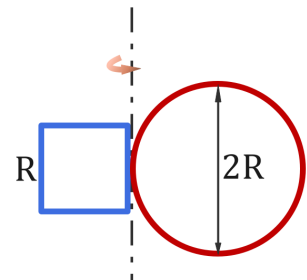
Zadatak 2: Konusno klatno sastoji se od male kuglice mase m koja se kreće po kružnoj putanji u horizontalnoj ravni kao na slici 11.24. U toku kretanja nit dužine l , na koju je okačena kuglica, zaklapa ugao α s vertikalnom osom. Dokazati da je intenzitet momenta impulsa dat izrazom $L = \sqrt{\frac{m^2 g l^3 \sin^4 \alpha}{\cos \alpha}}$.

Zadatak 3: Slika 11.25 prikazuje čvrstu konstrukciju koja se sastoji od kružnog obruča poluprečnika R i mase m i kvadrata napravljenog od četiri tanke šipke, svaka dužine R i mase m . Struktura rotira konstantnom brzinom oko vertikalne ose, s periodom rotacije od 2,5 s. Uz pretpostavku da je $R = 0,5 \text{ m}$ i $m = 2 \text{ kg}$, izračunati moment inercije konstrukcije i njen moment impulsa oko date ose. ($I = 1,6 \text{ kg m}^2$, $L = 4 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$)

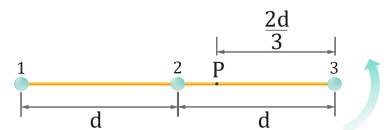
Zadatak 4: Na čvrsti štap zanemarive mase pričvršćene su tri kuglice jednakih masa kao na slici 11.26. Štap može slobodno rotirati (bez trenja) u vertikalnoj ravni oko osovine koja je okomita na štap i prolazi kroz tačku P . Štap je doveden u horizontalni položaj i zatim pušten. Pod pretpostavkom da su m i d poznate veličine, odrediti: a) moment inercije sistema (štap plus kuglice) oko osovine, b) moment sile koji djeluje na sistem u početnom trenutku, c) ugaono ubrzanje sistema u početnom trenutku, d) linearno ubrzanje kuglice označene



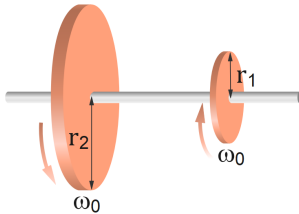
Slika 11.24: Uz zadatak 2.



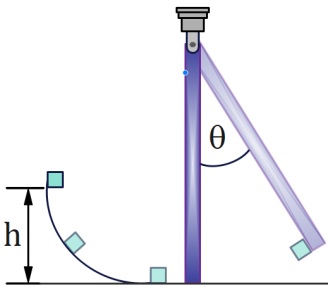
Slika 11.25: Uz zadatak 3.



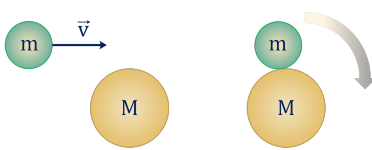
Slika 11.26: Uz zadatak 4.



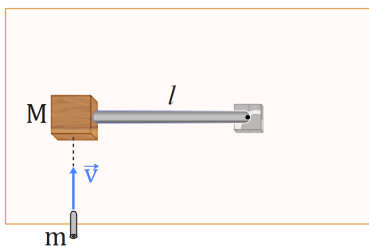
Slika 11.27: Uz zadatak 5.



Slika 11.28: Uz zadatak 6.



Slika 11.29: Uz zadatak 7.



Slika 11.30: Uz zadatak 9.

s 3 u početnom trenutku, e) maksimalnu kinetičku energiju sistema, f) maksimalnu ugaonu brzinu koju postiže štap, g) maksimalni moment impulsa sistema i h) maksimalnu dostignutu brzinu kuglice označene s 2. ($\frac{7}{3}md^2$, $\vec{M} = mgd\vec{k}$, $\alpha = \frac{3g}{7d}$ suprotno od smjera kazaljke na satu, $a = \frac{2g}{7}$ prema gore, $E_{k\max} = mgd$, $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{6g}{7d}}$, $L_{\max} = m\sqrt{\frac{14g}{3}}d^3$, $v_{2\max} = \sqrt{\frac{2}{21}gd}$)

Zadatak 5: Dva diska identične mase, ali različitih radijusa ($r_2 = 2r_1$), rotiraju na ležajevima bez trenja istom ugaonom brzinom ω_0 , ali u suprotnim smjerovima kao na slici 11.27. Diskovi se polako spoje. Rezultirajuća sila trenja između površina na kraju ih dovodi do zajedničke ugaone brzine. Kolika je ta konačna ugaona brzina u poređenju s ω_0 ? ($\omega = \frac{3}{5}\omega_0$)

Zadatak 6: Malo tijelo mase 50 g sklizne niz zakrivljenu površinu s visine $h = 20$ cm kao na slici 11.28 i udara homogeni štap mase 100 g i dužine 40 cm. Odrediti ugao otklona štapa ako se malo tijelo, nakon udara, zalijepi za štap. (32°)

Zadatak 7: Pak mase $m = 80$ g i radijusa $r = 4$ cm klizi duž vazdušnog stola za hokej brzinom od $v_1 = 1,5$ m s $^{-1}$ (kao što je prikazano na slici 11.29), te se sudari s drugim pakom poluprečnika $R = 6$ cm i mase $M = 120$ g koji miruje. Sudar je takav da im se rubovi samo dodiruju. Međutim, rubovi su im premazani ljepilom s trenutnim djelovanjem, te se pakovi zalijepi i zajedno obrću nakon sudara. a) Koliki je moment impulsa sistema u odnosu na centar mase? b) Kolika je ugaona brzina oko centra mase? ($L = 7,2 \cdot 10^{-3}$ kg m 2 s $^{-1}$, $\omega = 9,47$ rad s $^{-1}$)

Zadatak 8: Kišobran se sastoji od drške, žica i tkanine. Otvoren je tako da su žice okomite na dršku, te je postavljen uspravno na dršku i zarotiran ugaonom brzinom od $1,25$ rad s $^{-1}$ i okreće se bez trenja. Moment inercije tkanine i drške zanemariti. Odjednom mu se zasun lomi i kišobran se djelomično sklapa sve dok svaka žica ne napravi ugao od $22,5^\circ$ s drškom. Kolika je sada ugaona brzina kišobrana? ($\omega = 8,54$ rad s $^{-1}$)

Zadatak 9: Drveni blok mase M nalazi se na horizontalnoj površini i pričvršćen je na jedan kraj šipke dužine l i zanemarive mase kao na slici 11.30 (gledano odozgo). Štap može slobodno rotirati oko drugog kraja. Metak mase m , koji se kreće brzinom v paralelno s horizontalnom površinom i okomito na štap, udari u blok i ostaje u njemu. a)

Odrediti moment impulsa sistema metak-blok. b) Koji dio prvobitne kinetičke energije je izgubljen u sudaru? ($L = mvl$, $\frac{\Delta E_k}{E_k} = \frac{M}{M+m}$)

Zadatak 10: Homogeni tanki štap dužine 0,5 m i mase 4 kg može rotirati u horizontalnoj ravni oko vertikalne ose koja prolazi kroz njegovo središte. Štap miruje u trenutku kada metak od 3 g koji se kreće u ravni rotacije, pogodi u jedan njegov kraj. Gledano odozgo, putanja metka zaklapa ugao $\theta = 60^\circ$ sa štapom. Ako se metak zaglavi u štapu i ako je ugaona brzina štapa 10 rad s^{-1} odmah nakon udara, kolika je brzina metka neposredno prije udara? ($v = 1,3 \cdot 10^3 \text{ m s}^{-1}$)

MEHANIKA FLUIDA

12.1 Svojstva fluida	301
12.2 Statika fluida	306
12.3 Kinematika fluida	312
12.4 Realni fluidi	316
12.5 Riješeni zadaci	318
12.6 Zadaci za vježbu	335

Fluid je supstanca koja se kontinuirano deformiše tj. teče ili struji pod uticajem tangencijalnog (smicajnog) napona ma koliko mali on bio. U fluide spadaju tekućine, gasovi, plazma i granularni materijali (mnoštvo čestica čvrste tvari različitih dimenzija koje se zajedno kreću slično tekućinama). Za tekućine i gasove važe isti zakoni sve dok su pri strujanju dominantna ista fizička svojstva ili dok razlika u stišljivosti nije od velikog značaja. Kretanje fluida kroz prostor se naziva tečenje ili strujanje. Protjecanje je strujanje između krutih stjenki okolne tvari ili u slobodnom prostoru (cijevi, kanali i sl.). Optjecanje je kretanje tijela kroz fluid koji miruje. Moguća su i kombinovana kretanja kao u slučaju turbina, vjetrenjača i sl. Newtonov fluid je fluid kod kojeg je zavisnost smičućeg napona i brzine deformacije linearna (najčešći primjeri su voda i vazduh).

12.1 Svojstva fluida

Osnovna postavka mehanike fluida je da se umjesto tačke posmatra elementarna (jedinična) zapremina (djelić fluida) koja je dovoljno velika da u sebi sadrži veći broj molekula tako da su njena fizička i kinematičko-dinamička svojstva odraz srednjeg efekta molekula u njoj, a ipak dovoljno mala da se na nju može primijeniti diferencijalni račun. Elementarna zapremina se posmatra kao redukovana

zapremina u kojoj je masa molekula kontinuirano raspoređena bez praznog prostora, onda se i sva svojstva kontinuirano mijenjaju ili su konstante unutar te zapremine.

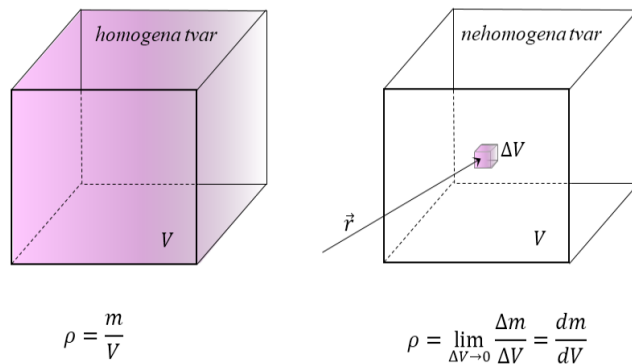
Gustoća

Gustoća predstavlja količnik mase tvari i zapremine koju ta tvar zauzima. Tvari (fluidi) kod kojih se pod djelovanjem vanjske sile gustoća ne mijenja nazivamo nestišljivim, u suprotnom je stišljiva. Tvari (fluidi) mogu biti homogene i nehomogene. Kod homogenih tvari gustoća je ista u svakoj tački unutar date zapremine (slika 12.1 lijevo) i može se izračunati kao

$$\rho = \frac{m}{V} \quad (12.1)$$

gdje je m masa te tvari unutar zapremine V . U slučaju nehomogenih

Slika 12.1: Gustoća u slučaju kada je tijelo homogeno (slika lijevo) i nehomogeno (slika desno).



tvari gustoća nije ista u svim tačkama (slika 12.1 desno), te se definiše kao granična vrijednost odnosa mase i zapremine koja u sebi sadrži tu masu kada posmatrana zapremina teži jediničnoj zapremini

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad (12.2)$$

Gustoća se može mijenjati s promjenom pritiska i temperature, a te veličine se mogu mijenjati od tačke do tačke, ali i s vremenom, te se uopšteno može reći da je gustoća funkcija položaja posmatrane tačke i vremena $\rho = \rho(\vec{r}, t)$. Mjerna jedinica je kgm^{-3} .

Specifična težina je težina jedinične zapremine i dobije se kao količnik težine tijela i njegove zapremine

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{mg}{V} = \rho g \quad (12.3)$$

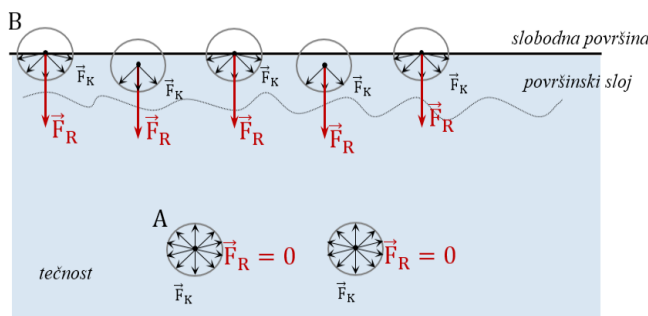
odnosno proizvod gustoće tijela i ubrzanja sile Zemljine teže.

Površinski napon

Granični sloj između tečne i gasovite faze naziva se slobodna površina tečnosti, a tanki sloj ispod slobodne površine naziva se površinski sloj. Molekule u unutrašnjosti fluida i u površinskom sloju ne nalaze se u istim uslovima. Molekule tečnosti međudjeluju silama koje se nazivaju kohezione sile (sile između molekula iste tvari). Na jednu molekulu djeluju druge molekule koje se nalaze u njenoj neposrednoj blizini (djelovanje udaljenih molekula se može zanemariti). Udaljenost na kojoj molekula još osjeća djelovanje drugih molekula naziva se radijus međumolekularnog djelovanja, a sfera tog radijusa, s centrom u posmatranoj molekuli, naziva se sfera međumolekularnog djelovanja. Kohezione sile unutar sfere međumolekularnog djelovanja su jednakog intenziteta i međusobno se poništavaju zbog suprotnih smjerova. To znači da je molekula unutar pomenute sfere slobodna, tj. ne trpi nikakvo međudjelovanje. Takav primjer su molekule *A* na slici 12.2.

Ako sada pogledamo molekule *B* na slici 12.2 koje se nalaze u površinskom sloju tečnosti, vidjet ćemo da one nisu sa svih strana okružene molekulama tečnosti kao molekule *A*. To znači da se kohezione sile neće u potpunosti poništiti, te da će postojati neka rezultujuća sila \vec{F}_R koja će biti usmjerena ka unutrašnjosti tečnosti okomito na njenu slobodnu površinu.¹ Tačno je da se iznad slobodne površine tečnosti nalaze molekule te tečnosti u vidu pare tečnosti, ali je broj tih molekula znatno manji od broja molekula tečnosti ispod slobodne površine, te se kohezione sile neće u potpunosti poništiti (tj. na molekulu *B* ne djeluje isti broj molekula sa svih strana).

¹ **Napomena:** Iako postoji neka rezultujuća sila, molekule neće ubrzavati prema unutrašnjosti fluida jer bi se u tom slučaju molekule sve više i više približavale jedna drugoj. Međutim, između molekula postoje sile koje mogu biti privlačne i odbojne, zavisno od njihovog međusobnog rastojanja. Ukoliko njihovo rastojanje postane manje od nekog kritičnog, one počinju da se odbijaju, a ako je rastojanje veće od kritičnog one se privlače. Dakle, molekule će težiti da zauzmu položaj na nekom ravnotežnom rastojanju.



Slika 12.2: Rezultujuća sila \vec{F}_R koja djeluje na molekule u unutrašnjosti tečnosti (*A*) jednaka je nuli, a na molekule u površinskom sloju tečnosti (*B*) usmjerena je ka unutrašnjosti tečnosti.

Dakle, na sve molekule u površinskom sloju djeluje sila čiji je pravac okomit na slobodnu površinu tečnosti, a usmjerena je ka unutrašnjosti tečnosti. Pritisak koji se zbog toga stvara na tečnost naziva se molekularni pritisak. Zbog njega se površina tečnosti ponaša kao

da se nalazi pod velikim pritiskom (od preko 1 GPa). To znači da na svaku molekulu koja se kroz površinski sloj kreće ka slobodnoj površini, djeluje sila molekularnog pritiska, koju molekula mora savladati na račun svoje kinetičke energije. Pri tome ona povećava svoju potencijalnu energiju (kao u slučaju hitca uvis) u odnosu na molekule u unutrašnjosti. Da bismo formirali slobodnu površinu tečnosti moramo izvršiti rad jednak višku potencijalne energije koju molekule površinskog sloja imaju u odnosu na molekule u unutrašnjosti tečnosti. Rad potreban da se slobodna površina tečnosti poveća za jedinicu predstavlja koeficijent površinskog napona

$$\gamma = \frac{A}{S} \quad (12.4)$$

i on je konstanta za granicu dvije faze na određenoj temperaturi. Povećavanjem temperature koeficijent površinskog napona opada. Također se može definisati i kao sila potrebna za prekidanje jedinice dužine krive koja zatvara slobodnu površinu tečnosti

$$\gamma = \frac{F}{\ell}. \quad (12.5)$$

Mjerna jedinica za koeficijent površinskog napona je $\text{Jm}^{-2} = \text{Nm}^{-1}$.

Viskoznost

Objašnjenje viskoznosti, kao osnovnog i isključivog svojstva fluida, leži u submikroskopskoj strukturi materije. Molekule unutar fluida se nalaze u stalnom haotičnom kretanju. One pri tome prelaze iz jednog djelića fluida u drugi, pri čemu predaju svoje termodinamičke karakteristike (definisane stanjem kretanja molekula) molekulama u drugim djelićima. Ovaj prenos se odvija u svim pravcima i dolazi do miješanja molekula. Taj proces miješanja naziva se molekularna difuzija i predstavlja osnovu transportnih pojava (prenos mase, toplote i impulsa) u fluidima. Prenos impulsa se dešava kada molekule prelaze iz jednog u drugi djelić fluida pri čemu s obje strane površine kroz koju prolaze molekule, djeluju kohezivne sile. One stvaraju lokalni napon i ukoliko su brzine molekula na tom mjestu jednolike, napon je okomit na tu površinu i ne zavisi od njene orijentacije. Međutim ukoliko brzine molekula nisu iste (tj. raspodjela brzina je nejednolika) onda će bilo koja molekularna interakcija, okomita na površinu djelića fluida, izazvat stvaranje i tangencijalne komponente napona koja će uvijek nastojati da eliminiše razliku brzina molekula u susjednim djelićima (slojevima). Dakle prenos impulsa usljed međumolekularnog dejstva stvara unutrašnji otpor (unutrašnje trenje)

ili viskoznost. Ovo svojstvo fluida je opisano veličinom koja se naziva koeficijent viskoznosti, označava se s η i ima jedinicu Pas (paskal sekunda). On predstavlja vezu između unutrašnjeg napona i nejednolikosti raspodjele brzina:

$$\tau = \frac{F}{S} = \eta \frac{dv}{dy}, \quad (12.6)$$

gdje član $\frac{dv}{dy}$ predstavlja gradijent brzine. Ova relacija predstavlja Newtonov zakon unutrašnjeg trenja u fluidima, a fluidi koji se ponašaju po ovom zakonu (tj. imaju linearnu vezu između napona i gradijenta brzine) nazivaju se linearni ili Newtonovi fluidi. Izvedena je na osnovu rezultata eksperimenta u kojem se fluid kretao između dvije beskonačno velike međusobno paralelne ploče, od kojih jedna miruje, a druga se kreće brzinom \vec{v} usljed djelovanja sile \vec{F} (slika 12.3). Zbog viskoznosti, molekule fluida koje su u kontaktu s pločama imaju istu brzinu kao i ploče, dok se brzina fluida između ploča linearno mijenja od nule do v .

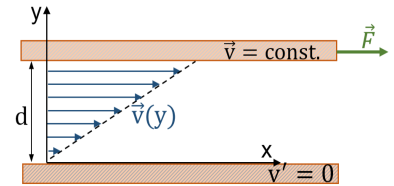
Dakle, u jednačini (12.6) τ predstavlja smičući napon (tangencijalni napon) koji je jednak količniku sile koja je paralelna s površinom na koju djeluje i te površine, dok nam gradijent brzine $\frac{dv}{dy}$ pokazuje promjenu brzine po jedinici dužine u pravcu koji je okomit na pravac kretanja fluida (to je pravac y -ose na slici 12.3). Koeficijent viskoznosti η nazivamo još i apsolutni ili dinamički koeficijent viskoznosti.

Definišimo također i kinematički koeficijent viskoznosti, koji još nazivamo i molekulska difuzivnost količine kretanja, kao

$$\nu = \frac{\eta}{\rho}. \quad (12.7)$$

On predstavlja sposobnost molekularnog transporta da eliminiše nejednolikost veličine koja doprinosi transportu impulsa (u ovom slučaju brzine fluida). Fizikalna jedinica kinematičke viskoznosti je st (stoks), $1 \text{ st} = 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$.

U praksi se najčešće susrećemo s Newtonovim fluidima. Međutim postoje fluidi, kao što su teška ulja, med, zgrušana krv i sl, kod kojih veza između napona i gradijenta brzine nije linearna. Oni se nazivaju nenenewtonski fluidi.



Slika 12.3: Brzina fluida između ploča se linearno mijenja od nule do v u zavisnosti od položaja posmatranog sloja fluida (isprekidana linija predstavlja funkciju $v(y)$, plavi vektori predstavljaju profil brzine).

Stišljivost

Stišljivost je svojstvo fluida da pod dejstvom normalnih površinskih sila mijenja svoju zapreminu (nakon prestanka djelovanja sile posmatrana zapremina poprima prvobitnu vrijednost). Kao mjeru

otpora promjeni zapremine pod pritiskom definišemo zapreminski modul stišljivosti kao

$$E = \frac{dp}{-\left(\frac{dV}{V}\right)} \quad (12.8)$$

ili

$$E = \frac{dp}{\left(\frac{d\rho}{\rho}\right)} \quad (12.9)$$

čija je mjerna jedinica $\text{Nm}^{-2} = \text{Pa}$ (paskal).

Tečnosti imaju veliku vrijednost modula stišljivosti, npr. za vodu iznosi $2,15 \cdot 10^9 \text{ Nm}^{-2}$, dok gasovi imaju manju vrijednost, npr. za vazduh je $1,01 \cdot 10^5 \text{ Nm}^{-2}$. Također modul stišljivosti za gasove zavisi i od termodinamičkog procesa kroz koji prolazi gas (izotermni, adijabatski i sl) kao i od pritiska gasa.

Recipročnu vrijednost modula stišljivosti nazivamo koeficijent stišljivosti i on predstavlja relativnu zapreminsku promjenu usljed jedinične promjene pritiska

$$S = \frac{1}{E} = -\frac{dV}{V} \cdot dp. \quad (12.10)$$

Mjerna jedinica je Pa^{-1} .

12.2 Statika fluida

Statika fluida je dio mehanike fluida koji proučava fluide u stanju mirovanja. Za fluid kažemo da je u stanju mirovanja ako postoji takav koordinatni sistem u kojem je brzina elementarnih (jediničnih) zapremina u svakoj tački fluida jednaka nuli. Možemo također reći da statika fluida proučava stanje ravnoteže plutajućeg tijela i potopljenog tijela, tečnosti u hidrostatičkoj ravnoteži i pritisak u fluidu, ili pritisak koji fluid vrši na uronjeno tijelo.

Pritisak

Pritisak definišemo kao količnik sile F koja djeluje okomito na neku površinu i iznosa te površine S

$$p = \frac{F}{S}. \quad (12.11)$$

To je skalarna veličina čija je mjerna jedinica Pa (paskal). U upotrebi su i druge jedinice za pritisak izvan SI kao što su bar, torr,

milimetar živinog stuba i atmosfera. Bar je jedinica koja je dopuštena za upotrebu bez ograničenja i u odnosu na SI jedinicu iznosi $1 \text{ bar} = 10^5 \text{ Pa}$. Jedinica milimetar živinog stuba (mmHg) je dopuštena samo za mjerenje pritiska tjelesnih tekućina i definisana je kao pritisak koji pokazuje živin manometar (mjerni instrument za mjerenje pritiska) pri visini stuba od 1 mm. U odnosu na SI jedinicu iznosi $1 \text{ mmHg} = 133,322 \text{ Pa}$. Torr je jedinica koje je prvobitno bila jednaka 1 mmHg, međutim zbog redefinicije mjernih jedinica one se sada neznatno razlikuju, ali se u praksi i dalje izjednačavaju. Atmosfera je pritisak koji odgovara pritisku od 760 mmHg, a to je pritisak zraka pri srednjoj razini mora na geografskoj širini Pariza. U odnosu na SI jedinicu iznosi $1 \text{ atm} = 101\,325 \text{ Pa}$.

Hidrostatički pritisak

Posmatrajmo posudu u koju je nasuta homogena nestišljiva tečnost gustoće ρ . Izdvojit ćemo jedan dio tečnosti ograničen stranicama zamišljenog kvadra zapremine $V = Sh$, pri čemu je S površine baze, a h njegova visina kao što je prikazano na slici 12.4. Vidimo da se kvadar prostire od dubine d do dubine $d + h$. Okomito na sve njegove stranice djeluje okolna tečnost. Uzmimo da je pritisak koji tečnost vrši na dno kvadra p , a na gornju površinu p_0 . To znači da na dno kvadra djeluje sila intenziteta $F = pS$ usmjerena prema gore u pravcu izabrane y -ose, a gornju površinu sila $F_0 = p_0S$ u suprotnom smjeru. Budući da tečnost miruje, kvadar je u ravnotežnom stanju, te možemo napisati drugi Newtonov zakon u obliku

$$\Sigma \vec{F} = \vec{F} + \vec{G} + \vec{F}_0 = 0, \quad (12.12)$$

što nakon uvrštavanja izraza za F i F_0 , te projekcije vektora na izabranu y -osu daje

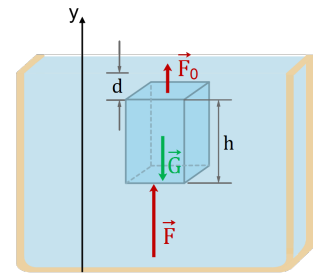
$$pS - mg - p_0S = 0. \quad (12.13)$$

Kada u gornju jednačinu uvrstimo da je masa kvadra $m = \rho V = \rho Sh$, gdje je ρ gustoća tečnosti, pritisak na dno kvadra možemo napisati kao

$$p = p_0 + \rho gh. \quad (12.14)$$

Dobijeni izraz nam ukazuje na činjenicu da se pritisak na nekoj dubini ispod tačke u kojoj je pritisak p_0 , povećava za iznos ρgh . Dakle, ukoliko idemo sve dublje i dublje u tečnost, pritisak postaje sve veći, a što smo mogli i primijetiti prilikom ronjenja.

Neka je sada gore pomenuta posuda otvorena, te neka se iznad slobodne površine tečnosti nalazi zrak koji čini našu atmosferu. On



Slika 12.4: Pritisak na površinu S koja se nalazi na nekoj dubini h vrši samo težina stuba tečnosti iznad te površine.

također svojom težinom stvara pritisak na površinu tečnosti. Taj pritisak nazivamo atmosferski pritisak i označavamo ga s p_a . Posmatrajmo kvadar koji se sada proteže do površine tečnosti (tj. $d = 0$), onda će pritisak p_0 biti jednak atmosferskom, te pritisak na dno kvadra postaje

$$p = p_a + \rho gh. \quad (12.15)$$

Ova jednačina nam daje pritisak na nekoj dubini h ispod slobodne površine tečnosti. Isto vrijedi i za gasove, tako da možemo uopšteno reći da je pritisak na dubini h u nekom fluidu dat jednačinom (12.15).

Drugi član na desnoj strani jednakosti u prethodnoj jednačini nazivamo hidrostatički pritisak

$$p_h = \rho gh \quad (12.16)$$

i definišemo ga kao pritisak koji mirni fluid vrši na neku površinu na dubini h svojom težinom. Gustoća ρ predstavlja gustoću fluida.

Mjerenje pritiska

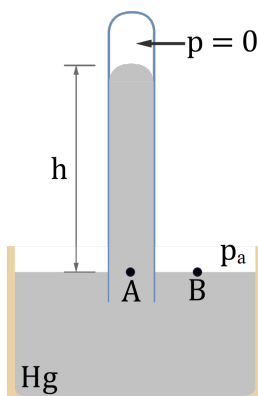
Za mjerenje atmosferskog pritiska koristiti se obični barometar, koji je izumio Evangelista Torricelli. To je duga cijev zatvorena na jednom kraju koja se napuni živom, a zatim preokrene tako da joj otvoreni kraj bude prema dole, te se u vertikalnom položaju djelimično potopi u posudu sa živom (slika 12.5). Živa će se spustiti na određenu visinu, tako da će kod zatvorenog kraja cijevi biti gotovo vakuum, pa za pritisak na vrhu živinog stuba možemo uzeti da je jednak nuli.

Visina na koju će se spustiti živin stub određena je uslovom ravnoteže pritiska u tačkama A i B na slici 12.5 (da to nije slučaj, postojala bi rezultujuća sila koja bi pomjerala živu od jedne tačke do druge sve dok se ne uspostavi ravnoteža). Iz uslova jednakosti pritiska $p_B = p_A$, pri čemu uzimamo da je pritisak u tački B atmosferski ($p_B = p_a$), a u tački A hidrostatički ($p_A = \rho gh$), slijedi da je

$$p_a = \rho_{(Hg)} gh \quad (12.17)$$

gdje je $\rho_{(Hg)}$ gustoća žive, a h visina stuba žive. Dakle, kako atmosferski pritisak varira, tako varira i visina stuba žive, što znači da se visina može podesiti za mjerenje atmosferskog pritiska. Na primjer, visina stuba žive za atmosferski pritisak koji je jednak jednoj atmosferi $1 \text{ atm} = 1,013 \text{ bar} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ iznosi $h = 0,760 \text{ m}$.

Atmosferski pritisak se mijenja s promjenom nadmorske visine i tu zavisnost ćemo navesti bez dokazivanja (jer zahtijeva primjenu



Slika 12.5: Živin barometar.

zakona termodinamike):

$$p_a = p_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} g h} \quad (12.18)$$

gdje su p_0 i ρ_0 pritisak i gustoća zraka na nivou mora, a h nadmorska visina. Ova jednačina se naziva barometarska formula.

Pascalov zakon

Posmatrajmo sada dvije tačke na različitoj dubini unutar fluida koji miruje (slika 12.6). Pritisak u tim tačkama će biti

$$p_1 = p_a + \rho g h_1 \quad \text{i} \quad p_2 = p_a + \rho g h_2 \quad (12.19)$$

a njihova razlika

$$\Delta p = p_2 - p_1 = \rho g (h_2 - h_1) = \rho g \Delta h \quad (12.20)$$

Ukoliko se iz bilo kojeg razloga pritisak promijeni i to u prvoj tački za Δp_1

$$p'_1 = p_a + \rho g h_1 + \Delta p_1, \quad (12.21)$$

a u drugoj za Δp_2

$$p'_2 = p_a + \rho g h_2 + \Delta p_2, \quad (12.22)$$

njihova razlika će biti

$$\Delta p' = p'_2 - p'_1 = \rho g \Delta h + (\Delta p_2 - \Delta p_1). \quad (12.23)$$

Kako bi fluid ostao u stanju mirovanja razlika pritiska i dalje mora biti ista kao i prije promjene, inače bi došlo do kretanja fluida. Dakle, mora biti $\Delta p' = \Delta p$, što može biti ispunjeno samo ako je

$$\Delta p_2 - \Delta p_1 = 0, \quad (12.24)$$

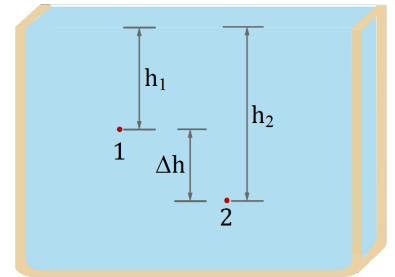
odnosno

$$\Delta p_1 = \Delta p_2. \quad (12.25)$$

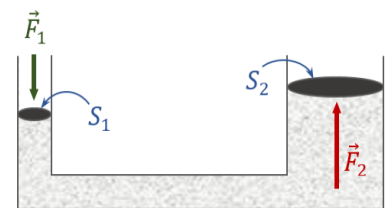
Dobijeni rezultat pokazuje da se promjena pritiska u nekoj tački mirnog fluida prenosi i na sve ostale tačke podjednako. Ova tvrdnja predstavlja Pascalov zakon.

Primjenu Pascalovog zakona možemo objasniti na primjeru hidraulične prese koja služi kao dizalica ili kao presa. Sastoji se od dva cilindra s pokretnim klipovima ispunjena tečnošću kao na slici 12.7. Jedan cilindar je uži i ima poprečni presjek S_1 , a drugi je širi poprečnog presjeka S_2 . Kada se klip u užoj cijevi pritisne silom F_1 , pritisak u fluidu će se povećati za

$$\Delta p_1 = \frac{F_1}{S_1} \quad (12.26)$$



Slika 12.6: Pritisaci u tačkama na različitim dubinama se razlikuju za $\rho g \Delta h$.



Slika 12.7: Hidraulična presa se sastoji od dva međusobno povezana cilindra različitog poprečnog presjeka s pokretnim klipovima unutar kojih se nalazi tečnost.

Prema Pascalovom zakonu ta promjena se prenosi na sve tačke fluida, tako da će i u široj cijevi doći do povećanja pritiska za $\Delta p_2 = \Delta p_1$. To će uzrokovati pomjeranje klipa silom F_2 koja odgovara toj promjeni

$$F_2 = \Delta p S_2 \quad (12.27)$$

odnosno

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} F_1 \quad (12.28)$$

S obzirom da je $S_2 > S_1$ vrijedi da je $F_2 > F_1$. Odnos sila zavisi od odnosa površina poprečnih presjeka cilindara, pa ukoliko je na primjer $S_2 = 4S_1$, onda je i $F_2 = 4F_1$. Dakle, djelovanjem neke sile na klip užeg cilindra, proizvodi se veća sila na klip šireg cilindra u suprotnom smjeru koja može da izvrši određeni rad (dužina za koju se pomjeri manji klip će biti veća nego dužina za koju se pomjeri veći klip).

Potisak - Arhimedov zakon

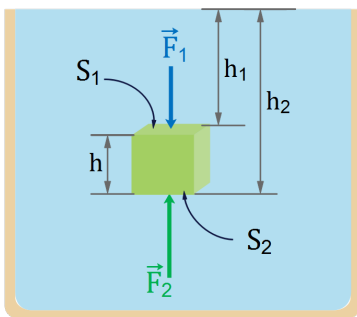
Na sva tijela uronjena u neki fluid djeluje sila usmjerena vertikalno prema gore koja nastoji da to tijelo izbaci iz fluida. Tu silu osjetimo na primjer ukoliko pokušamo da loptu uronimo u vodu. Primijetićemo da je ta sila jača, što je zapremina lopte veća, te da je ista bez obzira na kojoj dubini je lopta.

Da bismo objasnili postojanje sile koja nastoji da izbaci tijelo iz fluida, zamislimo tijelo u obliku kocke zapremine V uronjeno u fluid gustine ρ_f , koja se proteže od dubine h_1 do dubine h_2 kao na slici 12.8. Na gornju stranicu kocke fluid vrši pritisak silom intenziteta $F_1 = p_1 S$, gdje je p_1 hidrostatički pritisak na dubini h_1 tj. $p_1 = \rho_f g h_1$. Ta sila je usmjerena vertikalno prema dole. Iz istog razloga intenzitet sile kojom fluid djeluje na donju stranicu kocke je $F_2 = p_2 S = \rho_f g h_2 S$, a usmjerena je vertikalno prema gore. Budući da je hidrostatički pritisak na nivou $h_2 = h_1 + h$ veći nego na nivou h_1 za $\Delta p = \rho_f g h$, sila F_2 je veća od sile F_1 te će rezultantna sila biti usmjerena prema gore

$$F_p = F_2 - F_1 = \rho_f g h_2 S - \rho_f g h_1 S = \rho_f g h S. \quad (12.29)$$

Silu F_p , koja nastaje zbog razlike hidrostatičkih pritisaka na donju i gornju površinu tijela, nazivamo sila potiska i ona predstavlja silu kojom fluid nastoji da izbaci tijelo koje je u njega uronjeno. S obzirom da se radi o kocki površine baze S i visine h , proizvod hS predstavlja zapreminu kocke V , te se sila potiska može napisati kao

$$F_p = \rho_f V g. \quad (12.30)$$



Slika 12.8: Hidrostatički pritisak na dubini h_1 je manji od hidrostatičkog pritiska na dubini h_2 .

Napomena: Na bočne strane kocke također djeluju sile koje se međusobno poništavaju. Razlog je što svakoj sili koja djeluje na bočnu stranu kocke na nekoj dubini, možemo pridružiti istu takvu silu na drugoj strani kocke, ali koja ima suprotan smjer.

Zapremina kocke je jednaka zapremini fluida koji je istisnut prilikom uranjanja kocke, te možemo uzeti da je masa istisnutog fluida $\rho_f V = m_f$ te dobijamo da je sila potiska jednaka težini istisnutog fluida,

$$F_p = m_f g = G_f, \quad (12.31)$$

što ujedno predstavlja Arhimedov zakon koji glasi: na sva tijela uronjena u fluid djeluje prema gore sila potiska koja je jednaka težini fluida koji to tijelo istisne, ili tijelo uronjeno u fluid prividno gubi od svoje težine onoliko koliko teži njime istisnut fluid $G' = G - F_p$ (slika 12.8). Dakle, sila potiska je sila kojom fluid djeluje na tijelo i ona ne zavisi od svojstava tijela već samo od prostora (zapremine) koji to tijelo zauzima u fluidu. To znači da će na tijela različite gustoće, koja zauzimaju istu zapreminu unutar fluida, djelovati ista sila potiska.

Razmotrimo također dva specijalna slučaja i to 1. tijelo potpuno i 2. tijelo djelimično potopljeno u fluid:

1. Neka je tijelo zapremine V_t i gustoće ρ_t u potpunosti potopljeno u fluid i pušteno (slika 12.9). Na njega djeluju sila potiska $F_p = \rho_f V g$ pri čemu je $V = V_t$ vertikalno prema gore i sila Zemljine teže $G = m g = \rho_t V_t g$ u suprotnom smjeru. Rezultujuća sila koja djeluje na tijelo je

$$F_R = G - F_p = \rho_t V_t g - \rho_f V_t g = (\rho_t - \rho_f) V g. \quad (12.32)$$

Dakle, ukoliko je $\rho_t > \rho_f$ rezultujuća sila će imati smjer sile Zemljine teže tj. prema dole i tijelo će tonuti. Ukoliko je $\rho_t < \rho_f$ rezultujuća sila će imati smjer sile potiska i tijelo će se kretati prema gore. U slučaju da su gustine tijela i fluida jednake $\rho_t = \rho_f$ rezultujuća sila će biti jednaka nuli, te će tijelo ostati u ravnotežnom stanju, pa kažemo da tijelo lebdi u fluidu. Možemo zaključiti da smjer kretanja tijela koje je potopljeno u fluid zavisi od razlike gustoća tijela i fluida.

2. Ukoliko je tijelo djelimično potopljeno u fluid tj. tijelo pliva na površini fluida kao na slici 12.10, na njega djeluje prema gore sila potiska

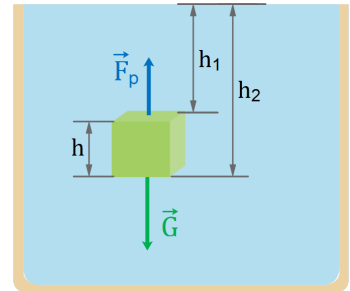
$$F_p = p S = \rho_f g h_1 S = \rho_f g V_1, \quad (12.33)$$

pri čemu je sada zapremina V_1 zapravo zapremina samo potopljenog dijela tijela $V_1 = V_p$, a h_1 dubina na kojoj se nalazi dno tijela. S obzirom da tijelo miruje, rezultujuća sila je jednaka nuli, što znači da je sila potiska uravnotežena silom Zemljine teže

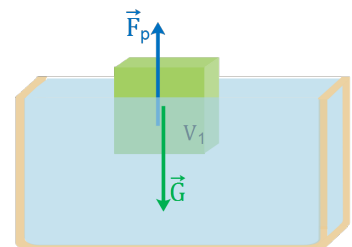
$$m g = \rho_f V_p g. \quad (12.34)$$

Masu tijela možemo izraziti preko njegove gustoće i zapremine $m = \rho_t V_t$ te gornja jednačina (nakon skraćivanja s g) postaje

$$\rho_t V_t = \rho_f V_p, \quad (12.35)$$



Slika 12.9: Na tijelo uronjeno u fluid djeluju sila potiska \vec{F}_p i težina tijela \vec{G} .



Slika 12.10: Na tijelo koje pliva na površini fluida djeluju sila potiska \vec{F}_p i težina tijela \vec{G} koje su jednakog intenziteta.

odnosno

$$\frac{V_p}{V_t} = \frac{\rho_t}{\rho_f}. \quad (12.36)$$

Iz ove jednačine vidimo da je dio zapremine plutajućeg tijela koji se nalazi ispod površine fluida proporcionalan omjeru gustoće tijela i gustoće fluida. Treba naglasiti da u opštem slučaju sila potiska nije konstantna sila. Naime, kako se tijelo postepeno uranja u tekućinu, zapremina uronjenog dijela raste, pa raste i intenzitet sile potiska sve dok se tijelo u potpunosti ne uroni u fluid. Maksimalna sila potiska onda iznosi $F_p = \rho_t g V$, gdje je V zapremina tijela. Ako tijelo čija je gustoća manja od gustoće fluida postepeno uranjamo, onda će sila potiska postepeno rasti sve dok se njen intenzitet ne izjednači sa intenzitetom sile Zemljine teže i tada će tijelo plivati na površini tečnosti.

12.3 Kinematika fluida

Kretanje fluida nazivamo tečenje ili strujanje. Strujanje nastaje zbog vlastite težine fluida ili zbog razlike u pritiscima. Kretanje fluida pri kojem susjedni slojevi klize jedni po drugima naziva se laminarnim, a kretanje pri kojem pojedini slojevi zalaze u druge, turbulentnim.

Budući da je kretanje realnih fluida veoma kompleksno i nije potpuno objašnjeno, u proučavanju kretanja fluida koristimo pojednostavljen model. To je model idealnog fluida u kojem su uvedene sljedeće pretpostavke:

1. **fluid je neviskozan** - mogu se zanemariti sile unutrašnjeg trenja (viskoznost) između pojedinih slojeva;
2. **fluid je nestišljiv** - gustoća mu se tokom vremena ne mijenja, $\rho = const$;
3. **tok je stacionaran** - to je tok kod kojeg brzina čestica fluida u svakoj tački prostora ostaje tokom vremena konstantna (pri ovakvom kretanju, svaka čestica fluida u različitim tačkama svoje trajektorije može imati različite brzine, ali sve čestice koje prolaze kroz neku tačku, u toj tački imaju istu brzinu);
4. **tok je nerotacioni** - fluid nema ugaoni moment impulsa niti oko jedne tačke.

Strujne linije ili linije toka su zamišljene linije čije se tangente u svim tačkama poklapaju s vektorom brzine fluida u toj tački. U slučaju stacionarnog strujanja fluida, strujne linije se ne mijenjaju tokom vremena i poklapaju se s trajektorijama čestica. Dio fluida ograničen strujnim linijama naziva se strujna cijev.

Jednačina kontinuiteta

Posmatrajmo strujanje idealnog nestišljivog fluida brzinom v , kroz cijev poprečnog presjeka S prikazanu na slici 12.11. Neka se sve čestice, koje se nalaze na površini S , nakon vremena t pomjere za dužinu $d = vt$. To znači da za to vrijeme, kroz površinu S protekne fluid zapremine

$$V = Sd = Svt. \quad (12.37)$$

Zapremina fluida, koja u jedinici vremena prođe kroz određeni poprečni presjek strujne cijevi, naziva se zapreminski protok

$$Q = \frac{V}{t} = Sv, \quad (12.38)$$

a mjerna jedinica mu je m^3s^{-1} .

Posmatrajmo sada cijev različitog poprečnog presjeka S_1 i S_2 , kao na slici 12.12. Kroz ova dva presjeka za neko vrijeme t proteknu mase fluida m_1 i m_2

$$m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 S_1 v_1 t, \quad (12.39)$$

$$m_2 = \rho_2 V_2 = \rho_2 S_2 v_2 t. \quad (12.40)$$

S obzirom da posmatramo idealan fluid, gustoća fluida je konstantna tj. $\rho_1 = \rho_2$. Ako unutar strujne cijevi nema izvora i ponora, masa fluida koja u vremenu t protekne kroz bilo koji presjek je onda također konstantna $m_1 = m_2 = \text{const}$, te izjednačavanjem gornjih jednačina dobijamo

$$S_1 v_1 = S_2 v_2. \quad (12.41)$$

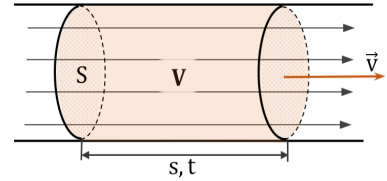
odnosno

$$Q_1 = Q_2. \quad (12.42)$$

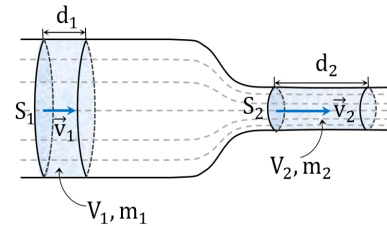
Budući da relacija (12.41) vrijedi za sve presjeke iste cijevi, jednakost (12.42) može se napisati u opštem obliku kao

$$Q = Sv = \text{const}. \quad (12.43)$$

To znači da je proizvod brzine strujanja nestišljivog idealnog fluida koji teče stacionarno u bilo kom presjeku cijevi i površine poprečnog presjeka, konstantna veličina koja se ne mijenja duž cijevi. Jednačinu (12.43) nazivamo jednačina kontinuiteta ili teorem o neprekidnosti toka iz kojeg zaključujemo da na mjestima gdje je cijev uža, brzina fluida je veća i obratno, odnosno fluid se ubrzava u smjeru sužavanja cijevi. Dakle, na čestice fluida djeluje sila usmjerena od šireg dijela cijevi prema užem. Ta sila se javlja zbog razlike pritisaka u širem i užem dijelu cijevi tj. pritisak u širem dijelu cijevi je veći nego u užem.



Slika 12.11: Za neko vrijeme t kroz poprečni presjek strujne cijevi površine S protekne fluid zapremine V krećući se brzinom v .

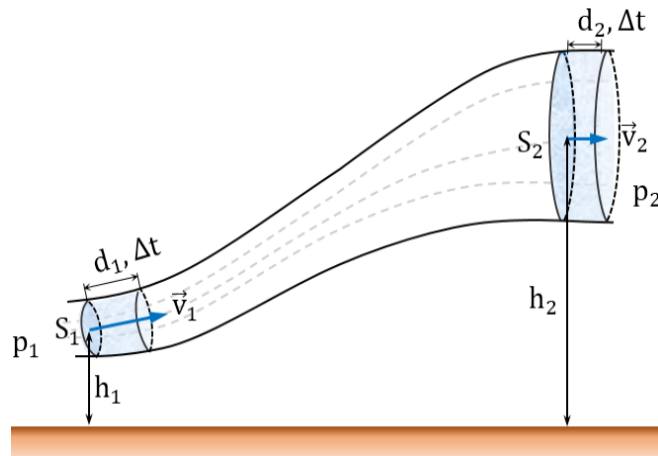


Slika 12.12: Strujna cijev s različitim površinama poprečnog presjeka S_1 i S_2 . Brzina fluida na različitim presjecima je različita.

Bernoullijeva jednačina

Kada idealan nestišljiv fluid struji kroz područje u kojem mu se mijenja brzina i/ili visina iznad nekog referentnog nivoa, dolazi i do promjene njegovog pritiska. Da bismo ustanovili vezu između brzine, visine na kojoj se nalazi fluid i pritiska fluida u stacionarnom kretanju, razmotrimo njegovo kretanje kroz cijev datu na slici 12.13. Kao što možemo vidjeti poprečni presjek cijevi nije uniforman ($S_1 < S_2$) i cijev mijenja visinu u odnosu na izabrani referentni nivo.

Slika 12.13: Kroz cijev različitog presjeka stacionarno struji nestišljivo idealan fluid. Segment fluida koji uđe kroz lijevi kraj cijevi za vrijeme t , jednak je segmentu fluida koji za to vrijeme izađe na drugom kraju cijevi.



Neka za vrijeme Δt kroz presjek S_1 protekne segment fluida mase $m = \rho S_1 v_1 t$. Onda će, zbog jednačine kontinuiteta, za to isto vrijeme kroz presjek S_2 proteći segment fluida iste te mase. Pri tom pomjeranju, fluid u tački 1 pomjeri se za rastojanje d_1 i primora fluid u tački 2 da se pomjeri za rastojanje d_2 . Pri tome je fluid koji se nalazi lijevo od tačke 1 djelovao silom pritiska $F_1 = p_1 S_1$ na posmatrani segment fluida izvršivši pri tome rad: ¹

$$A_1 = F_1 d_1 = p_1 S_1 v_1 t = p_1 V = p_1 \frac{m}{\rho}, \quad (12.44)$$

dok je rad koji izvršio fluid u tački 2, pomjerajući segment fluida za d_2 u smjeru suprotnom od smjera djelovanja sile pritiska $F_2 = p_2 S_2$, jednak:

$$A_2 = -F_2 d_2 = -p_2 S_2 v_2 t = -p_2 V = -p_2 \frac{m}{\rho}, \quad (12.45)$$

gdje se znak $-$ pojavljuje zbog toga što su sila F_2 i pomak d_2 sada suprotnog smjera tj. $A_2 = F_2 d_2 \cos 180^\circ$. Ukupan izvršeni rad koji je

¹ **Napomena:** smatramo da su pritisci u poprečnim presjecima S_1 i S_2 uniformno raspoređeni zbog njihovih malih dimenzija, pa se uticaj hidrostatičkog pritiska (duž poprečnih presjeka) zanemaruje.

fluid oko izabranog segmenta izvršio pri pomjeranju segmenta fluida s jednog kraja cijevi na drugi, je onda:

$$A_p = A_1 + A_2 = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho}. \quad (12.46)$$

S obzirom da se segment fluida podigne s visine h_1 na visinu h_2 u odnosu na izabrani referentni nivo, u obzir moramo uzeti i rad koji izvrši gravitaciona sila pri tom pomjeranju

$$A_G = -mg(h_2 - h_1), \quad (12.47)$$

gdje je znak $-$ također iz razloga što su sila i pomak suprotnog smjera. Dakle, ukupan rad je

$$A = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1), \quad (12.48)$$

koji je, na osnovu Teorema o energiji i radu, jednak promjeni kinetičke energije segmenta fluida

$$A = \Delta E_k = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}. \quad (12.49)$$

Uvrštavanjem izraza za rad (12.48) dobijamo

$$(p_1 - p_2) \frac{m}{\rho} - mg(h_2 - h_1) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2}, \quad (12.50)$$

što nakon sređivanja daje

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} + \rho g h_2. \quad (12.51)$$

Ovo je Bernoullijeva jednačina za idealan fluid i možemo je napisati u opštem obliku kao

$$p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h = \text{const.} \quad (12.52)$$

Iz ove jednačine vidimo da je zbir statičkog pritiska p , dinamičkog pritiska $\rho v^2/2$ duž cijevi (ili za određenu strujnicu) i visinskog pritiska $\rho g h$ (koji dolazi zbog visinske razlike pojedinih segmenata fluida u odnosu na neki referentni nivo), konstantna veličina. Ovu jednačinu možemo primijeniti i u slučaju realnih fluida s malim unutrašnjim trenjem (viskoznosti).

U slučaju kada je fluid u stanju mirovanja, $v_1 = v_2 = 0$ tada iz Bernoullijeve jednačine dobijamo

$$p_1 + \rho g h_1 = p_2 + \rho g h_2, \quad (12.53)$$

odnosno

$$p_1 - p_2 = \rho g(h_2 - h_1) \quad (12.54)$$

što predstavlja razliku hidrostatičkih pritisaka u mirnom fluidu.

Bernulijeva jednačina zapravo predstavlja zakon očuvanja mehaničke energije u slučaju kada je rad unutrašnjih nekonzervativnih sila jednak nuli, $A_{\text{nekonz}}^{\text{int}} = 0$, a rad vanjskih sila različit od nule. Podsjetimo se jednačine date u poglavlju 6, koja je izvedena iz Teorema o energiji i radu

$$\Delta E_k + \Delta E_p = A^{\text{ext}} + A_{\text{nekonz}}^{\text{int}}. \quad (12.55)$$

Ako posmatramo strujanje fluida kao na slici 12.13, ukupan rad koji izvrše vanjske sile koje djeluju na posmatrani segment fluida dat je jednačinom (12.46), te prethodna jednačina postaje

$$\Delta E_k + \Delta E_p = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho}. \quad (12.56)$$

Nakon uvrštavanja odgovarajućih promjena kinetičke i potencijalne energije posmatranog segmenta fluida dobijamo

$$\frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} + mgh_2 - mgh_1 = (p_1 - p_2) \frac{m}{\rho}. \quad (12.57)$$

Očito je da ćemo nakon sređivanja prethodne jednačine, dobiti upravo Bernoullijevu jednačinu (12.52).

12.4 Realni fluidi

Realni fluidi su tečnosti i gasovi koji se u realnim uslovima ponašaju prema složenijim zakonima od idealnih fluida. Njihova gustoća i viskoznost obično variraju s temperaturom, pritiskom i drugim uslovima. Također mogu biti viskozni, što znači da se opiru promjeni oblika i strujanju pod uticajem unutrašnjeg trenja. Pri velikim brzinama strujanja, tok im prelazi u turbulentni koje karakteriše stvaranje vrtloga. Potrebno je što bolje razumijeti i opisati ponašanje realnih fluida, kako bi se moglo predvidjeti njihovo strujanje u stvarnim situacijama.

Neka je u cilindričnu cijev površine poprečnog presjeka S nasuta neka realna tečnost. Na jednom kraju te cijevi tečnost ističe u cilindričnu menzuru iste površine poprečnog presjeka. Tada je srednja brzina tečnosti u cijevi jednaka brzini podizanja nivoa tečnosti u menzuru. Ako je za vrijeme t u menzuru utekla tečnost zapremine V , tada je srednja brzina tečnosti u cijevi

$$\bar{v} = \frac{l}{t}, \quad (12.58)$$

gdje je l visina tečnosti u menzuri u momentu t . Eksperimentalno je dokazano da je srednja brzina laminarnog toka tečnosti u cijevi data relacijom

$$\bar{v} = \frac{r^2}{8\eta} \frac{p_1 - p_2}{\ell}, \quad (12.59)$$

koja predstavlja Hagenov zakon. Drugi razlomak u gornjem izrazu pokazuje kako pritisak u cijevi opada duž strujnog toka po jedinici dužine cijevi i naziva se gradijent pritiska. Razlika $p_1 - p_2$ predstavlja razliku pritiska na krajevima cijevi, poluprečnik cijevi je označen s r , dok je s η označen dinamički koeficijent viskoznosti. Intenzitet protoka I definišemo kao zapreminu tečnosti koja istječe iz cijevi u jedinici vremena

$$I = \frac{V}{t} = \frac{S\ell}{t} = S\bar{v} \quad (12.60)$$

te ako uvrstimo izraz za srednju brzinu (12.59) uz pretpostavku da je poprečni presjek strujne cijevi kružni $S = r^2\pi$ dobijamo

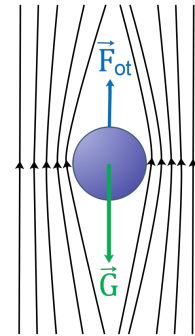
$$I = \frac{p_1 - p_2}{\frac{8\eta\ell}{r^4\pi}} = \frac{\Delta p}{R}. \quad (12.61)$$

Veličina R predstavlja hidrodinamički otpor, tj. otpor protjecanja tečnosti kroz cijev i izražava se u jedinicama otpora koja iznosi $1\text{JO} = 133,3 \text{ Pascm}^{-3}$. Vidimo da je otpor cijevi pri protjecanju tečnosti direktno proporcionalan dužini cijevi $R \propto l$, ali obrnuto proporcionalan kvadratu površine poprečnog presjeka cijevi $R \propto 1/S^2$. Ovo omogućava da se zakoni za izračunavanje otpora električnih kola, primjene na serijske i paralelne mreže cijevi kroz koje protječe tečnost.

Kretanje tijela kroz realne fluide

Pri kretanju tijela kroz viskoznu sredinu javlja se odgovarajući otpor. Ovaj otpor igra značajnu ulogu, na primjer, pri kretanju aviona kroz vazduh ili broda po vodi, pri čemu se nastoji da se ova sila svede na minimum. Slojevi tečnosti neposredno uz tijelo kreću se istom ili bliskom brzinom kao i tijelo, pa se između njih i ostalih slojeva javlja sila trenja. Prema Stokesovom zakonu, sila trenja koja se javlja pri kretanju tijela kroz viskoznu tečnost direktno je proporcionalna brzini kretanja tijela v (za male brzine), apsolutnom koeficijentu viskoznosti η i dimenzijama tijela. Tako na primjer za tijelo u obliku sfere poluprečnika r (slika 12.14), Stokesova sila otpora pri kretanju kroz tečnost iznosi

$$F_{ot} = 6\pi\eta r v. \quad (12.62)$$



Slika 12.14: Pri kretanju tijela kroz viskoznu sredinu javlja odgovarajući otpor.

Reynoldsov broj

Pri većim brzinama strujanja fluida dolazi do prelaska čestica fluida iz jednog sloja u drugi, tj. do turbulentnog kretanja. Kada će laminarno kretanje preći u turbulentno zavisi od mnogo okolnosti koje se jednostavnom teorijom ne mogu predvidjeti. Uglavnom se turbulentno kretanje javlja pri većim brzinama, ali zavisi i od oblika posude, prečnika mlaza, obrade površine posude i drugih faktora.

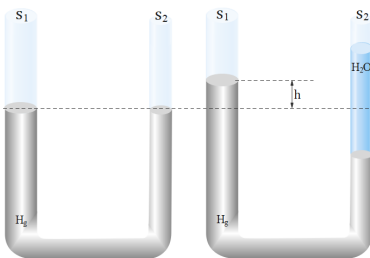
Općenito unutrašnje trenje se znatno povećava pri turbulentnom kretanju. Brzina pri kojoj dolazi do prelaska laminarnog u turbulentno kretanje naziva se kritičnom brzinom. Eksperimentalna istraživanja su pokazala da kritična brzina zavisi od koeficijenta viskoznost, gustine fluida kao i od dimenzija mlaza, ali i od drugih faktora koji se ne mogu tačno odrediti. Zbog toga se kao kriterijum za određivanje prirode kretanja fluida koristi bezdimenzionalna veličina koju nazivamo Reynoldsov broj R_e

$$R_e = \frac{\rho \bar{v} d}{\eta}, \quad (12.63)$$

pri čemu je \bar{v} – srednja brzina tečnosti u smjeru njenog protjecanja, ρ – gustoća fluida, η – koeficijent viskoznosti tečnosti, d – prečnik cijevi kroz koju tečnost protječe.

Pod kritičnim Reynoldsovim brojem R_{ec} podrazumijeva se najmanja vrijednost Reynoldsovog broja od koje počinje mogućnost turbulentnog strujanja tečnosti u cijevi. Za homogene tečnosti ona iznosi $R_{ec} < 2000$. Za većinu homogenih tečnosti, laminarni tok se odvija pri vrijednostima $R_e < 2000$. Za vrijednosti Reynoldsovog boja između 2000 i 3000 strujanje tečnosti je nestabilno (može spontano prelaziti iz jednog oblika protjecanja u drugi), dok za vrijednosti $R_e > 3000$ tok postaje turbulentan.

12.5 Riješeni zadaci



Slika 12.15: Uz zadatak 1.

ZADATAK 1: Živa se sipa u U-cijev kao na slici 12.15 (lijevo). Lijevi krak cijevi ima površinu poprečnog presjeka $S_1 = 10 \text{ cm}^2$, a desni krak ima površinu poprečnog presjeka $S_2 = 5 \text{ cm}^2$. Zatim se 100 g vode ulije u desni krak kao na slici 12.15 (desno).

- Odrediti visinu vodenog stuba u desnom kraku U-cijevi.
- S obzirom da je gustina žive $13,6 \text{ g cm}^{-3}$, na koju udaljenost h se živa podigne u lijevom kraku?

Rješenje:

a) Visinu vodenog stuba h_v ćemo odrediti iz definicije gustoće kao

$$\rho = \frac{m}{V_v} = \frac{m}{S_2 h_v} \implies h_v = \frac{m}{S_2 \rho}, \quad (1.1)$$

gdje smo uzeli da je zapremina vode V_v jednaka zapremini valjka površine baze S_2 i visine h_v tj. $V_v = S_2 h_v$. Uvrštavajući poznate vrijednosti dobijamo da je tražena visina

$$h_v = \frac{100 \text{ g}}{5 \text{ cm}^2 \cdot 1 \text{ g cm}^{-3}} = 20 \text{ cm}. \quad (1.2)$$

b) Slika 12.16 desno predstavlja situaciju nakon dodavanja vode. Zapremina $S_2 h_2$ žive je istisnuta vodom u desnoj cijevi. Dodatna zapremina žive sada u lijevoj cijevi je $S_1 h$. Pošto se ukupna zapremina žive nije promijenila, mora biti

$$S_1 h = S_2 h_2, \quad (1.3)$$

odnosno

$$h_2 = \frac{S_1 h}{S_2}. \quad (1.4)$$

Na nivou dodira žive i vode u desnom kraku cijevi možemo napisati da je ukupni pritisak jednak

$$p = p_a + \rho_v g h_v, \quad (1.5)$$

gdje smo atmosferski pritisak označili s p_a . Na istom nivou u lijevom kraku cijevi pritisak je

$$p = p_a + \rho_{\text{Hg}} g (h + h_2). \quad (1.6)$$

Ta dva pritiska su jednaka

$$p_a + \rho_{\text{Hg}} g (h + h_2) = p_a + \rho_v g h_v. \quad (1.7)$$

Uvrstimo li izraz koji smo dobili za h , nakon sređivanja gornja jednačina će se svesti na

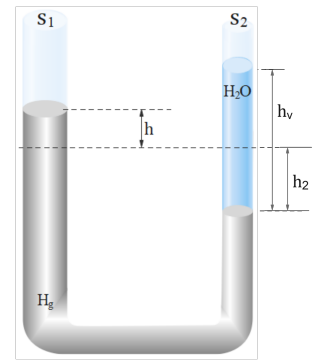
$$\rho_{\text{Hg}} \left(h + \frac{S_1}{S_2} h \right) = \rho_v h_v, \quad (1.8)$$

odnosno

$$h = \frac{\rho_v h_v}{\rho_{\text{Hg}} \left(1 + \frac{S_1}{S_2} \right)}. \quad (1.9)$$

Nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti, dobijamo da je visina za koju se živa izdigne nakon dodavanja vode

$$h = \frac{1 \text{ g cm}^{-3} \cdot 20 \text{ cm}}{13,6 \text{ g cm}^{-3} \left(1 + \frac{10 \text{ cm}^2}{5 \text{ cm}^2} \right)} = 0,49 \text{ cm}. \quad (1.10)$$

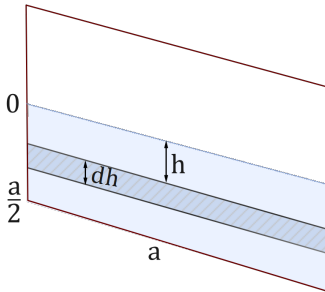


Slika 12.16: Uz rješenje zadatka 1b.

ZADATAK 2: Otvorena posuda u obliku kocke dužine ivice a do pola je ispunjena vodom gustoće ρ . Odrediti silu kojom voda djeluje na stranicu kocke (ivice kocke su horizontalne ili vertikalne.)

Rješenje:

S obzirom da se pritisak mijenja s dubinom, ne možemo odrediti silu kojom voda djeluje na stranicu kocke jednostavno kao proizvod pritiska i polovine površine stranice kocke. Umjesto toga razmatrat ćemo silu koja djeluje na jedan mali dio površine, odnosno pojas širine a visine dh , koji se nalazi na dubini h (slika 12.17). Pritisak vode na dubini h iznosi $p_a + \rho gh$, međutim atmosferski pritisak se vrši s obje strane zida kocke, tako da se efekti djelovanja atmosferskog pritiska ponište. Sila na posmatrani djelić površine će sada biti



Slika 12.17: Uz rješenje zadatka 2.

$$dF = pdS. \quad (2.1)$$

Površinu posmatranog pojasa možemo izraziti kao $dS = adh$, te uvrstiti pritisak na datoj dubini $p = \rho gh$ u gornju jednačinu, tako da za silu dF dobijamo

$$dF = \rho ghadh. \quad (2.2)$$

Ukupnu silu ćemo dobiti integriranjem gornjeg izraza od 0 do $h = \frac{a}{2}$:

$$F = \int_0^{\frac{a}{2}} \rho ghadh = \rho ag \int_0^{\frac{a}{2}} h dh = \frac{1}{2} \rho ga \left(\frac{a}{2} \right)^2 = \frac{1}{8} \rho ga^3. \quad (2.3)$$

ZADATAK 3: Homogeni čvrsti predmet pluta na vodi sa 80% svoje zapremine ispod površine. Isti predmet, kada se stavi u drugu tečnost, pluta na toj tečnosti sa 72% svoje zapremine ispod površine. Odrediti gustoću predmeta i nepoznate tečnost.

Rješenje:

Označimo ukupnu zapreminu predmeta s V , a s V_p dio zapremine koja je potopljena u tečnost. Na tijelo djeluju sila Zemljine teže \vec{G} i sila potiska \vec{F}_p kao na slici 12.18 (tačka hvatišta sile potiska je u težištu potopljenog dijela tijela). Budući da tijelo miruje, drugi Newtonov zakon će glasiti

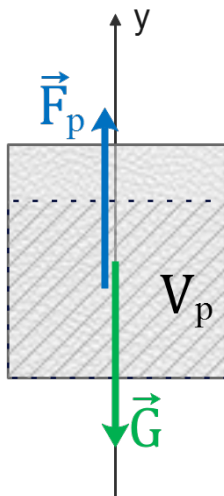
$$\Sigma \vec{F} = 0, \quad (3.1)$$

odnosno

$$\vec{F}_p + \vec{G} = 0. \quad (3.2)$$

Projekcijom vektora sila na izabranu y -osu, usmjerenu vertikalno prema gore, dobijamo skalarnu jednačinu

$$F_p - G = 0 \quad (3.3)$$



Slika 12.18: Uz rješenje zadatka 3.

iz koje slijedi uslov ravnoteže

$$G = F_p. \quad (3.4)$$

Težinu tijela ćemo izraziti preko njegove gustoće ρ_{tijela} kao $G = mg = \rho_{\text{tijela}}Vg$, a silu potiska preko odgovarajuće gustoće tečnosti ρ kao $F_p = \rho V_p g$

$$\rho_{\text{tijela}}Vg = \rho V_p g, \quad (3.5)$$

pri čemu ćemo uzeti da je $\rho = \rho_v$ za vodu i $\rho = \rho_t$ za nepoznatu tečnost. Iz uslova zadatka znamo da kada tijelo pluta na vodi dio zapremine koji je potopljen iznosi $V_p = 80\%V = 0,8V$, te uslov ravnoteže 3.5 u tom slučaju možemo napisati kao

$$\rho_{\text{tijela}}Vg = \rho_v 0,8Vg \quad (3.6)$$

odakle slijedi da je gustoća tijela

$$\rho_{\text{tijela}} = 0,8\rho_v = 0,8 \cdot 1000 \text{ kgm}^{-3} = 800 \text{ kgm}^{-3} \quad (3.7)$$

Kada je tijelo potopljeno u nepoznatu tečnost dio zapremine koja je uronjena, prema uslovu zadatka, iznosi $V_p = 0,72V$, te iz uslova ravnoteže

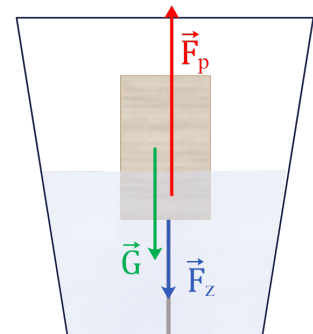
$$\rho_{\text{tijela}}Vg = \rho_t 0,72Vg \quad (3.8)$$

dobijamo traženu gustoću

$$\rho_t = \frac{\rho_{\text{tijela}}}{0,72} = \frac{800 \text{ kgm}^{-3}}{0,72} = 1111,11 \text{ kgm}^{-3}. \quad (3.9)$$

ZADATAK 4: Težina pravougaonog bloka od materijala male gustine je 15 N. Sredina vodoravne donje strane bloka vezana je tankim koncem za dno čaše koja je dijelom napunjena vodom. Kada je 25% zapremine bloka potopljeno, sila zatezanja konca je 10 N.

- Odrediti silu potiska na blok.
- Ulje gustine 800 kgm^{-3} se sada stalno dodaje u čašu, formirajući sloj iznad vode i okružujući blok. Ulje djeluje silama na svaku od četiri bočne stijenke bloka koje ulje dodiruje. Koji je smjer tih sila?
- Šta se dešava sa silom zatezanja kada se dodaje ulje i zašto?
- Konac se prekida pri sili zatezanja od 60 N. U tom trenutku, 25% zapremine bloka je još uvijek ispod vodene linije; koji je postotak zapremine bloka ispod gornje površine ulja?
- Nakon što se konac prekine, blok dolazi u novi ravnotežni položaj u čaši. Sada je u kontaktu samo s uljem. Koji dio zapremine bloka je potopljen?



Slika 12.19: Uz rješenje zadatka 4a.

Rješenje:

a) Na blok djeluju tri sile i to sila zatezanja \vec{F}_z , sila Zemljine teže \vec{G} i sila potiska vode \vec{F}_p kao na slici 12.19 (tačke hvatišta nekih sila su na ovoj i narednim slikama u ovom zadatku pomjerene zbog preglednosti). Drugi Newtonov zakon će glasiti

$$\vec{G} + \vec{F}_z + \vec{F}_p = 0, \quad (4.1)$$

pri čemu smo uzeli u obzir da blok miruje. Projekcijom vektora sila na vertikalni pravac dobijamo

$$G + F_z - F_p = 0, \quad (4.2)$$

odakle je sila potiska vode

$$F_p = F_z + G = 10\text{ N} + 15\text{ N} = 25\text{ N}. \quad (4.3)$$

b) Smjer sila kojim ulje djeluje na sve četiri strane bloka je horizontalno prema unutra.

c) Povećava se sila zatezanja. Ulje uzrokuje da voda ispod bude pod većim pritiskom, i ona jače djeluje na dno bloka

d) Neposredno prije prekidanja konca blok je u stanju mirovanja, a na njega djeluje dodatna sila potiska zbog dodavanja ulja $F_{p,ulje}$. Za taj trenutak možemo napisati ponovo drugi Newtonov zakon kao

$$G + F_z - F_p - F_{p,ulje} = 0 \quad (4.4)$$

iz kojeg dobijamo dodatnu silu potiska $F_{p,ulje}$

$$F_{p,ulje} = G + F_z - F_p = 15\text{ N} + 60\text{ N} - 25\text{ N} = 50\text{ N}. \quad (4.5)$$

Neka je V ukupna zapremina bloka, a V' dio zapremine koji je potopljen u vodu. Za silu potiska vode onda možemo pisati

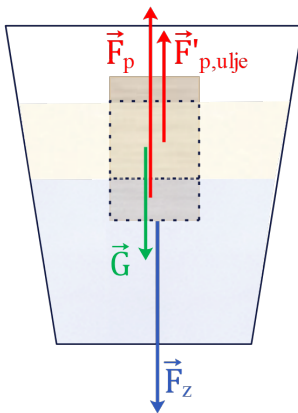
$$F_p = \rho_v V' g = \rho_v 0,25Vg, \quad (4.6)$$

gdje smo uvrstili uslov zadatka da je 25% zapremine bloka potopljeno u vodu tj. $V' = 0,25V$. Iz prethodne jednačine možemo izračunati zapreminu bloka

$$V = \frac{F_p}{0,25\rho_v g} = \frac{25\text{ N}}{0,25 \cdot 1000\text{ kgm}^{-3} \cdot 9,81\text{ m s}^{-1}} = 1,02 \cdot 10^{-2}\text{ m}^3. \quad (4.7)$$

Sila potiska ulja zavisi od dijela zapremine bloka koji je u ulju. Uzmimo da je ta zapremina $V'' = kV$ i napišimo izraz za silu potiska kao

$$F_{p,ulje} = \rho_{ulje} V'' g = \rho_{ulje} kVg \quad (4.8)$$



Slika 12.20: Uz rješenje zadatka 4d.

odakle ćemo dobiti nepoznati koeficijent k :

$$k = \frac{F_{p,ulje}}{\rho_{ulje} V g} = \frac{50 \text{ N}}{800 \text{ kgm}^{-3} \cdot 1,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-1}} = 0,625. \quad (4.9)$$

Dakle, 62,5% zapremine kocke se nalazi u ulju u trenutku pucanja konca.

e) Nakon pucanja konca, na blok ne djeluje više sila zatezanja. Iz uslova zadatka znamo da je novi ravnotežni položaj takav da se blok nalazi samo u ulju, te i silu potiska vode možemo zanemariti. Sada na blok djeluju samo dvije sile, sila Zemljine teže i sila potiska ulja. Primijenimo li ove uslove na jednačinu 4.4 dobijamo

$$F'_{p,ulje} = G. \quad (4.10)$$

Uzmimo da je dio zapremine koji je sada uronjen u ulje $k'V$, onda gornja jednačinu možemo napisati kao

$$\rho_{ulje} k' V g = G \quad (4.11)$$

i izračunati traženi koeficijent k' :

$$k' = \frac{G}{\rho_{ulje} V g} = \frac{15 \text{ N}}{800 \text{ kgm}^{-3} \cdot 1,02 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-1}} = 0,187. \quad (4.12)$$

Dakle, 18,7% zapremine kocke se nalazi u ulju nakon uspostavljanja novog ravnotežnog položaja.

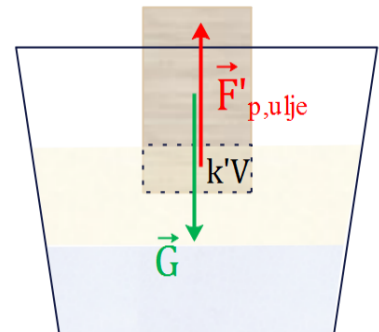
ZADATAK 5: Lagana opruga konstante $k = 90 \text{ Nm}^{-1}$ je postavljena uspravno (vertikalno) i pričvršćena za sto kao na slici 12.22 lijevo. Balon od $m_b = 2 \text{ g}$ je ispunjen helijumom (gustoće $\rho_{\text{He}} = 0,18 \text{ kgm}^{-3}$) do zapremine od $V = 5 \text{ m}^3$ i zatim je zakačen na slobodni kraj opruge kao na slici 12.22 desno, uzrokujući njeno istezanje. Kolika je dužina L za koju se istegne opruga kada je balon u ravnoteži? Gustoća vazduha je $\rho_v = 1,29 \text{ kgm}^{-3}$.

Rješenje:

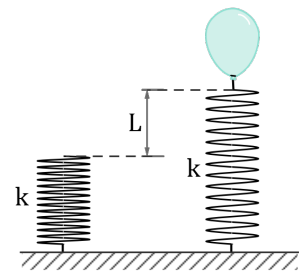
Balon se pod uticajem sile potiska kreće vertikalno prema gore i pri tome izdužuje oprugu. Ta sila potiska je jednaka

$$F_p = \rho_v V g \quad (5.1)$$

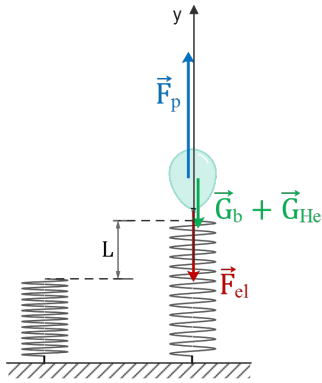
gdje je ρ_v gustina istisnutog vazduha, a V zapremina istisnutog vazduha, a ona je upravo jednaka zapremini balona. Kada je opruga istegnuta javlja se elastična sila koja nastoji da vrati oprugu u ravnotežni položaj tj. vuče balon prema dole. Ta sila je jednaka $F_{el} = kx$, gdje je x dužina za koju se istegne opruga, što u ovom zadatku iznosi



Slika 12.21: Uz rješenje zadatka 4e.



Slika 12.22: Uz zadatak 5.



Slika 12.23: Uz rješenje zadatka 5.

$x = L$. Pored ove dvije sile, na balon djeluju i težina balona i težina helijuma kao na slici 12.23 (tačke hvatišta sila su pomjerene radi preglednosti), tako da ćemo drugi Newtonov zakon za ravnotežni slučaj napisati kao

$$\vec{F}_p + \vec{F}_{el} + \vec{G}_b + \vec{G}_{He} = 0, \quad (5.2)$$

što nakon projekcije na vertikalni pravac daje

$$F_p - F_{el} - G_b - G_{He} = 0. \quad (5.3)$$

Nakon uvrštavanja gore navedenih izraza za sile i izraza za težinu balona i helijuma dobijamo

$$\rho_v V g - kL - m_b g - m_{He} g = 0. \quad (5.4)$$

Iz ove jednačine možemo izraziti traženu dužinu kao

$$L = \frac{\rho_v V g - (m_b + m_{He})g}{k}, \quad (5.5)$$

odnosno, nakon uvrštavanja mase helijuma kao $m_{He} = \rho_{He} V_{He} g = \rho_{He} V g$, gdje smo uzeli da je zapremina helijuma jednaka zapremini balona (zapreminu koju zauzima guma smo zanemarili) i sređivanja izraza dobijamo

$$L = \frac{(\rho_v - \rho_{He}) V g - m_b g}{k} = \frac{[(\rho_v - \rho_{He}) V - m_b] g}{k}. \quad (5.6)$$

Kada uvrstimo poznate vrijednosti, dobijemo da je dužina za koju se istegne opruga:

$$\begin{aligned} L &= \frac{[(1,29 \text{ kgm}^{-3} - 0,18 \text{ kgm}^{-3}) 5 \text{ m}^3 - 2 \text{ g}] 9,81 \text{ m s}^{-1}}{90 \text{ Nm}^{-1}} = \\ &= 0,604 \text{ m}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

ZADATAK 6: Voda izlazi iz kružne slavine i teče ravno prema dole s protokom od $10,5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}$.

- Ako je prečnik slavine $1,2 \text{ cm}$, kolika je brzina vode?
- Kako voda pada iz slavine, njen tok se sužava. Odrediti novi prečnik toka na tački $7,5 \text{ cm}$ ispod slavine. Pretpostaviti da tok još uvijek ima kružni poprečni presjek i zanemariti sve sile otpora koje djeluju na vodu.
- Ako su turbulentna strujanja okarakterizirana Reynoldsovim brojem iznad 2300 , koliko daleko voda mora pasti prije nego što njen tok postane turbulentan?

Rješenje:

a) Zapreminski protok fluida možemo izraziti preko površine poprečnog presjeka strujne cijevi i brzine fluida kao

$$Q = Sv. \quad (6.1)$$

S obzirom da je poprečni presjek strujne cijevi kružnog oblika, uvrštavajući za S površinu kruga prečnika d , možemo izvesti izraz za traženu brzinu:

$$Q = \frac{1}{4}d^2\pi v \implies v = \frac{4Q}{\pi d^2}, \quad (6.2)$$

što nakon uvrštavanja datih vrijednosti iznosi

$$v = \frac{4 \cdot 10,5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}}{\pi (1,2 \text{ cm})^2} = 9,28 \text{ cm s}^{-1}. \quad (6.3)$$

b) Budući da se strujna cijev sužava, primijenimo jednačinu kontinuiteta da odredimo njen prečnik na mjestu koje je za Δh ispod slavine. Neka je traženi prečnik d' , a brzina toka na tom mjestu v' jednačina kontinuiteta će glasiti

$$Sv = S'v' \quad (6.4)$$

gdje je S površina otvora slavine, a $v = 9,28 \text{ cm s}^{-1}$ brzina vode pri izlasku iz slavine. Uzmemo li u obzir da tok još uvijek ima kružni poprečni presjek, možemo dobiti traženi prečnik nakon što uvrstimo izraze za površinu kruga:

$$v \frac{\pi}{4} d^2 = v' \frac{\pi}{4} d'^2 \implies d' = d \sqrt{\frac{v}{v'}}. \quad (6.5)$$

Brzinu vode u tački koja je za Δh ispod slavine dobićemo na osnovu jednačine za brzinu pri kretanju s konstantnim ubrzanjem $a = g$ kao

$$v'^2 = v^2 + 2g\Delta h, \quad (6.6)$$

koja nakon uvrštavanja poznatih vrijednosti daje:

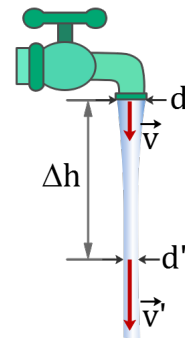
$$v' = \sqrt{(9,28 \text{ cm s}^{-1})^2 + 2 \cdot 981 \text{ cm s}^{-2} \cdot 7,5 \text{ cm}} = 122 \text{ cm s}^{-1}. \quad (6.7)$$

Traženi prečnik iznosi

$$d' = 1,2 \text{ cm} \sqrt{\frac{9,28 \text{ cm s}^{-1}}{122 \text{ cm s}^{-1}}} = 0,331 \text{ cm}. \quad (6.8)$$

c) Reynoldsov broj zavisi od poluprečnika strujne cijevi i od brzine toka fluida kao

$$R = \frac{2r\rho v_t}{\eta}, \quad (6.9)$$



Slika 12.24: Uz rješenje zadatka 6b.

gdje je s v_t označena prosječna brzina vode u smjeru protjecanja, r je poluprečnik strujne cijevi na tom mjestu, a η je koeficijent viskoznosti vode koji iznosi $\eta = 1,8 \cdot 10^{-3}$ Pas. Poluprečnik strujne cijevi ćemo odrediti iz formule za protok

$$Q = S_t v_t = r^2 \pi v_t \quad (6.10)$$

gdje je $S_t = r^2 \pi$ površina poprečnog presjeka strujne cijevi na mjestu gdje tok postaje turbulentan. S obzirom da je protok konstantan, tj. isti je duž cijele strujne cijevi, možemo dobiti traženi poluprečnik kao

$$r = \sqrt{\frac{Q}{\pi v_t}}, \quad (6.11)$$

te ga uvrstiti u izraz za Reynoldsov broj

$$R = \frac{2\rho v_t}{\eta} \sqrt{\frac{Q}{\pi v_t}}. \quad (6.12)$$

Iz ove jednačine ćemo izračunati brzinu v_t tako što prethodnu jednačinu prvo kvadriramo

$$R^2 = \frac{4\rho^2 v_t Q}{\eta^2 \pi}, \quad (6.13)$$

izrazimo traženu brzinu

$$v_t = \frac{R^2 \eta^2 \pi}{4\rho^2 Q}, \quad (6.14)$$

te uvrstimo date vrijednosti

$$v_t = \frac{\pi \cdot 2300^2 \cdot (1,8 \cdot 10^{-3} \text{ Pas})^2}{4 \cdot (1000 \text{ kgm}^3)^2 \cdot 10,5 \text{ cm}^3 \text{ s}^{-1}} = 1,28 \text{ m s}^{-1}. \quad (6.15)$$

Kao i u prethodnom slučaju, nepoznatu brzinu v_t možemo izraziti preko jednačine za brzinu pri kretanju s konstantnim ubrzanjem

$$v_t^2 = v^2 + 2gH, \quad (6.16)$$

pri čemu smo s H označili nepoznatu visinu na kojoj tok postaje turbulentan. Iz gornje jednačine tražena visina iznosi

$$H = \frac{v_t^2 - v^2}{2g} = \frac{(128 \text{ cms}^{-1})^2 - (9,28 \text{ cms}^{-1})^2}{2 \cdot 981 \text{ cms}^{-2}} = 8,31 \text{ cm}. \quad (6.17)$$

ZADATAK 7: Brzinu protjecanja fluida možemo mjeriti pomoću Pitotove cijevi. To je staklena cijev čiji je donji kraj savijen pod pravim uglom u smjeru suprotnom od smjera protjecanja tečnosti (lijeva cijev na slici 12.25). Ukoliko je razlika nivoa u običnoj barometarskoj cijevi (desna cijev na slici) i Pitotovoj cijevi poznata, odrediti brzinu strujanja fluida.

Rješenje:

Pri rješavanju problema vezanih za strujanje fluida prvo izaberemo tačke u fluidu između kojih želimo posmatrati promjenu pritiska, a zatim izaberemo referentni nivo u odnosu na koji ćemo posmatrati položaj tih tačaka. Za cijev datu na slici 12.25, izabrat ćemo tačke A i B, a referentni nivo će biti horizontalna prava koja prolazi kroz ove tačke (plava isprekidana linija na pomenutoj slici). S obzirom da su obje tačke na referentnom nivou, ne postoji visinska razlika između njih, te Bernoullijevu jednačinu možemo napisati kao

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (7.1)$$

U savijenom dijelu Pitotove cijevi možemo smatrati da se fluid zaustavi nakon što se cijev napuni fluidom do visine h_1 , tako da je $v_1 = 0$, te dobijamo

$$p_1 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (7.2)$$

Statičke pritiske p_1 i p_2 možemo odrediti na osnovu visine stubova fluida² do kojih se on popne u datim cijevima kao

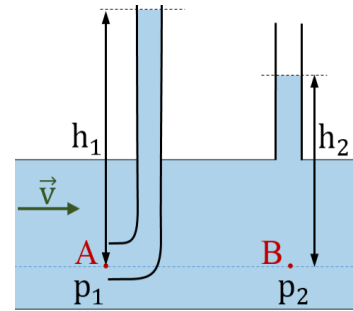
$$p_1 = p_a + \rho g h_1, \quad p_2 = p_a + \rho g h_2. \quad (7.3)$$

Kada gornje jednačine uvrstimo u jednačinu 7.2 i umjesto oznake v_2 uvrstimo v , dobijamo da je brzina strujanja fluida

$$v = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}. \quad (7.4)$$

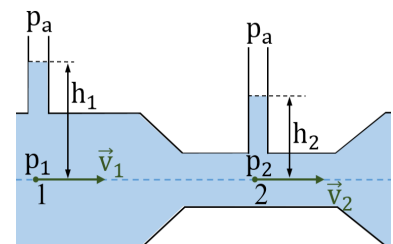
ZADATAK 8: Horizontalna sužena cijev prikazana na slici 12.26, poznata je kao Venturijeva cijev i koristi se za mjerenje brzine protoka nestišljivog fluida. Površina šireg dijela cijevi je S_1 , a užeg S_2 . Odrediti brzinu protoka v_2 u suženom dijelu, ako je poznata:

- razlika pritisaka $p_1 - p_2$;
- razlika visina $h_1 - h_2$.



Slika 12.25: Uz zadatak 7.

² **Napomena:** u praksi se najčešće visine h_1 i h_2 mjere od površine cijevi kroz koju teče fluid, pri čemu se uvodi aproksimacija da je raspodjela pritisaka na poprečnom presjeku cijevi uniformna, tj. da je pritisak isti u svakoj tački poprečnog presjeka cijevi.



Slika 12.26: Uz zadatak 8.

Rješenje:

a) Za referentni nivo izabraćemo horizontalnu strujnicu koja prolazi kroz tačke 1 i 2 na slici 12.26. S obzirom da su obje tačke na referentnom nivou, Bernulijevu jednačinu možemo napisati kao

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \quad (8.1)$$

Brzinu u širem dijelu cijevi ćemo izraziti iz jednačine kontinuiteta kao

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 \quad (8.2)$$

i uvrstiti u gornju jednačinu

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \left(\frac{S_2}{S_1} v_2 \right)^2 = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (8.3)$$

Nakon sređivanja izraza dobijamo traženu brzinu izraženu preko razlike statičkih pritisaka p_1 i p_2 :

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (8.4)$$

Iz jednačine 8.2, uzimajući u obzir da je $S_1 > S_2$, možemo zaključiti da je $v_2 > v_1$. Ta činjenica, zajedno s jednačinom 8.1 vodi nas na zaključak da je $p_1 > p_2$, odnosno da se statički pritisak smanjuje u suženom dijelu cijevi.

b) Pritisak na dnu vertikalne cijevi jednak je sumi atmosferskog pritiska i hidrostatičkog pritiska stuba tečnosti iznad dna vertikalne cijevi. Taj pritisak odgovara statičkom pritisku u cijevi, te je pritisak u širem dijelu cijevi

$$p_1 = p_a + \rho g h_1, \quad (8.5)$$

a u užem

$$p_2 = p_a + \rho g h_2. \quad (8.6)$$

Razlika ovih pritisaka je

$$p_1 - p_2 = \rho g (h_1 - h_2) \quad (8.7)$$

te nakon uvrštavanja u jednačinu 8.4 dobijamo

$$v_2 = S_1 \sqrt{\frac{2\rho g (h_1 - h_2)}{\rho(S_1^2 - S_2^2)}} \quad (8.8)$$

ZADATAK 9: Zatvoreni rezervoar koji sadrži tečnost gustine ρ ima mali otvor na bočnoj strani na visini h_1 od dna rezervoara kao na slici 12.27. Otvor je u kontaktu s atmosferom, a prečnik mu je mnogo manji od prečnika rezervoara. Vazduh iznad tečnosti održava se pod pritiskom p .

- Odrediti brzinu isticanja tečnosti iz otvora kada je nivo tečnosti na visini h iznad otvora.
- Neka je rezervoar otvoren prema atmosferi i neka je položaj otvora h_1 podesiv. Koji položaj bi uzrokovao da voda padne na stol na najvećoj udaljenosti od rezervoara?

Rješenje:

a) S obzirom da je prečnik otvora mnogo manji od prečnika rezervoara, odnosno da je površina poprečnog presjeka rezervoara puno veća od površine otvora, $S_2 \gg S_1$, na osnovu jednačine kontinuiteta možemo zaključiti da je brzina isticanja kroz otvor v_1 puno veća od brzine spuštavanja nivoa tečnosti u rezervoaru v_2

$$S_1 v_1 = S_2 v_2, \quad \frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1}{v_2} \gg 1 \implies v_1 \gg v_2. \quad (9.1)$$

Dakle, možemo uzeti da tečnost na vrhu rezervoara, gde je pritisak $p_2 = p$, približno miruje, $v_2 \approx 0$.

Kako bismo mogli primijeniti Bernoullijevu jednačinu, posmatraćemo strujnicu koja prolazi kroz neku tačku na površini vode u rezervoaru i tačku na samom otvoru, a za referentni nivo ćemo uzeti dno rezervoara. Primjećujući da je na otvoru pritisak jednak atmosferskom, $p_1 = p_a$, dobijamo

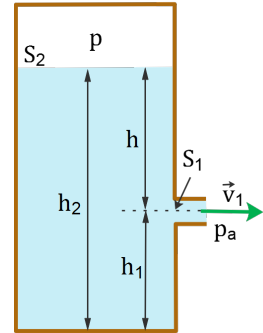
$$p_a + \frac{\rho v_1^2}{2} + \rho g h_1 = p + \rho g h_2 \quad (9.2)$$

gdje je h_2 visina nivoa tečnosti u rezervoaru u odnosu na izabrani referentni nivo (slika 12.27), a h_1 visina otvora. Kada iz ove jednačine izrazimo brzinu v_1 kao

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(p - p_a)}{\rho} + 2g(h_2 - h_1)} \quad (9.3)$$

te uvrstimo da je $h_2 - h_1 = h$, što predstavlja visinu stuba tečnosti iznad otvora, odnosno dubinu na kojoj se nalazi otvor, dobijamo da je brzina isticanja tečnosti jednaka

$$v_1 = v = \sqrt{\frac{2(p - p_a)}{\rho} + 2gh} \quad (9.4)$$

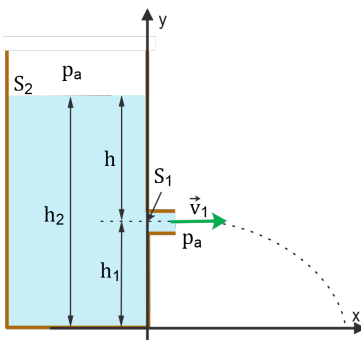


Slika 12.27: Uz zadatak 9.

Na osnovu dobijenog izraza možemo zaključiti da u slučaju kada je $p \gg p_a$ (pri čemu se član $2gh$ može zanemariti), izlazna brzina tečnosti je uglavnom funkcija pritiska u rezervoaru p . S druge strane, ako je rezervoar otvoren prema atmosferi, tada je $p = p_a$ te je

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (9.5)$$

To znači da je u otvorenom rezervoaru (ili općenito u rezervoaru u kojem je pritisak iznad slobodne površine tečnosti jednak atmosferskom), brzina tečnosti koja izlazi kroz otvor na visini h ispod površine, jednaka brzini koju postiže tijelo koje slobodno pada s visine h . Ova činjenica je poznata kao Toričelijev zakon.



Slika 12.28: Uz rješenje zadatka 9b.

b) Zamislimo da je djelić tečnosti koji napušta otvor, zapravo projektil ispaljen u horizontalnom pravcu brzinom v koja je data jednačinom 9.5. Ukoliko koordinatni sistem postavimo tako da x -osa leži duž stola, a y -osu usmjerimo prema gore kao na slici 12.28, jednačine kretanja će biti:

$$y = h_1 - \frac{gt^2}{2}, \quad x = vt. \quad (9.6)$$

Vrijeme nakon kojeg će djelić tečnosti udariti od sto ćemo dobiti iz uslova da je $y = 0$, tj.

$$0 = h_1 - \frac{gt^2}{2} \implies t = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}, \quad (9.7)$$

a mjesto udara je

$$x = v \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = \sqrt{2gh} \sqrt{\frac{2h_1}{g}} = 2\sqrt{h_2h_1 - h_1^2} \quad (9.8)$$

Da bismo dobili maksimalan domet potrebno je naći izvod $\frac{dx}{dh_1}$, budući da je h_1 promjenljiva veličina, i izjednačiti ga s nulom:

$$\frac{dx}{dh_1} = 2 \frac{h_2 - 2h_1}{2\sqrt{h_2h_1 - h_1^2}} = 0 \quad (9.9)$$

te dobijamo

$$h_1 = \frac{1}{2}h_2. \quad (9.10)$$

Dakle, otvor bi trebao biti na pola visine između dna spremnika i gornje površine vode kako bi se postigla maksimalna horizontalna udaljenost.

ZADATAK 10: U-cijev otvorena na oba kraja djelomično je napunjena vodom. Ulje gustoće 750 kgm^{-3} nasuto je u desni krak cijevi i formira stub visine $L = 5 \text{ cm}$. Desni krak cijevi se sada zaštiti od bilo kakvog kretanja vazduha, dok vazduh struji preko vrha lijevog kraka cijevi sve dok površine tečnosti ne budu na istoj visini. Odrediti brzinu zraka koji struji preko lijevog kraka. Gustoća vazduha je $1,29 \text{ kgm}^{-3}$.

Rješenje:

Neka su odgovarajuće gustoće označene kao: ρ za vazduh, ρ_v za vodu i ρ_u za ulje. Na slici 12.29 je prikazana U-cijev u trenutku kada strujanje vazduha izjednači nivoe tečnosti u oba kraka U-cijevi. Vazduh u desnom kraku miruje te je njegova brzina u tački B jednaka nuli, a u tački A ćemo brzinu označiti s v . Ako primijenimo Bernoullijevu jednačinu na tačke A i B dobijamo

$$p_A + \frac{\rho v^2}{2} + \rho g h_A = p_B + \rho g h_B. \quad (10.1)$$

Objе tačke se nalaze na istom nivou tako da je $h_A = h_B$ te gornja jednačina postaje

$$p_A - p_B = \frac{\rho v^2}{2}. \quad (10.2)$$

Razmotrimo sada tačke C i D, koje se nalaze na nivou na kojem se dodiruju ulje i voda u desnom kraku cijevi. Koristeći zavisnost pritiska s dubinom u statičkim fluidima, imamo

$$p_C = p_A + \rho g H + \rho_v g L \quad (10.3)$$

i

$$p_D = p_B + \rho g H + \rho_u g L. \quad (10.4)$$

S obzirom na Pascalov zakon, pritisci u tačkama C i D moraju biti isti, te nakon izjednačavanja gornjih izraza dobijamo

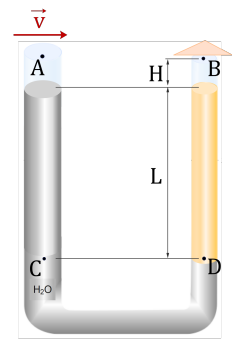
$$p_B + \rho g H + \rho_u g L = p_A + \rho g H + \rho_v g L, \quad (10.5)$$

što nakon sređivanja daje

$$p_A - p_B = (\rho_v - \rho_u) g L. \quad (10.6)$$

Kada uvrstimo vrijednost razlike pritiska iz jednačine (10.2) možemo dobiti izraz za traženu brzinu:

$$\frac{\rho v^2}{2} = (\rho_v - \rho_u) g L, \quad (10.7)$$



Slika 12.29: Uz rješenje zadatka 10.

$$v = \sqrt{\frac{2gL(\rho_v - \rho_u)}{\rho}} \quad (10.8)$$

Konačnu vrijednost ćemo dobiti uvrštavanjem poznatih vrijednosti:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 9,81 \text{ m s}^{-1} \cdot 0,05 \text{ m} (1000 - 750)}{1,29}} = 13,8 \text{ m s}^{-1}. \quad (10.9)$$

ZADATAK 11: U otvoreni rezervoar, površine poprečnog presjeka S_1 , nasuta je voda do visine h_0 . Na dnu rezervoara se nalazi mali otvor površine S_2 iz kojeg istječe voda. Odrediti:

- kako se visina vode u rezervoaru mijenja u vremenu $h(t)$,
- zavisnost brzine spuštavanja nivoa vode u rezervoaru od vremena $v_1(t)$,
- ubrzanje kojim se spušta nivo vode u rezervoaru kao funkciju vremena $a(t)$,
- zavisnost brzine spuštavanja nivoa vode u rezervoaru od visine preostale vode u njemu $v_1(h)$,
- vrijeme za koje će isteći sva voda iz rezervoara t_{ist} ,
- vrijeme t' za koje će visina vode u rezervoaru iznositi trećinu početne visine.

Rješenje:

a) Označimo početnu visinu nivoa vode u rezervoaru (u odnosu na dno rezervoara) i brzinu s h_0 i v_0 respektivno, a visinu i brzinu u nekom proizvoljnom trenutku s h i v_1 (slika 12.30). Trenutna brzina spuštavanja nivoa vode u rezervoaru može se dobiti iz definicije brzine kao

$$v_1 = -\frac{dh}{dt}, \quad (11.1)$$

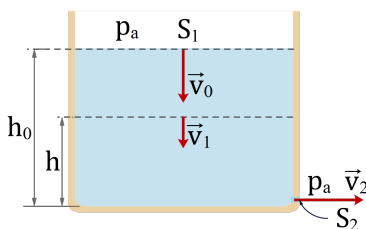
pri čemu znak "-" ukazuje na činjenicu da visina h opada, tj. da se nivo vode smanjuje. Bernoullijeva jednačina za tačke koje se nalaze na površini vode u rezervoaru i na otvoru na dnu rezervoara će biti

$$p_a + \rho gh + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_a + \frac{\rho v_2^2}{2}, \quad (11.2)$$

$$2gh + v_1^2 = v_2^2 \quad (11.3)$$

Brzinu v_2 možemo izraziti također preko brzine v_1 iz jednačine kontinuiteta:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \implies v_2 = \frac{S_1}{S_2} v_1, \quad (11.4)$$



Slika 12.30: Uz rješenje zadatka 11.

te je uvrstiti u dobijenu Bernoulijevu jednačinu:

$$2gh = \left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1 \right) v_1^2, \quad (11.5)$$

$$h = \frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2} v_1^2. \quad (11.6)$$

Posljednju jednačinu ćemo korjenovati

$$\sqrt{h} = \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} v_1 \quad (11.7)$$

te zamijeniti korijen na desnoj strani jednakosti s koeficijentom k . Umjesto brzine v_1 uvrstimo jednačinu (11.1)

$$\sqrt{h} = k \left(-\frac{dh}{dt} \right), \quad (11.8)$$

zatim razdvojimo varijable

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{dt}{k}, \quad (11.9)$$

te integrirajmo dobijenu relaciju:

$$\int_{h_0}^h \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\int_0^t \frac{dt}{k}, \quad (11.10)$$

$$2\sqrt{h} - 2\sqrt{h_0} = -k^{-1}t, \quad (11.11)$$

$$h = h(t) = \left(\sqrt{h_0} - \frac{t}{2k} \right)^2. \quad (11.12)$$

Posljednji izraz predstavlja traženu zavisnost visine vode u rezervoaru od vremena istjecanja.

b) Dobijenu zavisnost (11.12) ćemo sada uvrstiti u jednačinu (11.1) te dobijamo

$$v_1 = -\frac{d}{dt} \left(\sqrt{h_0} - \frac{t}{2k} \right)^2, \quad (11.13)$$

$$v_1 = -2 \left(\sqrt{h_0} - \frac{t}{2k} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2k} \right), \quad (11.14)$$

$$v_1 = \frac{1}{k} \left(\sqrt{h_0} - \frac{t}{2k} \right), \quad (11.15)$$

$$v_1 = v_1(t) = \frac{\sqrt{h_0}}{k} - \frac{t}{2k^2}. \quad (11.16)$$

Iz posljednje jednačine možemo zaključiti da brzina spuštanja nivoa vode u rezervoaru opada s vremenom.

c) Ubrzanje možemo dobiti iz njegove definicije kao

$$a = \frac{dv_1}{dt}, \quad (11.17)$$

u koju uvrstimo izraz (11.16):

$$a = \frac{d}{dt} \left(-\frac{t}{2k^2} + \frac{\sqrt{h_0}}{k} \right), \quad (11.18)$$

$$a = -\frac{1}{2k^2}, \quad (11.19)$$

$$a = -\frac{1}{\frac{S_1^2 - S_2^2}{gS_2^2}}, \quad (11.20)$$

$$a = -\frac{gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2} = \text{const.} \quad (11.21)$$

Iz posljednje jednačine vidimo da se ubrzanje ne mijenja s vremenom tj. da je konstantno, te da je negativno što znači da je kretanje usporeno.

Do istog zaključka smo mogli doći ako jednačinu (11.16) uporedimo s već poznatom jednačinom za brzinu promjenjivog kretanja

$$v = v_0 + at. \quad (11.22)$$

Zaključujemo da je početna brzina $v_0 = \frac{\sqrt{h_0}}{k}$, a da je ubrzanje $a = -\frac{1}{2k^2}$, što je identično jednačini (11.19).

d) Zavisnost v_1 od visine h ćemo dobiti tako što izrazimo vrijeme iz jednačine (11.11) kao

$$t = \left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h} \right) 2k \quad (11.23)$$

i uvrstimo u jednačinu (11.16):

$$v_1 = -\frac{\left(\sqrt{h_0} - \sqrt{h} \right) 2k}{2k^2} + \frac{\sqrt{h_0}}{k}, \quad (11.24)$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{h}}{k}, \quad (11.25)$$

$$v_1 = v_1(h) = \sqrt{\frac{2gS_2^2}{S_1^2 - S_2^2}} \cdot \sqrt{h}. \quad (11.26)$$

e) Kada sva voda istekne možemo uzeti da je $h = 0$, pa ćemo vrijeme istjecanja dobiti iz jednačine (11.11) uvrštavajući da je $t = t_{ist}$ i $h = 0$:

$$\begin{aligned} t_{ist} &= 2k\sqrt{h_0} \\ t_{ist} &= 2\sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} h_0. \end{aligned} \quad (11.27)$$

f) Vrijeme potrebno da visina vode u rezervoaru opadne na trećinu početne visine ćemo dobiti kada u jednačinu (11.12) uvrstimo da je $h = \frac{h_0}{3}$ i $t = t'$

$$\frac{h_0}{3} = \left(\sqrt{h_0} - \frac{t'}{2k} \right)^2, \quad (11.28)$$

te dobijeni izraz korjenujemo

$$\pm \sqrt{\frac{h_0}{3}} = \sqrt{h_0} - \frac{t'}{2k}, \quad (11.29)$$

i izrazimo traženo vrijeme:

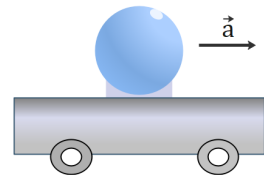
$$t' = 2k \left(\sqrt{h_0} \pm \sqrt{\frac{h_0}{3}} \right), \quad (11.30)$$

$$t' = 2 \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{2gS_2^2}} \left(\frac{\sqrt{3h_0} \pm \sqrt{h_0}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}, \quad (11.31)$$

$$t' = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{3} \sqrt{\frac{2h_0(S_1^2 - S_2^2)}{gS_2^2}}. \quad (11.32)$$

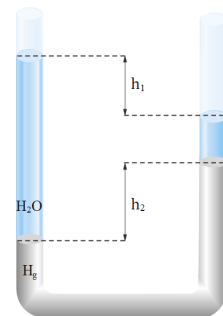
12.6 Zadaci za vježbu

Zadatak 1: Zatvorena sfera prečnika d čvrsto je pričvršćena na kolica koja se kreću horizontalno ubrzanjem a kao na slici 12.33. Sfera je skoro ispunjena fluidom gustoće ρ i također sadrži jedan mali mjehur vazduha na atmosferskom pritisku. Odrediti pritisak u centru sfere. ($p = p_a + \frac{1}{2}\rho d \sqrt{g^2 + a^2}$)



Slika 12.31: Uz zadatak 1.

Zadatak 2: U-cijev ujednačene površine poprečnog presjeka, otvorena prema atmosferi, djelomično je ispunjena živom. Voda je onda sipana u oba kraka. Ako je ravnotežna konfiguracija cijevi kao što je prikazano na slici 12.32, pri čemu je $h_2 = 1$ cm, odrediti vrijednost h_1 . ($h_1 = 12,6$ cm)



Slika 12.32: Uz zadatak 2.

Zadatak 3: Lopta za ping-pong ima prečnik od 3,8 cm i prosječnu gustoću $0,084 \text{ gcm}^{-3}$. Koja je sila potrebna da se drži potpuno potopljena pod vodom? ($F = 0,258 \text{ N}$)

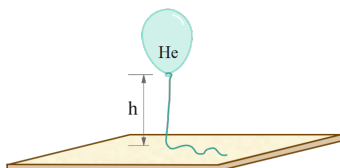
Zadatak 4: Komad aluminijuma mase 1 kg i gustoće 2700 kgm^{-3} se okači na nit zanemarive mase, a zatim potpuno uroni u posudu s vodom. Izračunati odnos sila zatezanja niti prije i nakon što je metal uronjen. ($\frac{F_{z1}}{F_{z2}} = 1,59$)

Zadatak 5: Sferna aluminijska kugla mase 1,26 kg sadrži praznu sfernu šupljinu koja je koncentrična s kuglom. Kugla jedva da pluta u vodi. Izračunati vanjski poluprečnik kugle i poluprečnik šupljine. ($r_k = 6,7 \text{ cm}$, $r_s = 5,74 \text{ cm}$)

Zadatak 6: Pretpostavimo da možete da dišete dok ležite na podu s maksimalnom težinom od 400 N na grudima. Koliko duboko ispod površine vode mogu biti vaše grudi da biste još uvijek mogli disati, pod pretpostavkom da je čeona površina grudi $0,09 \text{ m}^2$? ($h = 0,453 \text{ m}$)

Zadatak 7: Drvena kugla prečnika 1,20 cm pluta u vodi s 0,4 cm prečnika iznad vode. Odrediti gustinu kugle. ($\rho = 709 \text{ kgm}^{-3}$)

Zadatak 8: Balon napunjen helijumom vezan je za nit dužine 2 m i mase 0,05 kg. Balon je sfernog oblika sa poluprečnikom 0,4 m. Kada se pusti, balon se podiže uvis sve dok dužina niti iznad površine ne dostigne vrijednost h , a zatim ostaje u ravnoteži (slika 12.33). Odrediti vrijednost dužine h . Masa praznog balona je 0,25 kg. ($h = 1,91 \text{ m}$)



Slika 12.33: Uz zadatak 8.

Zadatak 9: Pritisak u horizontalnom dijelu cijevi prečnika 2 cm je 142 kPa. Protok vode kroz cijev je $2,8 \text{ ls}^{-1}$. Ako pritisak u određenoj tački treba smanjiti na 101 kPa sužavanjem dijela cijevi, koliki bi trebao biti prečnik suženog dijela? Pretpostavimo da je tok laminaran, a fluid neviskozozan. ($d_2 = 1,68 \text{ cm}$)

Zadatak 10: Bernoullijev efekat može imati važne posljedice za dizajn zgrada. Na primjer, vjetar može puhati oko nebodera izuzetno velikom brzinom, stvarajući nizak pritisak. Viši atmosferski pritisak u mirnom zraku unutar zgrada može uzrokovati izbijanje prozora. Pretpostavimo da horizontalni vjetar puše brzinom od $11,2 \text{ ms}^{-1}$ izvan velikog stakla dimenzija $4 \text{ m} \times 1,5 \text{ m}$. Pretpostavimo da je gustoća zraka ujednačena na $1,3 \text{ kgm}^{-3}$. Vazduh u zgradi je pod atmosferskim pritiskom. Kolika je ukupna sila kojom zrak djeluje na prozorsko staklo? Ako se u blizini izgradi drugi neboder, brzina zraka može biti znatno veća tamo gdje vjetar prolazi kroz uski razmak između zgrada. Kolika je ukupna sila ako je brzina vjetera duplo veća? ($F_1 = 489 \text{ N}$ prema vani, $F_2 = 1,96 \text{ kN}$ prema vani)

Zadatak 11: Voda curi iz kuhinjske slavine. Prečnik mlaza na slavini je 0,960 cm. Posuda od 125 cm^3 se napuni vodom za 16,3 s. Koliki je prečnik mlaza 13 cm ispod otvora slavine. ($d = 0,247 \text{ cm}$)

Zadatak 12: Medicinska šprica sadrži lijek gustine vode. Cijev šprice ima površinu poprečnog presjeka $S_1 = 2,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2$, a igla ima površinu poprečnog presjeka $S_2 = 1 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2$. Kada na klip ne djeluje sila, pritisak je svuda 1 atm . Sila $F = 2 \text{ N}$ djeluje na klip, čineći da lijek izlazi horizontalno iz igle. Odrediti brzinu lijeka dok napušta vrh igle. ($v = 12,6 \text{ m s}^{-1}$)



Elvedin Hasović je rođen 20.05.1980. godine u Foči. Gimnaziju je završio u Sarajevu 2000. godine, te nakon toga upisao studij fizike na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu. Diplomirao je 2004. a magistrirao 2010. godine. Na istom fakultetu je odbranio doktorsku disertaciju 2013. godine. Od oktobra 2005. godine zaposlen je na Odsjeku za fiziku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu i trenutno je u zvanju vanrednog profesora. Do sada je objavio preko 50 naučnih radova u međunarodnim časopisima, koji su citirani preko 1000 puta. Dobitnik je Zlatne značke Univerziteta u Sarajevu. Govori engleski i njemački jezik. Oženjen je i otac dvoje djece.

Dijana Dujak je rođena 20.9.1981. godine u Zenici, gdje je završila Opću gimnaziju. Nakon uspješnog završetka gimnazije, upisala je Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, gdje je 2005. godine diplomirala i stekla zvanje diplomiranog fizičara. Svoje obrazovanje nastavila je magistrskom studiju na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Zenici, na odsjeku za Metrologiju, gdje je magistrirala 2011. godine. 2015. godine odbranila je doktorsku disertaciju na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu.

U periodu od 2005. do 2019. godine je radila na Fakultetu za metalurgiju i materijale Univerziteta u Zenici. Od 2019. godine, zaposlena je na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu i trenutno je u zvanju vanrednog profesora. Govori engleski i njemački jezik. Udata je i ponosna majka dvoje divne djece.



ISBN 978-9926-453-70-1



9 789926 453701