Dženan Gušić

# Teorija redova II

## sa zbirkom riješenih zadataka

Univerzitetski udžbenik

UNIVERSITAS STUDIORUM SARAIEVOENSIS
UNIVERZITET U SARAJEVU

UNIVERZITET U SARAJEVU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Dženan Gušić

# TEORIJA REDOVA II
## sa zbirkom riješenih zadataka

Univerzitetsko izdanje
Sarajevo, 2023

**Autor:**
Dženan Gušić

**Naziv udžbenika:**
*Teorija redova II sa zbirkom riješenih zadataka*

**Prvo izdanje**

**Izdavač:**
Univerzitet u Sarajevu
Prirodno-matematički fakultet

**Recenzenti:**
Prof. dr. Zenan Šabanac
Prof. dr. Senada Kalabušić
Prof. dr. Jasmin Bekteševć

**Autor ilustracija:**
Mediha Kobilica

**Lektor:**
Biljana Stojanović

**Korektor:** Autor

**Tehnička obrada:** Autor

**Godina izdanja:** 2023

------------------------------------------
CIP – Katalogizacija u publikaciji
Nacionalna i univerzitetska biblioteka
Bosne i Hercegovine, Sarajevo

517.52(075.8)(076)

**GUŠIĆ, Dženan**
Teorija redova II [Elektronski izvor] = sa zbirkom riješenih zadataka / Dženan Gušić. – Sarajevo : Prirodno-matematički fakultet, 2023. El. knjiga.

Bibliografija: str. 543-551.

ISBN 978-9926-453-63-3

COBISS.BH-ID 55901702
---------------------------------------------

Odlukom Senata Univerziteta u Sarajevu broj: 01-13-9/23 od 19.07.2023. godine ova publikacija je dobila univerzitetsku saglasnost.

# PREDGOVOR

U knjizi „Teorija redova II sa zbirkom riješenih zadataka“ se bavimo kriterijima za ispitivanje konvergencije realnih redova.

Knjiga je prvenstveno namijenjena studentima prve godine Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, koji u prvom semestru studija slušaju i polažu kod autora predmet „Analiza I“. Knjiga je prirodni nastavak toma I [DzG2] „Teorija redova I sa zbirkom riješenih zadataka“, te zajedno sa njim, i autorovom knjigom „Osnovi teorije nizova sa zbirkom riješenih zadataka“ [DzG1], čini gradivo prvog kolokvija pomenutog predmeta. Uz knjige [DzG1] i [DzG2], „Teorija redova II“ je samo-održiva.

Obrađene jedinke su sljedeće:

kriterij upoređivanja,
kriterij upoređivanja limesom,
kriterij upoređivanja količnika,
integralni kriterij,
kriterij količnika,
kriterij korijena,
apsolutna i uslovna konvergencija,
alternirajući redovi,
rezultati Košija,
Kumerov kriterij,
kriteriji Rabea, Bertrana i Gausa,
kriterij Abel-Dinija,
kriteriji za ispitivanje konvergencije redova sa članovima proizvoljnog znaka.

Svaka od navedenih sekcija je popraćena odgovarajućom sekcijom „Riješeni zadaci“. Svaka od njih sadrži veliki broj riješenih zadataka različite težine. Sve tvrdnje navedene u knjizi su dokazane i svi postavljeni zadaci su riješeni. Knjiga sadrži preko 300 riješenih zadataka, što zajedno sa više od 200 riješenih zadataka u [DzG1] i više od 150 riješenih zadataka u [DzG2] obezbjeđuje pogodan ambijent za uspješno savladavanje dijela kursa na koji se knjige odnose.

Svaka od sekcija „Riješeni zadaci“ se izborom zadataka odnosi primarno na sekciju koju neposredno slijedi, i sekundarno na sekcije prije nje. Za uspješno rješavanje zadataka bilo koje od sekcija „Riješeni zadaci“ potrebno je znati gradivo koje toj sekciji prethodi. Čitalac će bez problema koristiti materijal knjige počevši od bilo kojeg njenog mjesta. Analogno [DzG1] i [DzG2], pozivanje na gradivo koje prethodi aktuelnom je sveprisutno i u „Teoriji redova II“. Sekcija „Razni riješeni zadaci“ je posljednja sekcija knjige, a odnosi se na skup riješenih zadataka koji svojom formulacijom ne pripadaju eksplicitno niti jednoj od sekcija koje joj prethode, a rješavaju se gradivom datim njima.

Težina riješenih zadataka varira od osnovnih, uvodnih, preko srednje teških i teških, pa do jako teških zadataka nivoa Putnamovog takmičenja. Literatura korištena u knjizi je raznovrsna a uglavnom je bazirana na rezultatima objavljenim u naučnim časopisima: „The American Mathematical Monthly“, „Mathematics Magazine“, i „The College Mathematics Journal“, u rasponu 1914-2023. Pored klasičnih članaka pomenutih časopisa, za nas su od posebnog značaja bile sekcije: „Proof Without Words“, „Fellacies, Flaws and Flimflam“, te „Problems and Solutions“.

Inovitet u knjizi je sekcija „Razmatrani redovi“, koja je data nakon svake od sekcija „Riješeni zadaci“ gore navedenih jedinki. U ovoj sekciji popisujemo sve redove razmatrane u toj jedinki. Svi smo bili u stuaciji da ne znamo kojim kriterijem ili metodom da ispitamo konvergenciju datog reda. Sada, čitalac će vrlo brzo naći željeni zadatak, ili njemu sličan, te odmah znati kojem kriteriju ili kriterijima taj zadatak „pripada“.

Autor bi mogao da iznese još mnoštvo činjenica i informacija na temu ove knjige. Ipak, stava je da nju već navedeni podaci jednoznačno karakterišu bar na određenom nivou apstraktnosti.

Na kraju, zahvaljujem se svojim roditeljima, Refiku i Samiji, na svakoj vrsti podrške tokom izrade knjige. Takve podrške, kao i uvijek, nije manjkalo. Hvala dragim kolegama recenzentima, prof. dr. Zenanu Šabancu i prof. dr. Senadi Kalabušić, profesorima Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a u Sarajevu, te kolegi prof. dr. Jasminu Bekteševiću, profesoru Mašinskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, na nesebičnom i savjesnom pregledu rukopisa. Zahvalnost dugujem i kolegici Biljani Stojanović, dipl. bibliotekarki i komparativistici, te kolegici Medihi Kobilici, studentici treće godine primijenjene matematike PMF-a u Sarajevu, na izradi naslovne stranice. Svi oni koji su na bilo koji način pomogli pri izradi knjige, takođe imaju moju zahvalnost.

Sarajevo, 2023 Autor

*Mojim dragim roditeljima Refiku i Samiji*

# SADRŽAJ

# 1 Kriterij upoređivanja

Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, kažemo da je **red sa pozitivnim članovima**, ili da je **pozitivan red**, ako vrijedi $a_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Ako zahtjevamo da su članovi reda pozitivni ali ne i nenegativni, onda za takav red kažemo da je **strogo pozitivan**.

**Teorem 1.1 (Kriterij upoređivanja)** *Neka su dati pozitivni redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Pretpostavimo da postoji prirodan broj $n_0$, i broj $p > 0$, takvi da vrijedi $a_k \leq pb_k$ za sve $k \geq n_0$. Tada, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Osim toga, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.*

**Dokaz 1:** Označimo sa $A_n^{'}$ resp. $B_n^{'}$, $n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ resp. $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Iz $a_k \leq pb_k$ za $k \geq n_0$, imamo da je

$$a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_{n_0+n-1} \leq p\left(b_{n_0} + b_{n_0+1} + ... + b_{n_0+n-1}\right),$$

tj. $A_n^{'} \leq pB_n^{'}$.

Pretpostavimo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$. Dakle, konvergira niz $\left\{B_n^{'}\right\}$.

Sada, iz Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da konvergira i niz $\left\{pB_n^{'}\right\}$. Po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], niz $\left\{pB_n^{'}\right\}$ je ograničen, pa je specijalno ograničen odozgo (vidjeti stranu 150 u [DzG1]).

Postoji tako konstanta $M > 0$, takva da je $pB_n^{'} < M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Slijedi, $A_n^{'} \leq pB_n^{'} < M$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ovo znači da je niz $\left\{A_n^{'}\right\}$ ograničen odozgo. Pošto je red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ pozitivan (jer je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan), to je niz $\left\{A_n^{'}\right\}$ neopadajući.

Iz činjenice da je niz $\left\{A_n^{'}\right\}$ neopadajući, ograničen odozgo, i Vajerštrasovog teorema [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], imamo da je niz $\left\{A_n^{'}\right\}$ konvergentan.

Dakle, red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je ponovo po pomenutom Teoremu 1.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Pretpostavimo sada da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan, i dokažimo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentan.

Pretpostavimo suprotno, da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergentan. Odavde i iz prvog dijela dokaza slijedi da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. Ovo je kontradikcija, jer po $(b)$ Teorema 1.3 u [DzG2, str. 3], konvergentan red ne može biti divergentan.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je divergentan. ■

**Dokaz 2:** Označimo sa $A_n$ resp. $B_n$, $n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Neka je $n \geq n_0$. Iz $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$, slijedi

$$\begin{aligned} A_n =& a_1 + a_2 + ... + a_{n_0} + a_{n_0+1} + ... + a_n \\ =& A_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + ... + a_n \\ \leq& A_{n_0} + pb_{n_0+1} + pb_{n_0+2} + ... + pb_n \\ =& A_{n_0} + p\left(b_{n_0+1} + b_{n_0+2} + ... + b_n\right) \\ =& A_{n_0} + p\left(B_n - B_{n_0}\right). \end{aligned}$$

Dakle, $A_n \leq A_{n_0} + p\left(B_n - B_{n_0}\right)$, $n \geq n_0$.

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira. To znači da niz $\{B_n\}$ konvergira, pa je po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], niz $\{B_n\}$ ograničen. Specijalno, niz $\{B_n\}$ je ograničen odozgo, pa postoji konstanta $M > 0$, takva da je $B_n < M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \geq n_0$, dobijamo

$$A_n \leq A_{n_0} + p\left(B_n - B_{n_0}\right) < A_{n_0} + p\left(M - B_{n_0}\right).$$

Ovo znači da su parcijalne sume $A_n$, $n \geq n_0$, ograničene odozgo konstantom $A_{n_0} + p\left(M - B_{n_0}\right)$.

Pošto je $B_n < M$ za $n \in \mathbb{N}$, to je specijalno $B_{n_0} < M$, tj. $M - B_{n_0} > 0$. Dakle, $p\left(M - B_{n_0}\right) > 0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je niz $\{A_n\}$ neopadajući. Slijedi,

$$A_1 \leq A_2 \leq ... \leq A_{n_0-1} \leq A_{n_0} < A_{n_0} + p\left(M - B_{n_0}\right).$$

Zaključujemo, $A_n < A_{n_0} + p\left(M - B_{n_0}\right)$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada, iz činjenice da niz $\{A_n\}$ neopada, i da je ograničen odozgo (sa $A_{n_0} + p\left(M - B_{n_0}\right)$), te Vajerštrasovog teorema [DzG1, str. 48, Teo 5.4], dobijamo da je niz $\{A_n\}$ konvergentan.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan.

Pretpostavimo sada da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, to onda on divergira ka $+\infty$ (vidjeti notu 34 na strani 157 u [DzG2]). Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$.

Iz $A_n \leq A_{n_0} + p\left(B_n - B_{n_0}\right)$, $n \geq n_0$, i činjenice da je $p > 0$, imamo da za $n \geq n_0$, vrijedi

$$\frac{A_n - A_{n_0} + pB_{n_0}}{p} \leq B_n.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = +\infty$, to lijeva strana posljednje nejednakosti takođe teži ka $+\infty$ kad $n \to +\infty$. Zbog toga je onda i $\lim\limits_{n\to+\infty} B_n = +\infty$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira (ka $+\infty$). ■

**Napomena 1.2** Primijetimo da smo u Teoremu 1.1 bili u stanju da izvedemo zaključke o redovima iz uslova koji vrijedi za dovoljno veliko $k$, tj. iz uslova $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$. Inače, kada neko svojstvo ne vrijedi nužno za sve $k$, nego samo za sve $k \geq N$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki fiksan prirodan broj, onda za to svojstvo kažemo da **u konačnici vrijedi**.

Tako, iz činjenice da u konačnici vrijedi nejednakost $a_k \leq pb_k$, dokazali smo tvrdnje Teorema 1.1.

Kako će se ispostaviti, prilikom izučavanja teorije redova, često će biti dovoljno pretpostavljati da svojstva od interesa vrijede samo u konačnici.

**Napomena 1.3** Primijetimo da iz uslova Teorema 1.1, tj. iz činjenice da za $k \geq n_0$ vrijedi $a_k \leq pb_k$, gdje je $n_0 \in \mathbb{N}$ fiksan broj, i $p > 0$ konstanta, te $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $k \geq n_0$, slijedi zaključak

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) .$$

Naime, ako je red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ konvergentan, onda iz $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$ i Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$. Konvergiraju tada nizovi $\left\{A_n'\right\}$ i $\left\{B_n'\right\}$ parcijalnih suma redova $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$, redom.

Po $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], konvergira onda i niz $\left\{pB_n'\right\}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(pB_n'\right) = p \lim\limits_{n\to+\infty} B_n'$.

Primijetimo da je $\left\{pB_n'\right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$.

Dakle, konvergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$.

Iz $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$, imamo da je $A_n^{'} \leq pB_n^{'}$, pa iz konvergencije nizova $\left\{A_n^{'}\right\}$, $\left\{pB_n^{'}\right\}$, i $(b)$ Posljedice 3.2 u [DzG1, str. 32], dobijamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{'} \leq \lim\limits_{n\to+\infty} \left(pB_n^{'}\right) = p \lim\limits_{n\to+\infty} B_n^{'}$, tj. dobijamo da je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Ako red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ divergira, onda iz njegove pozitivnosti slijedi da je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n = +\infty$ (vidjeti notu 34 na strani 157 u [DzG2]). Odavde i iz $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi da je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \cdot (+\infty) \ \ (= +\infty) \ \ = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Pošto je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, to je ponovo po pomenutoj noti 34, ili $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ konvergentan red (ka nekom nenegativnom broju), ili $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ divergentan red (ka $+\infty$).

Tako, iz činjenice da je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n = +\infty$, bez obzira da li je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ konačan nenegativan broj, ili $+\infty$, jasno je da je uvijek

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Dakle, $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$, $p > 0$, gdje je $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, $k \geq n_0$, povlači da je uvijek $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

**Napomena 1.4** Primijetimo da zaključak Napomene 1.3 ne mora da vrijedi ako nije zadovoljen uslov $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$ za $k \geq 0$.

Preciznije, ako je $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$, pri čemu elementi $a_k$ i $b_k$, $k \geq n_0$ ne moraju biti nenegativni, onda ne mora da vrijedi

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Naime, u ovakvoj postavci, red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ (ili red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$) može imati i pozitivne i negativne članove, pa kao takav može divergirati na način da uopšte nema sumu. U takvoj situaciji simbol $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ (ili $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$) nema numeričku interpretaciju, pa nejednakosti tipa

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

nemaju smisla.

Ipak, ako pretpostavimo da redovi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ ne divergiraju na način da nemaju sumu, onda možemo izvesti odgovarajuće zaključke.

Iz $a_k \leq pb_k$, $k \geq n_0$, kao i do sada, imamo da je $A_n^{'} \leq pB_n^{'}$.

Za konstantu $p \in \mathbb{R}$ može da vrijedi $p > 0$ ili $p < 0$.

Pretpostavimo određenosti radi da je $p < 0$. Analogno razmatranje bi proveli u slučaju da je $p > 0$.

Prvo, neka red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ divergira ka $-\infty$.

Iz $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n = -\infty$, $p < 0$ i $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \cdot (-\infty) \ \ (= +\infty) \ \ = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ sada može da divergira ka $-\infty$, ili da konvergira, ili da divergira ka $+\infty$. U svakom slučaju onda vrijedi

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Drugo, neka red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ konvergira.

Konvergira sada niz $\left\{B_n'\right\}$, pa po $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], konvergira i niz $\left\{pB_n'\right\}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(pB_n'\right) = p \lim\limits_{n\to+\infty} B_n'$.

Kao i u slučaju Napomene 1.3, jasno je da je $\left\{pB_n'\right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$. Pošto niz $\left\{pB_n'\right\}$ konvergira, to konvergira red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$.

Da red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$ konvergira znamo i iz pomenute tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8. Naime, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ slijedi i konvergencija reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)$, i vrijedi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Ako sada red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ divergira ka $-\infty$, onda je jasno da vrijedi

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Ako red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ konvergira, onda konvergira niz $\left\{A_n'\right\}$.

Iz $A_n' \leq pB_n'$, konvergencije nizova $\left\{A_n'\right\}$, $\left\{pB_n'\right\}$, i tvrdnje $(b)$ Posljedice 3.2 u [DzG1, str. 32], slijedi da je

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} A_n' \leq \lim_{n\to+\infty}\left(pB_n'\right) \; \left(= \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n)\right)\\ = p \lim_{n\to+\infty} B_n' = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.\end{aligned}$$

Dakle, ponovo je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Ako red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ divergira ka $+\infty$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{'} = +\infty$, pa (po Definiciji 7.7 u [DzG1, str. 84]), za svaku konstantu $C$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $C < A_n^{'}$.

Za $n \geq N$, sada vrijedi $C < A_n^{'} \leq pB_n^{'}$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(pB_n^{'}\right) = +\infty$, što je kontradikcija sa činjenicom da niz $\left\{pB_n^{'}\right\}$ konvergira.

Dakle, pri datim uslovima, ne može nastupiti slučaj da red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n$ divergira ka $+\infty$.

Treće, neka red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$ divergira ka $+\infty$.

Iz $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n = +\infty$, $p < 0$, i pomenute tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8, imamo da je

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \cdot (+\infty) \ \ (= -\infty) \ \ = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

Pošto je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = -\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(pB_n^{'}\right) = -\infty$, to za svaku konstantu $C$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $pB_n^{'} < C$.

Za $n \geq N$ je sada $A_n^{'} \leq pB_n^{'} < C$, što znači da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^{'} = -\infty$.

Dakle, $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} a_n = -\infty$, pa ponovo vrijedi

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{+\infty} (pb_n) = p \sum_{n=n_0}^{+\infty} b_n.$$

**Primjer 1.5** Analizirati ponašanje reda $1 + \frac{2}{3} + \frac{2}{5} + \frac{2}{9} + \frac{2}{17} + ... = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2^n+1}$.

**Rješenje:** Posmatrajmo članove $\frac{2}{2^k+1}$ datog reda za $k \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$a_k = \frac{2}{2^k + 1} < \frac{2}{2^k} = 2 \cdot \frac{1}{2^k} = pb_k.$$

Postoji dakle prirodan broj $n_0 = 1$, i broj $p = 2 > 0$, takvi da je $a_k \leq pb_k$ za $k \geq n_0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ je konvergentan geometrijski red kod kojeg je prvi član jednak $\frac{1}{2}$, i količnik takođe $\frac{1}{2}$ (vidjeti Teorem 1.10 u [DzG2, str. 17]). Odavde, i iz Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{2^n+1}$.

Sada, iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], dobijamo da konvergira red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2^n+1}$. ■

**Primjer 1.6** Analizirati ponašanje reda $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Rješenje 1:** Dati red je oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, gdje je $p = \frac{1}{2}$.
Dakle, dati red je $p$-red, gdje je $p = \frac{1}{2}$, tj. $0 < p < 1$.
Odavde i iz Zadatka 59 u [DzG2, str. 140], znamo da je dati red divergentan. ■

**Rješenje 2:** Posmatrajmo količnik $\frac{1}{2\sqrt{n}}$ za $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$\frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}.$$

Možemo pisati, $a_k \leq pb_k$ za sve $k \geq n_0$, gdje je $n_0 = 1 \in \mathbb{N}$, $p = \frac{1}{2} > 0$, $a_k = \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$, $b_k = \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Iz razmatranja provedenog na strani 24 u [DzG2], znamo da red $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}$ divergira (ka $+\infty$). Zbog toga, po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], divergira (ka $+\infty$) i red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Odavde, i iz Teorema 1.1, sada slijedi da divergira i red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} b_k = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$. $\blacksquare$

## 1.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 1.1.1** Ispitati konvergenciju sljedećih redova upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{2^n} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,(n+4)} \qquad (e)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n\,(n-1)}} \qquad (f)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$$

$$(g)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n} \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n-1}} \qquad (i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$$

$$(j)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)} \qquad (k)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} \qquad (l)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$$

$$(m)\ 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+... \qquad (n)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sin n\alpha}} \qquad (o)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

**Rješenje:** $(a)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $(2n-1)\,2^{2n-1} \geq 2^{2n-1}$, pa je $\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}} \leq \frac{1}{2^{2n-1}}$.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{2n-1}}$ konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], to iz kriterija upoređivanja slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}$.

$(b)$ Pošto je $\sin x \leq x$ za $x \geq 0$, to je za $n \in \mathbb{N}$, $\sin\frac{\pi}{2^n} \leq \frac{\pi}{2^n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2^n}$ je konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], pa iz njegove konvergencije i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{\pi}{2^n}$.

$(c)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $n \geq \sqrt{n}$, pa je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Odavde, iz divergencije harmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6] i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ (u Primjeru 1.6 smo već dali dva rješenja ovog zadatka).

$(d)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $(n+1)(n+4) > n^2$, pa je $\frac{1}{(n+1)(n+4)} < \frac{1}{n^2}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$.

$(e)$ Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $\sqrt{n(n-1)} < \sqrt{n^2} = n$, pa je $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n} < \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$.

$(f)$ Iz $\frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2}$ za $n \in \mathbb{N}$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

$(g)$ Dokažimo da je $\ln n < n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = x - \ln x$ na intervalu $I = [2, +\infty)$. Funkcija $f(x)$ je definisana na $I$, elementarna je na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.

Osim toga, $f(x)$ ima izvod na $I$ (bar unutar $I$) [DzG2, str. 85], i vrijedi $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$.

Jasno, za $x \in I$ je $f^{'}(x) > 0$, pa ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$ na kojem je $f^{'}(x) \equiv 0$ ($f^{'}(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 1$).

Ovo znači da je $f(x)$ rastuća na $I$, pa za $x \geq 2$ vrijedi

$$x - \ln x = f(x) \geq f(2) = 2 - \ln 2 > 0,$$

tj. vrijedi $x > \ln x$.

Specijalno je onda $n > \ln n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Slijedi, $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n} < \frac{1}{\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$.

$(h)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $n3^{n-1} \geq 3^{n-1}$, tj. $\frac{1}{n3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{n-1}}$ konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], to iz $\frac{1}{n3^{n-1}} \leq \frac{1}{3^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$ i kriterija upoređivanja slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n-1}}$.

$(i)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{|\sin n\alpha|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, pa iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$.

$(j)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $n(n+1)(n+2) > n^3$, tj. $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} < \frac{1}{n^3}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$.

Da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ konvergira znamo i iz $(a)$ Zadatka 4 u [DzG2, str. 35]. Tamo, za $m = 2$ vrijedi da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2 \cdot 2!} = \frac{1}{4}$.

$(k)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n \geq 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot ... \cdot 2 = 2^{n-1}$, tj. $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ je konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], pa iz njegove konvergencije, nejednakosti $\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$.

Primijetimo da smo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ ustanovili i u Zadatku 60 u [DzG2, str. 143]. Tamo smo dokazali da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e - 1$.

$(l)$ Ako je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, onda je $\ln n > 1$, pa je $\frac{\ln n}{n} > \frac{1}{n}$.

Iz divergencije harmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$.

$(m)$ Dati red možemo pisati u obliku $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{1+2+...+n}$.

Pošto je $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$, to je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

Jasno, $\frac{2}{n(n+1)} < \frac{2}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$, tj. konvergencija polaznog reda.

$(n)$ Pošto je $\sin n\alpha \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$, to je $n^{\sin n\alpha} \leq n$, $n \in \mathbb{N}$, tj. $\frac{1}{n^{\sin n\alpha}} \geq \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6] i kriterija upoređivanja slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sin n\alpha}}$.

$(o)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Možemo pisati,

$$(\ln n)^{\ln n} = e^{\ln\left[\ln n^{\ln n}\right]} = e^{\ln n \cdot \ln \ln n}$$
$$= \left(e^{\ln n}\right)^{\ln \ln n} = n^{\ln \ln n}.$$

Tako, dati red je oblika $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln n}}$.

Pošto $\ln \ln n \to +\infty$ kad $n \to +\infty$, to će za dovoljno veliko $n$ da vrijedi $\ln \ln n > 2$.

Drugim riječima, za konstantu $c = 2$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 2$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\ln \ln n > 2$ [DzG1, str. 84, Def. 7.7].

Tako, $n^{\ln \ln n} > n^2$ za $n \geq N$, tj. $\frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$, $n \geq N$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan [DzG2, str. 140], pa je konvergentan i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n^{\ln \ln n}} < \frac{1}{n^2}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\ln \ln n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.2** Primjenom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju sljedećih redova:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n \sqrt[n]{n}} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$$

$$(d) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} \qquad (e) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} \qquad (f) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$$

$$(g) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \qquad (h) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - \ln n} \qquad (i) \quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$$

**Rješenje:** $(a)$ Posmatrajmo $n^n$ za $n \in \mathbb{N}$.
Za $n = 1$ je $n^n = 1^1 = 1 = 2^0 = 2^{1-1} = 2^{n-1}$.
Za $n = 2$ je $n^n = 2^2 > 2^1 = 2^{2-1} = 2^{n-1}$.
Ako je $n = 3$, onda je $n^n = 3^3 > 2^3 > 2^2 = 2^{3-1} = 2^{n-1}$.

Vidimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $n^n \geq 2^{n-1}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n^n} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], to iz kriterija upoređivanja slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$.

$(b)$ Primijetimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $2^n > n$.
Naime, za $n = 1$ je $2^1 > 1$.
Ako je $2^n > n$ onda je $2^{n+1} = 2 \cdot 2^n > 2n \geq n + 1$.
Tako, $2^n > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Slijedi, $2 = \sqrt[n]{2^n} > \sqrt[n]{n}$, tj. $2n > n\sqrt[n]{n}$, odnosno $\frac{1}{2n} < \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
Možemo pisati, $\frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.
Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$.

$(c)$ Po binomnoj formuli je za $n \in \mathbb{N}$

$$
\begin{aligned}
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} \\
&= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots \\
&\quad + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\
&= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots \\
&\quad + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}
$$

Tako, za $n = 1$ je $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2$.
Za $n = 2$ je $\left(n+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{2}\right)$.
Ako je $n = 3$, imamo

$$
\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{2}{3}\right) <
$$

$$2 + \frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3!}\left(1 - \frac{1}{3}\right) = 2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right).$$

Nastavljajući ovako dalje, zaključujemo da je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq& 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\\ =& 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\\ =& \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Po Zadatku 60 u [DzG2, str. 143], red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ konvergira, i vrijedi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da konvergiraju i redovi $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, ..., $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$, ..., i da je $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!}$, $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!}$, ..., $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ $= e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - ... - \frac{1}{(n-1)!}$, $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - ... - \frac{1}{n!}$, ... .

Pošto je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + ... + \frac{1}{n!} - \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right),$$

to je

$$\begin{aligned}e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq& e - \frac{1}{0!} - \frac{1}{1!} - ... - \frac{1}{n!} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right)\\ =& \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right).\end{aligned}$$

Pošto je $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}$ pozitivan konvergentan red, to je njegova suma konačan nenegativan broj, tj. vrijedi $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Osim toga, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{2}$.
Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je

$$e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}\right) \geq \frac{1}{2n},$$

tj. $\frac{1}{n} \leq 2\left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left[e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]$.

$(d)$ Dokažimo da je $\ln n < \sqrt{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \sqrt{x} - \ln x$ na intervalu $[4, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je definisana na $I$, elementarna je na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.

Osim toga, $f(x)$ ima izvod na $I$ (bar unutar $I$) [DzG2, str. 85], i vrijedi

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x}.$$

Jasno, za $x \in I$ je $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 4$), pa ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$ na kojem je $f'(x) \equiv 0$.

Ovo znači da je $f(x)$ rastuća funkcija na $I$, pa za $x \geq 4$, vrijedi

$$\sqrt{x} - \ln x = f(x) \geq f(4) = 2 - \ln 4 > 0,$$

tj. vrijedi $\ln x < \sqrt{x}$.

Specijalno je onda $\ln n < \sqrt{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Jasno je da je i $\ln n < \sqrt{n}$ za $n \in \{1, 2, 3\}$, pa je $\ln n < \sqrt{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Za potrebe ovog zadatka je dovoljno da znamo da je $\ln n < \sqrt{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Slijedi, $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira [DzG2, str. 140] pa konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{\ln n}{n^2} < \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

$(e)$ Dokažimo da je $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Za $n = 2$ je $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} = \frac{1!!}{2!!} = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \frac{1}{2n-1}$.
Pretpostavimo da je $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1}$ za neko $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Sada je,

$$\begin{aligned}
&\frac{(2(n+1)-3)!!}{(2(n+1)-2)!!} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \\
=&\frac{(2n-1)(2n-3)!!}{(2n)(2n-2)!!} > \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2n} \\
>&\frac{1}{2n+1} = \frac{1}{2(n+1)-1}.
\end{aligned}$$

Na osnovu principa matematičke indukcije, vrijedi $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Odavde je $\frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!} > \frac{1}{2n-1} > \frac{1}{2n}$, tj. $\frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Sada, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6] slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].
Odavde, iz $\frac{1}{n} < 2 \cdot \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$.

$(f)$ Znamo da je $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, tj. da je $1 - \cos\alpha = 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}$.
Za $n \in \mathbb{N}$ je onda $1 - \cos \frac{1}{n} = 2\sin^2 \frac{1}{2n}$.
Pošto je $\sin x \leq x$ za $x \geq 0$, to je za $n \in \mathbb{N}$,

$$1 - \cos \frac{1}{n} = 2\sin^2 \frac{1}{2n} \leq 2 \cdot \frac{1}{4n^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$.

$(g)$ Po Zadatku 6 u [DzG1, str. 70], za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijede nejednakosti $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je onda $\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n^2}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

$(h)$ U $(g)$ Zadatka 1.1.1 smo dokazali da je $\ln n < n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ (jasno je da vrijedi i $\ln 1 < 1$, tj. da je onda $\ln n < n$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

Za potrebe ovog zadatka dovoljno će biti da znamo da je $\ln n < n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi $-\ln n > -n$, tj. $n^2 - \ln n > n^2 - n = n\,(n-1)$, odnosno $\frac{1}{n^2-\ln n} < \frac{1}{n(n-1)}$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Jasno, $a_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$. Sada je,

$$
\begin{aligned}
S_n =& \sum_{k=2}^{n+1} a_k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\
=& 1 - \frac{1}{n+1},
\end{aligned}
$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, to konvergira niz $\{S_n\}$, pa konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)}$.

Odavde, iz $\frac{1}{n^2-\ln n} < \frac{1}{n(n-1)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$.

Konačno, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$ i Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$.

$(i)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Možemo pisati,

$$(\ln n)^{\ln \ln n} = e^{\ln\left[\ln n^{\ln \ln n}\right]}$$
$$= e^{\ln \ln n \cdot \ln \ln n} = e^{(\ln \ln n)^2}.$$

Tako, dati red je oblika $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}}$.
Dokažimo da je $(\ln \ln n)^2 < \ln n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > e^e$.
Posmatrajmo funkciju $f(x) = \ln x - (\ln \ln x)^2$ na intervalu $I = [e^e, +\infty)$. Funkcija $f(x)$ je definisana na $I$, elementarna je na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.
Osim toga, $f(x)$ ima izvod na $I$ (bar na $I$) [DzG2, str. 85], i vrijedi

$$f^{'}(x) = \frac{1}{x} - 2\ln \ln x \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2\ln \ln x}{x \ln x}.$$

Posmatrajmo sada i funkciju $g(x) = \ln x - 2\ln \ln x$ na intervalu $I$. Kao i funkcija $f(x)$, i funkcija $g(x)$ je definisana i neprekidna na $I$.
Takođe, $g(x)$ ima izvod na $I$ (bar unutar $I$), i vrijedi

$$g^{'}(x) = \frac{1}{x} - 2 \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} = \frac{\ln x - 2}{x \ln x}.$$

Za $x \in I$, tj. za $x \geq e^e$ je $\ln x \geq \ln e^e = e > 2$, pa je $\ln x - 2 > 0$, odnosno $g^{'}(x) > 0$.
Pošto ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$ na kojem je $g^{'}(x) \equiv 0$ ($g^{'}(x) = 0$ ako i samo ako je $x = e^2 \notin I$), to je funkcija $g(x)$ rastuća na $I$.
Tako, za $x \geq e^e$, vrijedi

$$\ln x - 2\ln \ln x = g(x) \geq g(e^e)$$
$$= \ln e^e - 2\ln \ln e^e = e - 2 > 0.$$

Ovo znači da je $f^{'}(x) > 0$ za $x \in I$, pa pošto ne postoji podinterval $(\gamma, \delta)$ intervala $I$ na kome je $f^{'}(x) \equiv 0$, to je funkcija $f(x)$ rastuća na $I$.

Za $x \in I$, tj. za $x \geq e^e$ je sada

$$\begin{aligned} &\ln x - (\ln \ln x)^2 = f(x) \geq f(e^e) \\ &= \ln e^e - (\ln \ln e^e)^2 = e - 1 > 0, \end{aligned}$$

odnosno $(\ln \ln x)^2 < \ln x$.

Specijalno je onda $(\ln \ln n)^2 < \ln n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n > e^e$, tj. $e^{(\ln \ln n)^2} < e^{\ln n} = n$, odnosno $\frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} > \frac{1}{n}$.

Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n} < \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n > e^e$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{e^{(\ln \ln n)^2}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.3** Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdje je $a_n = \frac{1}{n}$ ako je $n$ kvadrat prirodnog broja, te $a_n = \frac{1}{n^2}$ ako $n$ nije kvadrat prirodnog broja.

**Rješenje:** Prirodni brojevi koji su kvadrati prirodnih brojeva su: 1, 4, 9, ... ($1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, ...).

Tako, $a_1 = \frac{1}{1}$, $a_2 = \frac{1}{2^2}$, $a_3 = \frac{1}{3^2}$, $a_4 = \frac{1}{4}$, $a_5 = \frac{1}{5^2}$, $a_6 = \frac{1}{6^2}$, $a_7 = \frac{1}{7^2}$, $a_8 = \frac{1}{8^2}$, $a_9 = \frac{1}{9}$, ... .

Dati red ma oblik

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9} + ... .$$

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ red nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (bez narušavanja poretka), na način da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$b_n = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + ... + \frac{1}{\big((n+1)^2-1\big)^2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = &\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2}\right) + ... \\ &+ \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + ... + \frac{1}{\big((n+1)^2-1\big)^2}\right) + ... \, .\end{aligned}$$

Primijetimo da je broj sabiraka u članu $b_n$ jednak

$$(n+1)^2 - 1 - \big(n^2+1\big) + 2 = n^2 + 2n + 1 - 1 - n^2 - 1 + 2 = 2n + 1.$$

Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ upotrebom kriterija upoređivanja.
Imamo,

$$\begin{aligned}
b_1 =& \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} < \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} < 1 + 1 = 2 \cdot \frac{1}{1^2}, \\
b_2 =& \frac{1}{4} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} < \frac{1}{4} + \frac{4}{5^2} < \frac{1}{4} + \frac{4}{4^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2 \cdot \frac{1}{2^2}, \\
b_3 =& \frac{1}{9} + \frac{1}{10^2} + ... + \frac{1}{15^2} < \frac{1}{9} + \frac{6}{10^2} < \frac{1}{9} + \frac{6}{9^2} < \frac{1}{9} + \frac{9}{9^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = 2 \cdot \frac{1}{3^2}, \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Općenito, za $n > 2$ je

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n^2+1)^2} + \frac{1}{(n^2+2)^2} + ... + \frac{1}{\big((n+1)^2-1\big)^2} \\
<& \frac{1}{n^2} + \frac{2n}{(n^2+1)^2} < \frac{1}{n^2} + \frac{2n}{n^4} < \frac{1}{n^2} + \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2} = 2 \cdot \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $b_n < 2 \cdot \frac{1}{n^2}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ (nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ bez narušavanja poretka) konvergentan, to je po Zadatku 41 u [DzG2, str. 106], konvergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

♢ **Zadatak 1.1.4** Ispitati konvergenciju reda $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ + ... upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Pošto je $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, to je $\sqrt{2} = 2\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos\frac{\pi}{2^2}$.
Znamo da je $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ i $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$.
Slijedi,

$$\begin{aligned} a_2 =& \sqrt{2-\sqrt{2}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^2}} = 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{2^3}, \\ a_3 =& \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2-\sqrt{2+2\cos\frac{\pi}{2^2}}} \\ =& \sqrt{2-2\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{2^2}}{2}}} = \sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^3}} \\ =& 2\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^3}}{2}} = 2\sin\frac{\pi}{2^4}. \end{aligned}$$

Nastavljajući ovako dalje, dobijamo da je $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Iz $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ je $a_1 = \sqrt{2} = 2\sin\frac{\pi}{2^2}$, pa je $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Pošto je $\sin x \leq x$ za $x \geq 0$, to je $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi}{2^n}$ je konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17], pa iz njegove konvergencije i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. slijedi konvergencija datog reda. ■

◇ **Zadatak 1.1.5** Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$, gdje je $\nu(n)$ broj cifara broja $n$.

**Rješenje:** Ako $n \in \{1, 2, ..., 9\}$ onda je $\nu(n) = 1$.

Za $n \in \{10, 11, ..., 99\}$ je $\nu(n) = 2$.

Isto tako, $\nu(n) = 3$ za $n \in \{100, 101, ..., 999\}$.

Možemo konstatovati da je $\nu(n) = 1$ ako $n \in \left\{10^{1-1}, 10^{1-1} + 1, ..., 10^1 - 1\right\}$, te da je $\nu(n) = 2$ ako $n \in \left\{10^{2-1}, 10^{2-1} + 1, ..., 10^2 - 1\right\}$, zatim da je $\nu(n) = 3$ ako $n \in \left\{10^{3-1}, 10^{3-1} + 1, ..., 10^3 - 1\right\}$, itd.

Općenito, ako je $n \in \mathbb{N}$, onda je $\nu(n) = k \in \mathbb{N}$ ako i samo ako $n \in \left\{10^{k-1}, 10^{k-1} + 1, ..., 10^k - 1\right\}$, tj. ako i samo ako je $10^{k-1} \leq n < 10^k$.

Ovo vrijedi ako i samo ako je $k - 1 \leq \log_{10} n < k$.

Lijeva nejednakost nam govori da je $k \leq \log_{10} n + 1$, tj. da je $\nu(n) \leq \log_{10} n + 1$.

Pošto je $\log_{10} n = \frac{\log_e n}{\log_e 10} = \frac{\ln n}{\ln 10}$, te $\ln 10 > 1$, to je $\log_{10} n = \frac{\ln n}{\ln 10} < \ln n$, pa je $\nu(n) \leq \ln n + 1$.

Slijedi, $\frac{\nu(n)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$.

Po $(d)$ Zadatka 1.1.2, konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan [DzG2, str. 140], pa je konvergentan i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ i tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}\right)$.

Odavde, iz $\frac{\nu(n)}{n^2} \leq \frac{\ln n}{n^2} + \frac{1}{n^2}$ i kriterija upoređivanja slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$.

Konačno, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$ i pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\nu(n)}{n^2}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.6** Neka je $\{\lambda_n\}$ niz rješenja jednačine $\tan x = x$, takvih da je $\lambda_n > \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$ upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1.

**Rješenje:** Pošto mora biti $\lambda_n > \frac{\pi}{2}$ za $n \in \mathbb{N}$, u jednačini $\tan x = x$ nas zanimaju vrijednosti $x > \frac{\pi}{2}$.

Funkcija $\tan x$ je neprekidna i rastuća na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi\right]$ sa jedinom nulom u tački $x = \pi$. Na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ njen grafik je smješten ispod $x$ ose, a na intervalu $\left(\pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right]$ iznad $x$ ose.

Pri tome, $\tan x$ raste ka $+\infty$ kad $x$ raste ka $\frac{\pi}{2} + \pi$.

Pošto je na intervalu $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \pi\right]$ funkcija $y = x$ pozitivna cijelo vrijeme, te prima samo konačne vrijednosti, to će u polupojasu $\left\{(x, y) \ : \ \pi < x < \frac{\pi}{2} + \pi, \ y > 0\right\}$ njen grafik presjeći grafik krive $\tan x$ u jednoj tački. Označimo tu tačku sa $(\lambda_1, y_1)$.

Sada je $\lambda_1$ rješenje jednačine $\tan x = x$ na intervalu $\left(\pi, \frac{\pi}{2} + \pi\right)$.

Na isti način dolazimo do rješenja $\lambda_2$ na intervalu $\left(2\pi, \frac{\pi}{2} + 2\pi\right)$.

Općenito, dolazimo do niza rješenja $\{\lambda_n\}$ jednačine $\tan x = x$, gdje $\lambda_n \in \left(n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi\right)$, tj. gdje je $n\pi < \lambda_n < \frac{\pi}{2} + n\pi$.

Slijedi, $n^2\pi^2 < \lambda_n^2 < \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2$, odnosno $\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)^2} < \frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2}$.

Iz $\frac{1}{\lambda_n^2} < \frac{1}{n^2\pi^2} = \frac{1}{\pi^2} \cdot \frac{1}{n^2}$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\lambda_n^2}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.7** Neka je dat pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ako postoji $\alpha > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takvi da je $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ za $n \geq n_0$, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. Ako postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takav da je $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$ za $n \geq n_0$, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira. Dokazati navedene tvrdnje[1] upotrebom kriterija uporeĐivanja, tj. Teorema 1.1.

**Dokaz:** Pretpostavimo da postoji $\alpha > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takvi da je $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \geq 1 + \alpha$ za sve $n \geq n_0$.

Odavde, za $n \geq n_0$, vrijedi

$$\begin{aligned} n^{1+\alpha} &\leq n^{\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}} = e^{\ln\left[n^{\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}}\right]} \\ &= e^{\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n}\cdot \ln n} = e^{\ln a_n^{-1}} = a_n^{-1} = \frac{1}{a_n}, \end{aligned}$$

tj. vrijedi $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$.

Pošto je $1 + \alpha > 1$, to je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\alpha}}$ konvergentan [DzG2, str. 140].

Iz njegove konvergencije, nejednakosti $a_n \leq \frac{1}{n^{1+\alpha}}$, $n \geq n_0$, i kriterija uporeĐivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pretpostavimo sada da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takav da je $\frac{\ln a_n^{-1}}{\ln n} \leq 1$ za $n \geq n_0$.

Odavde je $\ln a_n^{-1} \leq \ln n$, tj. $a_n^{-1} \leq n$, odnosno $\frac{1}{n} \leq a_n$ za $n \geq n_0$.

Tako, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], nejednakosti $\frac{1}{n} \leq a_n$, $n \geq n_0$, i kriterija uporeĐivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

◇ **Zadatak 1.1.8** Upotrebom kriterija uporeĐivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju sljedećih redova:

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$$

**Rješenje:** $(a)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$.

Za $x \in [0, n]$ je $\sqrt[4]{1+x^4} > \sqrt[4]{x^4} = x$, pa je

[1] Tvrdnja Zadatka 1.1.7 je u literaturi poznata kao logaritamski kriterij.

$$\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx > \int\limits_0^n xdx = \frac{x^2}{2}\bigg|_0^n = \frac{n^2}{2}.$$

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx} < 2 \cdot \frac{1}{n^2}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\int\limits_0^n \sqrt[4]{1+x^4}dx}$.

$(b)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$.

Za $x \in [n\pi, (n+1)\pi]$ je $x \leq (n+1)\pi$, pa je $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{(n+1)\pi}$, te $\frac{\sin^2 x}{x} \geq \frac{\sin^2 x}{(n+1)\pi}$.

Odavde je $\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x}dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 xdx$.

Nađimo $\int \sin^2 xdx$.

Pošto je $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, to za $\alpha = 2x$ slijedi da je $\sin x = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}}$, odnosno $\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x$.

Tako,

$$\begin{aligned}\int \sin^2 xdx =& \frac{1}{2}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos 2xdx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\int \cos 2xd\,(2x)\\ =& \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C.\end{aligned}$$

Dobijamo,

$$\begin{aligned}&\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 xdx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x\right)\bigg|_{n\pi}^{(n+1)\pi}\\ =& \left(\frac{1}{2}(n+1)\pi - \frac{1}{4}\sin 2(n+1)\pi\right) - \left(\frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\sin 2n\pi\right)\\ =& \frac{1}{2}(n+1)\pi - \frac{1}{2}n\pi = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Sada je,

$$\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \sin^2 x dx = \frac{1}{(n+1)\pi} \cdot \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{1}{2(n+1)} = \frac{1}{2n+2} \geq \frac{1}{2n+2n} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n}.$$

Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], nejednakosti $\frac{1}{n} \leq 4 \cdot \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin^2 x}{x} dx$.

$(c)$ Neka je $n \in \mathbb{N}$.
Za $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$ je $1 + x \geq 1$, pa je $\frac{1}{1+x} \leq 1$.
Odavde je $\frac{\sin^3 x}{1+x} \leq \sin^3 x$ za $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$.
Pošto je $\sin x \leq x$ za $x \geq 0$, to je onda $\sin^3 x \leq x^3$ za $x \geq 0$, pa onda specijalno i za $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$.
Tako, za $x \in \left[0, \frac{\pi}{n}\right]$, dobijamo da je $\frac{\sin^3 x}{1+x} \leq \sin^3 x \leq x^3$.
Odavde je

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx \leq \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} x^3 dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi^4}{4} \cdot \frac{1}{n^4}.$$

Tako, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4}$ [DzG2, str. 140], nejednakosti $\int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx \leq \frac{\pi^4}{4} \cdot \frac{1}{n^4}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{\sin^3 x}{1+x} dx$. ■

♢ **Zadatak 1.1.9** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$ upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1.

**Rješenje:** Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Možemo pisati

$$\ln \frac{n+1}{n-1} = \ln \frac{n-1+2}{n-1} = \ln \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right).$$

U Zadatku 8 u [DzG1, str. 73] smo dokazali da za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, vrijedi $1 + \alpha < e^{\alpha}$.

Specijalno, ako je $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 0$, onda je $\ln(1+\alpha) < \alpha$.

Slijedi, $\ln \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right) < \frac{1}{\frac{n-1}{2}} = \frac{2}{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n-1}$.

Pošto je $n \geq 2$, to je $\frac{n}{2} \geq 1$, tj. $-1 \geq -\frac{n}{2}$, pa je $n - 1 \geq n - \frac{n}{2} = \frac{1}{2}n$, odnosno $\frac{1}{n-1} \leq \frac{2}{n}$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dobijamo

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} < \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{2}{n-1} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{4}{n} = 4 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}.$$

Po [DzG2, str. 140] konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, pa po [DzG2, str. 8, Teo. 1.6] konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$.

Odavde, iz $\frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1} < 4 \cdot \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.10** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan divergentan red. Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, analizirati ponašanje redova:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$$

**Rješenje:** $(a)$ Niz $\{a_n\}$ može biti ograničen ili ne.

Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, onda postoji konstanta $M > 0$, takva da je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada, za $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $1 + a_n \leq 1 + M$, tj. $\frac{1}{1+M} \leq \frac{1}{1+a_n}$, odnosno $\frac{a_n}{1+M} \leq \frac{a_n}{1+a_n}$ ili $a_n \leq (1 + M)\,\frac{a_n}{1+a_n}$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$.

Pretpostavimo da niz $\{a_n\}$ nije ograničen.

Pošto je niz $\{a_n\}$ ograničen odozdo ($a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$), to onda $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo.

To znači da nije tačno da postoji konstanta $M > 0$, takva da je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Drugim riječima, imamo da za svaku konstantu $M > 0$, postoji indeks $n \in \mathbb{N}$, takav da je $a_n > M$.

Neka je $M_1 = 1$.

Po upravo rečenome, postoji indeks $p_1 \in \mathbb{N}$, takav da je $a_{p_1} > M_1 = 1$.

Skup $\{2, a_1, a_2, ..., a_{p_1}\}$ je konačan skup, pa postoji maksimum
$M_2 = \max\{2, a_1, a_2, ..., a_{p_1}\}$.

Jasno je da je $2 \leq M_2$ i $a_n \leq M_2$ za sve $n \in \{1, 2, ..., p_1\}$.

Sada, za konstantu $M_2 > 0$, postoji indeks $p_2 \in \mathbb{N}$, takav da je $a_{p_2} > M_2$ (vrijedi $p_2 > p_1$ jer je $a_n \leq M_2$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \leq p_1$).

Tako, $a_{p_2} > M_2 \geq 2$ i $a_{p_2} > M_2 \geq a_{p_1}$.

Nastavljajući ovako dalje, dobijamo rastući niz prirodnih brojeva $\{p_n\}$, tj. dobijamo podniz $\{a_{p_n}\}$ niza $\{a_n\}$, takav da je $a_{p_n} > n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i $a_{p_n} > a_{p_{n-1}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Neka je $c > 0$ proizvoljna konstanta.

Za konstantu $c$, jasno, postoji prirodan broj $N \in \mathbb{N}$, takav da je $c < N$.

Pošto je $a_{p_N} > N$, to je onda $a_{p_N} > c$.

Iz činjenice da je $a_{p_N} < a_{p_{N+1}} < ...$, slijedi da je $a_{p_n} > c$ za sve $n \geq N$.

Tako, za proizvoljnu konstantu $c > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_{p_n} > c$.

Ovo znači da $a_{p_n} \to +\infty$ kad $n \to +\infty$, tj. da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{p_n} = +\infty$.

Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{p_n}}{1 + a_{p_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{a_{p_n}} + 1} = 1.$$

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ konvergirao, onda bi vrijedilo $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Pošto je $\left\{\frac{a_{p_n}}{1+a_{p_n}}\right\}$ podniz niza $\left\{\frac{a_n}{1+a_n}\right\}$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1+a_n} = 0$, to bi iz Leme 7.12 u [DzG2, str. 91], imali da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\{\frac{a_{p_n}}{1+a_{p_n}}\right\} = 0$, što nije slučaj.

Dakle, kontradikcija, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ divergira.

Tako, pri datim pretpostavkama na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ uvijek divergira.

$(b)$ Dokažimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ može konvergirati ili divergirati.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, gdje je $a_n = 1$ ako je $n$ kvadrat prirodnog broja, te $a_n = \frac{1}{n^2}$ ako $n$ nije kvadrat prirodnog broja. Imamo,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + 1 + \frac{1}{10^2} + \dots .$$

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergirao, onda bi vrijedilo $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka okolina granične vrijednosti niza sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza. To bi zbog $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ značilo da okolina $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ tačke $0$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$. Ipak, elementi $a_1 = 1$, $a_4 = 1$, $a_9 = 1$, ... (beskonačno, tj. prebrojivo mnogo njih), ne pripadaju okolini $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

U kontradikciju nas je dovela pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, pa on divergira.

Neka je $n \in \mathbb{N}$.

Ako je $n$ kvadrat prirodnog broja $m$, onda je $\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{1}{1+n} = \frac{1}{1+m^2}$.

S druge strane, ako $n$ nije kvadrat prirodnog broja, onda je $\frac{a_n}{1+na_n} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+n\cdot\frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{n^2+n}$.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$.

Posmatrajmo neki konkretan element niza $\{S_n\}$, npr. element $S_{11}$. Sada je,

$$\begin{aligned}
S_{11} =& \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{5^2+5} + \frac{1}{6^2+6} + \frac{1}{7^2+7} \\
&+ \frac{1}{8^2+8} + \frac{1}{1+3^2} + \frac{1}{10^2+10} + \frac{1}{11^2+11} \\
=& \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + \frac{1}{1+3^2} \\
&+ \frac{1}{2^2+2} + \frac{1}{3^2+3} + \frac{1}{5^2+5} + \frac{1}{6^2+6} + \frac{1}{7^2+7} + \frac{1}{8^2+8} + \frac{1}{10^2+10} \\
&+ \frac{1}{11^2+11} \\
<& \frac{1}{1+1^2} + \frac{1}{1+2^2} + ... + \frac{1}{1+11^2} + \frac{1}{1^2+1} + \frac{1}{2^2+2} + ... + \frac{1}{11^2+11} \\
<& \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{11^2} \\
=& 2\sum_{k=1}^{11} \frac{1}{k^2} = 2Q_{11},
\end{aligned}$$

gdje je $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $S_n < 2Q_n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan [DzG2, str. 140], pa je konvergentan niz $\{Q_n\}$. Ovo po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17] znači da je niz $\{Q_n\}$ ograničen. Postoji tako konstanta $K > 0$, takva da je $Q_n \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \in \mathbb{N}$, imamo da je $S_n < 2K$, što znači da je niz $\{S_n\}$ ograničen odozgo.

Pošto je $\{S_n\}$ rastući niz (jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ pozitivan red), to je po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], niz $\{S_n\}$ konvergentan. To znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+na_n}$ konvergentan.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Ovaj red je po [DzG2, str. 5-6] divergentan.

Za $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\frac{a_n}{1+na_n}=\frac{\frac{1}{n}}{1+n\cdot\frac{1}{n}}=\frac{1}{2n}>\frac{1}{n}.$$

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, i kriterija uporeďivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$.

$(c)$ Dokažimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$ uvijek konvergira, tj. neovisno od konvergencije (divergencije) reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Naime, za $n\in\mathbb{N}$ je

$$\frac{a_n}{1+n^2a_n}\leq\frac{a_n}{n^2a_n}=\frac{1}{n^2}.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija uporeďivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$.

$(d)$ Niz $\{a_n\}$ može biti ograničen ili ne.

Ako je $\{a_n\}$ ograničen niz, onda postoji konstanta $M>0$, takva da je $a_n\leq M$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Sada, za $n\in\mathbb{N}$, vrijedi $a_n^2\leq M^2$, tj. $1+a_n^2\leq 1+M^2$, odnosno $\frac{1}{1+a_n^2}\geq\frac{1}{1+M^2}$ ili $\frac{a_n}{1+a_n^2}\geq\frac{a_n}{1+M^2}$.

Tako, za $n\in\mathbb{N}$, imamo da je $a_n\leq\left(1+M^2\right)\frac{a_n}{1+a_n^2}$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ i kriterija uporeďivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$.

Pretpostavimo sada da niz $\{a_n\}$ nije ograničen. Pošto je niz $\{a_n\}$ pozitivan, tj. vrijedi $a_n>0$ za sve $n\in\mathbb{N}$, to je niz $\{a_n\}$ ograničen odozdo. Ovo znači da niz $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo.

U prethodnom slučaju smo dokazali da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ divergentan. Dokažimo da u ovom slučaju ovaj red može biti konvergentan.

Posmatrajmo niz $\{a_n\}$, gdje je $a_n = n^2$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je divergentan jer je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty \neq 0$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Osim toga, niz $\{a_n\}$ nije ograničen odozgo. Naime, za svaku konstantu $M > 0$, postoji $n \in \mathbb{N}$, takav da je $a_n = n^2 > M$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada

$$\frac{a_n}{1+a_n^2} = \frac{n^2}{1+n^4} < \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2}.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$.

Tako, pri datim uslovima na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{1+a_n^2}$ može konvergirati ili divergirati. ■

♢ **Zadatak 1.1.11** Neka je $a_1 > 0$ i $\alpha > 0$. Definišimo rekurzivno niz $\{a_n\}$ sa $a_{n+1} = a_n e^{-a_n^\alpha}$ za $n \in \mathbb{N}$. Odrediti, upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, za koje vrijednosti parametra $\beta$ konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\beta$.

**Rješenje:** Sada je $a_2 = a_1 e^{-a_1^\alpha} > 0$, $a_3 = a_2 e^{-a_2^\alpha} = a_1 e^{-a_1^\alpha} e^{-a_2^\alpha} > 0$, itd., tj. $a_{n+1} = a_1 e^{-\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^\alpha} > 0$, $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo prvo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha$.

Ovaj red je pozitivan.

Dokažimo da je posmatrani red divergentan.

Pretpostavimo suprotno, da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^\alpha$ konvergentan.

Pošto je red pozitivan, to je njegova suma $S$ konačan nenegativan broj (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Označimo sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$.

Vrijedi, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k^{\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$.

Slijedi, $a_{n+1} = a_1 e^{-Q_n}$, te $a_{n+1}^{\alpha} = a_1^{\alpha} e^{-Q_n \alpha}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ konvergira ka $S$, to je onda $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = S$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}^{\alpha} = a_1^{\alpha} e^{-S\alpha}$.

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. str. 50], slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\alpha} = a_1^{\alpha} e^{-S\alpha} > 0$.

Po [DzG2, str. 4, Teo. 1.4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ onda divergira.

Dakle, kontradikcija.

U kontradikciju nas je dovela pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ konvergira, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ divergira. Pošto je u pitanju pozitivan red, to je po pomenutoj noti 34, suma $S$ reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$ jednaka $+\infty$, tj. $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha} = +\infty = \lim\limits_{n\to+\infty} Q_n$.

Odavde i iz $a_{n+1} = a_1 e^{-Q_n}$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$, a onda i da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Posmatrajmo sada traženi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\beta}$ za $\beta > \alpha$.

Dokažimo prvo da je $a_n^{-\alpha} > \alpha (n-1)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Za $n = 1$ je $a_1^{-\alpha} > 0 = \alpha (n-1)$.

Pretpostavimo da je $a_n^{-\alpha} > \alpha (n-1)$ za neko $n \in \mathbb{N}$.

Slijedi,

$$a_{n+1}^{-\alpha} = a_n^{-\alpha} e^{\alpha a_n^{\alpha}}.$$

Po Zadatku 8 u [DzG1, str. 73], za $\gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$ je $e^{\gamma} > 1 + \gamma$, pa je

$$\begin{aligned} a_{n+1}^{-\alpha} &= a_n^{-\alpha} e^{\alpha a_n^{\alpha}} > a_n^{-\alpha} (1 + \alpha a_n^{\alpha}) \\ &= a_n^{-\alpha} + \alpha > \alpha (n-1) + \alpha = \alpha n. \end{aligned}$$

Tako, nejednakost $a_n^{-\alpha} > \alpha (n-1)$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Specijalno, ova nejednakost vrijedi za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pa možemo pisati da je $a_{n+1}^{-\alpha} > \alpha n$ za $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada $a_{n+1}^{-\alpha} > \alpha n$, tj. $\frac{1}{a_{n+1}^{\alpha}} > \alpha n$, pa je $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{\left(a_{n+1}^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}}} > \alpha^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}$, odnosno $a_{n+1} < \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{\alpha}} n^{\frac{1}{\alpha}}}$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je (zbog $\beta > \alpha > 0$), $a_{n+1}^{\beta} < \frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}$.

Iz $\beta > \alpha > 0$ imamo da je $\frac{\beta}{\alpha} > 1$.

Sada, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}$ [DzG2, str. 140], nejednakosti $a_{n+1}^{\beta} < \frac{1}{\alpha^{\frac{\beta}{\alpha}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{\beta}{\alpha}}}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{n+1}^{\beta} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n^{\beta}$.

Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n^{\beta}$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\beta}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Posmatrajmo sada slučaj $\beta < \alpha$.

Već smo konstatovali da je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Ovo znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji indeks $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $a_n = |a_n - 0| < \varepsilon$.

Tako, za $\varepsilon = 1$, postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $a_n < 1$.

Pošto je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je onda $0 < a_n < 1$ za $n \geq n_0$.

Neka je $n \geq n_0$.

Iz $0 < a_n < 1$ i $\beta < \alpha$ slijedi da je $a_n^{\beta} > a_n^{\alpha}$.

Tako, $a_n^{\alpha} < a_n^{\beta}$, $n \geq n_0$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\alpha}$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\beta}$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^{\beta}$ konvergira za $\beta > \alpha$. ■

◇ **Zadatak 1.1.12** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz. Pretpostavimo da je $\limsup\limits_{n \to +\infty} a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}$. Dokazati upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Dokaz:** Pošto je $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e}$, to možemo odabrati $\varepsilon > 0$ tako malo da vrijedi

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{e}.$$

Iz $\limsup\limits_{n\to+\infty} a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}}$ i Zadatka 23 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}}$.

Za $n \geq N$ je

$$\frac{1}{\ln n} \cdot \ln a_n = \ln a_n^{\frac{1}{\ln n}} < \ln \frac{1}{e^{1+\varepsilon}} = -1-\varepsilon,$$

tj. $\ln a_n < (-1-\varepsilon)\ln n = \ln n^{-1-\varepsilon}$, odnosno $a_n < n^{-1-\varepsilon} = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$.

Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ [DzG2, str. 140], nejednakosti $a_n < \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

♢ **Zadatak 1.1.13** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan pozitivan red. Odrediti potrebne i dovoljne uslove za postojanje pozitivnog niza $\{b_n\}$, takvog da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ oba konvergiraju (koristiti kriterij upoređivanja, tj. Teorem 1.1).

**Rješenje:** Dokažimo da je uslov da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ konvergira i potreban i dovoljan za postojanje traženog niza $\{b_n\}$.

Preciznije, dokažimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ konvergira ako i samo ako postoji pozitivan niz $\{b_n\}$, takav da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ oba konvergiraju.

Neka konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$.

Stavimo, $b_n = \sqrt{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Sada redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{a_n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$ konvergiraju.

Tako, postoji pozitivan niz $\{b_n\}$, $b_n = \sqrt{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, takav da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ oba konvergiraju.

Obrnuto, pretpostavimo da postoji pozitivan niz $\{b_n\}$, takav da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ oba konvergiraju.

Nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine nam za $n \in \mathbb{N}$ daje

$$\sqrt{a_n} = \sqrt{b_n \cdot \frac{a_n}{b_n}} \leq \frac{b_n + \frac{a_n}{b_n}}{2} = \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{b_n}.$$

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n}$ konvergiraju, pa po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12]. konvergiraju i redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{b_n}$.

Odavde i iz tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 1.8, slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{b_n} \right)$.

Iz konvergencije ovog reda, nejednakosti $\sqrt{a_n} \leq \frac{1}{2} b_n + \frac{1}{2} \cdot \frac{a_n}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.14** Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nizovi koji nerastući teže ka nuli kad $n \to +\infty$, i takvi su da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergiraju. Šta možemo, upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, reći o konvergenciji reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, gdje je $c_n = \min \{a_n, b_n\}$, $n \in \mathbb{N}$ ?

**Rješenje:** Može se desiti da je $a_n \leq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ ili da je $b_n \leq a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zbog simetričnosti, u takvoj situaciji možemo pretpostaviti da je npr. $a_n \leq b_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Sada je $c_n = \min\{a_n, b_n\} = a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ može da divergira.

Primjetimo ipak da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ može i da konvergira.

Posmatrajmo sljedeće nizove:

$$1, \underbrace{\frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^2}}_{2^2+1 \text{ puta}}, \frac{1}{7^2}, \frac{1}{8^2}, \dots, \frac{1}{56^2}, \underbrace{\frac{1}{57^2}, \frac{1}{57^2}, \dots, \frac{1}{57^2}}_{57^2+1 \text{ puta}}, \frac{1}{3307^2}, \frac{1}{3308^2}, \cdots ,$$

$$1, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \frac{1}{5^2}, \frac{1}{6^2}, \underbrace{\frac{1}{7^2}, \frac{1}{7^2}, \dots, \frac{1}{7^2}}_{7^2+1 \text{ puta}}, \frac{1}{57^2}, \frac{1}{58^2}, \dots, \frac{1}{3306^2}, \underbrace{\frac{1}{3307^2}, \frac{1}{3307^2}, \dots, \frac{1}{3307^2}}_{3307^2+1 \text{ puta}},$$
$$\frac{1}{10.939.557^2}, \frac{1}{10.939.558^2}, \cdots .$$

Označimo ih redom sa $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$.

Odgovarajući redovi su $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Ovi redovi su pozitivni.

Nizovi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ nerastući teže ka nuli kad $n \to +\infty$.

Dokažimo da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentni.

Pored ovih redova, posmatrajmo i sljedeće redove nastale grupisanjem članova redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ bez narušavanja poretka.

$$1 + \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2}\right) + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \dots + \frac{1}{56^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{57^2} + \frac{1}{57^2} + \dots + \frac{1}{57^2}\right) + \frac{1}{3307^2} + \frac{1}{3308^2} + \cdots ,$$
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{6^2} + \left(\frac{1}{7^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{7^2}\right) + \frac{1}{57^2} + \frac{1}{58^2} + \dots + \frac{1}{3306^2}$$
$$+ \left(\frac{1}{3307^2} + \frac{1}{3307^2} + \dots + \frac{1}{3307^2}\right) + \frac{1}{10.939.557^2} + \frac{1}{10.939.558^2} + \cdots .$$

Svaki član ovih redova određen zagradama je strogo veći od 1, i ovakvih članova je (po našoj konstrukciji) beskonačno mnogo (u svakom od navedenih redova).

Ovo znači da ovi redovi divergiraju, jer im opšti članovi ne teže nuli kad $n \to +\infty$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Naime, ako bi ovi redovi konvergirali, onda bi im opšti članovi težili ka nuli kad $n \to +\infty$. Ovo bi po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17] značilo da svaka okolina, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ granične vrijednosti 0, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo članova navedenih redova (svakog reda zasebno). Ovo je kontradikcija s obzirom da smo već vidjeli da svaki od pomenutih redova ima po beskonačno mnogo članova većih od 1.

Dakle, redovi nastali grupisanjem članova divergiraju.

Po Zadatku 40 u [DzG2, str. 105], iz konvergencije reda slijedi konvergencija svakog reda nastalog grupisanjem njegovih članova bez narušavanja poretka.

Tako, ako bi redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergirali, onda bi konvergirali i grupisani redovi navedeni iznad, što nije slučaj. Drugim riječima, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergiraju.

Primijetimo da za konstruisane redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ za svako $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$c_n = \min\{a_n, b_n\} = \frac{1}{n^2}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je konvergentan [DzG2, str. 140].

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ može i da konvergira. ■

♢ **Zadatak 1.1.15** Neka je $\{a_n\}$ ograničen, pozitivan, rastući niz. Dokazati upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

**Dokaz:** Niz $\{a_n\}$ je pozitivan, pa je ograničen odozdo sa nulom.

Pošto je niz $\{a_n\}$ po pretpostavci ograničen, to je on onda ograničen i odozgo.

Osim toga, niz $\{a_n\}$ je rastući, pa je $0 < a_1 < a_2 < \ldots$ .

Za $n \in \mathbb{N}$, možemo pisati

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} < \frac{a_{n+1} - a_n}{a_1} = \frac{1}{a_1}(a_{n+1} - a_n).$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$.
Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma ovog reda.
Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1} - a_k) \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1. \end{aligned}$$

Niz $\{a_n\}$ je rastući i ograničen odozgo, pa je po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], konvergentan.

Postoji dakle konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a$.

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50], slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = a$.

Sada, iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = a - a_1$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1} - a_n)$ konvergira, pa odavde, iz nejednakosti $1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1}(a_{n+1} - a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 1.1.16** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz koji teži ka $+\infty$ kad $n \to +\infty$. Šta možemo (upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1) reći o konvergenciji redova: $(a)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^n}$ $(b)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln \ln n}}$ ?

**Rješenje:** $(a)$ Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to za svaku konstantu $c > 0$, pa specijalno i za konstantu $c = 2$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_n > c = 2$ [DzG1, str. 84, Def. 7.7].

Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, vrijedi $a_n^n > 2^n$, tj. $\frac{1}{a_n^n} < \frac{1}{2^n}$.

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ [DzG2, str. 17, Teo. 1.10], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^n}$ uvijek konvergira u datoj postavci.

$(b)$ Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$ može da divergira.

Posmatrajmo npr. niz $\{a_n\}$, gdje je $a_1 = 1$, te $a_n = \ln n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Niz $\{a_n\}$ je pozitivan, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Po $(i)$ Zadatka 1.1.2, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$ divergira.

Odavde, i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$.

S druge strane, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$ može i da konvergira.

Neka je $\alpha > 1$ proizvoljan realan broj.

Posmatrajmo niz $\{a_n\}$, gdje je $a_n = n$, $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}$ je pozitivan, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Za niz $\{\ln\ln n\}_{n=2}^{+\infty}$ vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\ln n = +\infty$, pa za svaku konstantu $c > 0$, a onda specijalno i za konstantu $c = \alpha$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\ln\ln n > c = \alpha$ [DzG1, str. 84, Def. 7.7].

Za $n \geq N$, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n^{\ln\ln n}} &= \frac{1}{e^{\ln a_n^{\ln\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln a_n \cdot \ln\ln n}} \\ &= \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln\ln n}} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln\ln n}} < \frac{1}{n^{\alpha}}.\end{aligned}$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln \ln n}}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln \ln n}}$ može konvergirati i divergirati u datoj postavci. ■

♢ **Zadatak 1.1.17** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan konvergentan red. Šta možemo (upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1), reći o konvergenciji reda
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ?

**Rješenje:** Iz pozitivnosti niza $\{a_n\}$ slijedi da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} \geq \frac{a_1}{n},$$

tj. $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

Ovo znači da pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uopšte nije bitna, tj. da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ divergira bez obzira na ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

♢ **Zadatak 1.1.18** Neka je $\mathbb{A}$ skup svih prirodnih brojeva koji ne sadrže nulu u svom zapisu. Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, dokazati da red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n}$ konvergira, te odrediti vrijednosti parametra $\alpha \in \mathbb{R}$, za koje red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira (divergira).

**Rješenje:** Jednocifreni elementi skupa $\mathbb{A}$ su $\{1, 2, ..., 9\}$. Ima ih $9 = 9^1$. Svi su veći ili jednaki broju $1 = 10^{1-1}$. S druge strane, svi su oni manji ili jednaki broju $9 = 10^1 - 1$.

Dvocifreni elementi skupa $\mathbb{A}$ su oblika $xy$, gdje $x, y \in \{1, 2, ..., 9\}$. Jasno je da ih ima $9 \cdot 9 = 9^2$. Prvi među njima je $11$ a zadnji $99$. To znači da su svi oni veći od $10 = 10^{2-1}$, a manji ili jednaki $99 = 10^2 - 1$.

Općenito, ako je $k \in \mathbb{N}$, onda elemenata skupa $\mathbb{A}$ koji imaju $k$ cifara ima $9^k$. Svaki od tih elemenata je veći ili jednak broju $10^{k-1}$ (strogo veći od $10^{k-1}$ za $k \geq 2$), te manji ili jednak broju $10^k - 1$.

Tako, red $\sum\limits_{n \in \mathbb{A}} \frac{1}{n}$ ima oblik

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + ... + \frac{1}{29} + ...$$
$$+ \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + ... + \frac{1}{99} + \frac{1}{111} + \frac{1}{112} + ... \, .$$

Posmatrat ćemo red nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n \in \mathbb{A}} \frac{1}{n}$ bez narušavanja poretka, i to tako da u prvoj grupi budu članovi čiji su nazivnici jednocifreni brojevi, u drugoj grupi budu članovi čiji su nazivnici dvocifreni brojevi, itd.

Red nastao opisanim grupisanjem je ustvari red

$$\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{11} + \frac{1}{12} + ... + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} + \frac{1}{22} + ... + \frac{1}{29} + ...\right.$$
$$\left. + \frac{1}{91} + \frac{1}{92} + ... + \frac{1}{99}\right) + \left(\frac{1}{111} + \frac{1}{112} + ...\right) + ... \, ,$$

tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{q \in \mathbb{A}_n} \frac{1}{q} \right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, gdje je za $n \in \mathbb{N}$, skup $\mathbb{A}_n$ podskup skupa $\mathbb{A}$ (prirodno uređen), sastavljen od elemenata skupa $\mathbb{A}$ koji u svom zapisu imaju $n$ cifara.

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$c_n = \sum_{q \in \mathbb{A}_n} \frac{1}{q} \leq \sum_{q \in \mathbb{A}_n} \frac{1}{10^{n-1}} = \frac{9^n}{10^{n-1}} = 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n .$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10}\right)^n$ je konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17, Teo. 1.10].

Odavde, iz $c_n \leq 10 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$.

Pošto je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n}$ bez narušavanja poretka, i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n}$ je pozitivan red, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ i Zadatka 41 u [DzG2, str. 106], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n}$.

Za drugi dio zadatka posmatramo red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ i odgovarajući grupisani red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{q^\alpha} \right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je (kao i u prethodnom slučaju), uz pretpostavku da je $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} d_n(\alpha) &= \sum_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{q^\alpha} \leq \sum_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{10^{\alpha(n-1)}} = \frac{9^n}{10^{\alpha(n-1)}} \\ &= \frac{9^n}{10^{\alpha n} \cdot 10^{-1}} = 10 \cdot \left( \frac{9}{10^\alpha} \right)^n . \end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n$ je geometrijski red, i on je po $(a)$ pomenutog Teorema 1.10 u [DzG2, str. 17], konvergentan ako i samo ako je $\frac{9}{10^\alpha} < 1$, tj. ako i samo ako je $9 < 10^\alpha$, odnosno ako i samo ako je $\alpha > \log_{10} 9$.

Sada, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n$ za $\alpha > \log_{10} 9$, nejednakosti $d_n(\alpha) \leq 10 \cdot \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$ za $\alpha > \log_{10} 9$.

Pošto je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ bez narušavanja poretka, i red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ je pozitivan red, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$ za $\alpha > \log_{10} 9$, i Zadatka 41 u [DzG2, str. 106], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ za $\alpha > \log_{10} 9$.

Takođe, za $n \in \mathbb{N}$ i $\alpha > 0$ je

$$d_n(\alpha) = \sum_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{q^\alpha} \geq \sum_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{(10^n - 1)^\alpha} > \sum_{q\in\mathbb{A}_n} \frac{1}{10^{n\alpha}} =$$

$$\frac{9^n}{10^{n\alpha}} = \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n$ je geometrijski red, i on je po $(b)$ Teorema 1.10 u [DzG2, str. 17], divergentan ako i samo ako je $\frac{9}{10^\alpha} \geq 1$, tj. ako i samo ako je $9 \geq 10^\alpha$, odnosno ako i samo ako je $\alpha \leq \log_{10} 9$.

Sada, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n$ za $\alpha \leq \log_{10} 9$, nejednakosti $\left(\frac{9}{10^\alpha}\right)^n < d_n(\alpha)$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$ za $\alpha \leq \log_{10} 9$ $(0 < \alpha \leq \log_{10} 9)$.

Ako bi red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergirao za $0 < \alpha \leq \log_{10} 9$, onda bi za $0 < \alpha \leq \log_{10} 9$, po Zadatku 40 u [DzG2, str. 105], konvergirao i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n(\alpha)$, što je nemoguće.

Dakle, red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ divergira za $0 < \alpha \leq \log_{10} 9$.

Ako je $\alpha = 0$, red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n\in\mathbb{A}} 1$ divergira, jer mu opšti član ne teži nuli kad $n \to +\infty$ $(\lim\limits_{n\to+\infty} 1 = 1)$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Takođe, ako je $\alpha < 0$, onda opšti član reda $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ teži ka $+\infty \neq 0$, pa red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ ponovo divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}} \frac{1}{n^\alpha}$ konvergira za $\alpha > \log_{10} 9$, i divergira za $\alpha \leq \log_{10} 9$. ■

◇ **Zadatak 1.1.19** Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right)^p$ konvergira ako i samo ako je $p > 2$.

**Dokaz:** Stavimo, $a_n = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-1}{2n}\right)^p$ za $n \in \mathbb{N}$.
Tako, $a_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^p$, $a_2 = \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^p$, itd.
Definišimo $b_n$, $n \in \mathbb{N}$ sa $b_n = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1\right)^p$, $n \in \mathbb{N}$.
Jasno je da je sada $b_1 = 1$, $b_2 = \left(\frac{2}{3}\right)^p$, $b_3 = \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5}\right)^p$, itd.
Uočimo da za $n \in \mathbb{N}$, u proizvodima koji čine $a_n$ i $b_n$ učestvuje $n$ elemenata.
Takođe, uočimo da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < ... < \frac{2n-3}{2n-2} < \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{2n-1}{2n} < 1.$$

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $a_n b_n = \left(\frac{1}{2n}\right)^p = \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^p}$.
Osim toga, izvodimo i nejednakosti

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \frac{2n-1}{2n} < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 1,$$
$$\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1} < \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n}.$$

Iz prve nejednakosti, stepenovanjem sa $p > 0$, dobijamo da je za $n \in \mathbb{N}$, $a_n < b_n$.
Iz druge nejednakosti, množenjem sa $\frac{1}{2}$, slijedi da je za $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1}\right) < \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n}\right).$$

Odavde, stepenovanjem sa $p > 0$, dobijamo da je za $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^p} \cdot b_n < a_n$.
Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{2^p} \cdot b_n < a_n < b_n$.
Množenjem ovih nejednakosti sa $a_n$, slijedi da je $\frac{1}{2^p} \cdot a_n b_n < a_n^2 < a_n b_n$, tj. $\frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^p} < a_n^2 < \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^p}$, odnosno da je $\frac{1}{2^{2p}} \cdot \frac{1}{n^p} < a_n^2 < \frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^p}$.
Odavde, stepenovanjem sa $\frac{1}{2}$, dobijamo da je za $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2^p} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} < a_n < \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$.
Za $n \in \mathbb{N}$, možemo pisati da je $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} < 2^p \cdot a_n$ i $a_n < \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$.
Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n}\right)^p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, onda iz nejednakosti $\frac{1}{n^{\frac{p}{2}}} < 2^p \cdot a_n$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$.
Ovo, po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140] znači da mora biti $\frac{p}{2} > 1$, tj. da mora biti $p > 2$.
Pretpostavimo sada da je $p > 2$. Slijedi, $\frac{p}{2} > 1$, pa je po pomenutom Zadatku 59, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$ konvergentan.
Odavde, iz nejednakosti $a_n < \frac{1}{2^{\frac{p}{2}}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{p}{2}}}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 1.1.20** Dokazati upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, da za svako $a > 0$ i $b > 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira.

**Dokaz:** Mi po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], znamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^b}$ konvergira za $b > 1$.

Otud, tvrdnja zadatka nije neočekivana.

Naime, poznato je da funkcija $\ln x$ "sporo" raste ka $+\infty$ kad $x \to +\infty$. Isto važi i za funkciju $(\ln x)^a$, ma kako veliko $a > 0$ je u pitanju.

Drugim riječima, za svako $a > 0$ (ma kako veliko bilo), i svako $\varepsilon > 0$ (ma kako malo bilo), $(\ln x)^a$ je manje od $x^\varepsilon$ za dovoljno veliko $x$.

Ovo intuitivno razmatranje nas navodi na zaključak da pojava izraza $(\ln n)^a$, $a > 0$, u brojniku reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, ne bi trebala da značajno utiče na njegovu konvergenciju u smislu da se ta konvergencija uveliko razlikuje od konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^b}$.

Dokažimo da je ovo zaista tako, tj. dokažimo tvrdnju postavljenog zadatka.

Iz Zadatka 8 u [DzG1, str. 73], znamo da za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, vrijedi $1 + \alpha < e^\alpha$.

Ako je $\alpha = 0$, onda je $1 + \alpha = e^\alpha$.

Tako, za $\alpha \in \mathbb{R}$, vrijedi $1 + \alpha \leq e^\alpha$.

Za $1 + \alpha > 0$ je onda $\ln(1 + \alpha) \leq \alpha$.

Stavljanjem $1 + \alpha = \beta > 0$, dobijamo da je $\alpha = \beta - 1$, i $\ln \beta \leq \beta - 1 < \beta$.

Stavimo, $\beta = t^p$, gdje je $t > 0$ i $p > 0$.

Dobijamo,

$$p \ln t = \ln(t^p) < t^p.$$

Tako, za $t > 0$ i $p > 0$, vrijedi $\ln t < \frac{1}{p} \cdot t^p$, te $(\ln t)^a < \frac{1}{p^a} \cdot t^{pa}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je onda $(\ln n)^a < \frac{1}{p^a} \cdot n^{pa}$.

Drugim riječima, za $p > 0$ i $n \in \mathbb{N}$, vrijedi

$$\frac{(\ln n)^a}{n^b} < \frac{\frac{1}{p^a} \cdot n^{pa}}{n^b} = \frac{1}{p^a} \cdot \frac{1}{n^{b-pa}}.$$

Po pretpostavci, broj $b$ je veći od 1. Broj $a$ je veći od nule. Kako je $p > 0$ proizvoljno, to ga (za $a > 0$), možemo odabrati tako malo, da i vrijednost $b - pa$ bude veća od 1.

Pa neka je $a > 0$ proizvoljno i $b > 1$ proizvoljno.

Odaberimo $p > 0$, takvo da je $b - pa > 1$.

Sada, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{b-pa}}$ konvergira [DzG2, str. 140, Zad. 59].

Odavde, iz nejednakosti $\frac{(\ln n)^a}{n^b} < \frac{1}{p^a} \cdot \frac{1}{n^{b-pa}}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 1.1.21** Neka je $a_n \leq b_n \leq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i neka red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira. Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati da li divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Rješenje:** Iz $a_n \leq b_n \leq 0$ za $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $0 \leq -b_n \leq -a_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$ su sada pozitivni.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -b_n$ konvergirao, to bi po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedilo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -(-b_n)$.

Ovo nije tačno, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -b_n$ divergira.

Odavde, iz nejednakosti $-b_n \leq -a_n$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergirao, to bi po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], konvergirao i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$, a to nije slučaj.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira. ■

♢ **Zadatak 1.1.22** Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$.

**Rješenje:** Dokažimo da za $n \in \mathbb{N}$, vrijedi nejednakost $\frac{2-3n-n^2}{2} \leq -n$.

Nejednakost $\frac{2-3n-n^2}{2} \leq -n$ vrijedi ako i samo ako je $2 - 3n - n^2 \leq -2n$ ako i samo ako je $n^2 + n - 2 \geq 0$.

Rješenja jednačine $n^2 + n - 2 = 0$ su $n_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2}$, tj. $n_1 = -2$ i $n_2 = 1$.

Tako, vrijedi $n^2 + n - 2 \geq 0$ ako i samo ako je $n \in (-\infty, -2] \cup [1, +\infty)$.

Pošto $n \in \mathbb{N}$, to $n \in [1, +\infty)$, pa je $n^2 + n - 2 \geq 0$, odnosno $\frac{2-3n-n^2}{2} \leq -n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 6^{-n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{6}\right)^n$ je konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17, Teo. 1.10].

Iz njegove konvergencije, nejednakosti $\frac{2-3n-n^2}{2} \leq -n$, $n \in \mathbb{N}$, tj. nejednakosti $6^{\frac{2-3n-n^2}{2}} \leq 6^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$ (koja onda posljedično vrijedi), i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$. ■

♢ **Zadatak 1.1.23** Neka je $a > 0$ i $f(n)$ broj nula u zapisu broja $n \in \mathbb{N}$. Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ konvergira za $0 < a < 91$, i divergira za $a \geq 91$.

**Dokaz:** Vrijedi, npr. $f(9005) = 2$, $f(10000) = 4$, itd.

Posmatrat ćemo red $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ bez narušavanja poretka.

Primjetimo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ pozitivan.

Neka je $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ proizvoljan broj.

Posmatrajmo član $\sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ grupisanog reda.

Ovdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$.

Svaki od brojeva $n$ za koje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$ ima $m + 1$ cifara.

U takvom jednom broju, nula se može nalaziti na 0 mjesta, na jednom mjestu, itd., na maksimalno $m$ mjesta (jer prve cifre brojeva ne mogu biti jednake nuli).

Posmatrajmo brojeve $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$ (koji imaju dakle $m+1$ cifara), u čijem se zapisu 0 pojavljuje na $k = 0$ mjesta. Odredimo broj ovakvih $n$.

Prva cifra jednog takvog broja $n$ može biti neki od elemenata skupa $\{1, 2, ..., 9\}$. Isto važi i za drugu, treću, itd., $(m + 1)$-vu cifru. Ovo znači da brojeva $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, za koje je $k = 0$, ima $9^{m+1}$. Za ovakve brojeve $n$ je $f(n) = 0$.

Posmatrajmo sada brojeve $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, u čijem zapisu se 0 pojavljuje na jednom mjestu ($k = 1$).

Prva cifra svakog takvog broja može biti neki od elemenata skupa $\{1, 2, ..., 9\}$. Ako je 0 na drugom mjestu (fiksirana), onda na trećem, četvrtom, itd., $(m + 1)$-om mjestu mogu biti elementi skupa $\{1, 2, ..., 9\}$. Ovo znači da brojeva $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, u čijem zapisu se nula pojavljuje na drugom mjestu, ima $9^m$. Pošto se nula može pojavljivati na trećem mjestu, to i takvih brojeva $n$ ima $9^m$, na četvrtom mjestu, pa i tih brojeva ima $9^m$, itd., na $(m + 1)$-om mjestu, pa odgovarajućih brojeva $n$ i u ovom slučaju ima $9^m$, zaključujemo da je broj brojeva $n$, za koje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, a za koje je $k = 1$ ($f(n) = 1$), jednak $m \cdot 9^m$.

Posmatrajmo brojeve $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, u čijem zapisu se 0 pojavljuje na dva mjesta ($k = 2$).

Prva ciifra ovih brojeva $n$ je ponovo neki od elemenata skupa $\{1, 2, ..., 9\}$. Ako smo nulu $(0)$ fiksirali na drugom i trećem mjestu, onda na četvrtom, petom, itd., $(m + 1)$-om mjestu moraju biti elementi skupa $\{1, 2, ..., 9\}$. Ovo znači da brojeva $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, u čijem zapisu se 0 pojavljuje na drugom i trećem mjestu, ima $9^{m-1}$. Pošto se nula može pojavljivati na po dva mjesta od ukupno $m$ mjesta (osim prvog), to nas asocira na biranje dva elementa iz skupa od $m$ elemenata, tj. na broj kombinacija klase 2 (bez ponavljanja) iz skupa od $m$ elemenata. Broj ovakvih kombinacija je kao što znamo jednak $\binom{m}{2}$.

Ovo znači da je broj brojeva $n$, za koje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, a za koje je $k = 2$ ($f(n) = 2$), jednak $\binom{m}{2} 9^{m-1}$.

Vidimo da je posljednji broj ustvari jednak $\binom{m}{k} 9^{m+1-k}$.

U slučaju $k = 0$ smo vidjeli da je odgovarajući broj brojeva $n$ za koje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, jednak $9^{m+1}$.

Možemo ga pisati kao $\binom{m}{0} 9^{m+1-0} = \binom{m}{k} 9^{m+1-k}$.

U slučaju $k = 1$, odgovarajući broj brojeva $n$ je bio $m \cdot 9^m$. Možemo ga pisati u obliku $\binom{m}{1} 9^{m+1-1}$, tj. u obliku $\binom{m}{k} 9^{m+1-k}$.

Općenito dakle, broj brojeva $n$, gdje je $10^m \leq n < 10^{m+1}$, u čijem zapisu se 0 pojavljuje na $k$ mjesta, $k \in \{0, 1, 2, ..., m\}$, je jednak $\binom{m}{k} 9^{m+1-k}$. Za ovakve brojeve je $f(n) = k$.

Vratimo se članu $\sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ grupisanog reda.

Za sve brojeve $n$, gdje je $10^m \le n < 10^{m+1}$, vrijedi $10^{2m} \le n^2 < 10^{2(m+1)}$, tj. $\frac{1}{10^{2(m+1)}} < \frac{1}{n^2} \le \frac{1}{10^{2m}}$, odnosno $\frac{a^{f(n)}}{10^{2(m+1)}} < \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le \frac{a^{f(n)}}{10^{2m}}$.

Tako,

$$\frac{1}{10^{2(m+1)}} \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} a^{f(n)} < \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le \frac{1}{10^{2m}} \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} a^{f(n)},$$

tj.

$$\frac{1}{10^{2(m+1)}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 9^{m+1-k} a^k < \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le \frac{1}{10^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 9^{m+1-k} a^k,$$

ili

$$\frac{9}{10^{2m+2}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 9^{m-k} a^k < \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le \frac{9}{10^{2m}} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} 9^{m-k} a^k.$$

Dobijamo,

$$\frac{9}{10^{2m+2}} (9+a)^m < \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le \frac{9}{10^{2m}} (9+a)^m,$$

tj.

$$\frac{9}{100} \left(\frac{9+a}{100}\right)^m < \sum_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le 9 \left(\frac{9+a}{100}\right)^m.$$

Ako je $0 < a < 91$, onda je $9 < a + 9 < 100$, tj. $\frac{9}{100} < \frac{a+9}{100} < 1$.

Sada je $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{9+a}{100}\right)^m$ konvergentan geometrijski red [DzG2, str. 17, Teo. 1.10 $(a)$].

Odavde, iz $\sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2} \le 9 \left(\frac{9+a}{100}\right)^m$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$.

Ovaj red je nastao grupisanjem članova pozitivnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ bez narušavanja poretka, pa iz njegove konvergencije i Zadatka 41 u [DzG2, str. 106], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ konvergira za $0 < a < 91$.
Pretpostavimo da je $a \geq 91$.
Slijedi $9 + a \geq 100$, tj. $\frac{9+a}{100} \geq 1$.
Sada je $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \left(\frac{9+a}{100}\right)^m$ divergentan geometrijski red [DzG2, str. 17, Teo. 1.10 $(b)$].

Odavde, iz $\left(\frac{9+a}{100}\right)^m < \frac{100}{9} \sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, i kriterija upoređivanja, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ konvergirao za $a \geq 91$, onda bi za $a \geq 91$, po Zadatku 40 u [DzG2, str. 105], konvergirao i red $\sum\limits_{m=0}^{+\infty} \sum\limits_{n=10^m}^{10^{m+1}-1} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$, što je nemoguće.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a^{f(n)}}{n^2}$ divergira za $a \geq 91$.
Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 1.1.24 (Putnam [10, 1950, A2])**[2] Upotrebom kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\ldots\sqrt[n]{3}}$.

**Rješenje:** Stavimo, $a_n = \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\ldots\sqrt[n]{3}}$, $n \in \mathbb{N}$.
Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n = \frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\ldots\sqrt[n]{3}} = \frac{1}{3^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{3^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}}.$$

Po Zadatku 6 u [DzG1, str. 70], za svako $k \in \mathbb{N}$, vrijede nejednakosti $\frac{1}{k+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) < \frac{1}{k}$.
Za $n \in \mathbb{N}$, slijedi

[2] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} > \sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln\frac{k+1}{k}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left(\ln(k+1)-\ln k\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln t\Big|_{k}^{k+1} = \sum_{k=1}^{n}\int_{k}^{k+1}\frac{dt}{t} = \int_{1}^{n+1}\frac{dt}{t}$$
$$= \ln t\Big|_{1}^{n+1} = \ln(n+1) > \ln n.$$

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n = \frac{1}{3^{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}} < \frac{1}{3^{\ln n}} = \frac{1}{e^{\ln 3^{\ln n}}} = \frac{1}{e^{\ln n \cdot \ln 3}} = \frac{1}{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln 3}} = \frac{1}{n^{\ln 3}}.$$

Pošto je $\ln 3 > 1$, to je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\ln 3}}$ konvergentan $p$-red ($p = \ln 3$) [DzG2, str. 140, Zad. 59].

Odavde, iz $a_n < \frac{1}{n^{\ln 3}}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}\ldots\sqrt[n]{3}}$. ■

◇ **Zadatak 1.1.25 (Putnam [25, 1964, B5])**[3] Neka je $u_n$, $n \in \mathbb{N}$, najmanji zajednički sadržalac prvih $n$ članova nekog strogo rastućeg niza prirodnih brojeva. Koristeći kriterij upoređivanja, tj. Teorem 1.1, dokazati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{u_n}$.

**Dokaz:** U literaturi se broj pozitivnih djelilaca broja $n \in \mathbb{N}$ obično označava sa $\sigma_0(n)$, i poznato je da vrijedi nejednakost (procjena) $\sigma_0(n) \leq 2\sqrt{n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je $u_n$ najmanji zajednički sadržalac $n$ različitih brojeva, to broj $u_n$ ima bar $n$ pozitivnih djelilaca, tj. vrijedi $n \leq \sigma_0(u_n) \leq 2\sqrt{u_n}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada $n^2 \leq 4u_n$, tj. $\frac{1}{u_n} \leq 4 \cdot \frac{1}{n^2}$.

[3] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{u_n}$.

Dokaz je završen. ■

## 1.2 Redovi razmatrani kriterijem upoređivanja

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{2^n+1}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n-1)\,2^{2n-1}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{\pi}{2^n}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+4)}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n-1)}}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n3^{n-1}}$ (10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin n\alpha|}{n^2}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n}$ (14) $\displaystyle 1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+...$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\sin n\alpha}}$ (16) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\sqrt[n]{n}}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left[e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]$ (20) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(21) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}$ (22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$

(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ (24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-\ln n}$

(25) $\frac{1}{1}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4}+...$

(26) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$

(27) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+...$

(28) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\nu(n)}{n^2}$

(29) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$

(30) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\int_0^n\sqrt[4]{1+x^4}dx}$

(31) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x}dx$

(32) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{n}}\frac{\sin^3 x}{1+x}dx$

(33) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$

(34) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n}$

(35) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+na_n}$

(36) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+n^2a_n}$

(37) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{1+a_n^2}$

(38) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n^\beta$

(39) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{b_n}$

(40) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\min\{a_n,b_n\}$

(41) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$

(42) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n^n}$

(43) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

(44) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n^{\ln\ln n}}$

(45) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot...\cdot\frac{2n-1}{2n}\right)^p$

(46) $\sum\limits_{n\in\mathbb{A}}\frac{1}{n^\alpha}$

(47) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^a}{n^b}$

(48) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}6^{\frac{2-3n-n^2}{2}}$

(49) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a^{f(n)}}{n^2}$

(50) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{3\sqrt{3}\sqrt[3]{3}...\sqrt[n]{3}}$

## 2 Kriterij upoređivanja limesom

Gledano kroz prethodnu sekciju, suština je da ukoliko želimo da uporedimo dva reda, da onda moramo dokazati da odgovarajuća nejednakost za njihove članove važi u odgovarajućem smjeru. Tako, u Rješenju 2 Primjera 1.6, to je postignuto umetanjem umnoška $\frac{1}{2}$. Inače, takva strategija obično funkcioniše. Ipak, koraci: pronalaženje odgovarajućeg umnoška, i dokaz da je taj umnožak onaj "pravi", znaju biti dosta zamorni i ne baš očigledni u slučaju komplikovanijih izraza. Cilj ove sekcije je da nam omogući da budemo u stanju reći da bi redovi sa "sličnim" članovima, trebali da imaju i isto ponašanje.

**Teorem 2.1 (Kriterij upoređivanja limesom)** *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *pozitivni redovi, takvi da je* $a_n \geq 0$*,* $b_n > 0$ *za* $n \in \mathbb{N}$*. Pretpostavimo da je* $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L$*, gdje dozvoljavamo slučaj* $L = +\infty$*.*

1. *Ako je* $0 < L < +\infty$*, onda redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

2. *Ako je* $L = 0$*, onda iz konvergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *slijedi konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, a iz divergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *slijedi divergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$*.*

3. *Ako je* $L = +\infty$*, onda iz konvergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *slijedi konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$*, a iz divergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *slijedi divergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*.*

**Dokaz:** *1.* Pretpostavimo da je $0 < L < +\infty$.

Jasno je da sada možemo odabrati konstante $p$ i $q$, takve da je $0 < p < L < q < +\infty$.

Ovo znači da je interval $(p, q)$, okolina tačke $L$. Pošto je $L = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, to svaka okolina granične vrijednosti $L$ niza $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, pa specijalno i okolina $(p, q)$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ (vidjeti Zadatak 25 u [DzG1, str. 17]). Postoji onda prirodan broj $n_0$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $\frac{a_n}{b_n} \in (p, q)$, tj. $p < \frac{a_n}{b_n} < q$, odnosno, $pb_n < a_n < qb_n$.

Sada, iz desne nejednakosti, tj. iz $a_n < qb_n$, $n \geq n_0$, i Teorema 1.1, slijedi da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$).

S druge strane, iz lijeve nejednakosti, tj. iz $pb_n < a_n$, $n \geq n_0$, imamo da je $b_n < \frac{1}{p}a_n$, $n \geq n_0$, pa ponovo iz Teorema 1.1 dobijamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ (a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Drugim riječima, dokazali smo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i obrnuto, te da iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i obrnuto. Ovo znači da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

*2.* Pretpostavimo da je $L = 0$.

Sada je $(-1, 1)$ okolina granične vrijednosti $L = 0$ niza $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$, pa kao i u prethodnom slučaju, okolina $(-1, 1)$ sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$.

Postoji tako prirodan broj $n_0$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < 0 \leq \frac{a_n}{b_n} < 1$, tj. $a_n < 1 \cdot b_n$, $n \geq n_0$. Odavde, i iz Teorema 1.1, imamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

*3.* Neka je sada $L = +\infty$.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L = +\infty$, i Definicije 7.7 u [DzG1, str. 84], znamo da za konstantu $C = 1$, postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $\frac{a_n}{b_n} > C = 1$, tj. $b_n < a_n = 1 \cdot a_n$, $n \geq n_0$. Odavde, i iz Teorema 1.1, znamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, te da iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokaz je završen. ■

**Napomena 2.2** Prilikom odlučivanja da li upotrijebiti kriterij upoređivanja (Teorem 1.1) ili kriterij upoređivanja limesom (Teorem 2.1), općenito pravimo izbor u zavisnosti od naše agilnosti u postupku rukovanja nejednakostima, odnosno limesima.

Čitaoci iskusni u rukovanju limes inferiorom i limes superiorom će rado koristiti sljedeći kriterij upoređivanja limesom (na mjestima gdje je to adekvatno). Ovaj kriterij će biti prvi od onih koje nazivamo **ojačani kriteriji**. Dokazi ojačanih verzija će biti prirodne generalizacije dokaza osnovnih verzija, a bit će bazirane na upotrebi izvedenih osobina limes inferiora i limes superiora u [DzG1].

Primijetimo da limes koji se pojavljuje u Teoremu 2.1 ne mora da postoji. To se obično dešava prilikom rada sa redovima čiji članovi "skaču naokolo". Tipični primjeri takvih redova su redovi koji uključuju trigonometrijske funkcije, te redovi koji uključuju različite vrste alterniranja, i sl. Pa ako u takvim situacijama nismo u mogućnosti da odredimo traženi limes (ne samo u Teoremu 2.1, nego i u Teoremima, tj. kriterijima koji budu slijedili), onda ćemo biti u situaciji da odredimo odgovarajući limes inferior ili limes superior (koji će činiti sastavni dio datog kriterija), te na taj način ispitamo konvergenciju određenog reda. Kao što će postati jasno u nastavku, ojačani kriteriji su takvi da će ih biti moguće formulisati na više načina (neki, jedan te isti kriterij). Dakle, razlog upotrebe ojačanih kriterija će da leži u tome što ćemo njihovom primjenom biti u stanju da se uhvatimo u koštac sa redovima sa kojima inače ne bi mogli da se snađemo oslanjanjem na osnovne verzije upotrijebljenih kriterija.

**Teorem 2.3 (Ojačani kriterij upoređivanja limesom)** *Neka su $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ pozitivni redovi, takvi da je $a_n \geq 0$, $b_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da je $\liminf\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L_1$ i $\limsup\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = L_2$.*

1. *Ako je $L_2 < +\infty$, onda onda iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.*

2. *Ako je $L_1 > 0$, onda iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.*

**Dokaz:** *1.* Neka je $L_2 < +\infty$.

Odaberimo neko $q \in \mathbb{R}$, takvo da je $L_2 < q < +\infty$. Pošto je $L_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, to iz $L_2 < q$ i Zadatka 23 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji prirodan broj $n_0$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $\frac{a_n}{b_n} < q$, tj. $a_n < qb_n$, $n \geq n_0$.

Odavde, i iz Teorema 1.1, imamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

*2.* Neka je sada $L_1 > 0$.

Odaberimo neko $p > 0$, takvo da je $0 < p < L_1$. Pošto je $L_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$, to iz $p < L_1$ i Zadatka 24 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji prirodan broj $n_0$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $p < \frac{a_n}{b_n}$, tj. $b_n < \frac{1}{p} a_n$, $n \geq n_0$.

Odavde, i iz Teorema 1.1, imamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

**Primjer 2.4** Analizirati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-5}$.

**Rješenje:** Koristit ćemo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1.

Dati red možemo pisati u obliku $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-5} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. U brojniku datog reda dominira eksponencijalni sabirak $2^n$. Slično, u nazivniku dominira sabirak $3^n$. Jasno, dati red je pozitivan red.

Mi ne znamo da li dati red konvergira ili ne.

U skladu sa Teoremom 2.1, želimo da ga uporedimo sa nekim strogo pozitivnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Pošto mi ne znamo da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ili ne, a želimo da to utvrdimo, onda nema smisla za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ birati neki red za koji takođe ne znamo da li konvergira ili ne. Drugim riječima, za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ treba (ne samo u ovom primjeru), birati red za koji unaprijed znamo da li konvergira ili divergira.

Pitanje je: da li birati konvergentan ili divergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ?

Odgovor zavisi od našeg iskustva, od sposobnosti uočavanja, broja riješenih zadataka, susretanja sa sličnim zadacima, te u konačnici naše intuicije. Upravo smo istakli da je brojnik datog reda dominiran sa $2^n$, dok je nazivnik dominiran sa $3^n$. Na neki, posve određen način, mi dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-5}$ možemo smatrati sličnim sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{3^n}$. Drugim riječima, kao prirodan kandidat za odabir reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, nameće se red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Posmatrajmo onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Ovaj red je konvergentan geometrijski red kod kojeg je prvi član jednak $\frac{2}{3}$, te količnik isto tako jednak $\frac{2}{3}$ (vidjeti Teorem 1.10 u [DzG2, str. 17]). Sada je,

$$
\begin{aligned}
L = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^n+n-2}{3^n+4n-5}}{\left(\frac{2}{3}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{n}{2^n}-\frac{2}{2^n}}{1+\frac{4n}{3^n}-\frac{5}{3^n}} = 1.
\end{aligned}
$$

Pošto je $L = 1$ ($0 < L < +\infty$), to imamo posla sa prvim slučajem Teorema 2.1. Odavde, i iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, slijedi onda i konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. konvergencija datog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+n-2}{3^n+4n-5}$. ■

## 2.1 Riješeni zadaci

Prije izrade sljedećih zadataka, preporučuje se da čitalac bude upoznat sa sadržajem Napomene 4.13, te sadržajem Primjera 4.14 i 4.15.

$\diamondsuit$ **Zadatak 2.1.1** Upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, ispitati konvergenciju zadatih redova:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4n+1} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2 \qquad (f)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2} \qquad (h)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$$

**Rješenje:** $(a)$ Za $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \frac{1}{n} < \frac{\pi}{2}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $0 < \sin\frac{1}{n} < 1$, tj. dati red je pozitivan.

Poznato je da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 = L.$$

Pošto je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to po *1.* Teorema 2.1, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa iz njegove divergencije i kriterija upoređivanja limesom, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$.

$(b)$ Brojnik reda je stepena 1, nazivnik je stepena 2, pa je dati red stepena $1 - 2 = -1$.

Poredimo ga onda sa divergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{2n-1}{n^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n-1}{n}=2=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, i tvrdnje *1.* Teorema 2.1 (kriterija upoređivanja limesom), slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{n^2}$.

$(c)$ Brojnik reda je stepena 1, nazivnik je stepena 3, pa je dati red stepena $1-3=-2$.

Poredimo ga zbog toga sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140]. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{(n+1)^3}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{(n+1)^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^3}{n^3+3n^2+3n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}=1=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja limesom (tvrdnja *1.*), slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{(n+1)^3}$.

$(d)$ Posmatrajmo jednačinu $n^2-4n+1=0$. Imamo,

$$n_{1,2}=\frac{4\pm\sqrt{16-4}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{12}}{2}=\frac{4\pm2\sqrt{3}}{2}=2\pm\sqrt{3}.$$

Tako, $n^2-4n+1\geq 0$ za $n\in\big(-\infty,2-\sqrt{3}\big]\cup\big[2+\sqrt{3},+\infty\big)$.
Vrijedi, $2-\sqrt{3}<1$ jer je $1<\sqrt{3}$, te $2+\sqrt{3}>3$ jer je $\sqrt{3}>1$.
Ovo ustvari znači da su članovi datog reda negativni za $n\in\{1,2,3\}$.
Posmatrajmo onda pozitivan red $\sum\limits_{n=4}^{+\infty}\frac{1}{n^2-4n+1}$.
Brojnik reda je stepena 0, nazivnik je stepena 2, pa je dati red stepena $0-2=-2$.

Poredimo ga zbog toga sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Naime, po [DzG2, str. 140], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, pa po [DzG2, str. 8, Teo. 1.6], konvergira i red $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n^2-4n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2-4n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1 = L.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja limesom (tvrdnja *1.*), slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$.

Odavde, iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi konvergencija i reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2-4n+1}$.

$(e)$ Brojnik reda je stepena 4, nazivnik je stepena 6, pa je dati red stepena $4-6=-2$.

Poredimo ga onda sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+n^3}{1+n^3}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{1}{n^2}+1}{\frac{1}{n^3}+1}\right)^2 = \frac{1}{1} = 1 = L.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$.

$(f)$ Brojnik reda je stepena 1, nazivnik je stepena 2, pa je dati red stepena $1-2=-1$.

Poredimo ga zbog toga sa divergentnim redom $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Naime, po [DzG2, str. 5-6], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira, pa po [DzG2, str. 8, Teo. 1.6], divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{(n-1)^2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n-1)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2-2n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{1}=1=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{n}{(n-1)^2}$.

$(g)$ Brojnik reda je stepena $3$, nazivnik je stepena $4$, pa je dati red stepena $3-4=-1$.

Poredimo ga onda sa divergentnim harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6]. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\left(n^3-3n^2+3n-1\right)}{n^4+3n^2+2}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^4-3n^3+3n^2-n}{n^4+3n^2+2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{n^4}}=\frac{1}{1}=1=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)^3}{n^4+3n^2+2}$.

$(h)$ Za $n\in\mathbb{N}$ je $0<\frac{1}{n^2}<\frac{\pi}{2}$, pa je za $n\in\mathbb{N}$, $0<\sin\frac{1}{n^2}<1$, tj. dati red je pozitivan red.

Pošto je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, to vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=1=L.$$

Sada, iz $0 < L < +\infty$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], i kriterija upoređivanja limesom, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin \frac{1}{n^2}$. ■

◇ **Zadatak 2.1.2** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right)$, upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1.

**Rješenje:** Možemo pisati,

$$\begin{aligned} \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} &= \left( \sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \right) \cdot \frac{\sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+1}}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+1}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+1}} \cdot \left( n^2 + 1 - \sqrt[3]{(n^3+1)^2} \right). \end{aligned}$$

Za $a, b \in \mathbb{R}$ vrijedi $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.
Odavde, za $a = n^2 + 1$ i $b = \sqrt[3]{(n^3+1)^2}$, dobijamo da je

$$\begin{aligned} &\left(n^2+1\right)^3 - \left(n^3+1\right)^2 \\ = &\left( n^2 + 1 - \sqrt[3]{(n^3+1)^2} \right) \left( \left(n^2+1\right)^2 + \left(n^2+1\right) \sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4} \right). \end{aligned}$$

Pošto je,

$$\begin{aligned} \left(n^2+1\right)^3 - \left(n^3+1\right)^2 &= n^6 + 3n^4 + 3n^2 + 1 - n^6 - 2n^3 - 1 \\ &= 3n^4 - 2n^3 + 3n^2 = n^2 \left(3n^2 - 2n + 3\right), \end{aligned}$$

to je

$$\begin{aligned} &\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} \\ = &\frac{1}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt[3]{n^3+1}} \cdot \frac{n^2 \left(3n^2 - 2n + 3\right)}{(n^2+1)^2 + (n^2+1) \sqrt[3]{(n^3+1)^2} + \sqrt[3]{(n^3+1)^4}} \\ = &\frac{1}{P(n)} \cdot \frac{Q(n)}{R(n)}. \end{aligned}$$

Za diskriminantu $D$ kvadratne jednačine $3n^2 - 2n + 3 = 0$, vrijedi $D = 4 - 36 < 0$, pa je $3n^2 - 2n + 3 > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Ovo znači da je $\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. je dati red pozitivan red.

$Q(n)$ je stepena $4$, $P(n)$ je stepena $1$, $R(n)$ je stepena $4$.

Tako, brojnik reda je stepena $4$, nazivnik je stepena $1 + 4 = 5$, pa je dati red stepena $4 - 5 = -1$.

Poredimo ga onda sa divergentnim harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3+1}} \cdot \frac{3n^4-2n^3+3n^2}{(n^2+1)^2+(n^2+1)\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)^4}}}{\frac{1}{n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+\sqrt[3]{n^3+1}} \cdot \frac{3n^5-2n^4+3n^2}{(n^2+1)^2+(n^2+1)\sqrt[3]{(n^3+1)^2}+\sqrt[3]{(n^3+1)^4}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^3}}} \times$$

$$\times \frac{3-\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^2+\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \frac{1}{2} = L.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$. ■

♢ **Zadatak 2.1.3** Upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{a} - 1)$, $a > 1$.

**Rješenje:** Pošto je $1 < a$, to za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 = 1^{\frac{1}{n}} < a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, tj. $\sqrt[n]{a} - 1 > 0$.

Tako, dati red je pozitivan red.
Po Zadatku 6 u [DzG1, str. 113], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = \ln a$, tj. vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt[n]{a}-1}{\frac{1}{n}} = \ln a = L > 0.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6], i kriterija upoređivanja limesom, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{a}-1)$. ■

♢ **Zadatak 2.1.4** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$ upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1.

**Rješenje:** Pošto je $\sin x \leq x$ za sve $x \geq 0$, to je za $n \in \mathbb{N}$, $\sin\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$, tj. $n \sin\frac{1}{n} \leq 1$, odnosno $1 - n\sin\frac{1}{n} \geq 0$.
Tako, dati red je pozitivan red.
Uporedimo ovaj red sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140]. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1-n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n\left(\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n}-\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo[4] pravilo.

[4]**Guillaume François Antoine Marquis de l'Hôpital**, 1661-1704. god. n.e., francuski matematičar. Uglavnom se vezuje za pravilo koje po njemu nosi ime (l'Hopitalovo pravilo), a odnosi se na računanje limesa koji uključuju neodređene izraze oblika $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, i sl. Iako izgleda da samo pravilo ne potiče od l'Hopitala, ono se prvi put pojavljuje u printanoj formi 1696. godine u njegovom traktatu o infinitezimalnom računu, pod naslovom: "Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes" ("Infinitezimalni račun sa primjenama na krive"). Traktat je predstavljao prvo sistematsko izlaganje o diferencijalnom računu. Objavljen je u nekoliko izdanja i prevoda na druge jezike, te je postao urnek za kasnija analogna razmatranja. Pravilo se često pripisuje l'Hopitalu ali mu je rezultat izgleda prvi predstavio švicarski matematičar Johann Bernoulli 1694. godine (**Johann Bernoulli**, 1667-1748. god. n.e., švicarski matematičar. Bio je jedan od više istaknutih matematičara u porodici Bernoulli. Poznat je po svom doprinosu infinitezimalnom računu i obrazovanju Leonharda Ojlera u đačkoj mladosti). Naime, 1921. godine, Paul Schafheitlin je u biblioteci Univerziteta u Baselu otkrio rukopis Bernoulli-

Stavimo, $t = \frac{1}{n}$. Pošto $n \to +\infty$, to $t \to 0$. Možemo pisati,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n} - \sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^3}} = \lim_{t\to0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \frac{0}{0}.$$

Imamo,

$$\lim_{t\to0} \frac{(t - \sin t)'}{(t^3)'} = \lim_{t\to0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \frac{0}{0}.$$

Sada je,

$$\lim_{t\to0} \frac{(1 - \cos t)'}{(3t^2)'} = \lim_{t\to0} \frac{\sin t}{6t} = \frac{0}{0}.$$

Tako,

$$\lim_{t\to0} \frac{(\sin t)'}{(6t)'} = \lim_{t\to0} \frac{\cos t}{6} = \frac{1}{6}.$$

Zaključujemo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - n\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{6} = L.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$. ■

jevih predavanja o diferencijalnom računu iz perioda 1691-1692. Tekst je pokazao izuzetne sličnosti sa l'Hopitalovim pisanjem, potkrijepljujući Bernoullijeve tvrdnje o porijeklu knjige "Analyse". Kako god, l'Hopitalova pedagoška briljantnost u aranžiranju i prezentiranju materijala, ostala je univerzalno priznata. Jedna od varijanti l'Hopitalovog pravila tvrdi da iz $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ (ili $\pm\infty$), i $g'(x) \neq 0$ za $x \in I \setminus \{c\}$, postojanje limesa $\lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ povlači postojanje limesa $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$, i da je $\lim\limits_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, gdje su $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne funkcije na otvorenom intervalu $I$ sa eventualnim izuzetkom tačke $c$ sadržane u $I$.

♢ **Zadatak 2.1.5** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$ upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1.

**Rješenje:** Za $n\in\mathbb{N}$ je $0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}$, pa je za $n\in\mathbb{N}$, $1>\cos\frac{1}{n}>0$. Zbog toga je za $n\in\mathbb{N}$, $\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)<0$, tj. $-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)>0$.

Drugim riječima, dati red je pozitivan red.

Uporedimo ovaj red sa konvergentnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}.$$

Posmatrajmo prvo limes $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$.

Stavimo, $q_n=\frac{1}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}$, $n\in\mathbb{N}$.

Kad $n\to+\infty$, to $1-\cos\frac{1}{n}\to 0$, pa iz $1-\cos\frac{1}{n}>0$, $n\in\mathbb{N}$, slijedi da $q_n\to-\infty$ kad $n\to+\infty$.

Jasno, $-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{q_n}$, $n\in\mathbb{N}$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{q_n}\right)}{\frac{1}{q_n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}q_n\ln\left(1+\frac{1}{q_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}.$$

Pošto je $\{q_n\}$ niz brojeva koji teže ka $-\infty$ kad $n\to+\infty$, to iz Zadatka 4 u [DzG1, str. 107], imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e$. Tako,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}=\lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=\ln e=1.$$

S druge strane, znamo da za $x\in\mathbb{R}$ vrijedi $\sin\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$, tj. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}$.

Takođe, $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$. Dobijamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2n}}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sin\frac{1}{2n}}{\frac{1}{2n}}\right)^2=\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{1}{2}.$$

Sada, iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}=1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$, i tvrdnje $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\frac{-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\\&=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)\right)}{-\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1-\cos\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2}}\\&=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=L.\end{aligned}$$

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$. ■

♢ **Zadatak 2.1.6** Upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$, $a>0$, $b>0$.

**Rješenje:** Za $n\in\mathbb{N}$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}\,(n+b)^{n+a}}&=\frac{n^{2n}}{(n+a)^n\,(n+a)^b\,(n+b)^n\,(n+b)^a}\\=&\frac{1}{\left(1+\frac{a}{n}\right)^n(n+a)^b\left(1+\frac{b}{n}\right)^n(n+b)^a}\\=&\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}(n+a)^b\left(1+\frac{1}{\frac{n}{b}}\right)^{\frac{n}{b}\cdot b}(n+b)^a}.\end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}=e^a$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{b}}\right)^{\frac{n}{b}\cdot b}=e^b$ [DzG1, str. 107, Zad. 4], to ima smisla da dati red uporedimo sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}}{\frac{1}{n^{a+b}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}(n+a)^b\left(1+\frac{1}{\frac{n}{b}}\right)^{\frac{n}{b}\cdot b}(n+b)^a}}{\frac{1}{n^{a+b}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{\frac{n}{a}}\right)^{\frac{n}{a}\cdot a}\left(1+\frac{a}{n}\right)^b\left(1+\frac{1}{\frac{n}{b}}\right)^{\frac{n}{b}\cdot b}\left(1+\frac{b}{n}\right)^a}$$
$$=\frac{1}{e^a}\cdot\frac{1}{e^b}=\frac{1}{e^{a+b}}=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$ za sve $a>0$ i sve $b>0$, to iz kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju za sve $a>0$ i sve $b>0$.

Po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{a+b}}$ konvergira za $a+b>1$ i divergira za $0<a+b\leq 1$.

Otud, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}(n+b)^{n+a}}$ konvergira za $a+b>1$ i divergira za $0<a+b\leq 1$. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 2.1.7** Upotrebom kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$.

**Rješenje:** Stavimo, $a_n=\frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Prvo, možemo se pitati da li uopšte opšti član $a_n$ datog reda teži nuli kad $n\to+\infty$.

U Zadatku 5 u [DzG1, str. 74] smo dokazali da je niz $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n$, $n\in\mathbb{N}$, konvergentan, i da mu je granična vrijednost jednaka Ojlerovoj konstanti $C\approx 0.58$ (vidjeti strane 265-266 u [DzG1]).

Osim toga, u Zadatku 6 u [DzG1, str. 74] smo dokazali da za $n\in\mathbb{N}$, vrijedi $1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}=C+\ln n+\varepsilon_n$, gdje je $\{\varepsilon_n\}$ niz takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_n=0$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$a_n = \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{e^{C+\ln n+\varepsilon_n}} = \frac{1}{e^C \cdot e^{\ln n} \cdot e^{\varepsilon_n}} = \frac{1}{e^C} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon_n}} \cdot \frac{1}{n}.$$

Dobijamo, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{e^C} \cdot \frac{1}{1} \cdot 0 = 0.$

Kako znamo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], posljednji podatak nam ne govori bilo šta o konvergenciji datog reda.

Ipak, činjenica da je $a_n = \frac{1}{e^C} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon_n}} \cdot \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, nam daje do znanja da dati red treba da uporedimo sa divergentnim harmonijskim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 5-6]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{e^C} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon_n}} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{e^C} \cdot \frac{1}{e^{\varepsilon_n}} = \frac{1}{e^C} = L.$$

Pošto je $0 < L < +\infty$, to iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$. ■

◇ **Zadatak 2.1.8** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin a_n$ ? Koristiti kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1.

**Rješenje:** Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red, to po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], $a_n \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Odavde, i iz $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $0 < a_n < \frac{\pi}{2}$.

Tako, za $n \geq N$ je $0 < \sin a_n < 1$.

Drugim riječima, $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \sin a_n$ je pozitivan red.

Osim toga, iz $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin a_n}{a_n}=1=L.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$.

Odavde, iz $0<L<+\infty$, i kriterija upoređivanja limesom, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \sin a_n$.

Po pomenutom Teoremu 1.6, konvergentan je onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin a_n$.

Tako, pri datim uslovima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin a_n$ uvijek konvergira. ■

♢ **Zadatak 2.1.9** Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n^6+1)}$ ? Koristiti kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln n^6}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\ln n}$.

U $(g)$ Zadatka 1.1.1 smo dokazali da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n}$ divergira.

Odavde, i iz $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{\ln n}$ $=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n^6}$ (znamo da pozitivan red može divergirati samo ka $+\infty$ [DzG2, str. 157]). Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n^6+1)}}{\frac{1}{\ln n^6}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln n^6}{\ln(n^6+1)}=\frac{+\infty}{+\infty}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln n^6\right)'}{\left(\ln\left(n^6+1\right)\right)'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n^6}\cdot 6n^5}{\frac{1}{n^6+1}\cdot 6n^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^6+1}{n^6}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1+\frac{1}{n^6}}{1}=1.$$

Zaključujemo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln(n^6+1)}}{\frac{1}{\ln n^6}}=1=L.$$

Pošto je $0<L<+\infty$, i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln n^6}$ divergira, to iz kriterija upoređivanja limesom, slijedi da divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n^6+1)}$.

Odavde, i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\ln(n^6+1)}$. ■

## 2.2 Redovi razmatrani kriterijem uporeďivanja limesom

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + n - 2}{3^n + 4n - 5}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n-1}{n^2}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)^3}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 1}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+n^2}{1+n^3}\right)^2$

(7) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)^3}{n^4 + 3n^2 + 2}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\frac{1}{n^2}$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - \sqrt[3]{n^3+1}\right)$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{a} - 1\right)$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1 - n\sin\frac{1}{n}\right)$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{2n}}{(n+a)^{n+b}\,(n+b)^{n+a}}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sin a_n$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n^6+1)}$

## 3 Kriterij upoređivanja količnika

Napomenimo da kriterij koji slijedi nije snažniji od klasičnog kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1. Ipak, bit će ga mnogo udobnije koristiti u situacijama kada je količnik između uzastopnih članova datog reda jednostavniji od samih članova reda. Ovo posebno dolazi do izražaja onda kada su članovi datog reda definisani u obliku proizvoda odgovarajućih elemenata. Sam naziv "Kriterij upoređivanja količnika" treba da aludira na to da se i dalje radi o jednom od kriterija upoređivanja, te da ovaj kriterij ni u kom slučaju ne treba dovoditi u zabunu sa "Kriterijem količnika", sa kojim ćemo se upoznati nešto kasnije.

**Teorem 3.1 (Kriterij upoređivanja količnika)** *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *strogo pozitivni redovi. Pretpostavimo da postoji prirodan broj* $n_0$*, takav da je* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ *za sve* $k \geq n_0$*. Tada, iz konvergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *slijedi konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, a iz divergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *slijedi divergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$*.*

**Dokaz:** Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n > n_0$, proizvoljan broj.
Iz $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq \frac{b_{k+1}}{b_k}$ za $k \geq n_0$, slijedi da je

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}},\ \ \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}, ..., \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq \frac{b_n}{b_{n-1}}.$$

Svi navedeni količnici su pozitivni brojevi, pa množenjem dobijenih nejednakosti, imamo

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{a_{n_0}} &= \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \\ &\leq \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}} \cdot \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}} \cdot ... \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_n}{b_{n_0}}, \end{aligned}$$

tj. $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, $n > n_0$.

Odavde, i iz Teorema 1.1, imamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. ■

**Primjer 3.2** Analizirati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, čiji su članovi dati sa: $a_1 = 1$, te $a_n = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n+2}$ za $n > 1$.

**Rješenje:** Vidimo da su članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ dati u obliku proizvoda odgovarajućih elemenata. Kako smo već istakli u predgovoru, to nam daje povoda da konvergenciju datog reda ispitamo upotrebom kriterija upoređivanja količnika, tj. Teoremom 3.1.

Dati red ćemo uporediti sa nekim strogo pozitivnim redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, za kojeg unaprijed znamo da li konvergira ili ne.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)}$. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ smo u [DzG2, str. 22-23] ustanovili da je konvergentan (i da mu je suma jednaka 1).

Uporedimo sada redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ upotrebom Teorema 3.1. Za $n \geq 2$, imamo

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n+2} \cdot \frac{n}{n+3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{6} \cdot ... \cdot \frac{n-1}{n+2}} = \frac{n}{n+3}, \\ \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Jasno, nejednakost $\frac{n}{n+3} < \frac{n}{n+2}$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, pa specijalno i za $n \geq 2 = n_0$.

Postoji dakle, prirodan broj $n_0 = 2$, takav da za sve $k \geq n_0$, vrijedi $\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k}{k+3} < \frac{k}{k+2} = \frac{b_{k+1}}{b_k}$. Odavde, iz činjenice da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira, i Teorema 3.1, slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

## 3.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 3.1.1** Upotrebom kriterija upoređivanja količnika, tj. Teorema 3.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n \cdot n!}$.

**Rješenje:** Dati red je strogo pozitivan red. Označimo ga sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo količnik $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ za $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n-1}}{e^{n+1}\cdot(n+1)!}}{\frac{n^{n-2}}{e^n \cdot n!}} = \frac{(n+1)^{n-1} \cdot e^n \cdot n!}{e^{n+1}\,(n+1)! \cdot n^{n-2}} \\ &= \frac{(n+1)^{n-1} \cdot e^n \cdot n!}{e^{n+1}\,(n+1) \cdot n! \cdot n^{n-2}} = \frac{(n+1)^{n-2}}{e \cdot n^{n-2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n-2}}{e} \\ &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-2}}{e} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2}.\end{aligned}$$

Iz razmatranja provedenog u [DzG1, str. 61-62], znamo da za sve $n \in \mathbb{N}$, vrijedi nejednakost $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e$. Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}{e \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2} < \frac{e}{e \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^2} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\frac{(n+1)^2}{n^2}} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ je takođe strogo pozitivan red.

Osim toga, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentan red [DzG2, str. 140].

Odavde, iz $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja količnika, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^{n-2}}{e^n \cdot n!}$. ■

♢ **Zadatak 3.1.2** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$ upotrebom kriterija uporedivanja količnika, tj. Teorema 3.1.

**Rješenje:** Rezonujemo kao u prethodnom zadatku, tj. Zadatku 3.1.1.

Dati red je strogo pozitivan red. Označimo ga sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, posmatrajmo količnik $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Sada je,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}}{\frac{n^n}{e^n \cdot n!}} = \frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!}{e^{n+1}(n+1)! \cdot n^n} \\ &= \frac{(n+1)^{n+1} \cdot e^n \cdot n!}{e^{n+1}(n+1) \cdot n! \cdot n^n} = \frac{(n+1)^n}{e \cdot n^n} = \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e}.\end{aligned}$$

Iz razmatranja provedenog u [DzG1, str. 61-62], znamo da za sve $n \in \mathbb{N}$, vrijedi nejednakost $e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$. Sljedi,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{e} > \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je strogo pozitivan red.

Osim toga, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Odavde, iz nejednakosti $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija uporedivanja količnika, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, tj. divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{e^n \cdot n!}$. ■

♢ **Zadatak 3.1.3** Upotrebom kriterija uporedivanja količnika, tj. Teorema 3.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$, $\alpha > 1$.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ je strogo pozitivan red.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, posmatrajmo količnik $\frac{a_{n+1}}{a_n}$. Imamo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}} = \left(\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\right)^{\alpha}.$$

Ispitajmo za koje $n \in \mathbb{N}$ vrijedi nejednakost $n^2 - n - 1 \geq 0$.
Za rješenja jednačine $n^2 - n - 1 = 0$, vrijedi

$$n_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Tako, $n^2 - n - 1 \geq 0$ ako i samo ako $n \in \left(-\infty, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

Pošto je $2 > \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (jer je $3 > \sqrt{5}$), to za svako $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi $n \in \left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$.

Drugim riječima, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi $n^2 - n - 1 \geq 0$, tj. $n + 1 \leq n^2$.

Odavde, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dobijamo da je $\ln(n+1) \leq \ln n^2 = 2\ln n$, tj. $\frac{\ln(n+1)}{\ln n} \leq 2$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka je $n \geq 2$. Slijedi,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \left(\frac{n\ln(n+1)}{(n+1)\ln n}\right)^{\alpha} \leq \left(\frac{n}{n+1} \cdot 2\right)^{\alpha} \\ &= 2^{\alpha} \cdot \frac{\frac{1}{(n+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{n^{\alpha}}} = 2^{\alpha} \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ je strogo pozitivan red.

Po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira (jer je $\alpha > 1$).

Odavde, i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$.

Sada, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$, nejednakosti $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 2^\alpha \cdot \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja količnika[5], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Odavde, i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\ln n}{n}\right)^\alpha$. ■

♢ **Zadatak 3.1.4** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ red sa strogo pozitivnim članovima. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$. Dokazati upotrebom kriterija upoređivanja količnika, tj. Teorema 3.1, da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira za $g > 1$ i divergira za $g < 1$ (slučajevi $g = +\infty$ i $g = -\infty$ su takođe uključeni).

**Dokaz:** Pretpostavimo prvo da je $g > 1$ konačan broj.

Postoji onda dovoljno mali broj $\varepsilon > 0$, takav da je $g - \varepsilon > 1$.

Sada je $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ okolina granične vrijednosti $g = \lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka okolina granične vrijednosti niza sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

[5] Primijetimo da kriterij upoređivanja količnika vrijedi i u nešto generalnijem obliku (analogno kriteriju upoređivanja, tj. Teoremu 1.1): *Neka su* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *strogo pozitivni redovi. Pretpostavimo da postoji pozitivan broj* $n_0$*, i broj* $p > 0$*, takvi da je* $\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq p \cdot \frac{b_{k+1}}{b_k}$ *za sve* $k \geq n_0$*. Tada, iz konvergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *slijedi konvergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, a iz divergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *slijedi divergencija reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Naime, za proizvoljno $n > n_0$, vrijedi $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq p \cdot \frac{b_{n_0+1}}{b_{n_0}}$, $\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq p \cdot \frac{b_{n_0+2}}{b_{n_0+1}}$,..., $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq p \cdot \frac{b_n}{b_{n-1}}$, pa množenjem ovih nejednakosti dobijamo da je $\frac{a_n}{a_{n_0}} \leq p^{n-n_0} \cdot \frac{b_n}{b_{n_0}}$, tj. $a_n \leq p^{n-n_0} \frac{a_{n_0}}{b_{n_0}} b_n$, $n > n_0$. Odavde, i iz kriterija upoređivanja tj. Teorema 1.1, imamo da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Tako, u slučaju okoline $(g-\varepsilon, g+\varepsilon)$ tačke $g$, postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > g-\varepsilon$, tj. $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{g-\varepsilon}{n}$.

Odavde je za $n \geq n_0$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\frac{g-\varepsilon}{n}}$, tj. $\frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-\frac{g-\varepsilon}{n}}$.

Po razmatranju porvedenom u [DzG1, str. 61-62], znamo da za sve $n \in \mathbb{N}$, vrijede nejednakosti $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je onda $e^{-1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$, te

$$e^{-\frac{g-\varepsilon}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot\frac{g-\varepsilon}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-(g-\varepsilon)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{-(g-\varepsilon)}$$
$$= \left(\frac{n}{n+1}\right)^{g-\varepsilon} = \frac{\frac{1}{(n+1)^{g-\varepsilon}}}{\frac{1}{n^{g-\varepsilon}}}.$$

Specijalno, za $n \geq n_0$, imamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\frac{1}{(n+1)^{g-\varepsilon}}}{\frac{1}{n^{g-\varepsilon}}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{g-\varepsilon}}$ je takođe strogo pozitivan red.

Osim toga, zbog $g-\varepsilon > 1$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentan red [DzG2, str. 140].

Odavde, iz $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{b_{n+1}}{b_n}$, $n \geq n_0$, i kriterija upoređivanja količnika, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pretpostavimo sada da je $g = +\infty$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g = +\infty$, to iz Definicije 7.7 u [DzG1, str. 84], slijedi da za svaku konstantu $c$, pa specijalno i konstantu $c = 2$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > c = 2$.

Sada je za $n \geq N$, $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{2}{n}$, tj. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > e^{\frac{2}{n}}$, odnosno $\frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-\frac{2}{n}}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je onda

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < e^{-\frac{2}{n}} = e^{-1\cdot\frac{2}{n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n\cdot\frac{2}{n}} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2} =$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-2} = \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$, i kriterija upoređivanja količnika, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Neka je sada $g < 1$ konačan broj.

Sada je $(g-1, 1)$ okolina granične vrijednosti $g$, pa postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ (možemo smatrati da je $n_0 > 1$, jer ako to nije inicijalno slučaj, onda $n_0$ možemo povećati), takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, tj. $\ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < \frac{1}{n}$, odnosno $\frac{a_n}{a_{n+1}} < e^{\frac{1}{n}}$, ili $\frac{a_{n+1}}{a_n} > e^{-\frac{1}{n}}$.

Iz $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, imamo da je sigurno $e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ za $n \geq n_0$.

Tako, za $n \geq n_0$, vrijedi

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &> e^{-\frac{1}{n}} = e^{-1 \cdot \frac{1}{n}} > \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-n \cdot \frac{1}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{-1} \\ &= \left(\frac{n}{n-1}\right)^{-1} = \frac{n-1}{n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}.\end{aligned}$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Odavde, iz $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \geq n_0$, i kriterija upoređivanja količnika, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ i Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Konačno, neka je $g = -\infty$, tj. neka je $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = -\infty$.

Odavde, i iz pomenute Definicije 7.7 u [DzG1], slijedi da za konstantu $c = 1$, postoji $N \in \mathbb{N}$ (možemo smatrati da je $N > 1$), takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, tj. $\frac{a_{n+1}}{a_n} > e^{-\frac{1}{n}}$.

Kao i u prethodnom slučaju, sada je $e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ za $n \geq N$, pa je za $n \geq N$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > \frac{b_{n+1}}{b_n},$$

gdje je $b_n = \frac{1}{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Iz divergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, nejednakosti $\frac{b_{n+1}}{b_n} < \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja količnika, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$, a onda i divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokaz je završen. ■

## 3.2 Redovi razmatrani kriterijem upoređivanja količnika

(1) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{n-1}{n+2}\right)$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^{n-2}}{e^n\cdot n!}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{e^n\cdot n!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\alpha}$

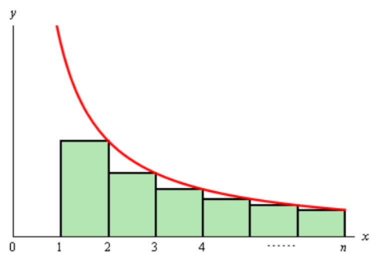
## 4 Integralni kriterij

**Teorem 4.1 (Integralni kriterij)** *Posmatrajmo red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, gdje je* $a_n = f(n)$ *za neku funkciju* $f(x)$ *definisanu na* $[1, +\infty)$*, koja je neprekidna, pozitivna i opadajuća. Tada, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$*. U slučaju konvergencije reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *(ili ekvivalentno integrala* $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$*), vrijede nejednakosti* $S - a_1 \leq I \leq S$*, gdje je* $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$*.*

**Dokaz:** Dokazat ćemo da iz konvergencije integrala $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Obrnutu implikaciju ćemo dokazati kontrapozicijom, tj. dokazat ćemo da iz divergencije integrala $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo Sliku 1.




Slika 1: pravougaonici "ispod" krive

Kriva određena funkcijom $f(x)$ je označena crvenom bojom.

Pošto je $a_n = f(n)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, uočimo na Slici 1 tačke $f(2) = a_2$, $f(3) = a_3$, ..., $f(n) = a_n$.

Uočimo pravougaonik čija je jedna stranica određena segmentom $[1, 2]$ na $x$ osi (stranica je onda duga $1 = 2 - 1$), a druga stranica jednaka $f(2) = a_2$.

Površina ovog pravougaonika iznosi $(2 - 1) \cdot f(2) = 1 \cdot a_2 = a_2$.

Uočimo sada i pravougaonike čije su stranice određene segmentima $[2, 3]$, $[3, 4]$, ..., $[n - 1, n]$, a čije su druge stranice jednake $f(3) = a_3$, $f(4) = a_4$, ..., $f(n) = a_n$, redom.

Površine ovih pravougaonika su: $(3 - 2) \cdot f(3)$, $(4 - 3) \cdot f(4)$, ..., $(n - (n - 1)) \cdot f(n)$, tj. $1 \cdot a_3 = a_3$, $1 \cdot a_4 = a_4$, ..., $1 \cdot a_n = a_n$.

Zbir površina $\underline{P}$ uočenih pravougaonika iznosi $\underline{P} = a_2 + a_3 + ... + a_n = \sum\limits_{k=2}^{n} a_k$.

S druge strane, znamo da je površina ravne figure ograničene dijelom $x$ ose (od tačke $1$ do tačke $n$), dijelovima pravih $x = 1$ i $x = n$, te grafikom krive $y = f(x)$, ustvari jednaka određenom integralu $\int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Jasno je da je površina navedene figure, tj. površina krivolinijskog trapeza $1nf(n)\,f(1)$ veća od površine $\underline{P}$. Naime, prethodno upotrijebljeni pravougaonici popunjavaju trapez $1nf(n)\,f(1)$ sa unutrašnje strane.

Zaključujemo, $\sum\limits_{k=2}^{n} a_k = \underline{P} < \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Pretpostavimo sada da nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira. To znači da postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$. Ovo znači da je niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ konvergentan.

Sada je,

$$\begin{aligned}\int_1^1 f(x)\,dx =& 0 < \int_1^2 f(x)\,dx < \int_1^2 f(x)\,dx + \int_2^3 f(x)\,dx \\ &= \int_1^3 f(x)\,dx < \ldots\,.\end{aligned}$$

Drugim riječima, niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ je rastući niz.

Ako bi ovaj niz bio neograničen odozgo, onda bi vrijedilo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_1^n f(x)\,dx$ $=+\infty$, što nije slučaj. Slijedi, niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ je ograničen odozgo.

Postoji tako konstanta $M>0$, takva da je $\int\limits_1^n f(x)\,dx < M$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Sada je $\sum\limits_{k=2}^n a_k < \int\limits_1^n f(x)\,dx < M$ za sve $n\in\mathbb{N}$, pa je

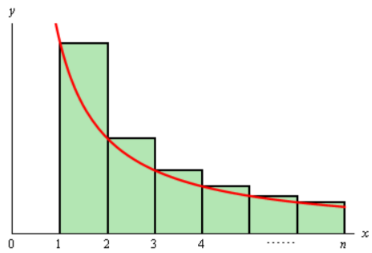
$$S_n=\sum_{k=1}^n a_k = a_1+\sum_{k=2}^n a_k < a_1+\int_1^n f(x)\,dx < a_1+M,$$

$n\in\mathbb{N}$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, to je niz $\{S_n\}$ rastući, pa iz njegove ograničenosti odozgo konstantom $a_1+M$, i Vajerštrasovog teorema [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], slijedi njegova konvergencija.

Dakle, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo sada Sliku 2.




Slika 2: pravougaonici "iznad" krive

Uočimo pravougaonike čije su stranice određene segmentima $[1,2]$, $[2,3]$, ..., $[n-1,n]$, a čije su druge stranice jednake $f(1)=a_1$, $f(2)=a_2$, ..., $f(n-1)=a_{n-1}$, redom.

Površine ovih pravougaonika su: $(2-1)\cdot f(1)$, $(3-2)\cdot f(2)$, ..., $(n-(n-1))\cdot f(n-1)$, tj. $1\cdot a_1 = a_1$, $1\cdot a_2 = a_2$, ..., $1\cdot a_{n-1} = a_{n-1}$, redom.

Zbir površina $\overline{P}$ ovih pravougaonika iznosi $\overline{P} = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k = S_{n-1}$.

Pošto površina $\overline{P}$ aproksimira površinu krivolinijskog trapeza $1nf(n)\,f(1)$ sa vanjske strane, to vrijedi $S_{n-1} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} a_k = \overline{P} > \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Imamo, $S_n > S_{n-1} > \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Pretpostavimo sada da nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira. To znači da je limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$ ili jednak $+\infty$, ili jednak $-\infty$, ili ne postoji.

Kako smo već vidjeli, niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ je rastući niz. Ako bi on bio ograničen odozgo, onda bi on po Vajerštrasovom teoremu konvergirao, tj. postojao bi konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx$, što nije slučaj. Dakle, niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ nije ograničen odozgo.

Ovo, s obzirom da je niz $\left\{\int\limits_1^n f(x)\,dx\right\}$ rastući, znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$. Odavde, i iz $S_n > \int\limits_1^n f(x)\,dx$, zaključujemo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Ostaje da dokažemo da u slučaju konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (ili ekvivalentno konvergencije integrala $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$), vrijede nejednakosti $S - a_1 \leq I \leq S$, gdje je $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $I = \int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$.

Neka konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ili integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Tada, po upravo dokazanom, konvergira i onaj drugi, tj. iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$, a iz konvergencije integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Kako god, imamo konvergenciju i reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ovo znači da postoje konačni limesi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx = I$.

Već smo izveli nejednakosti $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k < \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx$ i $\int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx < S_n$.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k = S_n - a_1$, to možemo pisati

$$S_n - a_1 < \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx < S_n.$$

Iz konvergencije niza $\{S_n\}$ i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi i konvergencija niza $\{S_n - a_1\}$, pri čemu je $\lim\limits_{n\to+\infty} (S_n - a_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n - a_1 = S - a_1$.

Sada, iz konvergencije nizova $\{S_n - a_1\}$, $\left\{\int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx\right\}$, $\{S_n\}$, i tvrdnje $(a)$ Posljedice 3.2 u [DzG1, str. 32], iz $S_n - a_1 < \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx < S_n$, dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} (S_n - a_1) \le \lim_{n\to+\infty} \int\limits_{1}^{n} f(x)\,dx \le \lim_{n\to+\infty} S_n,$$

tj. dobijamo da je $S - a_1 \le I \le S$.

Dokaz je završen. ■

**Napomena 4.2** Opis beskonačnog reda pomoću limesa niza njegovih parcijalnih suma može biti motivisan razmišljanjem tipa: "Znamo da ne možemo sabrati beskonačno mnogo elemenata, ali isto tako znamo da možemo sabrati konačno mnogo njih (a to konačno mnogo može biti jako puno), a onda se prirodno nameće ideja primjene limesa na takve konačne sume da se izvrši prijelaz, tj. generalizacija sa konačnog na beskonačni slučaj". Možemo ovo uporediti sa tranzicijom sa pravog određenog integrala na nepravi (nesvojstveni) integral: "Znamo da ne možemo vršiti integraciju duž beskonačnog intervala, ali znamo da možemo vršiti integraciju duž jako velikih intervala, te primijeniti limes da generalizujemo razmatranje na beskonačni slučaj". Ova analogija sugeriše da je moguće da postoji veza između dvije opisane notacije. Kako smo već vidjeli, upravo je integralni kriterij, tj. Teorem 4.1, taj koji uspostavlja jednu takvu vezu (poredi parcijalne sume datog reda interpretirane odgovarajućim površinama, sa površinama dobijenim pravim određenim integralima).

**Napomena 4.3** Primijetimo da smo uvođenjem integralnog kriterija Teoremom 4.1 stekli određenu prednost u odnosu na kriterije uvedene prethodnim sekcijama. Kriteriji uvedeni u prethodnim sekcijama, snažni onoliko koliko jesu, zahtjevaju od onoga ko ih koristi pristup vlastitoj bazi znanja, tj. posezanje za nekim drugim redovima koji treba da budu dovedeni u vezu sa datim redom. Dakle, takvi kriteriji dovode u vezu "stvari" eksterne prirode u odnosu na dati red. Nije preuveličano ako kažemo da je za uspostavljanje takvih veza nekada potrebno ne samo nadahnuće i intuicija, nego i proviđenje, pa i "magija", jer je željene konstrukcije u velikom broju slučajeva teško osmisliti. S druge strane, integralni kriterij je interni za dati red. Šaljivo bi bilo za reći da prilikom primjene integralnog kriterija moramo biti kreativni, te napraviti inspirativan odabir funkcije koju integrišemo. Naime, takva funkcija je jednoznačno određena samim redom.

**Napomena 4.4** Nejednakosti $S - a_1 \leq I \leq S$, koje smo izveli u dokazu Teorema 4.1 u slučaju konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (ili ekvivalentno konvergencije nesvojstvenog integrala $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$), gdje je tada $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $I = \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx$, nam ustvari govori da je $I \leq S \leq a_1 + I$, tj. da je

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \leq a_1 + \int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\,dx.$$

Posljednje nejednakosti znače da integralni kriterij, tj. Teorem 4.1, ne obezbjeđuje vrijednost sume reda u slučaju njegove konvergencije, nego samo daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne. Ipak, pri datim pretpostavkama, tj. u slučaju konvergencije reda (ekvivalentno integrala), navedene nejednakosti nam daju gornju i donju granicu sume posmatranog reda.

Jasno je da se umjesto intervala $[1, +\infty)$, posmatranog u Teoremu 4.1, može posmatrati opštiji interval $[N, +\infty)$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki broj. Prolazeći u potpunosti istim koracima kao u dokazu Teorema 4.1, dobijamo opštiji oblik integralnog kriterija, tj. dobijamo sljedeći teorem (vidjeti i Napomenu 4.4).

**Teorem 4.5 (Integralni kriterij)** *Posmatrajmo red* $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$, *gdje je* $a_n = f(n)$ *za neku funkciju* $f(x)$ *definisanu na* $[N, +\infty)$, *koja je neprekidna, pozitivna i opadajuća, a* $N \in \mathbb{N}$ *neki broj. Tada, red* $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral* $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\, dx$. *U slučaju konvergencije reda* $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ *(ili ekvivalentno integrala* $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\, dx$*), vrijede nejednakosti*

$$\int\limits_N^{+\infty} f(x)\, dx \le \sum_{n=N}^{+\infty} a_n \le a_N + \int\limits_N^{+\infty} f(x)\, dx.$$

**Napomena 4.6** Primijetimo da u integralnom kriteriju (Teorem 4.1 ili Teorem 4.5, ili bilo kojoj drugoj adaptiranoj varijanti kriterija), donja granica nesvojstvenog integrala mora biti ista kao vrijednost indeksa prvog člana datog reda.

Drugo, mi u Teoremima 4.1 i 4.5 zahtjevamo da posmatrana funkcija bude pozitivna i opadajuća svuda na $[1, +\infty)$ i $[N, +\infty)$, redom.

Kako smo već vidjeli, ovakvi zahtjevi su neophodni za izvođenje dokaza Teorema 4.1 i 4.5, redom.

Ipak, prilikom primjene integralnog kriterija, posmatrana funkcija ne mora biti pozitivna i opadajuća svuda na $[1, +\infty)$ ili $[N, +\infty)$.

Držimo se npr. Teorema 4.5. Dati red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ može biti takav da prvih konačno mnogo njegovih članova nisu pozitivni i opadajući. To mogu biti npr. članovi $a_k$, $N \le k \le N_1$, gdje je $N_1 > N$ neki prirodan broj.

U ovakvoj situaciji dovoljno je da se "odmaknemo" od navedenih članova, tj. da posmatramo red $\sum\limits_{n=N_2}^{+\infty} a_n$, gdje je $N_2 > N_1$ prirodan broj, takav da je odgovarajuća funkcija $f(x)$ pozitivna i opadajuća na $[N_2, +\infty)$.

Sada, ako je nesvojstveni integral $\int\limits_{N_2}^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergentan (divergentan), onda je po Teoremu 4.5, konvergentan (divergentan) i red $\sum\limits_{n=N_2}^{+\infty} a_n$. Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi i konvergencija (divergencija) reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$.

Isto tako, ako je red $\sum\limits_{n=N_2}^{+\infty} a_n$ konvergentan (divergentan), onda je po Teoremu 4.5, konvergentan (divergentan) i nesvojstveni integral $\int\limits_{N_2}^{+\infty} f(x)\,dx$. Odavde je onda konvergentan (divergentan) i nesvojstveni integral $\int\limits_{N}^{+\infty} f(x)\,dx$[6].

Dakle, za izvođenje zaključka o konvergenciji (divergenciji) reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ ili nesvojstvenog integrala $\int\limits_{N}^{+\infty} f(x)\,dx$ upotrebom Teorema 4.5, nije nužno da posmatrana funkcija bude pozitivna i opadajuća na $[N, +\infty)$. Dovoljno je da ta funkcija u konačnici bude pozitivna i opadajuća (vidjeti Napomenu 1.2).

**Napomena 4.7** Znamo da je neprekidna funkcija na segmentu $[a, b]$ i integrabilna (Riemann integrabilna) na $[a, b]$.

Pretpostavka o neprekidnosti funkcije $f(x)$ na $[1, +\infty)$ u Teoremu 4.1 nam je povlačila njenu neprekidnost, a onda i integrabilnost na $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$ (analogna je situacija u slučaju Teorema 4.5).

Ipak, dok je neprekidnost funkcije $f(x)$ bila dovoljan uslov za njenu integrabilnost, taj uslov nije bio potreban. Naime, funkcija $f(x)$ je po pretpostavci opadajuća na $[1, +\infty)$, pa je onda opadajuća i na $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$. Dakle, ona je monotona na $[1, n]$,

[6]Koristimo poznati teorem o osobinama nesvojstvenog integrala: Neka je $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ nesvojstveni integral sa singularitetom u tački $b$, i $a < c < b$. Tada, nesvojstveni integral $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_c^b f(x)\,dx$. U slučaju konvergencije bilo kojeg od nesvojstvenih integrala $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, $\int\limits_c^b f(x)\,dx$, vrijedi jednakost $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ (vidjeti npr. [Ded, str. 434-438]). Primjetimo da je u našem slučaju $a = N$, $c = N_2$, $b = +\infty$.

$n \in \mathbb{N}$. Poznato je da je svaka monotona funkcija na $[a,b]$, Riemann integrabilna na $[a,b]$. Dakle, iz monotonosti funkcije $f(x)$ na $[1,+\infty)$ (Teorem 4.1), slijedi njena integrabilnost na $[1,n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Možemo rezonovati i nešto dubioznije.

Znamo da je monotnona funkcija neprekidna gotovo svuda, tj. da je neprekidna u svim tačkama skupa na kome se posmatra, osim u tačkama podskupa tog skupa čija je mjera (Lebegova[7]) jednaka nula. Ovo je, kao što je poznato, dovoljno za Riemann integrabilnost posmatrane funkcije. Tako, ponovo, opadajuća funkcija $f(x)$ na $[1,+\infty)$ (data Teoremom 4.1), je integrabilna na $[1,n]$, $n \in \mathbb{N}$.

Provedeno razmatranje nam ustvari govori da je pretpostavka o neprekidnosti funkcije $f(x)$ na $[1,+\infty)$ i $[N,+\infty)$ u Teoremu 4.1 i 4.5, redom, suvišna, tj. da se u radu može izostaviti. Drugim riječima, u Teoremima 4.1 i 4.5, za funkciju $f(x)$ je dovoljno pretpostaviti da je pozitivna i opadajuća na $[1,+\infty)$ i $[N,+\infty)$, redom.

U skladu sa Napomenom 4.7, integralni kriterij, tj. Teorem 4.1, susrećemo i u sljedećem obliku.

**Teorem 4.8 (Integralni kriterij)** *Posmatrajmo red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$*, gdje je* $a_n = f(n)$ *za neku funkciju* $f(x)$ *definisanu na* $[1,+\infty)$*, koja je pozitivna i opadajuća. Tada, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako je niz* $\{I_n\}$*,* $I_n = \int\limits_1^n f(x)\,dx$*, ograničen.*

**Dokaz:** Kao i u dokazu Teorema 4.1, dolazimo do nejednakosti

[7] Lebegova (**Henri Léon Lebesque**, 1875-1941. god. n.e., francuski matematičar. Poznat po svojoj teoriji integracije, tj. generalizaciji koncepta integracije 17. vijeka. Teorija je objavljena 1902. godine u njegovoj disertaciji: "Integral, dužina, površina".) mjera otvorenog intervala $(a,b)$, u oznaci $m(a,b)$, iznosi $b-a$. Mjera neograničenog intervala je beskonačna. Pišemo $m(I)$ ako je riječ o intervalu $I$. Pri tome, za skup, $E \subset \mathbb{R}$ kažemo da je mjere nula (ili da ima mjeru nula), ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji prebrojiva familija otvorenih intervala $\{I_k : k \in \mathbb{N}\}$, takva da je $E \subset \bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} I_k$, i $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} m(I_k) < \varepsilon$. Važno je napomenuti da je podskup skupa mjere nula takođe mjere nula, te da je unija prebrojivo mnogo skupova mjere nula takođe skup mjere nula. Pored toga, svaki prebrojiv skup je skup mjere nula. Ova činjenica na prvi pogled dovodi u vezu kardinalnost skupa sa mjerom. Ipak, to nije slučaj. Naime, postoje neprebrojivi skupovi mjere nula. Jedan takav skup je Kantorov ternarni skup (**Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor**, 1845-1918. god. n.e., njemački matematičar. Tvorac je teorije skupova, beskonačnih, te dobro uređenih skupova. Dokazao je da je kardinalnost skupa $\mathbb{R}$ veća od kardinalnosti skupa $\mathbb{N}$, implicirajući postojanje beskonačno mnogo beskonačnosti. Uveo je kardinalne i ordinalne brojeve, te njihovu aritmetiku. Njegov rad je od velikog filozofskog značaja, čega je i sam bio svjestan.)

$\sum\limits_{k=2}^{n} a_k < \int\limits_1^n f(x)\,dx$, a onda i nejednakosti $S_n < a_1 + \int\limits_1^n f(x)\,dx$, gdje je $S_n$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Neka je niz $\{I_n\}$ ograničen.

Tada je on ograničen odozgo, pa postoji konstanta $M > 0$, takva da je $S_n < a_1 + \int\limits_1^n f(x)\,dx < a_1 + M$, $n \in \mathbb{N}$.

Odavde, iz činjenice da je niz $\{S_n\}$ rastući, i Vajerštrasovog teorema, slijedi da je niz $\{S_n\}$ konvergentan. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan.

Dokažimo sada obrnuto, da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, slijedi ograničenost niza $\{I_n\}$.

Po zakonu kontrapozicije, dovoljno je da dokažemo da iz pretpostavke da niz $\{I_n\}$ nije ograničen, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pretpostavimo da niz $\{I_n\}$ nije ograničen.

Pošto je niz $\{I_n\}$ ograničen odozdo sa $I_1 = 0$, to onda niz $\{I_n\}$ ne može biti ograničen odozgo (inače bi bio ograničen). Ovo znači da za svaku konstantu $C > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da je $C < \int\limits_1^N f(x)\,dx$. Odavde je,

$$C < \int\limits_1^N f(x)\,dx < \int\limits_1^{N+1} f(x)\,dx < \dots .$$

Drugim riječima, za svaku konstantu $C > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $C < \int\limits_1^n f(x)\,dx$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$ (vidjeti Definiciju 7.7 u [DzG1, str. 84]).

Iz dokaza Teorema 4.1 znamo da je i $S_n > \int\limits_1^n f(x)\,dx$, pa iz $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$, slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$. Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

Na potpuno isti način bi izveli i odgovarajuću varijantu Teorema 4.5, tj. sljedeći teorem.

**Teorem 4.9 (Integralni kriterij)** *Posmatrajmo red* $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$*, gdje je* $a_n = f(n)$ *za neku funkciju* $f(x)$ *definisanu na* $[N, +\infty)$*, koja je pozitivna i opadajuća, a* $N \in \mathbb{N}$ *neki broj. Tada, red* $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$ *konvergira ako i samo ako je niz* $\{I_n\}$*,*
$I_n = \int\limits_{N}^{N+n-1} f(x)\, dx$*, ograničen.*

**Napomena 4.10** Integralni kriterij su dokazali Colin Maclaurin i Augustin-Louis Cauchy (vidjeti note 27 i 28 na strani 145 u [DzG2]), pa ga često zovemo i Maclaurin-Cauchyjev kriterij, ili integralni Cauchyjev kriterij.

Dokaz Teorema 4.1, a onda i Teorema 4.5, 4.8, 4.9, je prilično elementaran u smislu jednostavnosti komponenti upotrijebljenih za njegovo izvođenje. Manje-više, koristimo aparat teorije nizova, i poredimo parcijalne sume datog reda interpretirane odgovarajućim površinama, sa površinama dobijenim pravim određenim integralima.

Navedene teoreme je moguće izvesti i više ciljanim i više namjenskim aparatom integralnog računa (vidjeti npr. [Ded, str. 441, Teo. 25]). Takav aparat uveliko odudara od kursa i koncepta ovog udžbenika, pa dokaze zasnovane na njemu izostavljamo.

Konačno, vezano za nesvojstvene (neprave) integrale, za naše potrebe će biti dovoljno da znamo da je $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int\limits_a^b f(x)\, dx$, onda kada integrali pod znakom limesa postoje za sve dovoljno velike vrijednosti $b$, te limes na desnoj strani jednakosti postoji (konačan ili beskonačan).

**Primjer 4.11** Analizirati ponašanje reda $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Rješenje 3:** U Primjeru 1.6 smo ponudili dva rješenja ovog zadatka.

Primijenit ćemo sada integralni kriterij, tj. Teorem 4.1.

Iz oblika reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, vidimo da treba da posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ na intervalu $[1, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna, definisana je na $[1,+\infty)$, pa je kao takva neprekidna na $[1,+\infty)$. Osim toga, $f(x)$ je pozitivna, i jasno, opadajuća na $[1,+\infty)$.

Posmatrajmo $\int\limits_1^n f(x)\,dx$. Imamo,

$$\begin{aligned}\int\limits_1^n f(x)\,dx = \int\limits_1^n \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \int\limits_1^n x^{-\frac{1}{2}}dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right|_1^n \\ =\left.2x^{\frac{1}{2}}\right|_1^n = 2n^{\frac{1}{2}} - 2 = 2\sqrt{n} - 2.\end{aligned}$$

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_1^n f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}(2\sqrt{n}-2) = +\infty$, pa nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira (ka $+\infty$, tj. $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty}\int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$).

Odavde i iz integralnog kriterija, tj. Teorema 4.1, imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ $= \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira. ■

**Teorem 4.12 (p-redovi)** *Posmatrajmo red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$*, zvani* $p$*-red, gdje je* $p$ *realna konstanta*[8]*. Ako je* $p>1$*, dati red konvergira. S druge strane, ako je* $p\leq 1$*, dati red divergira.*

**Dokaz 1:** U Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], smo dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergira za $p>1$, i divergira za $0<p<1$.

Osim toga, u Zadatku 126 u [DzG2, str. 226], smo dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ divergira za $p=0$, ali i za $p<0$.

Dokaz je završen. ■

**Dokaz 2:** Ako je $p\leq 0$, onda postupamo identično kao u Dokazu 1, tj. identično kao u Zadatku 126 u [DzG2, str. 226].

[8]Napomena da je $p$ realna konstanta je suvišna. Ipak, želimo da istaknemo da se navedeni rezultat ne može produžiti na slučaj $p=p_n$, tj. na slučaj koji zavisi od $n$, čak ni onda kada je $p_n>1$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $p > 0$.

Primijenit ćemo integralni kriterij, tj. Teorem 4.1.

Iz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, vidimo da treba da posmatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x^p}$ na intervalu $[1, +\infty)$.

Pošto je $p > 0$, to je funkcija $f(x)$ opadajuća na $[1, +\infty)$.

Osim toga, $f(x)$ je pozitivna na $[1, +\infty)$, a kao elementarna funkcija, neprekidna je na $[1, +\infty)$.

Dakle, možemo primijeniti integralni kriterij, tj. Teorem 4.1.

Primijetimo da zbog $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$, moramo voditi računa o tome da li je $p = 1$ ili ne.

Neka je prvo $p > 1$. Sada je,

$$\begin{aligned}\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n x^{-p} dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^n &= \left.\frac{1}{1-p} x^{1-p}\right|_1^n \\ &= \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right).\end{aligned}$$

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right) = \frac{1}{p-1}$, što je konačan broj (zbog $p > 1$). Dakle, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \frac{1}{p-1}$, tj. nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira. Ovo po integralnom kriteriju (Teorem 4.1) znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira.

Neka je sada $p = 1$. Imamo,

$$\int_1^n f(x)\,dx = \int_1^n \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_1^n = \ln n - \ln 1 = \ln n.$$

Odavde je $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln n = +\infty$, pa je $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$, što znači da nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira (ka

$+\infty$). Odavde i iz integralnog kriterija (Teorem 4.1), slijedi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

Konačno, neka je $p < 1$. Sada je,

$$\int\limits_1^n f(x)\,dx = \int\limits_1^n x^{-p}dx = \left.\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right|_1^n = \left.\frac{1}{1-p}x^{1-p}\right|_1^n$$
$$= \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right).$$

Pošto je $1 - p > 0$, to odavde slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx =$ $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{1-p}\left(n^{1-p} - 1\right) = +\infty$. Dakle, $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_1^n f(x)\,dx = +\infty$, pa nesvojstveni integral $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira (ka $+\infty$). Odavde, i iz integralnog kriterija slijedi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ divergira.

Dokaz je završen. ■

**Napomena 4.13** Teorem 4.12 predstavlja sam po sebi snažan alat, pogotovo kada se koristi u kombinaciji sa kriterijem upoređivanja limesom (Teorem 2.1 ili 2.3). Naime, za svaki $p$-red znamo da li konvergira ili ne. Tako, u stanju smo da analiziramo ponašanje bilo kojeg pozitivnog reda čiji su članovi dati nekom algebarskom funkcijom.

Procedura se sastoji u tome da odredimo "sveukupni stepen" opšteg člana datog reda, odaberemo $p$-red sa istim sveukupnim stepenom, i onda ih uporedimo. Pri tome, pojam stepena, tj. sveukupnog stepena, interpretiramo prilično liberalno. Tako, nije neuobičajeno reći da je $\sqrt{n}$ stepena $\frac{1}{2}$. Ipak, bit ćemo i kreativniji, pa reći da je $\sqrt{n^3+1}$ stepena $\frac{3}{2}$, $\frac{\sqrt{n^3+1}}{n}$ stepena $\frac{3}{2}$ $-1 = \frac{1}{2}$, i sl. Na ovaj način, pridružujemo pojam stepena, tj. sveukupnog stepena proizvoljnom algebarskom izrazu. Može se dokazati da je stepen izraza uveden na ovaj način, dobro definisan pojam. Ilustrujmo upravo rečeno na sljedećim primjerima.

**Primjer 4.14** Analizirajmo ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{23n^5-n^4+3n^3-9n^2+6n-11}$.

**Rješenje:** Za $n \in \mathbb{N}$, i brojnik i nazivnik opšteg člana datog reda su pozitivni. Dakle, dati red je pozitivan red.

U skladu sa Napomenom 4.13, brojnik je stepena $2$, nazivnik je stepena $5$, pa je opšti član datog reda, ili, slobodnije govoreći, dati red stepena $2-5=-3$.

Poredimo ga sa $p$-redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$.

Koristimo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1. Imamo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n^2+n-1}{23n^5-n^4+3n^3-9n^2+6n-11}}{\frac{1}{n^3}}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^5+n^4-n^3}{23n^5-n^4+3n^3-9n^2+6n-11}\\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{23-\frac{1}{n}+\frac{3}{n^2}-\frac{9}{n^3}+\frac{6}{n^4}-\frac{11}{n^5}} = \frac{1}{23} = L.
\end{aligned}$$

Pošto je $L=\frac{1}{23}$, tj. $0<L<+\infty$, to po 1. Teorema 2.1, dati redovi istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3}$ je $p$-red kod kojeg je $p>1$, pa je on po Teoremu 4.12, konvergentan.

Ovo znači da je i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{23n^5-n^4+3n^3-9n^2+6n-11}$ konvergentan. ■

**Primjer 4.15** Analizirati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}$.

**Rješenje:** U skladu sa Napomenom 4.13, rezonujemo kao u Primjeru 4.14.

Brojnik je stepena $\frac{2}{2}=1$, nazivnik je stepena $\frac{1}{3}\cdot 5=\frac{5}{3}$, pa je dati red stepena $1-\frac{5}{3}=-\frac{2}{3}$.

Poredimo ga onda sa divergentnim $p$-redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}}{\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}}\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{n^{-\frac{2}{3}}\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-\frac{3}{3}}\sqrt{n^2+4}}{n^{-\frac{5}{3}}\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^{-1}\sqrt{n^2+4}}{n^{-\frac{5}{3}}\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(n^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{-\frac{1}{3}}\right)^5\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{4}{n^2}}}{\left(1+\frac{19}{\sqrt[3]{n}}\right)^5}=1=L.$$

Pošto je $L=1$, tj. $0<L<+\infty$, to iz 1. Teorema 2.1, i divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}$, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}$. ■

**Primjer 4.16** Analizirati ponašanje reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}$.

**Rješenje:** Koristit ćemo integralni kriterij, tj. Teorem 4.5.

Iz oblika reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n\ln n}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$, vidimo da treba da posmatramo funkciju $f(x)$ $=\frac{1}{x\ln x}$ na intervalu $[2,+\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna, definisana je na $[2,+\infty)$, pa je kao takva neprekidna na $[2,+\infty)$. Osim toga, $f(x)$ je pozitivna ($\ln 2>0$), i jasno, opadajuća na $[2,+\infty)$.

Posmatrajmo integral $\int\limits_2^n f(x)\,dx$. Imamo,

$$\int\limits_2^n f(x)\,dx=\int\limits_2^n\frac{dx}{x\ln x}=\int\limits_2^n\frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$=\ln(\ln x)\Big|_2^n=\ln(\ln n)-\ln(\ln 2).$$

Jasno,

$$\lim_{n\to+\infty}\int\limits_2^n f(x)\,dx=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln(\ln n)-\ln(\ln 2)\right)=+\infty,$$

pa nesvojstveni integral $\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira (ka $+\infty$, tj. $\int\limits_{2}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} \int\limits_{2}^{n} f(x)\,dx = +\infty$).

Odavde i iz integralnog kriterija, tj. Teorema 4.5, imamo da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} f(n)$ $= \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ divergira. ■

## 4.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 4.1.1** Upotrebom integralnog kriterija, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

**Rješenje:** U Zadatku 1.1.2 smo dokazali da dati red konvergira (kriterij upoređivanja).

Osim toga, u Zadatku 1.1.20 smo dokazali da za svako $a > 0$ i $b > 1$, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ (kriterij upoređivanja). Specijalno, onda, za $a = 1$, $b = 2$, konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$.

Pored pomenutih rješenja, nudimo sada rješenje upotrebom integralnog kriterija, tj. Teorema 4.5.

Iz oblika reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$, vidimo da treba da posmatramo funkciju $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$ na intervalu $I = [2, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna, definisana na $[2, +\infty)$, pa je kao takva neprekidna na $[2, +\infty)$.

Osim toga, $f(x)$ je pozitivna na $[2, +\infty)$ ($\ln 2 > 0$). Imamo,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{(\ln x)' \cdot x^2 - \ln x \cdot \left(x^2\right)'}{x^4} \\
&= \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \cdot \ln x}{x^4} = \frac{x - 2x\ln x}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.
\end{aligned}
$$

Za $x \in I$ je $x \geq 2$, tj. $x \geq 2 > \sqrt{e}$ (jer je $4 > e$), pa je $\ln x > \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}$, odnosno $1 - 2\ln x < 0$.

Tako, funkcija $f(x)$ ima izvod $f'(x) = \frac{1-2\ln x}{x^3}$ na $I$ (bar unutar $I$), i za $x \in I$ vrijedi $f'(x) < 0$ (ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$ na kojem je $f'(x) \equiv 0$). Ovo znači da je $f(x)$ opadajuća funkcija na $I = [2, +\infty)$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Imamo, funkcija $f(x)$ je definisana na $[2, +\infty)$, gdje je neprekidna, pozitivna i opadajuća, pa po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ispitajmo konvergenciju posljednjeg integrala, tj. integrala $\int\limits_2^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x^2}$.

Posmatrajmo integral $\int\limits_2^{n} f(x)\,dx = \int\limits_2^{n} \frac{\ln x dx}{x^2}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}
\int\limits_2^{n} \frac{\ln x dx}{x^2} &= \int\limits_2^{n} \frac{(\ln x - 1) + 1}{x^2} dx = \int\limits_2^{n} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx + \int\limits_2^{n} \frac{dx}{x^2} \\
&= \int\limits_2^{n} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx + \int\limits_2^{n} x^{-2} dx = \int\limits_2^{n} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx + \left. \frac{x^{-1}}{-1} \right|_2^n \\
&= \int\limits_2^{n} \frac{\ln x - 1}{x^2} dx - \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\ln x}{x} \right)' &= \frac{(\ln x)' \cdot x - \ln x \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} \\
&= \frac{1 - \ln x}{x^2} = -\frac{\ln x - 1}{x^2},
\end{aligned}$$

pa je $d\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' dx = -\frac{\ln x - 1}{x^2} dx$. Tako,

$$\begin{aligned}\int_2^n \frac{\ln x dx}{x^2} &= \int_2^n \frac{\ln x - 1}{x^2} dx - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\\ &= \int_2^n -d\left(\frac{\ln x}{x}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = -\frac{\ln x}{x}\Big|_2^n - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)\\ &= -\left(\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{2}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n}.\end{aligned}$$

Jasno,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_2^n f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{n} - \frac{\ln n}{n}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2},$$

što je konačan broj. Tako, $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{n\to+\infty} \int_2^n f(x)\, dx = \frac{1}{2} + \frac{\ln 2}{2}$, tj. nesvojstveni integral $\int_2^{+\infty} f(x)\, dx$ konvergira.

Ovo po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, znači da red $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 4.1.2** Primjenom integralnog kriterija, ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$.

**Rješenje:** U Zadatku 1.1.9 smo već ponudili jedno rješenje ovog problema (kriterij upoređivanja).

Označimo dati red sa $\sum_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \ln \frac{x+1}{x-1}$ na intervalu $I = [2, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna, defininisana na $I$, pa je kao takva neprekidna na $I$.

Za $x \in I$ je $x > 1$, pa je $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$ ako i samo ako je $\frac{x+1}{x-1} > e^0 = 1$ ako i samo ako je $x + 1 > x - 1$ ako i samo ako je $1 > -1$.

Pošto je $1 > -1$ uvijek zadovoljeno, to je $\ln \frac{x+1}{x-1} > 0$ za sve $x \in I$.

Drugim riječima, funkcija $f\left(x\right)$ je pozitivna na $I$.

Za $x \in I$, imamo

$$
\begin{aligned}
f^{'}\left(x\right) &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{'} \cdot \ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{'} \\
&= \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{'} \cdot \ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{'} \\
&= -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}} \cdot \ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{x+1} \times \\
&\times \frac{\left(x+1\right)^{'} \cdot \left(x-1\right) - \left(x+1\right) \cdot \left(x-1\right)^{'}}{\left(x-1\right)^{2}} \\
&= -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \cdot \ln\frac{x+1}{x-1} + \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{x-1-\left(x+1\right)}{\left(x-1\right)^{2}} \\
&= -\frac{1}{2x\sqrt{x}} \ln\frac{x+1}{x-1} - \frac{2}{\sqrt{x}\left(x^{2}-1\right)} < 0.
\end{aligned}
$$

Ovo znači da je funkcija $f\left(x\right)$ opadajuća na $I$ (vidjeti notu 10 na stranici 85 u [DzG2]).

Kako je $f\left(x\right)$ definisana na $I = \left[2, +\infty\right)$, gdje je neprekidna, pozitivna i opadajuća, to po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_{2}^{+\infty} f\left(x\right)dx$.

Ispitajmo konvergenciju integrala $\int\limits_{2}^{+\infty} f\left(x\right)dx = \int\limits_{2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{x+1}{x-1}dx$.

Posmatrajmmo integral $\int\limits_{2}^{n} f\left(x\right)dx = \int\limits_{2}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{x+1}{x-1}dx$.

Primijenit ćemo parcijalnu integraciju sa $u = \ln\frac{x+1}{x-1}$ i $dv = \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Odavde je $v = \int x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{x}$, te $du = \left(\ln\frac{x+1}{x-1}\right)^{'}dx = -\frac{2dx}{x^{2}-1}$ (vidjeti račun za $f^{'}\left(x\right)$ iznad). Slijedi,

$$
\int\limits_{2}^{n} \frac{1}{\sqrt{x}} \ln\frac{x+1}{x-1}dx = u \cdot v\Big|_{2}^{n} - \int\limits_{2}^{n} vdu =
$$

$$\begin{aligned}
&2\sqrt{x}\ln\frac{x+1}{x-1}\bigg|_2^n-\int\limits_2^n 2\sqrt{x}\cdot\frac{-2dx}{x^2-1}\\
=&2\sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1}-2\sqrt{2}\ln 3+\int\limits_2^n\frac{4\sqrt{x}dx}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo integral $\int\limits_2^n \frac{4\sqrt{x}dx}{x^2-1}$.

Stavimo $\sqrt{x}=t$. Sada $t\uparrow_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}}$ jer $x\uparrow_2^n$. Osim toga, $x=t^2$, pa je $dx=2tdt$. Dobijamo da je

$$\int\limits_2^n\frac{4\sqrt{x}dx}{x^2-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}}\frac{4t\cdot 2tdt}{t^4-1}=\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}}\frac{8t^2}{t^4-1}dt.$$

Pošto je

$$\frac{1}{t^4-1}=\frac{1}{(t^2-1)(t^2+1)}=\frac{1}{(t-1)(t+1)(t^2+1)},$$

to izraz $\frac{8t^2}{t^4-1}$ možemo pokušati rastaviti u obliku

$$\frac{8t^2}{t^4-1}=\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1}+\frac{Ct+D}{t^2+1},$$

gdje su $A$, $B$, $C$ i $D$ neke konstante. Imamo,

$$\begin{aligned}
8t^2=&A(t+1)\left(t^2+1\right)+B(t-1)\left(t^2+1\right)+(Ct+D)\left(t^2-1\right)\\
=&A\left(t^3+t^2+t+1\right)+B\left(t^3-t^2+t-1\right)+\left(Ct^3+Dt^2-Ct-D\right)\\
=&t^3(A+B+C)+t^2(A-B+D)+t(A+B-C)+(A-B-D).
\end{aligned}$$

Dobijamo sistem jednačina

$$\begin{aligned} A+B+C &= 0 \\ A-B+D &= 8 \\ A+B-C &= 0 \\ A-B-D &= 0 \end{aligned}$$

Iz $A+B+C=0$ je $A=-B-C$, pa je

$$\begin{aligned} -B-D-B+D &= 8 \\ -B-C+B-C &= 0 \\ -B-C-B-D &= 0 \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} -2B-C+D &= 8 \\ -2C &= 0 \\ -2B-C-D &= 0 \end{aligned}$$

Odavde je $C=0$, pa je

$$\begin{aligned} -2B+D &= 8 \\ -2B-D &= 0 \end{aligned}$$

Sabiranjem ovih jednakosti, slijedi da je $-4B=8$, tj. $B=-2$.
Tako, $D=8+2B=8-4=4$, te $A=-B-C=2$. Imamo,

$$\frac{8t^2}{t^4-1}=\frac{2}{t-1}-\frac{2}{t+1}+\frac{4}{t^2+1}.$$

Sada je,

$$\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} \frac{8t^2}{t^4-1}dt = 2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} \frac{dt}{t-1} - 2\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} \frac{dt}{t+1} + 4\int\limits_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$\begin{aligned}
&2\ln(t-1)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} - 2\ln(t+1)\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} + 4\arctan t\Big|_{\sqrt{2}}^{\sqrt{n}} \\
=&2\ln\left(\sqrt{n}-1\right) - 2\ln\left(\sqrt{2}-1\right) - 2\ln\left(\sqrt{n}+1\right) \\
&+ 2\ln\left(\sqrt{2}+1\right) + 4\arctan\sqrt{n} - 4\arctan\sqrt{2} \\
=&2\ln\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} - 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 4\arctan\sqrt{n} - 4\arctan\sqrt{2},
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
\int_2^n \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x-1}{x+1}dx =&2\sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1} - 2\sqrt{2}\ln 3 + 2\ln\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} \\
&- 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 4\arctan\sqrt{n} - 4\arctan\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = \ln 1 = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty}\arctan\sqrt{n} = \frac{1}{2}$.
Pošto $\sqrt{n}\to+\infty$ a $\ln\frac{n+1}{n-1}\to 0$ kad $n\to+\infty$, to možemo pisati

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1} = \lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{n+1}{n-1}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti notu Zadatka 2.1.4). Imamo (vidjeti račun za $f^{'}(x)$ iznad),

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln\frac{n+1}{n-1}\right)'}{\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)'} = \lim_{n\to+\infty}\frac{-\frac{2}{n^2-1}}{-\frac{1}{2n\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty}\frac{4n^{\frac{3}{2}}}{n^2-1} = 0.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt{n}\ln\frac{n+1}{n-1} = 0$. Slijedi,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty}\int_2^n \frac{1}{\sqrt{x}}\ln\frac{x-1}{x+1}dx =& -2\sqrt{2}\ln 3 - 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \\
&+ 2\pi - 4\arctan\sqrt{2},
\end{aligned}$$

što je konačan broj. Tako,

$$\begin{aligned}\int_2^{+\infty} f(x)\,dx &= \lim_{n\to+\infty}\int_2^{n} f(x)\,dx\\ &= -\,2\sqrt{2}\ln 3 - 2\ln\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} + 2\pi - 4\arctan\sqrt{2},\end{aligned}$$

tj. nesvojstveni integral $\int\limits_2^{+\infty} f(x)\,dx$ konvergira.

Ovo po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, znači da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}\ln\frac{n+1}{n-1}$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 4.1.3** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ upotrebom integralnog kriterija.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Za $\alpha = 1$, dati red je oblika $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$, a on je po Primjeru 4.16 divergentan.

Neka je $\alpha \neq 1$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

Ako je $\alpha < 0$, onda je $\alpha = -\beta$ za neko $\beta > 0$, pa je $f(x) = \frac{(\ln x)^{\beta}}{x}$. Imamo,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \frac{\left((\ln x)^{\beta}\right)' \cdot x - (\ln x)^{\beta}\cdot (x)'}{x^2} = \frac{\beta(\ln x)^{\beta-1}\cdot \frac{1}{x}\cdot x - (\ln x)^{\beta}\cdot 1}{x^2}\\ &= \frac{\beta(\ln x)^{\beta-1} - (\ln x)^{\beta}}{x^2} = \frac{(\ln x)^{\beta-1}(\beta - \ln x)}{x^2}.\end{aligned}$$

Pošto funkcija $\ln x$ raste ka $+\infty$ kad $x$ teži ka $+\infty$, to postoji broj $N(\beta) \in \mathbb{N}$, $N(\beta) \geq 2$, takav da je $\ln x > \beta$ za sve $x \geq N(\beta)$.

Tako, $\beta - \ln x < 0$ za $x \in [N(\beta), +\infty)$, pa je $f'(x) < 0$ za $x \in [N(\beta), +\infty)$. Ovo znači da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $[N(\beta), +\infty)$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Ako je $\alpha \geq 0$, onda je jasno da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $[N(\beta), +\infty)$.

Takođe, $f(x)$ je pozitivna na $[N(\beta), +\infty)$, a kao elementarna funkcija definisana na $[N(\beta), +\infty)$, funkcija $f(x)$ je neprekidna na $[N(\beta), +\infty)$.

Imamo, funkcija $f(x)$ je definisana na $[N(\beta), +\infty)$, gdje je neprekidna, pozitivna i opadajuća, pa po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, red $\sum\limits_{n=N(\beta)}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ispitajmo konvergenciju integrala $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$.

Stavimo, $u = \ln x$.

Sada je $du = \frac{dx}{x}$, a kada $x$ prolazi intervalom $[N(\beta), +\infty)$, to $u$ prolazi intervalom $[\ln N(\beta), +\infty)$, pa je

$$\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \int\limits_{\ln N(\beta)}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}.$$

Posmatrajmo integral $I_n = \int\limits_{\ln N(\beta)}^{n} \frac{du}{u^{\alpha}}$. Pošto je $\alpha \neq 1$, to vrijedi

$$\begin{aligned} I_n = \int\limits_{\ln N(\beta)}^{n} \frac{du}{u^{\alpha}} &= \left.\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{\ln N(\beta)}^{n} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{-\alpha+1} - (\ln N(\beta))^{-\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

Jasno je da je za $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(\ln N(\beta))^{\alpha-1}}$, što je konačan broj.

S druge strane, za $\alpha < 1$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Ovo znači da nesvojstveni integral $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$, i da je $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}} = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(\ln N(\beta))^{\alpha-1}}$, te da integral $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\alpha}}$ divergira za

$\alpha < 1$, i da je $\int\limits_{N(\beta)}^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^\alpha} = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, slijedi da red $\sum\limits_{n=N(\beta)}^{+\infty} a_n$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha < 1$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha < 1$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$. ■

♢ **Zadatak 4.1.4** Upotrebom integralnog kriterija, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$ na intervalu $[3, +\infty)$.

Iz $3 > e$ slijedi da je $\ln 3 > \ln e = 1$, pa je $\ln\ln 3 > \ln 1 = 0$.

Tako, $\ln\ln x \geq \ln\ln 3 > 0$ za $x \in [3, +\infty)$, što znači da je funkcija $f(x)$ pozitivna na $[3, +\infty)$.

Kao elementarna funkcija definisana na $[3, +\infty)$, funkcija $f(x)$ je neprekidna na $[3, +\infty)$.

Jasno, $f(x)$ je opadajuća na $[3, +\infty)$.

Odavde i iz integralnog kriterija, tj. Teorema 4.5, slijedi da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$.

Ispitajmo konvergenciju integrala $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln x \cdot \ln\ln x}$.

Stavimo, $u = \ln\ln x$.

Sada je $du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x} dx$, a kad $x$ prolazi intervalom $[3, +\infty)$, to $u$ prolazi intervalom $[\ln\ln 3, +\infty)$, pa je $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{du}{u}$.

Posmatrajmo integral $I_n = \int\limits_{\ln\ln 3}^{n} \frac{du}{u}$. Vrijedi,

$$I_n = \ln u \Big|_{\ln\ln 3}^{n} = \ln n - \ln\ln\ln 3.$$

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$, pa nesvojstveni integral $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira (ka $+\infty$, tj. $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$).

Ovo po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, znači da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$ divergira. ■

♢ **Zadatak 4.1.5** Neka su $f(x)$ i $g(x)$ pozitivne, neprekidno diferencijabilne funkcije na $(0,+\infty)$. Osim toga, neka je $f(x)$ opadajuća funkcija na $(0,+\infty)$. Ako je $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergira. S druge strane, ako je za svako $k \geq N_1$ niz $\left\{\int\limits_k^{k+n-1} \frac{dx}{g(x)}\right\}$ neograničen, gdje je $N_1 \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj, i za dovoljno veliko $x$ vrijedi $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \leq 0$, dokazati da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergentan. U dokazu koristiti integralni kriterij.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$.

Stavimo, $l = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) > 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ odabrano po volji pa fiksirano, takvo da je $l - \varepsilon > 0$.

Postoji sada $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $x \geq N$, vrijedi $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) > l - \varepsilon$ (ovo je analogon tvrdnje Zadatka 24 u [DzG1, str. 128] za slučaj funkcija).

Označimo $l - \varepsilon$ sa $\delta$.

Imamo, $-g(x)f'(x) - g'(x)f(x) > \delta f(x)$ za $x \geq N$, tj. $f(x) < -\frac{1}{\delta}(g(x)f(x))'$ za $x \geq N$.

Funkcije $f(x)$ i $g(x)$ su neprekidno diferencijabilne na $(0,+\infty)$, pa izvodi $f'(x)$ i $g'(x)$ ne samo da postoje, nego su oni i neprekidne funkcije na $(0,+\infty)$.

Kako su funkcije $f(x)$ i $g(x)$ diferencijabilne na $(0,+\infty)$, to su one i neprekidne na $(0,+\infty)$.

Ovo znači da je funkcija $g(x) f'(x) + g'(x) f(x) = (g(x) f(x))'$ neprekidna na $(0, +\infty)$, a onda neprekidna i na svakom od podintervala intervala $(0, +\infty)$.

Iz neprekidnosti funkcija $f(x)$ i $(g(x) f(x))'$ na $[N, N+n-1]$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi njihova integrabilnost (Riemann integrabilnost) na $[N, N+n-1]$, pa nejednakost $f(x) < -\frac{1}{\delta}(g(x) f(x))'$, $x \geq N$, povlači da je

$$\int\limits_{N}^{N+n-1} f(x)\,dx < -\frac{1}{\delta}\int\limits_{N}^{N+n-1} (g(x) f(x))'\,dx = -\frac{1}{\delta}(g(x) f(x))\Big|_{N}^{N+n-1}$$
$$= \frac{1}{\delta}(g(N) f(N) - g(N+n-1) f(N+n-1))$$
$$< \frac{1}{\delta} g(N) f(N).$$

Ovo znači da je niz $\{I_n\}$, gdje je $I_n = \int\limits_{N}^{N+n-1} f(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$, ograničen.

Pošto je osim toga funkcija $f(x)$ pozitivna i opadajuća na $[N, +\infty)$, to po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.9, imamo da je red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} f(n)$ konvergentan.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Pretpostavimo sada da je za svako $k \geq N_1$ niz $\left\{\int\limits_{k}^{k+n-1} \frac{dx}{g(x)}\right\}$ neograničen, i da za dovoljno veliko $x$ vrijedi $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) \leq 0$.

Tako, za dovoljno veliko $x$ je $-\Big(g(x) f'(x) + g'(x) f(x)\Big) \leq 0$, tj. $(g(x) f(x))'$ $\geq 0$.

Drugim riječima, postoji $N_2 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $x \geq N_2$, vrijedi $(g(x) f(x))' \geq 0$.

Odavde i iz neprekidnosti funkcije $g(x) f(x)$ na $[N_2, +\infty)$ slijedi da je $g(x) f(x)$ neopadajuća funkcija na $[N_2, +\infty)$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Tako, $g(x) f(x) \geq g(N_2) f(N_2)$ za $x \geq N_2$, tj. $f(x) \geq g(N_2) f(N_2) \cdot \frac{1}{g(x)}$ za $x \geq N_2$.

Stavimo, $N = \max\{N_1, N_2\}$.

Za $n \in \mathbb{N}$, dobijamo

$$\int\limits_N^{N+n-1} f(x)\,dx \geq g(N)\,f(N)\int\limits_N^{N+n-1}\frac{dx}{g(x)}.$$

Odavde, iz neograničenosti niza $\left\{\int\limits_N^{N+n-1}\frac{dx}{g(x)}\right\}$, slijedi neograničenost niza $\left\{\int\limits_N^{N+n-1} f(x)\,dx\right\}$.

Funkcija $f(x)$ je pozitivna i opadajuća na $[N,+\infty)$, pa iz neograničenosti niza $\left\{\int\limits_N^{N+n-1} f(x)\,dx\right\}$ i integralnog kriterija, tj. Teorema 4.9, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} f(n)$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 4.1.6** Upotrebom integralnog kriterija, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$.

**Rješenje:** Posmatrajmo funkciju $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$ na intervalu $I=[3,+\infty)$. Imamo,

$$f'(x)=\frac{-\left(x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q\right)'}{x^2(\ln x)^{2p}(\ln\ln x)^{2q}},$$

gdje je

$$\begin{aligned}&\left(x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q\right)'\\ =&1\cdot\left((\ln x)^p(\ln\ln x)^q\right)+x\left((\ln x)^p(\ln\ln x)^q\right)'\\ =&(\ln x)^p(\ln\ln x)^q+x\Big(p(\ln x)^{p-1}\cdot\frac{1}{x}\cdot(\ln\ln x)^q+\end{aligned}$$

$$(\ln x)^p \cdot q\,(\ln\ln x)^{q-1} \cdot \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\Big)$$
$$= (\ln x)^p (\ln\ln x)^q + p\,(\ln x)^{p-1} (\ln\ln x)^q +$$
$$q\,(\ln x)^{p-1} (\ln\ln x)^{q-1}.$$

Slijedi,

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2 (\ln x)^p (\ln\ln x)^q} -$$
$$\frac{p}{x^2 (\ln x)^{p+1} (\ln\ln x)^q} - \frac{q}{x^2 (\ln x)^{p+1} (\ln\ln x)^{q+1}}.$$

Kako je $3 > e$, to je $\ln 3 > \ln e = 1$, pa je $\ln\ln 3 > \ln 1 = 0$. Tako, $\ln x \geq \ln 3 > 1$ i $\ln\ln x \geq \ln\ln 3 > 0$ za $x \in I$, što znači da je funkcija $f(x)$ pozitivna na $I$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna funkcija definisana na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.

Konačno, $f'(x) < 0$ za $x \in I$, pa je funkcija $f(x)$ opadajuća na $I$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Imamo, funkcija $f(x)$ je definisana na $I = [3, +\infty)$, gdje je neprekidna, pozitivna i opadajuća, pa po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ $= \sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$.

Ispitajmo konvergenciju ovog integrala.

Ako je $p = 1$, onda je $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$.

Stavimo, $u = \ln\ln x$. Sada je $du = \frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}dx$, a kada $x$ prolazi intervalom $[3, +\infty)$, to $u$ prolazi intervalom $[\ln\ln 3, +\infty)$, pa je $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\ln\ln 3}^{+\infty} \frac{du}{u^q}$.

Ako je $q = 1$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$, a ovaj red je po Zadatku 4.1.4, divergentan.

Neka je $q \neq 1$.

Posmatrajmo integral $I_n = \int\limits_{\ln\ln 3}^{n} \frac{du}{u^q}$. Sada je,

$$I_n = \left.\frac{u^{-q+1}}{-q+1}\right|_{\ln\ln 3}^{n} = \frac{1}{1-q}\left(n^{-q+1} - (\ln\ln 3)^{-q+1}\right).$$

Ako je $q > 1$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{q-1}\cdot\frac{1}{(\ln\ln 3)^{q-1}}$, što je konačan broj.

S druge strane, za $q < 1$ je $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Ovo znači da nesvojstevni integral $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_3^{+\infty} \frac{dx}{x\ln x(\ln\ln x)^q}$ konvergira za $q > 1$, i da je $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = \frac{1}{q-1}\cdot\frac{1}{(\ln\ln 3)^{q-1}}$, te da integral $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx$ divergira za $q < 1$, i da je $\int\limits_3^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, ovo znači da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q}$ konvergira za $q > 1$ i divergira za $q < 1$.

Tako, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^q}$ konvergira za $q > 1$ i divergira za $q \leq 1$.

Neka je sada $p \neq 1$.

Osim toga, neka je $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 3$, proizvoljno odabran pa fiksiran broj.

U integralu $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_N^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$, uvedimo smjenu $u = \ln x$. Imamo, $du = \frac{1}{x}dx$, a kada $x$ prolazi intervalom $[N, +\infty)$, to $u$ prolazi intervalom $[\ln N, +\infty)$, pa je $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{\ln N}^{+\infty} \frac{du}{u^p(\ln u)^q}$.

Posmatrajmo integral $J_n = \int\limits_{\ln N}^{n} \frac{du}{u^p(\ln u)^q}$.

Znamo da bilo koji pozitivan stepen funkcije $\ln u$ sporije teži ka $+\infty$ od bilo kojeg pozitivnog stepena funkcije $u$, kad $u$ teži ka $+\infty$. Općenitije, za svako $\varepsilon > 0$ i svako $\gamma \in \mathbb{R}$, vrijedi $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{(\ln u)^\gamma}{u^\varepsilon} = 0$.

Neka je $p > 1$.

Ako je $q = 0$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$. Pošto je $p > 1$, to po Zadatku 4.1.3, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ konvergira. Tako, po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergira i red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Drugim riječima, za $p > 1$ i $q = 0$ dati red konvergira.

Ako je $q > 0$, onda je $(\ln u)^q > 1$ za dovoljno veliko $u$, tj. postoji indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 > 3$, takav da je $(\ln u)^q > 1$ za sve $u \geq \ln N_1$.

Za $u \geq \ln N_1$, dobijamo da je $\frac{1}{u^p (\ln u)^q} < \frac{1}{u^p}$.

Ako je $q < 0$, onda je $q = -\gamma$ za neko $\gamma > 0$. Odaberimo neko $\varepsilon > 0$, takvo da je $\alpha = p - \varepsilon > 1$.

Kako smo već istakli, postoji sada indeks $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > 3$, takav da je $(\ln u)^\gamma < u^\varepsilon$ za sve $u \geq \ln N_2$.

Za $u \geq \ln N_2$, dobijamo da je

$$\frac{1}{u^p (\ln u)^q} = \frac{(\ln u)^\gamma}{u^p} < \frac{u^\varepsilon}{u^p} = \frac{1}{u^{p-\varepsilon}} = \frac{1}{u^\alpha}.$$

Vidimo da za $p > 1$ i $q \neq 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, i broj $\alpha \in \mathbb{R}$, $1 < \alpha \leq p$, takvi da za sve $u \geq \ln N$, vrijedi $\frac{1}{u^p (\ln u)^q} < \frac{1}{u^\alpha}$. Odavde je

$$\begin{aligned} J_n = \int_{\ln N}^{n} \frac{du}{u^p (\ln u)^q} &< \int_{\ln N}^{n} \frac{du}{u^\alpha} = \left. \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{\ln N}^{n} \\ &= \frac{1}{1-\alpha} \left( n^{-\alpha+1} - (\ln N)^{-\alpha+1} \right) = \frac{1}{\alpha - 1} \left( \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}} - \frac{1}{n^{\alpha-1}} \right) \\ &< \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{(\ln N)^{\alpha-1}}. \end{aligned}$$

Iz dobijene ograničenosti, monotonosti $J_n < J_{n+1} < ...$, i Vajerštrasovog teorema [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], slijedi egzistencija konačnog limesa $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n$.

Ovo znači da nesvojstveni integral $\int\limits_{N}^{+\infty} f(x)\, dx = \int\limits_{N}^{+\infty} \frac{dx}{x (\ln x)^p (\ln \ln x)^q}$ konvergira za $p > 1$ i $q \neq 0$.

Po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, slijedi da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ konvergira za $p > 1$ i $q \neq 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n)^p (\ln \ln n)^q}$ za $p > 1$ i $q \neq 0$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ konvergira za $p > 1$ i $q \in \mathbb{R}$.

Konačno, neka je $p < 1$.

Ako je $q = 0$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Pošto je $p < 1$, to je po pomenutom Zadatku 4.1.3, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$ divergentan. Tako, po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], divergentan je i red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$.

Drugim riječima, za $p < 1$ i $q = 0$ dati red divergira.

Neka je $q > 0$. Odaberimo neko $\varepsilon > 0$, takvo da je $\alpha = p + \varepsilon < 1$. Kako smo ranije istakli, postoji sada indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 > 3$, takav da je $(\ln u)^q < u^\varepsilon$ za sve $u \geq \ln N_1$.

Za $u \geq \ln N_1$, dobijamo da je

$$\frac{1}{u^p\,(\ln u)^q} > \frac{1}{u^p \cdot u^\varepsilon} = \frac{1}{u^{p+\varepsilon}} = \frac{1}{u^\alpha}.$$

Ako je $q < 0$, onda je $q = -\gamma$ za neko $\gamma > 0$, pa postoji indeks $N_2 \in \mathbb{N}$, $N_2 > 3$, takav da je $(\ln u)^\gamma > 1$ za sve $u \geq \ln N_2$.

Za $u \geq \ln N_2$, dobijamo da je

$$\frac{1}{u^p\,(\ln u)^q} = \frac{(\ln u)^\gamma}{u^p} > \frac{1}{u^p}.$$

Vidimo da za $p < 1$ i $q \neq 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 3$, i broj $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \leq \alpha < 1$, takvi da za sve $u \geq \ln N$, vrijedi $\frac{1}{u^p(\ln u)^q} > \frac{1}{u^\alpha}$. Odavde je

$$\begin{aligned} J_n = \int\limits_{\ln N}^{n} \frac{du}{u^p\,(\ln u)^q} > \int\limits_{\ln N}^{n} \frac{du}{u^\alpha} = \left.\frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right|_{\ln N}^{n} \\ = \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{1-\alpha} - (\ln N)^{1-\alpha}\right) \to +\infty \end{aligned}$$

kad $n \to +\infty$, pa je i $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = +\infty$.

Ovo znači da nesvojstveni integral $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_N^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p(\ln\ln x)^q}$ divergira za $p < 1$ i $q \neq 0$, i da je $\int\limits_N^{+\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to+\infty} J_n = +\infty$.

Po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, slijedi da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ divergira za $p < 1$ i $q \neq 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ za $p < 1$ i $q \neq 0$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ divergira za $p < 1$ i $q \in \mathbb{R}$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p(\ln\ln n)^q}$ konvergira za $p = 1$, $q > 1$, i za $p > 1$, $q \in \mathbb{R}$, a divergira za $p = 1$, $q \leq 1$, i za $p < 1$, $q \in \mathbb{R}$. ■

♢ **Zadatak 4.1.7** Može li se integralni kriterij upotrijebiti za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$ ?

**Rješenje:** Odgovor je negativan.

Naime, integralni kriterij se koristi za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova, što nije slučaj sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$. ■

## 4.2 Redovi razmatrani integralnim kriterijem

(1) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$

(3) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+n-1}{23n^5-n^4+3n^3-9n^2+6n-11}$

(4) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^2+4}}{\left(n^{\frac{1}{3}}+19\right)^5}$

(5) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$

(6) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^2}$

(7) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln \frac{n+1}{n-1}$

(8) $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^{\alpha}}$

(9) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$

(10) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f\left(n\right)$

(11) $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\left(\ln n\right)^p\left(\ln\ln n\right)^q}$

(12) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n}$

# 5 Kriterij količnika

Kriterij količnika, poznatiji kao d'Alembertov[9] (Dalamberov) kriterij, spada u skupinu osnovnih kriterija za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova. Zbog jednostavnosti njegove formulacije i primjene, jedan je od onih kriterija koji se lahko pamte. Izvodimo ga iz osobina geometrijskih redova datih Teoremom 1.10 u [DzG2, str. 17].

**Teorem 5.1 (Kriterij količnika)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *strogo pozitivan red.*

1. *Ako postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i broj* $q \in (0, 1)$, *takvi da je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ *za sve* $n \geq n_0$, *onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan.*

2. *Ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$, *takav da je* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ *za sve* $n \geq n_0$, *onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

**Dokaz:** *1.* Pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in (0, 1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Pošto je $q > 0$, to možemo pisati $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{q^{n+1}}{q^n}$, $n \geq n_0$.

Iz $(a)$ Teorema 1.10 u [DzG2, str. 17] (vidjeti diskusiju nakon dokaza Teorema 1.10), imamo da geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ konvergira (jer je $-1 < 0 < q < 1$).

Sada, po kriteriju upoređivanja količnika, tj. Teoremu 3.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira (ulogu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ u Teoremu 3.1 sada igra red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$).

*2.* Pretpostavimo sada da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$ za sve $n \geq n_0$.

Odavde je $a_n \leq a_{n+1}$, $n \geq n_0$, tj.

[9] **Jean-Baptiste le Rond d'Alembert**, 1717-1783. god. n.e., francuski matematičar, fizičar, filozof. Bavio se mehanikom i teorijom muzike. Formula za dobijanje rješenja talasne jednačine nosi ime po njemu. Zbog toga se nekada i za samu talasnu jednačinu kaže da je Dalamberova jednačina. Poznat je po svom doprinosu u dokazu osnovnog teorema algebre.

$$0 < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \dots \ .$$

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergirao, onda bi po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], vrijedilo $a_n \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Ovo bi po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], značilo da svaka okolina tačke $0$, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{1}{2}a_{n_0}, \frac{1}{2}a_{n_0}\right)$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$. Ipak, ovo je nemoguće zbog $0 < a_{n_0} \leq a_{n_0+1} \leq \dots$ .

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

Kriterij količnika ima i drugu, nešto slabiju ali često udobniju formu, tj. vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 5.2 (Kriterij količnika)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *strogo pozitivan red. Definišimo*[10]

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

1. *Ako je* $r < 1$, *onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan.*
2. *Ako je* $r > 1$, *onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*
3. *Ako je* $r = 1$, *kriterij ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.*

**Dokaz:** *1.* Neka je $r < 1$.

Odaberimo neko $r'$, takvo da je $r < r' < 1$.

Ako bi bilo $r = -\infty$, to bi po Definiciji 7.7 u [DzG1, str. 84], imali da za svaku konstantu $c$, pa onda specijalno i za konstantu $c = -1$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < -1$.

[10]Kada kažemo da definišemo $r$ sa $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, smatramo da dati limes postoji (konačan ili beskonačan).

Ovo je nemoguće jer je $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ pozitivan niz.

Dakle, $-\infty < r < 1$, tj. niz $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ konvergira.

Pošto je $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to iz tvrdnje $(c)$ Posljedice 3.2 u [DzG1, str. 32], slijedi da je $r = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 0$.

Tako, $0 \leq r < 1$, pa je $0 \leq r < r' < 1$.

Iz konvergencije niza $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, nejednakosti $r < r'$, i tvrdnje $(a)$ Teorema 3.1 u [DzG1, str. 31], imamo da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $< r'$.

Postoji dakle $N \in \mathbb{N}$ i $r' \in (0,1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < r'$ za sve $n \geq N$. Ovo po *1.* Teorema 5.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

*2.* Pretpostavimo sada da je $r > 1$.

Ako je $r = +\infty$, onda po pomenutoj Definiciji 7.7, za svaku konstantu $c$, pa onda i za konstantu $c = 1$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

S druge strane, ako nije $r = +\infty$, onda iz $1 < r < +\infty$ slijedi konvergencija niza $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$, pa ponovo po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 3.1, slijedi da postoji indeks $N$ $\in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Vidimo da u svakom slučaju postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ za sve $n$ $\geq N$. Ovo, po *2.* Teorema 5.1 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

*3.* Dovoljno je da dokažemo da se može desiti da za neki strogo pozitivan red vrijedi $r = 1$, pri čemu je taj red konvergentan, a da za neki drugi strogo pozitivan red isto tako vrijedi da je $r = 1$, ali da je taj drugi red divergentan.

Zaista, posmatrajmo redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+2n+1} = 1,$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Dakle, za oba navedena reda je $r = 1$.

Ipak, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red (vidjeti [DzG2, str. 5-6]), dok je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red (vidjeti [DzG2, str. 72, Zad. 27 $(a)$]).

Dokaz je završen. ■

Kao i u slučaju kriterija upoređivanja limesom (Teoremi 2.1 i 2.3), i kriterij količnika ima odgovarajuću ojačanu varijantu (vidjeti Napomenu 2.2). Tako, vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 5.3 (Ojačani kriterij količnika)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *strogo pozitivan red, i* $r_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $r_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

1. *Ako je* $r_2 < 1$, *red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira.*

2. *Ako je* $r_1 > 1$, *red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

**Dokaz:** *1.* Neka je $r_2 < 1$.

Ako bi bilo $r_2 < 0$, onda bi po Zadatku 23 u [DzG1, str. 128], slijedilo da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 0$.

Ovo je nemoguće jer je niz $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ pozitivan.

Dakle, $r_2 \geq 0$.

Imamo, $0 \leq r_2 < 1$.

Odaberimo neko $q$, takvo da je $0 \leq r_2 < q < 1$.

Pošto je $r_2 < q$, to ponovo po pomenutom Zadatku 23, slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$.

Ovo po *1.* Teorema 5.1 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

*2.* Pretpostavimo sada da je $r_1 > 1$.

Pošto je $r_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, to iz $r_1 > 1$ i Zadatka 24 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$.

Odavde i iz *2.* Teorema 5.1 slijedi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 5.4** Da li kriterij količnika (Teorem 5.2), ili ojačani kriterij količnika (Teorem 5.3), daju odgovor na pitanje: da li red $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira ili ne ?

**Rješenje:** U Primjeru 1.6 smo ponudili dva rješenja ovog zadatka. Treće rješenje smo izveli u Primjeru 4.11.

Pokušajmo sada primijeniti kriterij količnika, tj. Teorem 5.2, te ojačani kriterij količnika, odnosno Teorem 5.3.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1.$$

Ovo znači da kriterij količnika, tj. Teorem 5.2, ne može poslužiti za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, to je po Posljedici 7.14 u [DzG1, str. 100], i $\liminf\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, te $\limsup\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

Ovo znači da ojačani kriterij količnika, tj. Teorem 5.3, takođe ne daje odgovor na upit o konvergenciji reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$. ■

**Napomena 5.5** U Primjeru 1.6 smo na dva načina dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergira. Primjenom integralnog kriterija, u Primjeru 4.11 smo i na treći način dokazali da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentan.

Ipak, kako smo vidjeli u Primjeru 5.4, kriterij količnika, tj. Teorem 5.2, nam nije mogao poslužiti za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, tj. za potvrdu njegove divergencije.

Napomenimo da ovo nije izolovan slučaj, nego je ustvari samo specijalan slučaj opštijeg fenomena. Naime, kad god su članovi beskonačnog reda dati nekom algebarskom funkcijom, kriterij količnika će uvijek dati odgovor $r = 1$, i na taj način će podbaciti (slično ponašanje će imati i pojedini kriteriji sekcija koje slijede). Ipak, ovo ne treba da obeshrabri čitaoca, jer, kako smo već konstatovali Napomenom 4.13, pitanje konvergencije bilo kojeg pozitivnog reda (čiji su članovi dati nekom algebarskom funkcijom), uspješno analiziramo kombinacijom kriterija upoređivanja limesom (Teorem 2.1 ili 2.3), sa osobinama $p$-redova (Teorem 4.12).

## 5.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 5.1.1** Ispitati konvergenciju sljedećih redova upotrebom kriterija količnika:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} \qquad (b)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} n \tan\frac{\pi}{2^{n+1}}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n} \qquad (e)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} \qquad (f)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n} \qquad (h)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!} \qquad (i)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$$

**Rješenje:** $(a)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajamo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{(2n+3)!}}{\frac{1}{(2n+1)!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+1)!\,(2n+2)\,(2n+3)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(2n+2)\,(2n+3)} = 0 = r.$$

Pošto je $r = 0 < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$ konvergira.

$(b)$ Članovi reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ su dati algebarskom funkcijom, što u skladu sa Napomenom 5.5 znači da treba da očekujemo da kriterij količnika bude neprimjenjiv u ovom slučaju. Zaista,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n^2}}{\frac{n}{(n-1)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n-1)^2(n+1)}{n^3}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(n^2-2n+1\right)(n+1)}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2-2n^2-2n+n+1}{n^3}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3-n^2-n+1}{n^3} = 1 = r.$$

Tako, kriterij količnika (u formi Teorema 5.2, a onda i u formi Teorema 5.3), ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne (vidjeti Primjer 5.4).

Ipak, po $(f)$ Zadatka 2.1.1, znamo da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$ divergira.

$(c)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\tan\frac{\pi}{2^{n+2}}}{n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}}{n\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}\cdot\frac{\pi}{2^{n+1}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\cos\frac{\pi}{2^{n+2}}}\cdot\frac{\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}}{\frac{\pi}{2^{n+2}}}}{\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{\frac{\pi}{2^{n+1}}}} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{1} = \frac{1}{2} = r.$$

Naime, znamo da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Tako, $r = \frac{1}{2} < 1$, pa po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$ konvergira.

$(d)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{3^n \cdot n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \cdot 3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1} \cdot 3^n \cdot n!} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n \cdot 3 \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot 3 = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{3}{e} = r.
\end{aligned}$$

Pošto je $r = \frac{3}{e} > 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$ divergira.

$(e)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Imamo,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)\, 2^n}{n \cdot 2^{n+1}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2} = r.
\end{aligned}$$

Pošto je $r = \frac{1}{2} < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergira.

$(f)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{2n+3}}{2^{3n+2}}}{\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{2n+3} \cdot 2^{3n-1}}{2^{3n+2} \cdot 3^{2n+1}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^2}{2^3}=\frac{3^2}{2^3}=\frac{9}{8}=r.$$

Pošto je $r=\frac{9}{8}>1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ divergira.

$(g)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{5^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{5^{n+1}}}{\frac{n!}{5^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)!\cdot 5^n}{5^{n+1}\cdot n!}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{5}=+\infty=r.$$

Iz činjenice da je $r=+\infty>1$, i kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{5^n}$.

$(h)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}=\sum\limits_{n=3}^{+\infty}a_n$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{7^{3n+3}}{(2n-3)!}}{\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^{3n+2}\cdot(2n-5)!}{(2n-3)!\cdot 7^{3n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{7^3}{(2n-3)\,(2n-4)}=0=r.$$

Pošto je $r=0<1$, to iz kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$.

$(i)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Za $n\in\mathbb{N}$ je

$$a_n=\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}\leq\frac{n\cdot n!}{(2n)!}=b_n.$$

Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)(n+1)!}{(2n+2)!}}{\frac{n\cdot n!}{(2n)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,(n+1)!\,(2n)!}{(2n+2)!\cdot n\cdot n!}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,(n+1)\cdot n!\cdot(2n)!}{(2n+2)\,(2n+1)\cdot(2n)!\cdot n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)\,(n+1)}{(2n+2)\,(2n+1)\cdot n}=0=r.$$

Pošto je $r=0<1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira.

Odavde, iz $a_n\le b_n$, $n\in\mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1!+2!+...+n!}{(2n)!}$. ■

◇ **Zadatak 5.1.2** Upotrebom kriterija količnika, ispitati konvergenciju sljedećih redova:

$(a)$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^b}{a^n},\ a>1,\ b>1$ $(b)$ $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{a^n}{n!},\ a>0$ $(c)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{n^n}$

$(d)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ $(e)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{n+k}{k}a^n,\ 0<a<1,\ k\in\mathbb{N}$

$(f)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}a^n,\ 0<a<\frac{1}{4}$ $(g)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\cdot\sqrt{n}}$ $(h)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$(i)$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

**Rješenje:** $(a)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{n^b}{a^n}$ sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}c_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{c_{n+1}}{c_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^b}{a^{n+1}}}{\frac{n^b}{a^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{a^n\cdot(n+1)^b}{a^{n+1}\cdot n^b}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^b=\frac{1}{a}\cdot 1=\frac{1}{a}=r.$$

Pošto je $a > 1$, to je $r = \frac{1}{a} < 1$, pa po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{n^b}{a^n}$ konvergira.

$(b)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} b_n$. Imamo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{a^n}{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n! \cdot a^{n+1}}{(n+1)! \cdot a^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n+1} = 0 = r.\end{aligned}$$

Pošto je $r = 0 < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$ konvergira.

$(c)$ Možemo pisati $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dobijamo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)! \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot n!} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} = r.\end{aligned}$$

Pošto je $r = \frac{1}{e} < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergira.

$(d)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Imamo,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{((n+1)!)^2}}{\frac{n^n}{(n!)^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{((n+1)!)^2 \cdot n^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1} \cdot (n!)^2}{(n!)^2 \cdot (n+1)^2 \cdot n^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{n+1} =\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n+1}=e\cdot 0=0=r.$$

Pošto je $r=0<1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}$ konvergira.

$(e)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{n+k}{k}a^n$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{n+1+k}{k}a^{n+1}}{\binom{n+k}{k}a^n}=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{\frac{(n+1+k)!}{k!((n+1+k)-k)!}}{\frac{(n+k)!}{k!((n+k)-k)!}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{(n+1+k)!\cdot k!\cdot n!}{k!\cdot(n+1)!\cdot(n+k)!}=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{n+1+k}{n+1}=a=r.$$

Pošto je $r=a<1$, to je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{n+k}{k}a^n$ konvergentan po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2.

$(f)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}a^n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$. Dobijamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\binom{2n+2}{n+1}a^{n+1}}{\binom{2n}{n}a^n}=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!((2n+2)-(n+1))!}}{\frac{(2n)!}{n!(2n-n)!}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{(2n+2)!\cdot n!\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+1)!\cdot(2n)!}=\lim_{n\to+\infty}a\cdot\frac{(2n+2)\,(2n+1)}{(n+1)\,(n+1)}=4a=r.$$

Sada je $r=4a<1$ (jer je $0<a<\frac{1}{4}$), pa po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{2n}{n}a^n$ konvergira.

$(g)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{3^{(n+1)^2-1}}{2^{(n+1)^2}\sqrt{n+1}}}{\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}}=$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n^2+2n}\cdot 2^{n^2}\cdot\sqrt{n}}{2^{n^2+2n+1}\cdot\sqrt{n+1}\cdot 3^{n^2-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{2n+1}\cdot\sqrt{n}}{2^{2n+1}\cdot\sqrt{n+1}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{2n+1}\cdot\sqrt{\frac{n}{n+1}}=+\infty=r.$$

Pošto je $r=+\infty>1$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2}\sqrt{n}}$ divergira po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2.

$(h)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!\,((n+1)!)^2}{(2n+2)!\,(n!)^2}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!\,(n!)^2\,(n+1)^2}{(2n)!\,(2n+1)\,(2n+2)\,(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2}=\frac{1}{4}=r.$$

Pošto je $r=\frac{1}{4}<1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ konvergira.

$(i)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)!)^2\cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2}\cdot(n!)^2}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n!)^2\cdot(n+1)^2\cdot 2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1}\cdot(n!)^2}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}\cdot\frac{1}{2^n}.$$

Po Zadatku 2 u [DzG1, str. 34], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{2^n}=0$, pa je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}=0$.

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=0\cdot 0=0=r$.

Pošto je $r=0<1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 5.1.3** Neka je $\{b_n\}$ niz takav da je $b_n \geq b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija količnika da konvergira red $\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{(1+b_n)(1+b_2)}$ $+ \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)} + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_n)(1+b_{n+1})}}{\frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)...(1+b_n)}} = \frac{1}{1+b_{n+1}} \leq \frac{1}{1+b} < 1.$$

Vidimo da postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$ i broj $q = \frac{1}{1+b} \in (0,1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.1, znači da red $\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{(1+b_n)(1+b_2)} + \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)} + ...$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 5.1.4** Neka za niz $\{b_n\}$ vrijedi $b_n \leq b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija količnika da konvergira red $1 + 2^{b_1} + 2^{b_1+b_2}$ $+ 2^{b_1+b_2+b_3} + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{b_1+b_2+...+b_n+b_{n+1}}}{2^{b_1+b_2+...+b_n}} = 2^{b_{n+1}} \leq 2^b < 1.$$

Tako, postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$ i broj $q = 2^b \in (0,1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.1, znači da konvergira red $1 + 2^{b_1} + 2^{b_1+b_2} + 2^{b_1+b_2+b_3} + ...$ . ■

♢ **Zadatak 5.1.5** Pretpostavimo da za niz $\{b_n\}$ vrijedi $0 < b_n \leq b < \frac{\pi}{2}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija količnika da konvergira red $1 + \sin b_1 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3 + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot ... \cdot \sin b_n \cdot \sin b_{n+1}}{\sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot ... \cdot \sin b_n} = \sin b_{n+1} \leq \sin b < 1.$$

Vidimo da postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$ i broj $q = \sin b \in (0, 1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.1, znači da red $1 + \sin b_1 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3 + ...$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 5.1.6** Neka je $p > 0$ i $\{a_n\}$ niz takav da je $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{\sin a_n}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$. Upotrebom kriterija količnika ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Rješenje:** Imamo, $a_1 = 1$, tj. $0 < a_1 < \frac{\pi}{2}$.

Slijedi, $0 < \sin a_1 < 1$, tj. $0 < a_2 < a_1 < \frac{\pi}{2}$.

Odavde je $0 < \sin a_2 < \sin a_1 < 1$, te $0 < \frac{\sin a_2}{2^p} < \frac{\sin a_1}{2^p} < \sin a_1$, tj. $0 < a_3 < a_2$. Tako, $0 < a_3 < a_2 < a_1 < \frac{\pi}{2}$.

Sada je $0 < \sin a_3 < \sin a_2 < \sin a_1 < 1$, a onda i $0 < \frac{\sin a_3}{3^p} < \frac{\sin a_2}{3^p} < \frac{\sin a_2}{2^p}$, tj. $0 < a_4 < a_3$. Dobijamo, $0 < a_4 < a_3 < a_2 < a_1 = 1$.

Nastavljajući ovako dalje, vidimo da je $0 < ... < a_2 < a_1 = 1$.

Ovo znači da je niz $\{a_n\}$ pozitivan, tj. da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan (pa na njega možemo pokušati primijeniti kriterij količnika), te da je niz $\{a_n\}$ opadajući, i da su mu svi elementi sadržani u intervalu $(0, 1]$.

Pošto je niz $\{a_n\}$ opadajući i ograničen odozdo, to je on po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 49, Teo. 5.5], konvergentan niz.

Postoji dakle $a \in \mathbb{R}$, takav da je $a = \lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

S obzirom da $a_n \in (0, 1]$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to $a \in [0, 1]$.

Pretpostavimo da $a \in (0, 1]$.

Iz $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = a$ i razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], znamo da je i $\lim\limits_{n \to +\infty} a_{n+1} = a$.

Takođe, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin a_n = \sin a$.

Kako je $0 < a < 1 < \frac{\pi}{2}$, to je $0 < \sin a < 1$.

Iz provedenog razmatranja, i činjenice da je $a_{n+1} = \frac{\sin a_n}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$, dobijamo da je

$$a = \lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{n^p} = 0.$$

Ovo je u kontradikciji sa pretpostavkom da $a \in (0, 1]$.
Zaključujemo, $a = 0$.
Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sin a_n}{n^p}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} \cdot \frac{1}{n^p}.$$

Znamo da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sin a_n}{a_n} = 1$.
Tako, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 \cdot 0 = 0 = r$.

Pošto je $r = 0 < 1$, to je po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. ■

◇ **Zadatak 5.1.7** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ strogo pozitivan red i $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji limes $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+k}}{a_n}$. Dokazati upotrebom kriterija količnika da za $g < 1$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a za $g > 1$ divergira.

**Dokaz:** Ako je $k = 1$ onda pretpostavljamo da postoji limes $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$. Ako je $g < 1$ onda po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. S druge strane, za $g > 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, tvrdnja zadatka vrijedi za $k = 1$.
Neka je $k = 2$.
Pretpostavimo sada da postoji limes $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n}$.
Posmatrajmo podnizove $\left\{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}\right\}$ i $\left\{\frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}\right\}$ niza $\left\{\frac{a_{n+2}}{a_n}\right\}$.

Iz $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+2}}{a_n}$ i Leme 7.12 u [DzG1, str. 91], slijedi da je $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+2}}{a_{2n}}$.

Možemo pisati, $g = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2(n+1)-1}}{a_{2n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2(n+1)}}{a_{2n}}$.

Ako je $g < 1$, onda iz ovih jednakosti i kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, slijedi konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$.

Označimo sa $S_n^{'}$ resp. $S_n^{''}$, $n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$. Imamo, $S_n^{'} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k-1}$, $S_n^{''} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo sume oblika $S_{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj. Imamo,

$$S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{2k-1} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k} = S_n^{'} + S_n^{''}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ je konvergentan, pa postoji $a \in \mathbb{R}$ resp. $b \in \mathbb{R}$, takav da je $a = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}$ resp. $b = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{''}$.

Odavde, iz $S_{2n} = S_n^{'} + S_n^{''}$, $n \in \mathbb{N}$, i tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} S_{2n} = \lim_{n\to+\infty} \left(S_n^{'} + S_n^{''}\right) = \lim_{n\to+\infty} S_n^{'} + \lim_{n\to+\infty} S_n^{''} = a + b.$$

Tako, niz $\{S_{2n}\}$, tj. podniz $\{S_{2n}\}$ niza $\{S_n\}$ je konvergentan.

Odavde, iz monotonosti niza $\{S_n\}$ (niz $\{S_n\}$ je rastući jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red), i Zadatka 7 u [DzG1, str. 118], slijedi konvergencija niza $\{S_n\}$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Ako je $g > 1$, onda po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ divergiraju.

Ovi redovi su pozitivni, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{''} = +\infty$ (vidjeti notu 34 na strani 157 u [DzG2]).

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$.

Ako bi niz $\{S_n\}$ konvergirao, onda bi po Posljedici 7.15 u [DzG2, str. 103] konvergirao i svaki podniz niza $\{S_n\}$. Dakle, kontradikcija, pa niz $\{S_n\}$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, tvrdnja zadatka vrijedi za $k = 2$.

Analogno razmatranje bi proveli u slučaju $k \geq 3$.

Dokaz je završen. ■

◊ **Zadatak 5.1.8** Upotrebom kriterija količnika ispitati konvergenciju reda $\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + ...$ .

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Vidimo da je $a_n = \frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot ...\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot ...\cdot(4n-2)}$, $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot ...\cdot(3n+1)(3n+4)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot ...\cdot(4n-2)(4n+2)}}{\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot ...\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot ...\cdot(4n-2)}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n+4}{4n+2} = \frac{3}{4} = r.$$

Pošto je $r = \frac{3}{4} < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\frac{4}{2} + \frac{4\cdot 7}{2\cdot 6} + \frac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10} + ...$ konvergira. ■

◊ **Zadatak 5.1.9** Neka je $\alpha > 0$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\alpha \prod\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\beta}{1+\alpha^2+\cos^2 k\beta}$ upotrebom kriterija količnika.

**Rješenje:** Pošto je $\alpha > 0$, to je dati red pozitivan red. Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$n\alpha\prod_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\beta}{1+\alpha^2+\cos^2 k\beta}\le n\alpha\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\alpha^2}=\frac{n\alpha}{(1+\alpha^2)^n}.$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\alpha}{(1+\alpha^2)^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n\alpha}{(1+\alpha^2)^n}$ je pozitivan red pa na njega možemo pokušati primijeniti kriterij količnika. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{b_{n+1}}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)\alpha}{(1+\alpha^2)^{n+1}}}{\frac{n\alpha}{(1+\alpha^2)^n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n\left(1+\alpha^2\right)}=\frac{1}{1+\alpha^2}=r.$$

Pošto je $\alpha>0$, to je $r=\frac{1}{1+\alpha^2}<\frac{1}{1}=1$, pa po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ konvergira.

Iz njegove konvergencije, nejednakosti $n\alpha\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\beta}{1+\alpha^2+\cos^2 k\beta}\le b_n$, $n\in\mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n\alpha\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{\sin^2 k\beta}{1+\alpha^2+\cos^2 k\beta}$. ■

◇ **Zadatak 5.1.10 (Putnam [5, 1942, 3])**[11] Upotrebom kriterija količnika, ispitati konvergenciju reda $1+\frac{1}{2}\cdot\frac{19}{7}+\frac{2!}{3^2}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^2+\frac{3!}{4^3}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^3+\frac{4!}{5^4}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^4+\ldots$ .

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Ovdje je $a_n=\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n!}{(n+1)^n}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^n}{\frac{(n-1)!}{n^{n-1}}\cdot\left(\frac{19}{7}\right)^{n-1}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{19}{7}\cdot\frac{n!\cdot n^{n-1}}{(n+1)^n\cdot(n-1)!}=$$

[11] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{19}{7} \cdot \frac{(n-1)! \cdot n^n}{(n+1)^n \cdot (n-1)!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{19}{7} \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{19}{7} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{19}{7e} = r.$$

Vrijednost broja $e$ sa preciznošću od 10 cifara je $2.7182818285$, pa je odgovarajuća vrijednost broja $7e$ jednaka $19.027972799$.

Slijedi, $r = \frac{19}{7e} < 1$.

Pošto je $r < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{19}{7} + \frac{2!}{3^2} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^2 + \frac{3!}{4^3} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^3 + \frac{4!}{5^4} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^4 + ...$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 5.1.11** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan konvergentan red. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+a_n}{3^n+a_n}$ ? Koristiti kriterij količnika.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+a_n}{3^n+a_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je strogo pozitivan red.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red, to vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4]. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2^{n+1}+a_{n+1}}{3^{n+1}+a_{n+1}}}{\frac{2^n+a_n}{3^n+a_n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(2^{n+1}+a_{n+1}\right)\left(3^n+a_n\right)}{\left(3^{n+1}+a_{n+1}\right)\left(2^n+a_n\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot 2^n \cdot 3^n + 2 \cdot 2^n \cdot a_n + 3^n \cdot a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n}{3 \cdot 3^n \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n \cdot a_n + 2^n \cdot a_{n+1} + a_{n+1} \cdot a_n}.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52] znamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$.

Dobijemo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2}{3} = r.$$

Pošto je $r = \frac{2}{3} < 1$, to iz kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n+a_n}{3^n+a_n}$. ■

♢ **Zadatak 5.1.12** Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, da li je onda $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ ? Koristiti kriterij količnika.

**Rješenje:** Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = L < 1$, to znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L < 1$.

Ovo po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira.

Zbog toga je $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4].

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takvo da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $||a_n| - 0| < \varepsilon$, tj. $|a_n| < \varepsilon$, ili $|a_n - 0| < \varepsilon$.

Vidimo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takvo da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $|a_n - 0| < \varepsilon$.

To znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. ■

♢ **Zadatak 5.1.13** Može li se kriterij količnika iskoristiti za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ ?

**Rješenje:** Dati red je red sa algebarskim članovima, pa u skladu sa Napomenom 5.5, kriterij količnika (u formi Teorema 5.2) ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Možemo i potkrijepiti našu tvrdnju.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n}{n+3}} = 1 = r.$$

Pošto je $r = 1$, to kriterij količnika, tj. Teorem 5.2 (a onda i Teorem 5.3), ne daje odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$ konvergira ili ne. ■

## 5.2 Redovi razmatrani kriterijem količnika

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!}$

(3) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} n \tan \frac{\pi}{2^{n+1}}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n!}{n^n}$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

(7) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$

(9) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1! + 2! + ... + n!}{(2n)!}$

(11) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^b}{a^n}$

(12) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^n}{n!}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{n^n}$

(14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{(n!)^2}$

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{n+k}{k} a^n$

(16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \binom{2n}{n} a^n$

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{n^2-1}}{2^{n^2} \cdot \sqrt{n}}$

(18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

(19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(20) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n, \ a_{n+1} = \frac{\sin a_n}{n^p}$

(21) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{4 \cdot 7 \cdot 10 \cdot ... \cdot (3n+1)}{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot ... \cdot (4n-2)}$

(22) $\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha \prod_{k=1}^{n} \frac{\sin^2 k\beta}{1 + \alpha^2 + \cos^2 k\beta}$

(23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} \cdot \left(\frac{19}{7}\right)^{n-1}$

(24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n + a_n}{3^n + a_n}$

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

(26) $\displaystyle\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{(1+b_n)(1+b_2)} + \frac{1}{(1+b_1)(1+b_2)(1+b_3)} + ...$

(27) $1 + 2^{b_1} + 2^{b_1+b_2} + 2^{b_1+b_2+b_3} + ...$

(28) $1 + \sin b_1 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 + \sin b_1 \cdot \sin b_2 \cdot \sin b_3 + ...$

# 6 Kriterij korijena

Kriterij korijena je poznat još i kao Košijev[12] kriterij korijena. Za njegovo izvođenje, kao i u slučaju kriterija količnika, eksploatišemo "predvidive" osobine geometrijskih redova.

**Teorem 6.1 (Kriterij korijena)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red.*

1. *Ako postoje* $n_0 \in \mathbb{N}$ *i broj* $q \in [0, 1)$*, takvi da je* $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ *za sve* $n \geq n_0$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan.*

2. *Ako postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$*, takav da je* $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ *za sve* $n \geq n_0$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

**Dokaz:** *1.* Pretpostavimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i $q \in [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Dakle, $0 \leq \sqrt[n]{a_n} \leq q$, $n \geq n_0$, pa je $a_n \leq q^n$ za $n \geq n_0$.

Pošto je $-1 < 0 \leq q < 1$, to iz $(a)$ Teorema 1.10 u [DzG2, str. 17] (vidjeti i diskusiju nakon dokaza Teorema 1.10), slijedi da je geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n$ konvergentan.

Odavde, iz $a_n \leq q^n$, $n \geq n_0$ i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

*2.* Pretpostavimo sada da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$ za sve $n \geq n_0$.

Odavde je $a_n \geq 1$, za $n \geq n_0$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergirao, onda bi po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], vrijedilo da $a_n \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Ovo bi po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], značilo da svaka okolina tačke $0$, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$. Ipak, ovo je nemoguće zbog $a_n \geq 1$ za $n \geq n_0$.

---

[12] Vidjeti notu 27 u [DzG2, str. 145].

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.
Dokaz je završen. ■

Kao i kriterij količnika, i kriterij korijena ima slabiju, ali često jednostavniju za upotrebu, formu, tj. vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 6.2 (Kriterij korijena)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Definišimo*

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n},$$

*ako posljednji limes postoji.*

1. *Ako je* $\rho < 1$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan.*

2. *Ako je* $\rho > 1$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

3. *Ako je* $\rho = 1$*, kriterij ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.*

**Dokaz:** Definisali smo $\rho$ sa $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, onda kada posljednji limes postoji. Ovo znači da na ovaj način definišemo $\rho$ onda kada postoji konačan ili beskonačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

*1.* Neka je $\rho < 1$.
Odaberimo neko $\rho^{'}$, takvo da je $\rho < \rho^{'} < 1$.
Ako bi bilo $\rho = -\infty$, to bi po Definiciji 7.7 u [DzG1, str. 84], imali da za svaku konstantu $c$, pa onda specijalno i za konstantu $c = -1$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < -1$.
Ovo je nemoguće jer je $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ pozitivan (nenegativan) niz.
Dakle, $-\infty < \rho < 1$, pa niz $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ konvergira.
Pošto je $\sqrt[n]{a_n} \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to iz tvrdnje $(d)$ Posljedice 3.2 u [DzG1, str. 32], slijedi da je $\rho = \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 0$.
Tako, $0 \leq \rho < 1$, pa je $0 \leq \rho < \rho^{'} < 1$.

Iz konvergencije niza $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, nejednakosti $\rho < \rho'$, i tvrdnje $(a)$ Teorema 3.1 u [DzG1, str. 31], imamo da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < \rho'$.

Postoji dakle $N \in \mathbb{N}$ i broj $\rho' \in (0,1) \subset [0,1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} < \rho'$ za sve $n \geq N$. Ovo po *1.* Teorema 6.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

*2.* Pretpostavimo sada da je $\rho > 1$.

Ako je $\rho = +\infty$, onda po pomenutoj Definiciji 7.7, za svaku konstantu $c$, pa onda i za konstantu $c = 1$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

S druge strane, ako nije $\rho = +\infty$, onda iz $1 < \rho < +\infty$ slijedi konvergencija niza $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, pa ponovo po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 3.1, slijedi da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

Vidimo da u svakom slučaju postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da je $\sqrt[n]{a_n} > 1$ za sve $n \geq N$. Ovo, po *2.* Teorema 6.1 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

*3.* Dovoljno je da dokažemo da se može desiti da za neki pozitivan red vrijedi $\rho = 1$, pri čemu je taj red konvergentan, a da za neki drugi pozitivan red isto tako vrijedi da je $\rho = 1$, ali da je taj drugi red divergentan.

Zaista, posmatrajmo redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Po $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Odavde i iz tvrdnji $(b)$ i $(c)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n} \cdot \sqrt[n]{n}} = 1,$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Dakle, za oba navedena reda vrijedi $\rho = 1$.

Ipak, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red (vidjeti [DzG2, str. 5-6]), dok je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red (vidjeti [DzG2, str. 72, Zad. 27 $(a)$]).

Dokaz je završen. $\blacksquare$

**Primjer 6.3** Ispitati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-4}\right)^n$.

**Rješenje:** Dati red je jasno pozitivan red.

Sama pojava $n$-tog stepena u opštem članu $a_n=\left(\frac{2n+3}{5n-4}\right)^n$ datog reda treba da nas asocira na upotrebu kriterija korijena.

Primijenimo onda kriterij korijena, tj. Teorem 6.2 na dati red.

Sada je,

$$\rho=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n+3}{5n-4}\right)^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n+3}{5n-4}=\frac{2}{5}<1.$$

Odavde i iz *1.* Teorema 6.1 zaključujemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{5n-4}\right)^n$ konvergira. ■

Izvedimo sada ojačanu verziju kriterija korijena.

**Teorem 6.4 (Ojačani kriterij korijena)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ pozitivan red. Definišimo*[13], $\rho_1=\liminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$, $\rho_2=\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$.

1. *Ako je $\rho_2<1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira.*

2. *Ako je $\rho_1>1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ divergira.*

**Dokaz:** *1.* Neka je $\rho_2<1$.

Ako bi bilo $\rho_2<0$, onda bi po Zadatku 23 u [DzG1, str. 128], slijedilo da postoji $N\in\mathbb{N}$, takav da za sve $n\geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n}<0$.

Ovo je nemoguće jer je niz $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$ pozitivan (nenegativan).

Dakle, $\rho_2\geq 0$.

Imamo, $0\leq\rho_2<1$.

[13] Ovdje imamo slobodu da definišemo $\rho_1$ i $\rho_2$ sa $\rho_1=\liminf\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$ i $\rho_2=\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}$, redom, jer, kako smo vidjeli u razmatranju provedenom u [DzG1, str. 87-91] (vidjeti Definicije 7.9 i 7.10), limes inferior i limes superior su uvijek definisani, tj. postoje za svaki niz.

Odaberimo neko $q$, takvo da je $0 \leq \rho_2 < q < 1$.

Pošto je $\rho_2 < q$, to ponovo po pomenutom Zadatku 23, slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < q$.

Ovo po *1.* Teorema 6.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

*2.* Pretpostavimo sada da je $\rho_1 > 1$.

Pošto je $\rho_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, to iz $\rho_1 > 1$ i Zadatka 24 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} > 1$.

Ovo po *2.* Teorema 6.1 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 6.5** Ispitati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$.

**Rješenje:** Dati red je nenegativan red.

Kao i u Primjeru 6.3, pojava eksponenta $n$ u izrazu za opšti član reda nam daje povoda da na dati red primijenimo kriterij korijena.

Primijenit ćemo kriterij korijena dat Teoremom 6.2. Imamo,

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Rezultat $\rho = 1$, u skladu sa tvrdnjom *3.* Teorema 6.2, nam govori da kriterij korijena (u formi Teorema 6.2), ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Tako, postojanje eksponenta $n$ u izrazu za opšti član datog reda, ne implicira nužno mogućnost utvrđivanja konvergencije-divergencije reda kriterijem korijena.

Ipak, u rješenju Zadatka 109 u [DzG2, str. 217], smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1} \neq 0$. Ovo znači da opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa dati red divergira (vidjeti stranu 4 u [DzG2]). ■

## 6.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 6.1.1** Neka je $a > 0$. Ispitati konvergenciju sljedećih redova upotrebom kriterija korijena:

$(a)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$ $(b)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ $(c)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

$(d)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^{n}$ $(e)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ $(f)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^{2}$

$(g)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$ $(h)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n \arctan^n n}$ $(i)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\frac{2}{n}$

$(j)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$ $(k)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$ $(l)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^{n}$

$(m)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ $(n)$ $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^{n}$ $(o)$ $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

**Rješenje:** $(a)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln (n+1)} = 0 = \rho.$$

Pošto je $\rho = 0 < 1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$.

$(b)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{e} = \rho.$$

Pošto je $\rho = \frac{1}{3e} < 1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ konvergira.

$(c)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Vrijedi, $a_n = \frac{2}{2^n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Po $(e)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \sqrt[n]{2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot e = \frac{e}{2} = \rho.$$

Pošto je $\rho = \frac{e}{2} > 1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$ divergira.

$(d)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-1} = \frac{2}{3} = \rho.$$

Pošto je $\rho = \frac{2}{3} < 1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$ konvergira.

$(e)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0 = \rho.$$

Pošto je $\rho = 0 < 1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$ konvergira.

$(f)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Za $n\in\mathbb{N}$ je $3\leq 2n+1\leq 2n+n=3n$, a onda i $\sqrt[n]{3}\leq\sqrt[n]{2n+1}\leq\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}$.
Po $(e)$ i $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{3}=1$, te $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

Odavde, iz $\sqrt[n]{3}\leq\sqrt[n]{2n+1}\leq\sqrt[n]{3}\cdot\sqrt[n]{n}$, $n\in\mathbb{N}$, i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], dobijamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2n+1}=1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{2n+1}\cdot\sqrt[n]{2n+1}}=1=\rho.$$

Pošto je $\rho=1$, to kriterij korijena (u formi Teorema 6.2 a onda i u formi Teorema 6.3) ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Ipak, $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{2n+1}\cdot\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$ divergira po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4].

$(g)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0=\rho.$$

Pošto je $\rho=0<1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^n}$ konvergira.

$(h)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{2\arctan n}=\frac{3}{2\cdot\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{\pi}=\rho.$$

Pošto je $\rho=\frac{3}{\pi}<1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{2^n\arctan^n n}$ konvergira.

$(i)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{2}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}2\sqrt[n]{\sin\frac{2}{n}}=\lim_{n\to+\infty}2\sqrt[n]{\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}}\cdot\sqrt[n]{\frac{2}{n}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}2\cdot e^{\ln\left(\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1}{n}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}=\lim_{n\to+\infty}2\cdot e^{\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}}\cdot\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt[n]{n}}.$$

Pošto je $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}=1$.

Osim toga, po $(e)$ i $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{2}=1$, i $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}$ $=1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=2\cdot e^{0\cdot\ln1}\cdot\frac{1}{1}=2\cdot e^{0\cdot0}\cdot1=2\cdot1\cdot1=2=\rho.$$

Iz $\rho=2>1$, i kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}2^n\sin\frac{2}{n}$.

$(j)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n.$$

Imamo,

$$\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^n=\left(1+\frac{n^2+1}{n^2+n+1}-1\right)^n=\left(1+\frac{n^2+1-n^2-n-1}{n^2+n+1}\right)^n$$
$$=\left(1+\frac{-n}{n^2+n+1}\right)^n=\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{-\frac{n^2+n+1}{n}\cdot\frac{-n^2}{n^2+n+1}}$$
$$=\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{-\frac{n^2+n+1}{n}}\right]^{-\frac{n^2}{n^2+n+1}}.$$

Niz $\left\{-\frac{n^2+n+1}{n}\right\}$ je niz brojeva koji teže ka $-\infty$ kad $n$ teži $+\infty$. Odavde i iz Zadatka 4 u [DzG1, str. 107], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n^2+n+1}{n}}\right)^{-\frac{n^2+n+1}{n}}\right]^{-\frac{n^2}{n^2+n+1}}$$
$$=e^{-1}=\frac{1}{e}=\rho.$$

Pošto je $\rho=\frac{1}{e}<1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$.

$(k)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n}{n+1}-1\right)^{n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{n-n-1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

U Zadatku 109 u [DzG2, str. 217] smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{e}$.

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], sljedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\frac{1}{e}$.

Dakle, $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n}=\frac{1}{e}=\rho$.

Pošto je $\rho=\frac{1}{e}<1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$.

$(l)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\sqrt[n]{n}-1)^n$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Po $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n}=1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right) = 0 = \rho.$$

Pošto je $\rho = 0 < 1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\sqrt[n]{n}-1)^n$.

$(m)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Pretpostavimo da je $a > 1$.

Po Zadatku 7 u [DzG1, str. 16], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{a^n} = 0 = \rho.$$

Pošto je $\rho = 0 < 1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$.

Pretpostavimo sada da je $0 < a \leq 1$. Možemo pisati, $a = \frac{1}{c}$ za neko $c \geq 1$.

Slijedi, $b_n = \frac{n^n}{a^{n^2}} = \frac{n^n}{\frac{1}{c^{n^2}}} = n^n c^{n^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Tako,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty} nc^n = +\infty = \rho.$$

Pošto je $\rho = +\infty > 1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ konvergira za $a > 1$ i divergira za $0 < a \leq 1$.

$(n)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Ako je $a = 1$, onda je

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e}.$$

Odavde i iz Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$.
Neka je $a \neq 1$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{b_n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{an}{n+1} = a.$$

Tako, ako je $a < 1$, onda je po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ konvergentan.

S druge strane, za $a > 1$, po istom kriteriju, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ je divergentan.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ je konvergentan za $0 < a < 1$ i divergentan za $a \geq 1$.

$(o)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ sa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}.$$

Imamo,

$$\begin{aligned}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} &= \left(1+\frac{n-1}{n+1}-1\right)^{n-1} = \left(1+\frac{n+1-n-1}{n+1}\right)^{n-1}\\
&= \left(1+\frac{-2}{n+1}\right)^{n-1} = \left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}\cdot\frac{-2}{n+1}\cdot(n-1)}\\
&= \left[\left(1+\frac{1}{-\frac{n+1}{2}}\right)^{-\frac{n+1}{2}}\right]^{\frac{-2n+2}{n+1}}.\end{aligned}$$

Niz $\left\{-\frac{n+1}{2}\right\}$ je niz brojeva koji teže ka $-\infty$ kad $n \to +\infty$.
Odavde i iz Zadatka 4 u [DzG1, str. 107], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{-\frac{n+1}{2}} \right)^{-\frac{n+1}{2}} \right]^{\frac{-2n+2}{n+1}}$$
$$= e^{-2} = \frac{1}{e^2} = \rho.$$

Pošto je $\rho = \frac{1}{e^2} < 1$, to iz kriterija korijena, tj. Teorema 6.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$. ■

♢ **Zadatak 6.1.2** Ispitati konvergenciju reda $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ $+$ ... upotrebom kriterija korijena.

**Rješenje:** U Zadatku 1.1.4 smo već ponudili rješenje ovog problema (upotrebom kriterija upoređivanja).

Tamo smo, uz oznaku datog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, zaključili da je $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, tj. da je dati red pozitivan.

Osim toga, iz $\sin x \leq x$ za $x \geq 0$ smo dokazali da je $a_n = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}} \leq 2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+1}} = \frac{\pi}{2^n}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Možemo sada rezonovati na sljedeći način.

Iz $a_n \leq \frac{\pi}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{\pi}}{2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Po $(e)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi} = 1$, pa po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(1-A, 1+A)$ granične vrijednosti 1, gdje je $A > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj takav da je $1 + A < 2$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{\sqrt[n]{\pi}\}$.

Drugim riječima, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da $\sqrt[n]{\pi} \in (1-A, 1+A)$ za sve $n \geq n_0$.

Iz $\pi > 1$ je $\pi^{\frac{1}{n}} > 1^{\frac{1}{n}}$, tj. $\sqrt[n]{\pi} > 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa ustvari $\sqrt[n]{\pi} \in (1, 1+A)$ za sve $n \geq n_0$.

Stavimo, $q = \frac{1+A}{2}$.

Kako je $1 < 1 + A < 2$, to je $\frac{1}{2} < \frac{1+A}{2} < 1$, tj. $q \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

Tako, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, i broj $q \in (0,1) \subset [0,1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{\pi}}{2} < \frac{1+A}{2} = q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da je red $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+...$ konvergentan.

Možemo postupiti i nešto drugačije.

Članovi datog reda su $\sqrt{2-0}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$, $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$, ..., tj. $\sqrt{2-b_1}$, $\sqrt{2-b_2}$, $\sqrt{2-b_3}$, $\sqrt{2-b_4}$, ... .

Ovdje je $b_1=0$, $b_2=\sqrt{2}=\sqrt{2+b_1}$, $b_3=\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2+b_2}$, $b_4=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2+b_3}$, ..., tj. $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Kako je $a_1=\sqrt{2-b_1}$, $a_2=\sqrt{2-b_2}$ , ..., to je $a_n=\sqrt{2-b_n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Primjetimo da je niz $\{b_n\}$ rastući.

Naime, $b_1=0<\sqrt{2}=b_2$.

Ako pretpostavimo da je $b_n<b_{n+1}$ za neko $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, onda je $2+b_n<2+b_{n+1}$, te $\sqrt{2+b_n}<\sqrt{2+b_{n+1}}$, ili $b_{n+1}<b_{n+2}$.

Po principu matematičke indukcije, nejednakost $b_n<b_{n+1}$ vrijedi za sve $n\in\mathbb{N}$.

Neka $n\in\mathbb{N}$, i neka je $n\geq 2$.

Iz $b_{n+1}=\sqrt{2+b_n}$ je $b_n=\sqrt{2+b_{n-1}}$, pa je $b_n^2=2+b_{n-1}$.

Odavde je $4-b_n^2=2-b_{n-1}$, tj. $\sqrt{4-b_n^2}=\sqrt{2-b_{n-1}}=a_{n-1}$.

Izvodimo,

$$\begin{aligned}
a_n =& \frac{a_n\cdot b_{n+1}}{b_{n+1}}=\frac{\sqrt{2-b_n}\cdot\sqrt{2+b_n}}{b_{n+1}}=\frac{\sqrt{4-b_n^2}}{b_{n+1}}=\frac{a_{n-1}}{b_{n+1}}\\
=& \frac{a_{n-1}\cdot b_n}{b_{n+1}\cdot b_n}=\frac{\sqrt{2-b_{n-1}}\cdot\sqrt{2+b_{n-1}}}{b_{n+1}\cdot b_n}=\frac{\sqrt{4-b_{n-1}^2}}{b_{n+1}\cdot b_n}=\frac{a_{n-2}}{b_{n+1}\cdot b_n}\\
=& ...=\frac{a_{n-3}}{b_{n+1}\cdot b_n\cdot b_{n-1}}=...\\
=& \frac{a_1}{b_{n+1}\cdot b_n\cdot b_{n-1}\cdot ...\cdot b_3}<\frac{a_1}{b_2\cdot b_2\cdot ...\cdot b_2}=\frac{a_1}{b_2^{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}.
\end{aligned}$$

Dakle, $a_n<\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$ za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Pošto je $a_1=\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{1-1}}$, to vidimo da vrijedi $a_n\leq\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{n-1}}$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Drugim riječima, vrijedi $a_n\leq\frac{2}{\left(\sqrt{2}\right)^{n}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Slijedi, $\sqrt[n]{a_n}\leq\frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{2}}$, $n\in\mathbb{N}$.

Rezonujemo sada kao u slučaju $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\pi} = 1$.

Imamo, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2} = 1$, pa okolina $(1 - A, 1 + A)$ tačke 1, gdje je $A > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj takav da je $1 + A < \sqrt{2}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{\sqrt[n]{2}\}$.

Postoji sada $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da $\sqrt[n]{2} \in (1 - A, 1 + A)$ za sve $n \geq n_0$.

Pošto je $\sqrt[n]{2} > 1$, $n \in \mathbb{N}$, to $\sqrt[n]{2} \in (1, 1 + A)$ za sve $n \geq n_0$.

Stavimo, $q = \frac{1+A}{\sqrt{2}}$.

Iz $1 < 1 + A < \sqrt{2}$ je $\frac{1}{\sqrt{2}} < \frac{1+A}{\sqrt{2}} < 1$, tj. $q \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right)$.

Tako, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i broj $q \in \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \subset [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq \frac{\sqrt[n]{2}}{\sqrt{2}} < \frac{1+A}{\sqrt{2}}$ $= q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da konvergira red $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}}$ $+ \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + ...$ . ■

◇ **Zadatak 6.1.3** Neka je $\{b_n\}$ niz, takav da je $b_n \geq b > 0$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija korijena da konvergira red $\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{(1+b_2)^2} + \frac{1}{(1+b_3)^3} + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Sada je,

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{(1+b_n)^n}} = \frac{1}{1+b_n} \leq \frac{1}{1+b} < 1.$$

Vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = 1$) i broj $q = \frac{1}{1+b} \in [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $\frac{1}{1+b_1} + \frac{1}{(1+b_2)^2} + \frac{1}{(1+b_3)^3}$ $+ ...$ konvergira. ■

◇ **Zadatak 6.1.4** Neka za niz $\{b_n\}$ vrijedi $b_n \leq b < 0$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija korijena da konvergira red $1 + 2^{b_1} + 2^{2b_2} + 2^{3b_3} + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$, imamo da je

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{2^{nb_n}} = 2^{n_n} \leq 2^b < 1.$$

Tako, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$ i broj $q = 2^b \in [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $1 + 2^{b_1} + 2^{2b_2} + 2^{3b_3} + ...$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 6.1.5** Pretpostavimo da za niz $\{b_n\}$ vrijedi $0 < b_n \leq b < \frac{\pi}{2}$, $n \in \mathbb{N}$, gdje je $b$ konstanta. Dokazati upotrebom kriterija korijena da konvergira red $1 + \sin b_1 + \sin^2 b_2 + \sin^3 b_3 + ...$ .

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\sin^n b_n} = \sin b_n \leq \sin b < 1.$$

Vidimo da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 = 1)$ i broj $q = \sin b \in [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $1 + \sin b_1 + \sin^2 b_2 + \sin^3 b_3 + ...$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 6.1.6 (Ojačani kriterij korijena)** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red. Definišimo[14], $q = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Dokazati da za $q < 1$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a za $q > 1$ divergira.

**Dokaz:** U Teoremu 6.4 smo dokazali ojačani kriterij korijena, tj. dokazali smo da za $\rho_2 < 1$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a za $\rho_1 > 1$ diverrgira, gdje je $\rho_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ i $\rho_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

[14] Ovdje imamo slobodu da definišemo $q$ sa $q = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, jer, kako smo vidjeli u razmatranju provedenom u [DzG1, str. 87-91] (vidjeti Definicije 7.9 i 7.10), limes inferior i limes superior su uvijek definisani, tj. postoje za svaki niz.

U ovom zadatku ćemo dokazati da ojačani kriterij korijena možemo formulisati i pomoću samo npr. $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Ako je $q < 1$, onda činjenica da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, slijedi na isti način kao u dokazu Teorema 6.4.

Zaista, ako bi za $q < 1$ bilo $q < 0$, onda bi po Zadatku 23 u [DzG1, str. 128], slijedilo da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < 0$.

Ovo je nemoguće jer je niz $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ pozitivan.

Dakle, $q \geq 0$.

Imamo, $0 \leq q < 1$.

Odaberimo neko $q_1$, takvo da je $0 \leq q < q_1 < 1$.

Pošto je $q < q_1$, to ponovo po pomenutom Zadatku 23, slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\sqrt[n]{a_n} < q$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $q > 1$.

Odaberimo $\varepsilon > 0$ tako malo da je $q - \varepsilon > 1$. Možemo smatrati da $\varepsilon \in (0, 1)$.

Pretpostavimo suprotno, da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], to znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ovo onda znači da za naše $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takvo da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $|a_n - 0| < \varepsilon$, tj. $|a_n| < \varepsilon$, ili $a_n < \varepsilon$ (jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red).

Tako, $0 \leq a_n < \varepsilon$ za sve $n \geq n_0$.

Iz $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = q > q - \varepsilon$, i pomenutog Zadatka 23, slijedi da za broj $n_0$, postoji broj $N \in \mathbb{N}$, $N \geq n_0$, takav da je $\sqrt[N]{a_N} > q - \varepsilon$.

Tako, $\sqrt[N]{a_N} > q - \varepsilon > 1$, pa je $a_N > 1$.

Ipak, zbog $N \geq n_0$, vrijedi $0 \leq a_N < \varepsilon < 1$.

Ovo je kontradikcija, pa pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira nije tačna.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

◊ **Zadatak 6.1.7** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$ upotrebom kriterija korijena.

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Primjetimo da se u brojniku datog reda pojavljuje sabirak $(-1)^n$. Ovaj sabirak oscilira, uzimajući vrijednosti $-1$ i $1$ (naizmjenično) kada $n$ prolazi skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$.

Tako, umnožak $\sqrt{2}+(-1)^n$ (u brojniku datog reda) uzima vrijednosti $\sqrt{2}-1>0$ i $\sqrt{2}+1>0$ (naizmjenično) kada $n$ prolazi skupom $\mathbb{N}$.

Ovo znači da je (bez obzira na oscilatorni karakter sabirka $(-1)^n$) dati red pozitivan red.

Kako je dati red pozitivan, to ima smisla primijeniti kriterij korijena za ispitivanje njegove konvergencije.

Ipak, zbog oscilatornog karaktera sabirka $(-1)^n$, a onda i opšteg člana $a_n$, nismo u mogućnosti tražiti limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$. Drugim riječima, nismo u mogućnosti primijeniti kriterij korijena u formi Teorema 6.2.

Ostaje da pokušamo primijeniti ojačani kriterij korijena u formi Teorema 6.4 ili Zadatka 6.1.6, ili kriterij korijena u formi Teorema 6.1.

Pokušajmo primijeniti Teorem 6.4.

Posmatrajmo podnizove $\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\}$ i $\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\}$ niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$.

Jasno je da su svi članovi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ sadržani u podnizovima $\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\}$ i $\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\}$. Vrijedi,

$$
\begin{aligned}
\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\} &= \sqrt[2n-1]{\frac{(2n-1)^3\left(\sqrt{2}-1\right)^{2n-1}}{3^{2n-1}}} \\
&= \sqrt[2n-1]{2n-1}\cdot\sqrt[2n-1]{2n-1}\cdot\sqrt[2n-1]{2n-1}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{3}, \\
\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\} &= \sqrt[2n]{\frac{(2n)^3\left(\sqrt{2}+1\right)^{2n}}{3^{2n}}} \\
&= \sqrt[2n]{2n}\cdot\sqrt[2n]{2n}\cdot\sqrt[2n]{2n}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{3}.
\end{aligned}
$$

Po $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n}=1$. Pošto su $\left\{ \sqrt[2n-1]{2n-1} \right\}$ i $\left\{ \sqrt[2n]{2n} \right\}$ podnizovi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$, to po Lemi 7.12 u [DzG1, str. 91], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n-1]{2n-1}=1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{2n}=1$. Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{2}-1}{3} = \frac{\sqrt{2}-1}{3},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot \frac{\sqrt{2}+1}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}.$$

Odavde i iz Definicije 7.11 u [DzG1, str. 91] vidimo da su $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ i $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ djelimični limesi niza $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$.

Pošto su u podnizovima $\left\{\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}}\right\}$ i $\left\{\sqrt[2n]{a_{2n}}\right\}$ sadržani svi elementi niza $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$, to su $\frac{\sqrt{2}-1}{3}$ i $\frac{\sqrt{2}+1}{3}$ jedini djelimični limesi niza $\left\{\sqrt[n]{a_n}\right\}$.

Po Teoremu 7.13 u [DzG1, str. 93] je $\rho_1 = \liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}-1}{3}$ i $\rho_2 = \limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$.

Pošto je $\rho_2 = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1$, to iz ojačanog kriterija korijena, tj. Teorema 6.4, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$. ■

◇ **Zadatak 6.1.8** Upotrebom kriterija korijena, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

U $(g)$ Zadatka 1.1.1 smo dokazali da je $\ln n < n$ za sve $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Kako je i $\ln 1 = 0 < 1$, to je $\ln n < n$ za sve $n\in\mathbb{N}$. Tako, $\ln n < n < 2n$ za sve $n\in\mathbb{N}$, tj. $2n - \ln n > 0$ za $n\in\mathbb{N}$.

U brojniku i nazivniku datog reda se pojavljuje sabirak $\cos n \in [-1,1]$. Slijedi, $1 + \cos n \geq 0$ i $2+\cos n\geq 1 > 0$, što znači da je dati red pozitivan (nenegativan).

Kako je dati red pozitivan, to ima smisla primijeniti kriterij korijena za ispitivanje njegove konvergencije.

Ipak, zbog činjenice da limes $\lim\limits_{n\to+\infty}\cos n$ ne postoji (skup djelimičnih limesa [DzG1, str. 91, Def. 7.11] niza $\{\cos n\}$ je dat čitavim intervalom $[-1,1]$), nismo u mogućnosti tražiti limes

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}.$$

Drugim riječima, nismo u mogućnosti primijeniti kriterij korijena u formi Teorema 6.2.

Ostaje da pokušamo primijeniti ojačani kriterij korijena u formi Teorema 6.4 ili Zadatka 6.1.6, ili kriterij korijena u formi Teorema 6.1.

Pokušajmo primijeniti Teorem 6.4.

Ako bismo išli putem određivanja eksplicitne vrijednosti $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ili $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$, onda je jasno da bi poteškoću na tom putu predstavljala upravo pomenuta činjenica da je skup djelimičnih limesa niza $\{\cos n\}$ dat čitavim segmentom $[-1,1]$.

Umjesto toga, možemo pokušati procijeniti $\liminf\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$ ili $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Pokušajmo procijeniti $\limsup\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$.

Neka $n \in \mathbb{N}$.

Vrijedi $\cos n \leq 1$ ako i samo ako je $3 + 3\cos n \leq 4 + 2\cos n$ ako i samo ako je $\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \leq \frac{2}{3}$.

Kako je $\cos n \leq 1$ zadovoljeno, to je zadovoljeno i $\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \leq \frac{2}{3}$.

Pošto je $2n - \ln n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, to je $2 - \frac{\ln n}{n} > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Odavde i iz $\frac{1+\cos n}{2+\cos n} \leq \frac{2}{3}$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je $\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iz posljednje nejednakosti i Zadatka 26 u [DzG1, str. 129], dobijamo da je

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leq \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}}.$$

Po Zadatku 9 u [DzG1, str. 16], znamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9}$.

Odavde i iz Posljedice 7.14 u [DzG1, str. 100], imamo da je $\liminf\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \limsup\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9}$.

Dakle,

$$\rho_2 = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} = \frac{4}{9}.$$

Pošto je $\rho_2 \leq \frac{4}{9} < 1$, to iz ojačanog kriterija korijena, tj. Teorema 6.4, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$. ■

♢ **Zadatak 6.1.9** Dokazati da je kriterij korijena snažniji (jači) od kriterija količnika.

**Dokaz:** Dovoljno je da dokažemo da ako konvergenciju pozitivnog reda možemo ustanoviti kriterijem količnika, da onda njegovu konvergenciju možemo ustanoviti i kriterijem korijena, te da postoje pozitivni redovi koji konvergiraju po kriteriju korijena, ali čiju konvergenciju ne možemo ustanoviti kriterijem količnika.

Poredimo dakle kriterij količnika dat Teoremom 5.1 i kriterij korijena dat Teoremom 6.1.

Pretpostavimo da konvergenciju pozitivnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ možemo ustanoviti kriterijem količnika, tj. Teoremom 5.1.

Ovo znači da postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i broj $q \in (0,1)$, takvi da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q$ za sve $n \geq n_0$.

Neka $n \in \mathbb{N}$ i neka je $n > n_0$.

Za vrijednosti $n_0, n_0+1, ..., n-1$, dobijamo da je $\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \leq q$, $\frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \leq q$, ..., $\frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q$. Slijedi,

$$\frac{a_n}{a_{n_0}} = \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq q \cdot q \cdot ... \cdot q = q^{n-n_0},$$

tj. $a_n \leq \frac{a_{n_0}}{q^{n_0}} \cdot q^n$, ili $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}} \cdot q$, gdje je $n > n_0$.

Po $(e)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] i Zadatku 2 u [DzG1, str. 28] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}} = 1$, pa po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(1-A, 1+A)$ granične vrijednosti 1, gdje je $A > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj takav da je $1 + A < \frac{1}{q}$ (znamo da je $\frac{1}{q} > 1$ jer $q \in (0,1)$), sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\left\{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}}\right\}$. Možemo smatrati da za $A$ vrijedi $0 < A < 1$, tj. da je $1 - A > 0$.

Ovo znači da postoji $n_1 \in \mathbb{N}$, $n_1 > n_0$, takav da $\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}} \in (1-A, 1+A)$ za sve $n \geq n_1$.

Stavimo, $q_1 = (1+A)\,q$.

Kako je $1 < 1 + A < \frac{1}{q}$, to je $q < (1+A)\,q < q \cdot \frac{1}{q}$, tj. $0 < q < q_1 < 1$.

Tako, postoje $n_1 \in \mathbb{N}$, i broj $q_1 \in (0,1) \subset [0,1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{q^{n_0}}} \cdot q < (1+A)\, q = q_1$ za sve $n \geq n_1$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Dakle, ako konvergenciju pozitivnog reda možemo ustanoviti kriterijem količnika, tj. Teoremom 5.1, onda njegovu konvergenciju možemo ustanoviti i kriterijem korijena, tj. Teoremom 6.1 (možemo reći da kriterij korijena nije slabiji od kriterija količnika).

Da bi dokazali da je kriterij korijena jači od kriterija količnika, posmatrajmo sljedeći primjer.

Uzmimo brojeve $a$ i $b$, takve da je $0 < a < b < 1$, i posmatrajmo red $a + b^2 + a^3 + b^4 + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Imamo, $a_1 = a^1$, $a_2 = b^2$, $a_3 = a^3$, $a_4 = b^4$, ..., tj. $a_n = a^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj i $a_n = b^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ paran broj.

Posmatrajmo niz $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ $(\frac{a_2}{a_1} = \frac{b^2}{a^1}, \frac{a_3}{a_2} = \frac{a^3}{b^2}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{b^4}{a^3}, \frac{a_5}{a_4} = \frac{a^5}{b^4}, ...)$, i njegove podnizove $\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right\}$ $(\frac{a_2}{a_1} = \frac{b^2}{a^1}, \frac{a_4}{a_3} = \frac{b^4}{a^3}, ...)$ i $\left\{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right\}$ $(\frac{a_3}{a_2} = \frac{a^3}{b^2}, \frac{a_5}{a_4} = \frac{a^5}{b^4}, ...)$.

Jasno je da su svi članovi niza $\left\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\right\}$ sadržani u podnizovima $\left\{\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}}\right\}$ i $\left\{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right\}$.

Pošto je $\frac{b}{a} > 1$, to vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b^{2n}}{a^{2n-1}} = \lim_{n\to+\infty} b \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^{2n-1} = +\infty.$$

Ovo znači da za konstantu $c = 1$, postoji indeks $n_0' \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0'$, vrijedi $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} > 1$ [DzG1, str. 84, Def. 7.7].

S druge strane, iz $0 < \frac{a}{b} < 1$, dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{2n+1}}{b^{2n}} = \lim_{n\to+\infty} a \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^{2n} = 0.$$

Sada, svaka, pa specijalno i okolina $(-q, q)$ granične vrijednosti 0, gdje je $q$ ($0 < q < 1$) proizvoljno odabran pa fiksiran broj, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\left\{\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}}\right\}$.

Postoji dakle indeks $n_0^{''} \in \mathbb{N}$, takav da $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \in (-q, q)$ za sve $n \geq n_0^{''}$.
Kako je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to za sve $n \geq n_0^{''}$, vrijedi $0 < \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < q$.

Tako, ako bi pretpostavili da se konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ može ustanoviti kriterijem količnika, tj. ako bi pretpostavili da vrijedi tvrdnja *1.* Teorema 5.1, došli bi u kontradikciju sa činjenicom da je $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} > 1$ za sve $n \geq n_0^{'}$.

S druge strane, ako bi pretpostavili da se divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ može ustanoviti kriterijem količnika, tj. ako bi pretpostavili da vrijedi tvrdnja *2.* Teorema 5.1, došli bi u kontradikciju sa činjenicom da je $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} < q < 1$ za sve $n \geq n_0^{''}$.

Provedeno razmatranje nam govori da kriterij količnika (u formi Teorema 5.1) nije primijenjiv za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Ipak, za neparan broj $n \in \mathbb{N}$ je $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{a^n} = a < b$, dok je za paran broj $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{b^n} = b$.

Postoji dakle $n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = 1$) i broj $b \in (0, 1) \subset [0, 1)$, takvi da je $\sqrt[n]{a_n} \leq b$ za sve $n \geq n_0$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Zaključujemo, klasa pozitivnih redova koji konvergiraju po kriteriju korijena je veća (šira) od klase pozitivnih redova koji konvergiraju po kriteriju količnika, tj. kriterij korijena (Teorem 6.1) je jači (snažniji) od kriterija količnika (Teorem 5.1). ■

## 6.2 Redovi razmatrani kriterijem korijena

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+3}{5n-4}\right)^n$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^n (n+1)}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{n-1}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n$

(7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^n}$

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^2$

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}$

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^n \arctan^n n}$

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n \sin\frac{2}{n}$

(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$

(14) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\sqrt[n]{n}-1\right)^n$

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$

(16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$

(17) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$

(18) $\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\ldots$

(19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3\left(\sqrt{2}+(-1)^n\right)^n}{3^n}$

(20) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$

(21) $\frac{1}{1+b_1}+\frac{1}{(1+b_2)^2}+\frac{1}{(1+b_3)^3}+\ldots$

(22) $1+2^{b_1}+2^{2b_2}+2^{3b_3}+\ldots$

(23) $1+\sin b_1+\sin^2 b_2+\sin^3 b_3+\ldots$

# 7 Apsolutna i uslovna konvergencija

Kriteriji koje smo izveli u prethodnim sekcijama su se odnosili na pozitivne (nenegativne) i strogo pozitivne redove. Prolazeći pomenutim sekcijama, stičemo solidnu bazu znanja o takvim redovima, ali ne i o opštim redovima. Kako god, želja da primijenimo već uvedene kriterije u opštijim situacijama, motiviše nas da razmatramo pozitivne redove dobijene iz opštih redova uzimanjem apsolutnih vrijednosti svih njihovih članova.

**Definicija 7.1** Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ kažemo da **konvergira apsolutno**, ili da je **apsolutno konvergentan red**, ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Prethodna definicija nam govori da od proizvoljnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. reda čiji članovi ne moraju biti pozitivni, dolazimo do pozitivnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, na koji onda možemo primijeniti kriterije prethodnih sekcija. Tako, ako upotrebom tih kriterija dobijemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira (divergira), onda to znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira (ne konvergira apsolutno). Drugim riječima, prethodno uvedeni kriteriji sada jasno postaju kriteriji za ispitivanje apsolutne konvergencije opštih redova.

Naravno, ne postoji neki unaprijed uočljiv razlog zbog kojeg bismo mogli pretpostaviti da ponašanje reda apsolutnih vrijednosti ima neke posebne veze sa ponašanjem originalnog reda. Ipak, da su ti redovi u vezi, govori sljedeći teorem.

**Teorem 7.2** *Ako je red apsolutno konvergentan onda je on i konvergentan.*

**Dokaz:** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergentan red.

Po Definiciji 7.1, to znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, gdje je $b_n = a_n + |a_n|$ za $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Ako je $a_n \geq 0$, onda je $|a_n| = a_n$, pa je $b_n = a_n + |a_n| = |a_n| + |a_n| = 2\,|a_n| \geq 0$.

S druge strane, ako je $a_n < 0$, onda je $|a_n| = -a_n$, pa je $b_n = a_n + |a_n| = a_n - a_n = 0$.

Dakle, $b_n \geq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je pozitivan (nenegativan) red.

Pošto je $b_n = a_n + |a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, a $a_n \leq |a_n|$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je $b_n = a_n + |a_n| \leq |a_n| + |a_n| = 2\,|a_n|$ za $n \in \mathbb{N}$.

Iz $b_n \leq 2\,|a_n|$, $n \in \mathbb{N}$, $b_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan red, to je po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|a_n|$ konvergentan.

Iz $(b)$ pomenutog Teorema 1.8 imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} b_n + \sum_{n=1}^{+\infty} -|a_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n + (-|a_n|))$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n| - |a_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n.$$

Odavde, iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|a_n|$, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokaz je završen. ■

U dokazu prethodnog teorema, ali i sličnim situacijama, dolazi do izražaja mogućnost da se $a_n$ izrazi pomoću vrijednosti $|a_n|$ i $a_n + |a_n|$, koje su uvijek pozitivne.

**Teorem 7.3** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *apsolutno konvergentan red, i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *red nastao rearanžiranjem*[15] *članova reda* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. *Tada redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *oba konvergiraju, i imaju*

[15] Vidjeti stranu 29 u [DzG2].

*jednake sume.*

**Dokaz:** Pošto je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergentan, to je po Definiciji 7.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan.

Osim toga, kako smo vidjeli u dokazu Teorema 7.2, iz apsolutne konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$.

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ su jasno pozitivni.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, red nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, to je onda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ red nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n|)$ red nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$.

U Zadatku 26 u [DzG2, str. 70] smo dokazali da bilo koje rearanžiranje članova beskonačnog pozitivnog reda ne mijenja njegovu sumu.

Ovo, zbog činejnice da su $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$ pozitivni konvergentni redovi, a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n|)$ redovi nastali njihovim rearanžiranjem, redom, znači da su i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n|)$ konvergentni redovi, i da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, te $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n|) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n + |a_n|)$.

Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = S$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|b_n| = -S$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|a_n| = -S$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|b_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} -|a_n|$.

Sada, iz tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 1.8, dobijamo

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n|) + \sum_{n=1}^{+\infty} -|b_n| = \sum_{n=1}^{+\infty} (b_n + |b_n| - |b_n|) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+|a_n|)+\sum_{n=1}^{+\infty}-|a_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+|a_n|-|a_n|)=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.$$

Pošto su sume $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n+|b_n|)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-|b_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+|a_n|)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-|a_n|$ konačne, to su i sume redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konačne, pa su oni konvergentni.

Osim toga, iz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(b_n+|b_n|)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n+|a_n|)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-|b_n|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-|a_n|$, imamo da je i

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty}b_n&=\sum_{n=1}^{+\infty}(b_n+|b_n|)+\sum_{n=1}^{+\infty}-|b_n|\\&=\sum_{n=1}^{+\infty}(a_n+|a_n|)+\sum_{n=1}^{+\infty}-|a_n|=\sum_{n=1}^{+\infty}a_n.\end{aligned}$$

Dakle, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$ oba konvergiraju, i imaju jednake sume.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 7.4** Ispitati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}$.

**Rješenje:** Dok je faktor $(-1)^{n+1}$ jednak ili $1$ ili $-1$ (oscilira ravnomjerno), to brojnik $\sin n$ mijenja znak sa pozitivnih prema negativnim vrijednostima, ali na nestalan način.

Ovo ustvari znači da dati red nije pozitivan, pa na njega ne možemo primijeniti kriterije za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova, rađene u prethodnim sekcijama. Ipak, možemo ispitati apsolutnu konvergenciju datog reda.

Posmatramo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right|$.

Za $n\in\mathbb{N}$ je

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right|=\frac{|\sin n|}{n^2}\leq\frac{1}{n^2}.$$

Odavde, iz pozitivnosti redova $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right|$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$, konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ (Teorem 4.12), i kriterija upoređivanja (Teorem 1.1), slijedi konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}\right|$.

Ovo, po Definiciji 7.1, znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}$ konvergira apsolutno.

Odavde, i iz Teorema 7.2 imamo onda da red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n^2}$ konvergira i uobičajeno. ■

**Napomena 7.5** Optimistično bi bilo za očekivati da iz klasične konvergencije reda slijedi i njegova apsolutna konvergencija, tj. da vrijedi obrat Teorema 7.2.

To bi značilo da je red konvergentan ako i samo ako je apsolutno konvergentan.

Kako se prilikom ispitivanja apsolutne konvergencije redova bavimo ispitivanjem konvergencije pozitivnih redova, to bi onda značilo da je za ispitivanje konvergencije redova dovoljno znati ispitivati konvergenciju pozitivnih redova. Ipak, ovo nije slučaj.

Zaista, posmatrajmo red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

Za ovaj red smo u [DzG2, str. 93, Zad. 32 $(a)$] dokazali da je konvergentan i da mu je suma jednaka $\ln 2$.

S druge strane, $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red (vidjeti strane 5-6 u [DzG2]).

Dakle, red $\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|$ ne konvergira, što po Definiciji 7.1 znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Za redove koji konvergiraju uobičajeno (klasično), ali ne konvergiraju apsolutno, rezervišemo poseban naziv sljedećom definicijom.

**Definicija 7.6** Za red $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n$ kažemo da **konvergira uslovno**, ako on konvergira, ali ne konvergira apsolutno.

## 7.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 7.1.1** Ispitati da li je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$ apsolutno konvergentan, uslovno konvergentan, ili divergentan.

**Rješenje:** Red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$$

je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Znamo da iz apsolutne konvergencije reda slijedi njegova konvergencija (Teorem 7.2). Kako dati red ne konvergira apsolutno, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati. Vrijedi,

$$\begin{aligned} 1 <&2 < e < 3 < ... < 7 < e^2 < 8 < ... \\ &<20 < e^3 < 21 < ... < 54 < e^4 < 55 < ..., \end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned} 0 = \ln 1 < \ln 2 < 1 < \ln 3 < ... < \ln 7 < 2 < \ln 8 < ... < \ln 20 \\ <3 < \ln 21 < ... < \ln 54 < 4 < \ln 55 < ... \ . \end{aligned}$$

Slijedi, $\lfloor \ln 1 \rfloor = \lfloor \ln 2 \rfloor = 0$, $\lfloor \ln 3 \rfloor = \lfloor \ln 4 \rfloor = ... = \lfloor \ln 7 \rfloor = 1$, $\lfloor \ln 8 \rfloor = \lfloor \ln 9 \rfloor = ... = \lfloor \ln 20 \rfloor = 2$, $\lfloor \ln 21 \rfloor = \lfloor \ln 22 \rfloor = ... = \lfloor \ln 54 \rfloor = 3, ...$ .

Ovo znači da je

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n} =&1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{20} \\ &- \frac{1}{21} - \frac{1}{22} - ... - \frac{1}{54} + \frac{1}{55} + ... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&1+\frac{1}{\lfloor e^{1-1}\rfloor+1}-\frac{1}{\lfloor e^{2-1}\rfloor+1}-\frac{1}{\lfloor e^{2-1}\rfloor+2}-...-\frac{1}{\lfloor e^{2}\rfloor}\\
&+\frac{1}{\lfloor e^{3-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{3-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{3}\rfloor}\\
&-\frac{1}{\lfloor e^{4-1}\rfloor+1}-\frac{1}{\lfloor e^{4-1}\rfloor+2}-...-\frac{1}{\lfloor e^{4}\rfloor}+...\\
=&1+\sum_{n=1}^{+\infty}b_n.
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo red

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\lfloor e^{1-1}\rfloor+1}-\left(\frac{1}{\lfloor e^{2-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{2-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{2}\rfloor}\right)\\
&+\left(\frac{1}{\lfloor e^{3-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{3-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{3}\rfloor}\right)\\
&-\left(\frac{1}{\lfloor e^{4-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{4-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{4}\rfloor}\right)+...\\
=&\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\lfloor e^{n-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{n-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{n}\rfloor}\right),
\end{aligned}
$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ bez narušavanja poretka. U Zadatku 100 u [DzG2, str. 204] smo dokazali da je ovaj red divergentan.

Po Zadatku 40 u [DzG2, str. 105] znamo da ako neki red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, da onda i svaki red nastao grupisanjem njegovih članova bez narušavanja poretka, takođe konvergira, i ima istu sumu kao red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Ovo znači da ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergirao, da bi onda konvergirao i red

$$
\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{\lfloor e^{n-1}\rfloor+1}+\frac{1}{\lfloor e^{n-1}\rfloor+2}+...+\frac{1}{\lfloor e^{n}\rfloor}\right),
$$

što nije slučaj. Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira.

Sada, ako bi konvergirao red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$, to bi po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8] konvergirao i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, što nije tačno.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$ divergira, pa on ne konvergira, što znači da on ne konvergira ni uslovno (Definicija 7.6).

Tako, odgovor na postavljeno pitanje je da dati red ne konvergira apsolutno, ne konvergira uslovno, i da divergira. ■

♢ **Zadatak 7.1.2** Neka $a \in \mathbb{R}$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Neka je $|a| < 1$.

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{|a|\, n}{n+1}\right)^n .$$

Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left| \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \right|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{|a|\, n}{n+1}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{|a|\, n}{n+1} = |a| = \rho.$$

Pošto je $\rho = |a| < 1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \left(\frac{an}{n+1}\right)^n \right|$ konvergira.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ konvergira apsolutno za $|a| < 1$ (Definicija 7.1), pa i konvergira (ne divergira) za $|a| < 1$ (Teorem 7.2).

Pretpostavimo da je $a > 1$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n &= \lim_{n\to+\infty} a^n \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} a^n \cdot \frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} a^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.\end{aligned}$$

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} a^n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = +\infty$.

Ovo znači da opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ divergira za $a > 1$ [DzG2, str. 4, Teo. 1.4]. Jasno je da onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, niti konvergira za $a > 1$. Naime, ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ apsolutno konvergirao za $a > 1$, onda bi po Teoremu 7.2 i konvergirao za $a > 1$, što je nemoguće jer red divergira za $a > 1$. Isto tako, pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ konvergira za $a > 1$ vodi direktno u kontradikciju sa činjenicom da red divergira za $a > 1$.

Neka je $a = 1$. Sada je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \neq 0.$$

Ovo ponovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ divergira za $a = 1$.

Pretpostavimo sada da je $a \leq -1$.

Možemo pisati $a = -b$ za neko $b \geq 1$. Vrijedi,

$$\left(\frac{an}{n+1}\right)^n = \left(\frac{-bn}{n+1}\right)^n = (-1)^n \cdot b^n \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = +\infty$ za $b > 1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b^n = 1$ za $b = 1$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, a limes $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ ne postoji, to limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ ne postoji, pa ne može vrijediti $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n = 0$.

Ovo po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ divergira za $a \leq 1$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ konvergira apsolutno za $|a|<1$, pa i konvergira (ne divergira) za $|a|<1$, divergira za $|a|\geq 1$, pa ne konvergira apsolutno niti konvergira za $|a|\geq 1$.

Kako dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ ne konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $|a|\geq 1$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{an}{n+1}\right)^n$ ne konvergira uslovno ni za jedno $a\in\mathbb{R}$. ■

♢ **Zadatak 7.1.3** Neka $a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{a^{n^2}}$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Neka je $|a|>1$.
Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{|a|^{n^2}}.$$

Sada je (vidjeti Zadatak 7 u [DzG1, str. 16]),

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|}=\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\frac{n^n}{|a|^{n^2}}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{|a|^n}=0=\rho.$$

Pošto je $\rho=0<1$, to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{n^n}{a^{n^2}}\right|$ konvergira.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^n}{a^{n^2}}$ konvergira apsolutno za $|a|>1$ (Definicija 7.1), pa i konvergira (ne divergira) za $|a|>1$ (Teorem 7.2).

Pretpostavimo da je $0<a\leq 1$.
Možemo pisati $a=\frac{1}{b}$ za neko $b\geq 1$. Vrijedi,

$$\frac{n^n}{a^{n^2}}=b^{n^2}\cdot n^n.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{n^2} = +\infty$ za $b > 1$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{n^2} = 1$ za $b = 1$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}} = +\infty$.

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ divergira za $0 < a \leq 1$, pa ne konvergira apsolutno, niti konvergira za $0 < a \leq 1$ (inače bi konvergirao za $0 < a \leq 1$ što bi bilo u kontradikciji sa činjenicom da divergira za $0 < a \leq 1$).

Neka je sada $-1 \leq a < 0$.

Možemo pisati, $a = \frac{1}{-b}$ za neko $b \geq 1$. Vrijedi,

$$\frac{n^n}{a^{n^2}} = (-1)^{n^2} \cdot b^{n^2} \cdot n^n.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{n^2} = +\infty$ za $b > 1$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b^{n^2} = 1$ za $b = 1$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} n^n = +\infty$, a limes $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n^2}$ ne postoji, to limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ ne postoji, pa ne može vrijediti $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}} = 0$.

Ovo, po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ divergira za $-1 \leq a < 0$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ konvergira apsolutno za $|a| > 1$, pa i konvergira (ne divergira) za $|a| > 1$, divergira za $|a| \leq 1$, $a \neq 0$, pa ne konvergira apsolutno niti konvergira za $|a| \leq 1$, $a \neq 0$.

Kako dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ ne konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $|a| \leq 1$, $a \neq 0$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$ ne konvergira uslovno ni za jedno $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 7.1.4** Neka je $a > 0$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Vrijedi,

$$\begin{aligned}\frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} &= \frac{e^{\ln(\ln n)^{\ln n}}}{n^a} = \frac{e^{\ln n \cdot \ln\ln n}}{n^a}\\ &= \frac{\left(e^{\ln n}\right)^{\ln\ln n}}{n^a} = \frac{n^{\ln\ln n}}{n^a} = n^{\ln\ln n - a},\end{aligned}$$

pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{\ln\ln n - a}$.

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\ln\ln n - a} = +\infty$, a limes $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n$ ne postoji, to limes $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n^{\ln\ln n-a}$ ne postoji, pa ne može vrijediti $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n n^{\ln\ln n-a} = 0$.

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n^{\ln\ln n-a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ divergira za $a > 0$, pa ne konvergira za $a > 0$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ apsolutno konvergirao za $a > 0$, onda bi on po Teoremu 7.2 i konvergirao za $a > 0$, što nije slučaj.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ ne konvergira apsolutno za $a > 0$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ ne konvergira apsolutno za $a > 0$, ne konvergira za $a > 0$, divergira za $a > 0$.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ ne konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $a > 0$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$ ne konvergira uslovno za $a > 0$. ■

♢ **Zadatak 7.1.5** Za $a \in \mathbb{R}$, ispitati konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, gdje je $n_a \in \mathbb{N}$ indeks koji zavisi od $a$, takav da je $na^{n-1} + \ln n \neq 0$ za $n \geq n_a$.

**Rješenje:** Neka je $a = 0$.

Dati red je oblika $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, gdje je $na^{n-1} + \ln n \neq 0$ za $n \geq n_0$.

Kako je $a = 0$, to je onda $\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n} = 0$, te $\left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}\right| = 0$ za $n \geq n_0$, pa su svi članovi redova $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}\right|$ jednaki nuli.

Ovo znači da ovi redovi konvergiraju (i da su im sume jednake 0).

Tako, red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ apsolutno konvergira (Definicija 7.1), i konvergira (ne divergira) za $a = 0$ (Teorem 7.2).

Osim toga, kako red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ konvergira za $a = 0$, ali i apsolutno konvergira za $a = 0$, to on ne konvergira uslovno za $a = 0$ (Definicija 7.6).

Neka je $|a| < 1$, $a \neq 0$.

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=n_a}^{+\infty} \left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}\right| = \sum_{n=n_a}^{+\infty} \frac{|a|^{n-1}}{|na^{n-1}+\ln n|}.$$

Ovdje je po pretpostavci $na^{n-1} + \ln n \neq 0$, a onda i $\left|na^{n-1} + \ln n\right| > 0$ za $n \geq n_a$.

Pretpostavimo da je $0 < a < 1$.

Možemo pisati, $a = \frac{1}{b}$ za neko $b > 1$. Slijedi,

$$na^{n-1} + \ln n = \frac{n}{b^{n-1}} + \ln n = \frac{n-1}{b^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}} + \ln n.$$

Jasno, $\frac{1}{b^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$ (jer je $b > 1$).

Kako je $b > 1$, to po Zadatku 7 u [DzG1, str. 16], $\frac{n}{b^n} \to 0$ kad $n \to +\infty$. Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52] imamo da i $\frac{n-1}{b^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Tako,

$$na^{n-1} + \ln n = \frac{n-1}{b^{n-1}} + \frac{1}{b^{n-1}} + \ln n \to +\infty$$

kad $n \to +\infty$, pa i $\left|na^{n-1} + \ln n\right| \to +\infty$ kad $n \to +\infty$.

Neka je sada $-1 < a < 0$.

Možemo pisati, $a = \frac{-1}{b}$ za neko $b > 1$. Dobijamo,

$$\begin{aligned} na^{n-1} + \ln n &= \frac{n}{b^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} + \ln n \\ &= \frac{n-1}{b^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{b^{n-1}} + \ln n. \end{aligned}$$

Niz $\left\{(-1)^{n-1}\right\}_{n=n_a}^{+\infty}$ je ograničen, pa iz $\frac{n-1}{b^{n-1}} \to 0$, $\frac{1}{b^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$, slijedi da i $\frac{n-1}{b^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} \to 0$, $\frac{(-1)^{n-1}}{b^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Drugim riječima,

$$na^{n-1} + \ln n = \frac{n-1}{b^{n-1}} \cdot (-1)^{n-1} + \frac{(-1)^{n-1}}{b^{n-1}} + \ln n \to +\infty$$

kad $n \to +\infty$, pa i $\left|na^{n-1} + \ln n\right| \to +\infty$ kad $n \to +\infty$.

Vidimo da za $|a| < 1$, $a \neq 0$, $\left|na^{n-1} + \ln n\right| \to +\infty$ kad $n \to +\infty$.

Ovo znači da za $a$ za koje je $|a| < 1$, $a \neq 0$, postoji indeks $n_a^{'} \in \mathbb{N}$, $n_a^{'} \geq n_a$, takav da za sve $n \geq n_a^{'}$, vrijedi $\left|na^{n-1} + \ln n\right| > 1$. Dobijamo,

$$\left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}\right| = \frac{|a|^{n-1}}{|na^{n-1} + \ln n|} < |a|^{n-1}$$

za $n \geq n_a^{'}$.

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} |a|^{n-1}$ [DzG2, str. 17] (zbog $|a| < 1$), i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \left|\frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}\right|$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ konvergira apsolutno za $|a| < 1$, $a \neq 0$, pa i konvergira (ne divergira) za $|a| < 1$, $a \neq 0$ (Teorem 7.2).

Pretpostavimo sada da je $|a| \geq 1$.

Možemo pisati,

$$\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n} = \frac{1}{n + \frac{\ln n}{a^{n-1}}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}}.$$

Ako je $a \geq 1$, onda $\frac{1}{a^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$ za $a > 1$, te $\frac{1}{a^{n-1}} \to 1$ kad $n \to +\infty$ za $a = 1$. Osim toga, po Zadatku 9 u [DzG1, str. 16], $\frac{\ln n}{n} \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Ovo znači da za $a \geq 1$,

$$1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} \to 1$$

kad $n \to +\infty$.

Neka je sada $a \leq -1$.

Možemo pisati, $a = -b$ za neko $b \geq 1$. Slijedi,

$$\begin{aligned} 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} &= 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{(-1)^{n-1} \cdot b^{n-1}} \\ &= 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{b^{n-1}}. \end{aligned}$$

Niz $\left\{(-1)^{n-1}\right\}_{n=n_a}^{+\infty}$ je ograničen, $\frac{1}{b^{n-1}} \to 0$ kad $n \to +\infty$ za $b > 1$, $\frac{1}{b^{n-1}} \to 1$ kad $n \to +\infty$ za $b = 1$, i $\frac{\ln n}{n} \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Ovo znači da za $a \leq -1$,

$$1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} = 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{b^{n-1}} \to 1$$

kad $n \to +\infty$.

Dakle, za $|a| \geq 1$, $1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} \to 1$ kad $n \to +\infty$.

Ovo znači da za $a$ za koje je $|a| \geq 1$, i $\varepsilon = \frac{1}{2}$, postoji $n_a' \in \mathbb{N}$, $n_a' \geq n_a$, takav da za sve $n \geq n_a'$, vrijedi $\left|1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} - 1\right| < \frac{1}{2}$, tj. $-\frac{1}{2} < 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} - 1 < \frac{1}{2}$, ili $\frac{1}{2} < 1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} < \frac{3}{2}$.

Tako, za $n \geq n_a'$, vrijedi

$$\frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\ln n}{n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}} > \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{n},$$

tj.

$$\frac{1}{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=n_a'}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde, iz $\frac{1}{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, $n \geq n_a'$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=n_a'}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ (primijetimo da je zbog $0 < \frac{1}{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, $n \geq n_a'$, red $\sum\limits_{n=n_a'}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ pozitivan).

Sada, ako bi konvergirao red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, to bi po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergirao i red $\sum\limits_{n=n_a'}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$, što nije slučaj.

Dakle, red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ divergira.

Preciznije, red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ divergira za $|a| \geq 1$, pa ne konvergira apsolutno niti konvergira za $|a| \geq 1$ (inače bi konvergirao za $|a| \geq 1$, što bi bilo u kontradikciji sa činjenicom da divergira za $|a| \geq 1$).

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ konvergira apsolutno za $|a| < 1$, konvergira (ne divergira) za $|a| < 1$, divergira za $|a| \geq 1$, ne konvergira apsolutno, niti konvergira za $|a| \geq 1$.

Kako red $\sum\limits_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1}+\ln n}$ ne konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $|a| \geq 1$, to on ne konvergira uslovno ni za jedno $a \in \mathbb{R}$. ■

◊ **Zadatak 7.1.6** Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno, i da je $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Dokazati da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ oba divergiraju.

**Dokaz:** Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno, pa po Definiciji 7.6 to znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira (Definicija 7.1).

Znamo da pozitivan red ili konvergira ka nekom (konačnom) nenegativnom broju ili divergira ka $+\infty$ [DzG2, str. 157]. Slijedi, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira ka $+\infty$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = +\infty$.

Kako je $a_n \leq |a_n|$, $-a_n \leq |a_n|$, to je $|a_n| - a_n \geq 0$, $|a_n| + a_n \geq 0$, tj. vrijedi $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2} \geq 0$, $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2} \geq 0$.

Drugim riječima, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ su pozitivni (nenegativni).

Iz $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ i $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$ slijedi da je $p_n + q_n = |a_n|$ i $p_n - q_n = a_n$.

Pretpostavimo da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ oba konvergiraju.

Kako su ovo pozitivni redovi, to vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = P$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = Q$, za neke konačne brojeve $P \geq 0$ i $Q \geq 0$.

Odavde i iz tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], dobijamo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_n + q_n) = P + Q$, tj. dobijamo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = P + Q$. Pošto je $P + Q$ konačan broj, ovo bi značilo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira, što nije slučaj. U kontradikciju nas je dovela pretpostavka da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ istovremeno konvergiraju, pa ona ne može biti tačna.

Pretpostavimo sada da jedan od redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ konvergira, dok drugi divergira.

Ako $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ konvergira i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ divergira, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = P$ za neko konačno $P \geq 0$, i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$.

Iz tvrdnje $(a)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2] slijedi da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -q_n = -\infty$, pa je iz tvrdnje $(b)$ istog teorema, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_n + (-q_n)) = P + (-\infty) = -\infty$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_n - q_n) = -\infty$, ili $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = -\infty$.

Ovo je kontradikcija sa činjenicom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ divergira a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ konvergira, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$, i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ $= Q$ za neko $Q \geq 0$.

Sada je po pomenutoj tvrdnji $(a)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -q_n = -Q$, pa je po pomenutoj tvrdnji $(b)$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_n + (-q_n)) = +\infty + (-Q) = +\infty$, tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_n - q_n) = +\infty$, ili $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$.

Ovo je takođe u kontradikciji sa činjenicom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Kako su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ pozitivni, to svaki od njih ili konvergira ka konačnom nenegativnom broju, ili divergira ka $+\infty$.

Vidjeli smo da varijante kada ovi redovi istovremeno konvergiraju ili kada jedan od njih konvergira a drugi divergira, vode u kontradikciju. Tako, jedina preostala varijanta je da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ istovremeno divergiraju (tada je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n =$ $+\infty$).

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 7.1.7** Ispitati ponašanje (apsolutnu i uslovnu konvergenciju) reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$

**Rješenje:** Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n .$$

Po $(l)$ Zadatka 6.1.1, posljednji red konvergira, što znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$ apsolutno konvergira (Definicija 7.1).

Iz apsolutne konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$ i Teorema 7.2 slijedi njegova konvergencija.

Tako, dati red apsolutno konvergira, te konvergira (ne divergira).

Pošto red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{n} - 1 \right)^n$ apsolutno konvergira, to on ne može uslovno konvergirati (Definicija 7.6). ■

◇ **Zadatak 7.1.8** Odrediti za koje vrijednosti parametra $a$, red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}$ apsolutno konvergira, a za koje divergira.

**Rješenje:** Imamo,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n} \\
=& - 1! \sin a + 2! \sin a \sin \frac{a}{2} - 3! \sin a \sin \frac{a}{2} \sin \frac{a}{3} + ..., \\
&\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n} \right| \\
=& 1! \left| \sin a \right| + 2! \left| \sin a \right| \left| \sin \frac{a}{2} \right| + 3! \left| \sin a \right| \left| \sin \frac{a}{2} \right| \left| \sin \frac{a}{3} \right| + ... \, .
\end{aligned}$$

Ako je $a$ oblika $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, onda su svi članovi posljednjeg reda jednaki nuli, pa on konvergira (i suma mu je jednaka $0$).

Ovo znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}$ konvergira apsolutno za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Definicija 7.1), pa i konvergira (ne divergira) za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (Teorem 7.2).

Pretpostavimo da je $|a| < 1$, $a \neq 0$.

Dokažimo prvo da je $|\sin x| \leq |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Jasno, za $x = 0$, nejednakost $|\sin x| \leq |x|$ vrijedi (vrijedi jednakost).

Neka je $x > 0$.

Posmatrajmo segment $[0, x]$. Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna na $\mathbb{R}$, pa je neprekidna i na $[0, x]$. Osim toga, $f(x)$ je diferencijabilna u svakoj tački $x \in \mathbb{R}$, pa je specijalno diferencijabilna i na intervalu $(0, x)$. Pri tome je $f'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi teorema Lagranža[16] za funkciju $f(x)$, pa postoji tačka $c \in (0, x)$, takva da je $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(c)$, tj. $\frac{\sin x - \sin 0}{x-0} = \cos c$, ili $\sin x = x \cdot \cos c$.

Odavde je $|\sin x| = |x| |\cos c| \leq |x| \cdot 1 = |x|$.

Tako, nejednakost $|\sin x| \leq |x|$ vrijedi za $x > 0$.

Neka je sada $x < 0$.

Slijedi, $-x > 0$, pa posmatramo segment $[0, -x]$.

Funkcija $f(x) = \sin x$ je neprekidna na $[0, -x]$ i diferencijabilna na $(0, -x)$, pa po teoremu Lagranža postoji tačka $c' \in (0, -x)$, takva da je $\frac{f(-x)-f(0)}{-x-0} = f'\left(c'\right)$, tj. $\frac{\sin(-x)-\sin 0}{-x-0} = \cos c'$, ili $\frac{-\sin x}{-x} = \cos c'$, odnosno $\sin x = x \cdot \cos c'$.

Odavde je $|\sin x| = |x| \cdot \left|\cos c'\right| \leq |x| \cdot 1 = |x|$.

Zaključujemo, $|\sin x| \leq |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada

$$\begin{aligned} &\left|(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}\right| = n! \left|\sin a\right| \left|\sin \frac{a}{2}\right| \cdot ... \cdot \left|\sin \frac{a}{n}\right| \\ \leq &n! \left|a\right| \cdot \left|\frac{a}{2}\right| \cdot ... \cdot \left|\frac{a}{n}\right| = \left|a\right|^n. \end{aligned}$$

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a|^n$ [DzG2, str. 17] (zbog $|a| < 1$), i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}\right|$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}$ konvergira apsolutno za $|a| < 1$, $a \neq 0$, pa i konvergira (ne divergira) za $|a| < 1$, $a \neq 0$.

Pretpostavimo sada da je $a \geq 1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kako je $1 \leq a$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takav da je $a \leq n_0$.

Imamo, $\frac{a}{n_0} \leq 1$.

Definišimo, $C = (n_0 - 1)! \left|\sin a\right| \cdot \left|\sin \frac{a}{2}\right| \cdot ... \cdot \left|\sin \frac{a}{n_0 - 1}\right|$.

Kako je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $C > 0$.

Neka je $n \geq n_0$. Slijedi,

[16] Teorem Lagranža (vidjeti i notu 26 na stranici 144 u [DzG2]) tvrdi da za neprekidnu funkciju $f(x)$ na segmentu $[a, b]$, koja je diferencijabilna na (otvorenom) intervalu $(a, b)$, postoji tačka $c \in (a, b)$, takva da je $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$ (za ovaj i srodne teoreme kažemo da su teoremi o srednjoj vrijednosti).

$$\begin{aligned}&\left|(-1)^n n! \sin a \sin\frac{a}{2}\cdot ...\cdot \sin\frac{a}{n}\right| = n!\,|\sin a|\cdot\left|\sin\frac{a}{2}\right|\cdot ...\cdot\left|\sin\frac{a}{n}\right|\\ =&1\cdot 2\cdot ...\cdot(n_0-1)\,n_0\,(n_0+1)\cdot ...\cdot n\,|\sin a|\cdot\left|\sin\frac{a}{2}\right|\cdot ...\\ &\cdot\left|\sin\frac{a}{n_0-1}\right|\cdot\left|\sin\frac{a}{n_0}\right|\cdot\left|\sin\frac{a}{n_0+1}\right|\cdot ...\cdot\left|\sin\frac{a}{n}\right|\\ =&C\cdot n_0\,(n_0+1)\cdot ...\cdot n\left|\sin\frac{a}{n_0}\right|\cdot\left|\sin\frac{a}{n_0+1}\right|\cdot ...\cdot\left|\sin\frac{a}{n}\right|.\end{aligned}$$

Iz $n_0 < n_0+1 < ... < n-1 < n$ je $\frac{1}{n_0} > \frac{1}{n_0+1} > ... > \frac{1}{n-1} > \frac{1}{n}$, tj. $\frac{a}{n} < \frac{a}{n-1} < ... < \frac{a}{n_0+1} < \frac{a}{n_0} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, pa su sve vrijednosti $\sin\frac{a}{n_0}$, $\sin\frac{a}{n_0+1}$, ..., $\sin\frac{a}{n}$ pozitivne, tj. vrijedi

$$\begin{aligned}&\left|(-1)^n n! \sin a \sin\frac{a}{2}\cdot ...\cdot \sin\frac{a}{n}\right|\\ =&C\cdot n_0\,(n_0+1)\cdot ...\cdot n\sin\frac{a}{n_0}\sin\frac{a}{n_0+1}\cdot ...\cdot\sin\frac{a}{n}.\end{aligned}$$

Kako je $\frac{1}{n_0} \leq \frac{a}{n_0} < \frac{\pi}{2}$, $\frac{1}{n_0+1} \leq \frac{a}{n_0+1} < \frac{\pi}{2}$, ..., $\frac{1}{n} \leq \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}$, to iz činjenice da funkcija $\sin x$ raste na $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, dobijamo da je $\sin\frac{a}{n_0} \geq \sin\frac{1}{n_0}$, $\sin\frac{a}{n_0+1} \geq \sin\frac{1}{n_0+1}$, ..., $\sin\frac{a}{n} \geq \sin\frac{1}{n}$, pa vrijedi

$$\begin{aligned}&\left|(-1)^n n! \sin a \sin\frac{a}{2}\cdot ...\cdot \sin\frac{a}{n}\right|\\ =&C\cdot n_0\,(n_0+1)\cdot ...\cdot n\sin\frac{a}{n_0}\sin\frac{a}{n_0+1}\cdot ...\cdot\sin\frac{a}{n}\\ \geq&C\cdot n_0\,(n_0+1)\cdot ...\cdot n\sin\frac{1}{n_0}\sin\frac{1}{n_0+1}\cdot ...\cdot\sin\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ za $x > 0$.

Prilikom dokazivanja ovakvih nejednakosti obično koristimo diferencijalni ili integralni račun. Iskoristimo u ovom slučaju integralni račun.

Kako je $x > 0$, to ima smisla posmatrati interval $(0, x)$.

Iz $\sin t \leq t$ za $t \geq 0$, imamo da je $\sin t \leq t$ za $t \in (0, x)$.

Odavde dobijamo da je $\int\limits_0^x \sin t dt \leq \int\limits_0^x t dt$, tj. $-\cos t\Big|_0^x \leq \frac{t^2}{2}\Big|_0^x$, ili $-\cos x + 1 \leq \frac{x^2}{2}$, odnosno $\frac{x^2}{2} \geq 1 - \cos x$.

Možemo pisati, $\frac{t^2}{2} \geq 1 - \cos t$ za $t > 0$.

Specijalno, $\frac{t^2}{2} \geq 1 - \cos t$ za $t \in (0, x)$, pa imamo da je $\int\limits_0^x \frac{t^2}{2} dt \geq \int\limits_0^x (1 - \cos t)\, dt$, tj. $\frac{t^3}{6}\Big|_0^x \geq t\Big|_0^x - \sin t\Big|_0^x$, ili $\frac{x^3}{6} \geq x - \sin x$, odnosno $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Tako, vrijedi $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$ za $x > 0$.

Slijedi, $\frac{\sin x}{x} \geq 1 - \frac{x^2}{6}$, $x > 0$, pa je

$$\begin{aligned}
&\left|(-1)^n\, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}\right| \\
\geq& C \cdot n_0 \left(n_0 + 1\right) \cdot ... \cdot n \sin \frac{1}{n_0} \sin \frac{1}{n_0 + 1} \cdot ... \cdot \sin \frac{1}{n} \\
=& C \frac{\sin \frac{1}{n_0}}{\frac{1}{n_0}} \cdot \frac{\sin \frac{1}{n_0+1}}{\frac{1}{n_0+1}} \cdot ... \cdot \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} \\
\geq& C \left(1 - \frac{1}{6n_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6\left(n_0 + 1\right)^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right).
\end{aligned}$$

Kako je $6n_0^2 \geq n_0^2$, $6\left(n_0 + 1\right)^2 \geq \left(n_0 + 1\right)^2$, ..., $6n^2 \geq n^2$, to je $\frac{1}{6n_0^2} \leq \frac{1}{n_0^2}$, $\frac{1}{6(n_0+1)^2} \leq \frac{1}{(n_0+1)^2}$, ..., $\frac{1}{6n^2} \leq \frac{1}{n^2}$, te $-\frac{1}{6n_0^2} \geq -\frac{1}{n_0^2}$, $-\frac{1}{6(n_0+1)^2} \geq -\frac{1}{(n_0+1)^2}$, ..., $-\frac{1}{6n^2} \geq -\frac{1}{n^2}$, odnosno $1 - \frac{1}{6n_0^2} \geq 1 - \frac{1}{n_0^2}$, $1 - \frac{1}{6(n_0+1)^2} \geq 1 - \frac{1}{(n_0+1)^2}$, ..., $1 - \frac{1}{6n^2} \geq 1 - \frac{1}{n^2}$. Dobijamo,

$$\begin{aligned}
&\left|(-1)^n\, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}\right| \\
\geq& C \left(1 - \frac{1}{6n_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6\left(n_0 + 1\right)^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \\
\geq& C \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{\left(n_0 + 1\right)^2}\right) \cdot ... \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \\
=& C \frac{n_0^2 - 1}{n_0^2} \cdot \frac{\left(n_0^2 + 1\right)^2 - 1}{\left(n_0 + 1\right)^2} \cdot ... \cdot \frac{n^2 - 1}{n^2} \\
=& C \frac{\left(n_0 - 1\right)\left(n_0 + 1\right)}{n_0 \cdot n_0} \cdot \frac{n_0 \left(n_0 + 2\right)}{\left(n_0 + 1\right)\left(n_0 + 1\right)} \cdot ... \cdot \frac{(n - 1)(n + 1)}{n \cdot n} \\
=& \frac{\left(n_0 - 1\right)(n + 1)}{n_0 \cdot n} > 0.
\end{aligned}$$

Dakle, za $n \geq n_0$, vrijedi

$$0 < \frac{(n_0-1)(n+1)}{n_0 \cdot n} \leq \left| (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n} \right|.$$

Ako bi $\left|(-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right|$ težilo nuli kad $n \to +\infty$, onda bi iz dobijenih nejednakosti i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], imali da

$$\frac{(n_0-1)(n+1)}{n_0 \cdot n} \to 0$$

kad $n \to +\infty$, što je nemoguće jer $\frac{(n_0-1)(n+1)}{n_0 \cdot n} \to \frac{n_0-1}{n_0} > 0$ kad $n \to +\infty$.

Zaključujemo, $\left|(-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right|$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$.

Ako bi vrijedilo $(-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n} \to 0$ kad $n \to +\infty$, onda bi iz Zadatka 30 u [DzG1, str. 18] imali da i $\left|(-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right| \to 0$ kad $n \to +\infty$, što nije tačno.

Slijedi, $(-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$.

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ apsolutno konvergirao, to bi on i konvergirao, što nije slučaj, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Rezimirajmo, za $a \geq 1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \, n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno, te divergira (ne konvergira).

Napokon, neka je $a \leq -1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Možemo pisati, $a = -b$ za neko $b \geq 1$, $b \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kako je $1 \leq b$, to postoji $n_0 \in \mathbb{N}$, $n_0 > 1$, takav da je $b \leq n_0$.

Imamo, $\frac{b}{n_0} \leq 1$.

Definišimo, $C = (n_0-1)! \left|\sin b\right| \cdot \left|\sin \frac{b}{2}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\sin \frac{b}{n_0-1}\right|$.

Kako je $b \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $C > 0$.

Neka je $n \geq n_0$. Slijedi,

$$\begin{aligned}
&\left|(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right| = n! \left|\sin a\right| \cdot \left|\sin \frac{a}{2}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\sin \frac{a}{n}\right| \\
=& n! \left|\sin(-b)\right| \cdot \left|\sin\left(-\frac{b}{2}\right)\right| \cdot \ldots \cdot \left|\sin\left(-\frac{b}{n}\right)\right| \\
=& n! \left|-\sin b\right| \cdot \left|-\sin \frac{b}{2}\right| \cdot \ldots \cdot \left|-\sin \frac{b}{n}\right| = n! \left|\sin b\right| \cdot \left|\sin \frac{b}{2}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\sin \frac{b}{n}\right| \\
=& C \cdot n_0 (n_0+1) \cdot \ldots \cdot n \left|\sin \frac{b}{n_0}\right| \cdot \left|\sin \frac{b}{n_0+1}\right| \cdot \ldots \cdot \left|\sin \frac{b}{n}\right| \\
=& C \cdot n_0 (n_0+1) \cdot \ldots \cdot n \sin \frac{b}{n_0} \sin \frac{b}{n_0+1} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{b}{n} \\
\geq& C \cdot n_0 (n_0+1) \cdot \ldots \cdot n \sin \frac{1}{n_0} \sin \frac{1}{n_0+1} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{1}{n} \\
\geq& C \left(1 - \frac{1}{6n_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{6(n_0+1)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{6n^2}\right) \\
\geq& C \left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)\left(1 - \frac{1}{(n_0+1)^2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{(n_0-1)(n+1)}{n_0 \cdot n} > 0.
\end{aligned}$$

Tako, za $n \geq n_0$, vrijedi

$$0 < \frac{(n_0-1)(n+1)}{n_0 \cdot n} \leq \left|(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right|.$$

Odavde dobijamo da $\left|(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}\right|$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$, a onda i da $(-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$.

Drugim riječima, dobijamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ divergira (ne konvergira), te da on ne konvergira apsolutno.

Tako, za $a \leq -1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno, te divergira (ne konvergira).

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot \ldots \cdot \sin \frac{a}{n}$ konvergira apsolutno za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $|a| < 1$, $a \neq 0$, konvergira (ne divergira) za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ i $|a| < 1$, $a \neq 0$, te divergira za $|a| \geq 1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, ne konvergira apsolutno niti konvergira za $|a| \geq 1$, $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\, n!\sin a\sin\frac{a}{2}\cdot\ldots\cdot\sin\frac{a}{n}$ ne konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $|a|\geq 1$, $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, to dati red ne konvergira uslovno ni za jedno $a\in\mathbb{R}$. ■

◇ **Zadatak 7.1.9** Neka je $\{a_n\}$ niz takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\neq 0$, $a\in\mathbb{R}$ i $a_n\neq 0$ za sve $n\in\mathbb{N}$. Dokazati da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ ili oba apsolutno konvergiraju ili oba ne konvergiraju apsolutno.

**Dokaz:** Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = a\neq 0$, $a\in\mathbb{R}$, to po Zadatku 30 u [DzG1, str. 18], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n| = |a| > 0$.

Uzmimo neke konstante $c$ i $C$, takve da je $0<c<|a|<C$.

Sada je $(c, C)$ okolina granične vrijednosti $|a|$ niza $\{|a_n|\}$, pa po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], ova okolina sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{|a_n|\}$, tj. postoji indeks $n_0\in\mathbb{N}$, takav da je $c<|a_n|<C$ za sve $n\geq n_0$.

Neka je $n\geq n_0$. Dobijamo,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| = \left|\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}a_n}\right| = \frac{|a_{n+1}-a_n|}{|a_{n+1}|\,|a_n|}\\
<&\frac{|a_{n+1}-a_n|}{c\cdot c} = \frac{1}{c^2}\,|a_{n+1}-a_n|\,,\\
&|a_{n+1}-a_n| = |a_n|\,|a_{n+1}|\left|\frac{a_{n+1}}{a_na_{n+1}}-\frac{a_n}{a_na_{n+1}}\right|\\
=&|a_n|\,|a_{n+1}|\left|\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right| = |a_n|\,|a_{n+1}|\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|\\
<&C\cdot C\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| = C^2\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|.
\end{aligned}$$

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konvergira apsolutno, onda konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|$ (Definicija 7.1). Odavde, iz $\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right| < \frac{1}{c^2}\,|a_{n+1}-a_n|$, $n\geq n_0$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$, tj.

apsolutna konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ konvergira apsolutno, onda konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$. Odavde, iz $|a_{n+1}-a_n|<C^2\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$, $n\geq n_0$, i kriterija uspoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|$, tj. apsolutna konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konvergira apsolutno ako i samo ako apsolutno konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$.

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ne konvergira apsolutno.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|$ konvergirao, to bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ apsolutno konvergirao (Definicija 7.1), što nije slučaj, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|$ ne konvergira, tj. divergira.

Odavde, iz $|a_{n+1}-a_n|<C^2\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$, $n\geq n_0$, i kriterija uspoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$, tj. slijedi zaključak da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ ne konvergira apsolutno.

Obrnuto, ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ ne konvergira apsolutno, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|$ divergira.

Odavde, iz $\left|\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right|<\frac{1}{C^2}|a_{n+1}-a_n|$, $n\geq n_0$, i kriterija uspoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_{n+1}-a_n|$, tj. slijedi zaključak da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ne konvergira apsolutno.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ne konvergira apsolutno ako i samo ako ne konvergira apsolutno red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$.

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konvergira apsolutno, a da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ ne konvergira apsolutno.

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ konvergira apsolutno, to kako smo već vidjeli, konvergira apsolutno i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$.

Dakle, kontradikcija.

Analogno, pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ ne konvergira apsolutno, a da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ konvergira apsolutno, vodi u kontradikciju.

Zaključujemo, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_{n+1}-a_n)$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}\right)$ ili oba konvergiraju apsolutno ili oba ne konvergiraju apsolutno.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 7.1.10** Dokazati da ako svi podredovi[17] reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergiraju, da onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira apsolutno.

**Dokaz:** Pretpostavimo suprotno, da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ ne konvergira apsolutno.

Po pretpostavci svi podredovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergiraju, pa kako je i sam red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ podred reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ (podred samog sebe), to onda i on, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira.

[17]Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ red, i $\{p_n\}$ rastući niz prirodnih brojeva. Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_{p_n}$ kažemo da je **podred** reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Sada, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, tj. on konvergira uslovno (Definicija 7.6).

Odavde i iz Zadatka 7.6, slijedi da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ oba divergiraju, gdje je $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$ i $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$.

U rješenju Zadatka 7.6 smo vidjeli da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ nenegativni, i da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$.

Iz definicije vrijednosti $p_n$ i $q_n$ vidimo da je $p_n = a_n$ ako je $a_n > 0$, te $p_n = 0$ ako je $a_n \leq 0$.

Isto tako, $q_n = 0$ ako je $a_n \geq 0$, te $q_n = -a_n$ ako je $a_n < 0$.

Tako, ako je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ dat npr. sa

$$2 + (-1) + 0 + (-3) + (-4) + 0 + 2 + (-3) + 4 + 0 + 2 + (-2) + 2 + (-2) + ...$$

onda su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ dati sa

$$2 + 0 + 0 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 4 + 0 + 2 + 0 + 2 + 0 + ...$$

i

$$0 + 1 + 0 + 3 + 4 + 0 + 0 + 3 + 0 + 0 + 0 + 2 + 0 + 2 + ...,$$

redom.

Označimo sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ podred reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, koji se sastoji od svih pozitivnih članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (uzetih u nepromijenjenom poretku).

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ podred reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, koji se sastoji od svih negativnih članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (uzetih u nepromijenjenom poretku).

U slučaju navedenog primjera reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, imali bi da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ dati redom sa

$$2 + 2 + 4 + 2 + 2 + \ldots$$

i

$$(-1) + (-3) + (-4) + (-3) + (-2) + (-2) + \ldots \; .$$

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ je nastao izbacivanjem nula iz reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ je nastao množenjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ sa $-1$, a zatim izbacivanjem nula iz novonastalog reda.

Kako god, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ su podredovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, pa po pretpostavci zadatka oni konvergiraju.

Označimo sa $P_n$, $Q_n$, $R_n$ i $S_n$, $n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n})$, redom.

Jasno $P_n \leq R_n$ i $Q_n \leq S_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Odavde, iz divergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n})$.

Tako, u kontradikciju nas vodi činjenica da smo dobili da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{r_n}$ divergentan, a on je po pretpostavci konvergentan.

U kontradikciju možemo doći i pomoću reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n})$.

Naime, iz $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$.

Odavde, iz $Q_n \leq S_n$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, tj. slijedi da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n}) = +\infty$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n})$ ne samo da divergira, nego on divergira ka $+\infty$, tj. vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-a_{s_n}) = +\infty$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n} = -\infty$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{s_n}$ divergira, što je u kontradikciji sa pretpostavkom zadatka da on konvergira.

U kontradikciju nas je dovela pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno, pa ona nije tačna.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira apsolutno.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 7.1.11** Dokazati da ako redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ konvergiraju, da onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira apsolutno.

**Dokaz:** Iz pretpostavke zadatka, i Zadatka 46 u [DzG2, str. 110], imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$ konvergira.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira apsolutno (Definicija 7.1). ■

♢ **Zadatak 7.1.12** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ konvergentan red. Dokazati da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ apsolutno konvergentan red.

**Dokaz:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Sada je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergentan red [DzG2, str. 140].

Iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$, i Zadatka 7.1.11, slijedi apsolutna konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 7.1.13** Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ konvergira. Dokazati da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergiraju.

**Dokaz:** Iz pretpostavke zadatka i Zadatka 92 u [DzG2, str. 193], imamo da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ konvergiraju.

Ovo znači da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergiraju (Definicija 7.1).

Dokaz je završen. $\blacksquare$

$\diamondsuit$ **Zadatak 7.1.14** Neka su $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergentni redovi. Dokazati da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ apsolutno konvergentan red.

**Dokaz:** Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ su apsolutno konvergentni, pa su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ konvergentni (Definicija 7.1).

Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4], slijedi da $|a_n| \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$ granične vrijednosti 0 niza $\{|a_n|\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in N$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < |a_n| < 1$, tj. $0 \leq |a_n| < 1$.

Odavde, za $n \geq n_0$, slijedi da je $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq |b_n|$.

Tako, iz $|a_n b_n| \leq |b_n|$, $n \geq n_0$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$.

Drugim riječima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ apsolutno konvergira.

Dokaz je završen. $\blacksquare$

♢ **Zadatak 7.1.15** Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira a da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ divergira. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno.

**Dokaz:** Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, pa je dovoljno da dokažemo da on ne konvergira apsolutno (Definicija 7.6).

Pretpostavimo suprotno, da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira apsolutno.

Ovo znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$.

Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ i Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4], slijedi da $|a_n| \to 0$ kad $n \to +\infty$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$ granične vrijednosti 0 niza $\{|a_n|\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < |a_n| < 1$, tj. $0 \leq |a_n| < 1$.

Odavde, za $n \geq n_0$, slijedi da je $a_n^2 = |a_n|\,|a_n| \leq |a_n|$.

Tako, iz $a_n^2 \leq |a_n|$, $n \geq n_0$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

Ovo je kontradikcija sa pretpostavkom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ divergira.

U kontradikciju nas je dovela pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira apsolutno, pa ona nije tačna.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, pa on konvergira uslovno.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 7.1.16** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ uslovno konvergentan red. Dokazati da red

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ nije apsolutno konvergentan, gdje je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ proizvoljan red nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Dokaz:** Pretpostavimo suprotno, da postoji red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, nastao rearanžiranjem[18] članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, takav da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergentan red (Definicija 7.1).

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ proizvoljan red nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ apsolutno konvergentan, to po Teoremu 7.3, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ oba konvergiraju, i imaju jednake sume.

Postoji dakle konačan broj $S$ ($S \in \mathbb{R}$), takav da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = S$.

Neka je $M \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ proizvoljan broj takav da je $M \neq S$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je uslovno konvergentan red (Definicija 7.6), pa po Riemann-ovom[19] teoremu o redovima[20], postoji red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$, nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$,

[18]Vidjeti stranu 29 u [DzG2].

[19]Vidjeti notu 22 na strani 140 u [DzG2].

[20]Riemann-ov teorem o redovima ili Riemann-ov teorem o rearanžiranju navodimo bez dokaza. Teorem tvrdi da za dati uslovno konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i proizvoljnu konstantu $M \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, postoji red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$, nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, takav da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n = M$. Npr., alternirajući harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ je uslovno konvergentan red. Naime, po $(a)$ Zadatka 32 u [DzG2, str. 93] je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = \ln 2$, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ konvergentan. Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{1}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], to $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ nije apsolutno konvergentan red (Definicija 7.1), tj. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ je uslovno konvergentan red (Definicija 7.6). Tako, po Riemann-ovom teoremu o redovima, alernirajući harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ se može rear-

takav da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n = M$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, pa možemo smatrati da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Kako je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$ nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, to je onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n$ nastao rearanžiranjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Ovo, po već rečenome, znači da mora vrijediti $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} d_n = S$.

Dakle, kontradikcija, pa tvrdnja zadatka vrijedi. ■

◇ **Zadatak 7.1.17** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ uslovno konvergentan red. Dokazati da postoji apsolutno konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je uslovno konvergentan red (Definicija 7.6), pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1), tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ($S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, to postoji $S \in \mathbb{R}$, takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.

Tako, za $\varepsilon = \frac{1}{2}$, postoji indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N_1$, vrijedi $|S_n - S| < \frac{1}{2}$.

Odaberimo po volji neko $n_1 \geq N_1$, pa ga fiksirajmo. Vrijedi, $|S_{n_1} - S| < \frac{1}{2}$.

Isto tako, za $\varepsilon = \frac{1}{2^2}$, postoji indeks $N_2 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N_2$, vrijedi $|S_n - S| < \frac{1}{2^2}$.

---

anžirati tako da suma dobijenog reda bude jednaka $M$, gdje je $M$ unaprijed uzeta vrijednost iz $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Dodatno (informativno), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ se može rearanžirati tako da dobijeni red divergira, ali da nije $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} = +\infty$ ili $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n} = -\infty$, tj. tako da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{1}{n}$ nema sumu.

Uzmimo po volji neko $n_2 \geq N_2$, takvo da je $n_2 > n_1$, pa ga fiksirajmo. Imamo, $|S_{n_2} - S| < \frac{1}{2^2}$.

Nastavljajući ovako dalje, dolazimo do vrijednosti $n_k$, $k \in \mathbb{N}$, $n_1 < n_2 < ...$, takvih da je $|S_{n_k} - S| < \frac{1}{2^k}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, takav da je $b_1 = \sum\limits_{k=1}^{n_1} a_k$, $b_2 = \sum\limits_{k=n_1+1}^{n_2} a_k$, $b_3 = \sum\limits_{k=n_2+1}^{n_3} a_k$, ... .

Elemente $b_1$, $b_2$, ... možemo pisati u obliku $b_1 = S_{n_1}$, $b_2 = \sum\limits_{k=n_1+1}^{n_2} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n_2} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n_1} a_k = S_{n_2} - S_{n_1}$, $b_3 = \sum\limits_{k=n_2+1}^{n_3} a_k = \sum\limits_{k=1}^{n_3} a_k - \sum\limits_{k=1}^{n_2} a_k = S_{n_3} - S_{n_2}$, ... .

Tako, $b_k = S_{n_k} - S_{n_{k-1}}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$,

Sada, za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, vrijedi

$$\begin{aligned}
|b_k| &= \left|S_{n_k} - S_{n_{k-1}}\right| = \left|S_{n_k} - S + S - S_{n_{k-1}}\right| \\
&\leq |S_{n_k} - S| + \left|S_{n_{k-1}} - S\right| < \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1+2}{2^k} = 3 \cdot \frac{1}{2^k}.
\end{aligned}$$

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ [DzG2, str. 17], i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira apsolutno.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 7.1.18 (Putnam [3, 1940, 7])**[21] Neka su $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ konvergentni redovi, i $p \in \mathbb{N}$, $p \geq 2$. Dokazati da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)^p$.

[21] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

**Dokaz:** Kako su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ konvergentni, to su po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergentni i redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2a_n^2$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2b_n^2$.

Odavde i iz tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(2a_n^2 + 2b_n^2\right)$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)^2$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}&(a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 \\ =&a_n^2 + 2a_nb_n + b_n^2 + a_n^2 - 2a_nb_n + b_n^2 = 2a_n^2 + 2b_n^2,\end{aligned}$$

pa je

$$2a_n^2 + 2b_n^2 = (a_n + b_n)^2 + (a_n - b_n)^2 \geq (a_n - b_n)^2 .$$

Sada, iz $(a_n - b_n)^2 \leq 2a_n^2 + 2b_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(2a_n^2 + 2b_n^2\right)$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)^2$.

Odavde i iz Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4] imamo da je $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n)^2 = 0$.

Primijetimo da ako za niz $\{c_n\}$ vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n^2 = 0$, da je onda i $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

Zaista, neka je $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n^2 = 0$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan broj.

Za $\varepsilon^2 > 0$, iz $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n^2 = 0$ slijedi da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi

$$|c_n|^2 = \left|c_n^2\right| = \left|c_n^2 - 0\right| < \varepsilon^2,$$

tj. $|c_n| < \varepsilon$.

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $|c_n - 0| < \varepsilon$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = 0$.

Kako je $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n)^2 = 0$, to onda imamo da je $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_n - b_n) = 0$.

Odavde i iz Zadatka 30 u [DzG1, str. 18] vidimo da vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}|a_n - b_n| = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$ granične vrijednosti 0 niza $\{|a_n - b_n|\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < |a_n - b_n| < 1$, tj. $0 \leq |a_n - b_n| < 1$.

Kako je $p \geq 2$, to je odavde za $n \geq n_0$ zadovoljeno

$$|a_n - b_n|^p \leq |a_n - b_n|^2 = (a_n - b_n)^2 .$$

Sada, iz $|a_n - b_n|^p \leq (a_n - b_n)^2$, $n \geq n_0$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)^2$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}|a_n - b_n|^p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}|(a_n - b_n)^p|$.

ovo znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n - b_n)^p$ apsolutno konvergentan (Definicija 7.1), pa je po Teoremu 7.2 i konvergentan.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 7.1.19** Ako se apsolutna konvergencija datog reda može ustanoviti ojačanim kriterijem korijena, da li se onda ona može ustanoviti i ojačanim kriterijem količnika ?

**Rješenje:** U Zadatku 6.1.9 smo dokazali da je kriterij korijena (u formi Teorema 6.1) jači (snažniji) od kriterija količnika (u formi Teorema 5.1).

Preciznije, dokazali smo da ako konvergenciju pozitivnog reda možemo ustanoviti kriterijem količnika, tj. Teoremom 5.1, da onda njegovu konvergenciju možemo ustanoviti i kriterijem korijena, tj. Teoremom 6.1 (što je značilo da pomenuti kriterij korijena nije slabiji od pomenutog kriterija količnika), te da postoje pozitivni redovi koji konvergiraju po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.1, ali su takvi da kriterij količnika, tj. Teorem 5.1, nije primijenjiv za ispitivanje njihove konvergencije (primjer takvog reda je bio red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, $a_n = a^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj, $a_n = b^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ paran broj, gdje su $a$ i $b$ konstante, $0 < a < b < 1$).

U skladu sa upravo izloženim, za očekivati je da odgovor na postavljeno pitanje bude negativan.

Posmatramo dakle ojačani kriterij korijena, tj. Teorem 6.4, i ojačani kriterij količnika, tj. Teorem 5.3.

Ponovo ćemo upotrijebiti pomenuti red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = a + b^2 + a^3 + b^4 + ...$, gdje su $a$ i $b$ konstante, $0 < a < b < 1$.

Kako smo već istakli, ovdje je $a_n = a^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj, i $a_n = b^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ paran broj.

Posmatrajmo niz $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ ($a_1 = a$, $\sqrt{a_2} = b$, $\sqrt[3]{a_3} = a$, $\sqrt[4]{a_4} = b$, ...), i njegove podnizove $\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\}$ ($\sqrt{a_2} = b$, $\sqrt[4]{a_4} = b$, ...) i $\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\}$ ($a_1 = a$, $\sqrt[3]{a_3} = a$, $\sqrt[5]{a_5}$ $= a$, ...).

Jasno je da su svi članovi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$ sadržani u podnizovima $\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\}$ i $\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\}$.

Tako, $\sqrt[2n]{a_{2n}} = b$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i $\sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = a$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n]{a_{2n}}$ $= b$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} = a$.

Odavde i iz Definicije 7.11 u [DzG1, str. 91] vidimo da su $a$ i $b$ djelimični limesi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$.

Kako su u podnizovima $\left\{ \sqrt[2n]{a_{2n}} \right\}$ i $\left\{ \sqrt[2n-1]{a_{2n-1}} \right\}$ sadržani svi elementi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$, to su $a$ i $b$ jedini djelimični limesi niza $\left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\}$.

Po Teoremu 7.13 u [DzG1, str. 93] je $\rho_1 = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = a$ i $\rho_2 = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} =$ $b$.

Kako je $\rho_2 = b < 1$, to je po ojačanom kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.4, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergentan.

Dakle, po ojačanom kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.4, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je apsolutno konvergentan (Definicija 7.1).

U rješenju Zadatka 6.1.9 smo posmatrali niz $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ i njegove podnizove $\left\{ \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \right\}$ i $\left\{ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right\}$, i dobili da je $\frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = \frac{b^{2n}}{a^{2n-1}}$ i $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = \frac{a^{2n+1}}{b^{2n}}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Svi elementi niza $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$ su sadržani u podnizovima $\left\{ \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} \right\}$ i $\left\{ \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right\}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} = 0$.

Tako, 0 i $+\infty$ su jedini djelimični limesi niza $\left\{ \frac{a_{n+1}}{a_n} \right\}$, i vrijedi $r_1 = \underline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ $= 0$ i $r_2 = \overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$.

Pošto nije $r_2 < 1$ i nije $r_1 > 1$, to ni konvergenciju ni divergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ nismo u mogućnosti ustanoviti ojačanim kriterijem količnika, tj. Teoremom 5.3.

Dakle, apsolutnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne možemo ustanoviti ojačanim kriterijem količnika, tj. Teoremom 5.3.

Zaključujemo, odgovor na postavljeno pitanje je negativan. ■

♢ **Zadatak 7.1.20** Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i neka red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira apsolutno. Da li konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Naime, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa je po Zadatku 30 u [DzG1, str. 18] i $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$ granične vrijednosti 0 niza $\{|a_n|\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < |a_n| < 1$, tj. $0 \leq |a_n| < 1$.

Odavde, za $n \geq n_0$, slijedi da je $|a_n b_n| = |a_n|\,|b_n| \leq |b_n|$.

Osim toga, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je apsolutno konvergentan, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$ konvergentan (Definicija 7.1).

Tako, iz $|a_n b_n| \leq |b_n|$, $n \geq n_0$, konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n b_n|$.

Drugim riječima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ apsolutno konvergira, pa i konvergira po Teoremu 7.2. ■

♢ **Zadatak 7.1.21** Ako je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, da li onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno ?

**Rješenje:** Odgovor je negativan.

Naime, pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno.

To po Definiciji 7.6 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira (Definicija 7.1).

Kako je $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, to je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira, što je u kontradikciji sa činjenicom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne konvergira uslovno. ■

♢ **Zadatak 7.1.22** Da li je kriterij količnika ili kriterij korijena dovoljan za utvrđivanje uslovne konvergencije reda ?

**Rješenje:** Odgovor je negativan (u opštem slučaju).

Naime, po Definiciji 7.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno ako on konvergira ali ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ divergira.

Kako su kriterij količnika i kriterij korijena kriteriji za ispitivanje konvergencije pozitivnih (nenegativnih) redova, to nam oni mogu poslužiti za utvrđivanje divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$, ali ne i za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (u opštem slučaju). ■

♢ **Zadatak 7.1.23** Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira, i da je $0 \leq a_{n+k} \leq b_n$ za neko $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1000$, i sve $n \geq 1000$. Da li tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira apsolutno ?

**Rješenje:** Odgovor je pozitivan.
Po pretpostavci, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1000$ je konstanta.
Stavimo, $n_0 = 1000$ i $c_n = (-1)^{n+k} a_{n+k}$, $n \geq n_0$.
Imamo, $0 \leq |c_n| = a_{n+k} \leq b_n$ za $n \geq n_0$.
Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} b_n$.

Odavde, iz $0 \leq |c_n| \leq b_n$, $n \geq n_0$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} |c_n| = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^{n+k} a_{n+k}\right| = \sum\limits_{n=n_0+k}^{+\infty} |(-1)^n a_n|$.

Tako, po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n a_n|$.

Ovo po Definiciji 7.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira apsolutno. ∎

♢ **Zadatak 7.1.24** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan pozitivan red. Da li tada konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.
Naime, po pretpostavci red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |(-1)^n a_n|$ konvergira.
Ovo po Definiciji 7.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira apsolutno.
Sada, iz Teorema 7.2 imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$ konvergira. ∎

♢ **Zadatak 7.1.25** Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Da li tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+n^2}$ konvergira apsolutno ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.
Naime, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa je po Zadatku 30 u [DzG1, str. 18], i $\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n| = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1,1)$ granične vrijenosti 0 niza $\{|a_n|\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-1 < |a_n| < 1$, tj. $0 \leq |a_n| < 1$.

Za $n \geq n_0$, imamo

$$\left|\frac{a_n}{a_n^2 + n^2}\right| = \frac{|a_n|}{a_n^2 + n^2} < \frac{1}{a_n^2 + n^2} \leq \frac{1}{n^2}.$$

Tako, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ [DzG2, str. 140], nejednakosti $\left|\frac{a_n}{a_n^2+n^2}\right| < \frac{1}{n^2}$, $n \geq n_0$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{a_n}{a_n^2+n^2}\right|$.

Ovo po Definiciji 7.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2+n^2}$ konvergira apsolutno. ■

♢ **Zadatak 7.1.26** Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira, da li onda divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Naime, po Teoremu 7.2, iz apsolutne konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ (Definicija 7.1), slijedi njegova konvergencija, tj. iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Kontrapozicija posljednje tvrdnje kaže da iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$. ■

♢ **Zadatak 7.1.27** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red. Da li je tačno da je onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ili apsolutno konvergentan ili uslovno konvergentan ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Naime, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ ili konvergira ili ne konvergira.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira apsolutno po Definiciji 7.1.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ ne konvergira, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, to on onda konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

◇ **Zadatak 7.1.28** Za $a \in \mathbb{R}$, ispitati konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

**Rješenje:** Neka je $a = 0$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada $\left|\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right| = |\sin 2n\pi| = 0$.

Ovo znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$ konvergentan (i suma mu je jednaka 0).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergira apsolutno za $a = 0$ (Definicija 7.1), pa i konvergira (ne divergira) za $a = 0$ (Teorem 7.2).

Neka je sada $a \neq 0$.

Funkcija $\sin x$ je $2\pi$ periodična funkcija, pa za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2} - 2n\pi\right) = \sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\right)$$

$$= \sin\left(2\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+a^2}+n}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right) = \sin\left(2\pi \cdot \frac{n^2+a^2-n^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)$$

$$= \sin\frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.$$

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ granične vrijednosti 0 niza $\left\{\frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-\frac{\pi}{2} < \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$, tj. $0 < \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$.

Tako, za $n \geq n_0$ je $0 < \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$, pa za $n \geq n_0$ vrijedi $\sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} > 0$.

Posmatrajmo pozitivan red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$.

Uporedimo ovaj red sa pozitivnim redom $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{n}$.

Koristimo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1.

Poznato je da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} \cdot \frac{\sqrt{n^2+a^2}+n}{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}} \cdot \frac{2}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}+1} = 1 \cdot 1 = 1 = L.$$

Pošto je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to po *1.* Teorema 2.1, redovi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{n}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi da divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{n}$.

Kako smo već rekli, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi divergencija reda

$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{2\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergirao, to bi bilo u suprotnosti sa činjenicom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ divergira.

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergirao apsolutno, to bi on i konvergirao, što bi ponovo bilo u suprotnosti sa činjenicom da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ divergira.

Tako, za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira) za $a = 0$, te divergira (ne konvergira), ne konvergira apsolutno za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Po Definiciji 7.6, uslovnu konvergenciju reda posmatramo tamo gdje red ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ ne konvergira tamo gdje on ne konvergira apsolutno, tj. za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ ne konvergira uslovno ni za jedno $a \in \mathbb{R}$. ■

◇ **Zadatak 7.1.29** Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno, i da je $p_n = \frac{|a_n|+a_n}{2}$, $q_n = \frac{|a_n|-a_n}{2}$. Neka su $\{P_n\}$ i $\{Q_n\}$ nizovi parcijalnih suma redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$, redom. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.

**Dokaz:** Vidimo da su zadovoljene pretpostavke Zadatka 7.1.6.

Po Zadatku 7.1.6, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n$ oba divergiraju, i vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} p_n = +\infty$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q_n = +\infty$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira uslovno, pa on konvergira (Definicija 7.6).
Ovo znači da konvergira niz $\{S_n\}$.
Po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], niz $\{S_n\}$ je ograničen.
Sada, za dovoljno veliko $n \in \mathbb{N}$, imamo

$$\begin{aligned}\frac{P_n}{Q_n} &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|+a_k}{2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|-a_k}{2}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|+a_k}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|-a_k}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|-a_k}{2}}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{|a_k|-a_k}{2}} \\ &= \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + a_n}{Q_n} = \frac{S_n + Q_n}{Q_n} = \frac{S_n}{Q_n} + 1.\end{aligned}$$

Niz $\{S_n\}$ je ograničen, a $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = +\infty$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{S_n}{Q_n} = 0$, tj. vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{P_n}{Q_n} = 1$.
Dokaz je završen. ■

## 7.2 Redovi razmatrani u sklopu lekcije apsolutna i uslovna konvergencija

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin n}{n^2}$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \ln n \rfloor}}{n}$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{an}{n+1}\right)^n$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{a^{n^2}}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^{\ln n}}{n^a}$

(6) $\sum_{n=n_a}^{+\infty} \frac{a^{n-1}}{na^{n-1} + \ln n}$

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|a_n| \pm a_n}{2}$

(8) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\sqrt[n]{n} - 1\right)^n$

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n n! \sin a \sin \frac{a}{2} \cdot ... \cdot \sin \frac{a}{n}$

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n}\right)$

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$

(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

(14) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n - b_n)^p$

(16) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n$

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{a_n^2 + n^2}$

(18) $\sum_{n=1}^{+\infty} |a_n|$

(19) $\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(2\pi\sqrt{n^2 + a^2}\right)$

# 8 Alternirajući redovi

Kako smo vidjeli u Definiciji 7.6, red konvergira uslovno ako on ne konvergira apsolutno, ali konvergira uobičajeno (klasično). Tako, da bi konstatovali da dati red konvergira uslovno, možemo rezonovati na sljedeći način.

Neka je u pitanju red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Prvo, na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ primijenimo neki od kriterija za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova (rađen u ranijim sekcijama). Ako se ispostavi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ ne konvergira, onda nam za uslovnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ostaje da dokažemo da on konvergira.

Primijetimo da za ispitivanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ možemo primijeniti Definiciju 1.1 u [DzG2, str. 1], po kojoj je red konvergentan ako je konvergentan niz njegovih parcijalnih suma. Ono, bitnije, što treba da uočimo, jeste to da mi pored pomenute Definicije 1.1, za sada nemamo na raspolaganju alat (nemamo razvijen aparat) kojim bismo ispitali konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Cilj ove sekcije je da izvedemo jednostavan i lagan za primjenu kriterij za ispitivanje konvergencije određene klase redova, tzv. klase alternirajućih redova. Kriterij je poznat kao kriterij za alternirajuće redove, ili kao Leibnitz-ov (Lajbnicov[22]) kriterij.

**Definicija 8.1 Alternirajući red** je red kod kojeg nakon pozitivnog (negativnog) člana dolazi negativan (pozitivan) član, pa onda opet pozitivan (negativan) član, itd.

[22]**Gottfried Wilhelm (von) Leibnitz**, 1646-1716. god. n.e., njemački matematičar, filozof, naučnik i doplomat. Jedna je od najistaknutijih figura kako u historiji filozofije, tako i u historiji matematike. Pisao je radove iz filozofije, teologije, etike, politike, prava, filozofije i lingvistike. Dao je veliki doprinos fizici i tehnologiji. Pojmio je elemente teorije vjerovatnoće, biologije, medicine, geologije, psihologije, lingvistike i informatike, koji su se učvrstili u nauci mnogo godina poslije. Osmislio je katalo ški sistem koji bi služio kao vodič najvećim bibliotekama. Lajbnicovi doprinosi pomenutoj ogromnoj lepezi tema su bili razbacani u raznim naučnim časopisima, desetinama hiljada pisama, te u neobjavljenim rukopisima. Pisao je prvenstveno na latinskom francuskom i njemačkom, ali i na engleskom, italijanskom i holandskom jeziku. U ulozi matematičara, najveći doprinos je dao u razvoju osnovnih ideja diferencijalnog i integralnog računa (nezavisno od rada i djelovanja Isaka Njutna). Lajbnicova notacija je postala konvencionalni, i među ostalim, egzaktniji način zapisivanja pojmova kalkulusa.

Možemo ga pisati u jednom od oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ili $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}a_n$, gdje je $a_n \geq 0$.

**Teorem 8.2 (Kriterij za alternirajuće redove)** *Posmatrajmo alternirajući red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Pretpostavimo da su zadovoljeni sljedeći uslovi:*

1. *$\{a_n\}$ je u konačnici[23] nerastući niz, tj. postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$.*
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

*Tada, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergira (označimo sa $S$ njegovu sumu a sa $\{S_n\}$ niz njegovih parcijalnih suma).*

*Ako je $N$ neparan broj, onda je $S = \sum\limits_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}a_n + \sum\limits_{n=N}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, a za $k \geq N$, vrijedi*

$$S_{k+1} \leq S \leq S_k$$

*ako je $k$ neparan broj, ili ekvivalentno*

$$S_k \leq S \leq S_{k-1}$$

*ako je $k$ paran broj. Dakle, za $k \geq N$, $S$ i $S_k$ se ne mogu razlikovati za više od $a_{k+1}$.*

*Ako je $N$ paran broj, onda je $S = \sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n + \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, a za $k \geq N+1$, vrijedi*

$$S_{k+1} \leq S \leq S_k$$

*ako je $k$ neparan broj, ili ekvivalentno*

[23] Vidjeti Napomenu 1.2.

$$S_k \leq S \leq S_{k-1}$$

*ako je $k$ paran broj. Sada, za $k \geq N+1$, $S$ i $S_k$ se ne mogu razlikovati za više od $a_{k+1}$.*

**Dokaz:** Imamo da je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \geq N$, tj. da je $a_{N+1} \leq a_N$, $a_{N+2} \leq a_{N+1}$, ..., odnosno

$$a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq ... \ .$$

Pretpostavimo prvo da je $N$ neparan broj.

Posmatrajmo zbog toga red (želimo da red počinje sa nenegativnom članom) $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, tj. $N$-ti ostatak reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (vidjeti Definiciju 1.5 u [DzG2]).

Označimo sa $\left\{S_n^{'}\right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Imamo, $S_n^{'} = \sum\limits_{k=N}^{N+n-1} (-1)^{k-1} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo podnizove $\left\{S_{2n-1}^{'}\right\}$ i $\left\{S_{2n}^{'}\right\}$ niza $\left\{S_n^{'}\right\}$. Imamo,

$$\begin{aligned}
S_{2n-1}^{'} = &\sum_{k=N}^{N+2n-2} (-1)^{k-1} a_k \\
= &(-1)^{N-1} a_N + (-1)^{N} a_{N+1} + (-1)^{N+1} a_{N+2} + (-1)^{N+2} a_{N+3} + ... \\
&+ (-1)^{N+2n-3} a_{N+2n-2} \\
= &a_N - a_{N+1} + a_{N+2} - a_{N+3} + ... + a_{N+2n-2} \\
= &(a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ... \\
&+ (a_{N+2n-4} - a_{N+2n-3}) + a_{N+2n-2},
\end{aligned}$$

pa je zbog $a_N \geq a_{N+1} \geq a_{N+2} \geq ...$, i $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, zadovoljeno $S_{2n-1}^{'} \geq 0$.

Ovo znači da je $\left\{S_{2n-1}^{'}\right\}$ nenegativan niz. Osim toga,

$$\begin{aligned} S'_{2n+1} = S'_{2(n+1)-1} =& (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ...+ \\ & (a_{N+2n-2} - a_{N+2n-1}) + a_{N+2n} \\ =& (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ...+ \\ & (a_{N+2n-4} - a_{N+2n-3}) + (a_{N+2n-2} - a_{N+2n-1}) + a_{N+2n}, \end{aligned}$$

pa je $S'_{2n+1} \leq S'_{2n-1}$ ako i samo ako je $-a_{N+2n-1} + a_{N+2n} \leq 0$ ako i samo ako je $a_{N+2n-1} \geq a_{N+2n}$, što je tačno.

Dakle, $\left\{S'_{2n-1}\right\}$ je nerastući niz koji je ograničen odozdo nulom, pa je po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 49, Teo. 5.5], konvergentan, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n-1} = S' = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} S'_{2n-1}$.

Po karakterizaciji infimuma [DzG1, str. 153], vrijedi $S' \leq S'_{2n-1}$, pa iz $S'_{2n+1} \leq S'_{2n-1}$, imamo da je

$$S' \leq ... \leq S'_{2n+1} \leq S'_{2n-1} \leq ... \leq S'_3 \leq S'_1.$$

Sada je,

$$\begin{aligned} S'_{2n} =& \sum_{k=N}^{N+2n-1} (-1)^{k-1} a_k = \sum_{k=N}^{N+2n-2} (-1)^{k-1} a_k + (-1)^{N+2n-2} a_{N+2n-1} \\ =& S'_{2n-1} + (-1) \cdot a_{N+2n-1}. \end{aligned}$$

Po pretpostavci je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{N+2n-1} = 0$.

Sada, iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} S'_{2n} =& \lim_{n\to+\infty} S'_{2n-1} + \lim_{n\to+\infty} (-1) \cdot \lim_{n\to+\infty} a_{N+2n-1} \\ =& S' + (-1) \cdot 0 = S'. \end{aligned}$$

Ovo znači da je i niz $\left\{S'_{2n}\right\}$ konvergentan, i da vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = S' = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n-1}$.

U podnizovima $\left\{S'_{2n-1}\right\}$ i $\left\{S'_{2n}\right\}$ su sadržani svi elementi niza $\left\{S'_{n}\right\}$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} S'_{2n} = S'$, to je $S'$ onda jedini djelimični limes niza $\left\{S'_{n}\right\}$ (vidjeti Definiciju 7.11 u [DzG1, str. 91]).

Po Teoremu 7.13 u [DzG1, str. 93], vrijedi $\varliminf\limits_{n\to+\infty} S'_{n} = S'$ i $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} S'_{n} = S'$. Ovo, po Posljedici 7.14 u [DzG1, str. 100], znači da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S'_{n} = S'$, tj. to znači da je i niz $\left\{S'_{n}\right\}$ parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergentan, pa je i red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergentan i suma mu iznosi $S'$. Ovo po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], znači da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, i da mu je suma $S$ jednaka $S = \sum\limits_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} a_n + S'$.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
S'_{2n} =& S'_{2n-1} - a_{N+2n-1} \\
=& (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ... \\
&+ (a_{N+2n-4} - a_{N+2n-3}) + (a_{N+2n-2} - a_{N+2n-1}) \geq 0,
\end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned}
S'_{2n+2} =& S'_{2(n+1)} \\
=& (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ... + (a_{N+2n} - a_{N+2n-1}) \\
=& (a_N - a_{N+1}) + (a_{N+2} - a_{N+3}) + ... \\
&+ (a_{N+2n-2} - a_{N+2n-1}) + (a_{N+2n} - a_{N+2n+1}) \\
=& S'_{2n} + (a_{N+2n} - a_{N+2n+1}) \geq S'_{2n}.
\end{aligned}$$

Dakle, $\left\{S'_{2n}\right\}$ je neopadajući niz (ograničen odozdo nulom).

Osim toga, možemo pisati,

$$
\begin{aligned}
S_{2n}^{'} =& a_N - (a_{N+1} - a_{N+2}) - (a_{N+3} - a_{N+4}) - ... \\
& - (a_{N+2n-3} - a_{N+2n-2}) - a_{N+2n-1} \leq a_N.
\end{aligned}
$$

Ovo znači da je niz $\left\{ S_{2n}^{'} \right\}$ ograničen odozgo sa $a_N$.

Pošto je $\left\{ S_{2n}^{'} \right\}$ neopadajući niz koji je ograničen odozgo, to je on po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4] konvergentan (da je niz $\left\{ S_{2n}^{'} \right\}$ konvergentan, to već znamo i bez Vajerštrasovog teorema), i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n}^{'} = S^{'} = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_{2n}^{'}$.

Po karakterizaciji supremuma, vrijedi $S_{2n}^{'} \leq S^{'}$, pa iz $S_{2n}^{'} \leq S_{2n+2}^{'}$, imamo da je

$$
\begin{aligned}
0 \leq& S_2^{'} \leq S_4^{'} \leq ... \leq S_{2n}^{'} \leq S_{2n+2}^{'} \leq ... \leq S^{'} \leq ... \\
\leq& S_{2n+1}^{'} \leq S_{2n-1}^{'} \leq ... \leq S_3^{'} \leq S_1^{'}.
\end{aligned}
$$

Možemo pisati,

$$
\begin{aligned}
0 \leq & \sum_{k=N}^{N+1} (-1)^{k-1} a_k \leq \sum_{k=N}^{N+3} (-1)^{k-1} a_k \leq ... \leq \sum_{k=N}^{N+2n-1} (-1)^{k-1} a_k \\
\leq & \sum_{k=N}^{N+2n+1} (-1)^{k-1} a_k \leq ... \leq S^{'} \leq ... \leq \sum_{k=N}^{N+2n} (-1)^{k-1} a_k \leq \sum_{k=N}^{N+2n-2} (-1)^{k-1} a_k \\
\leq & ... \leq \sum_{k=N}^{N+2} (-1)^{k-1} a_k \leq \sum_{k=N}^{N} (-1)^{k-1} a_k.
\end{aligned}
$$

Ovdje, dodavanjem $\sum\limits_{k=1}^{N-1} (-1)^{k-1} a_k$, dobijamo

$$
\begin{aligned}
S_{N+1} \leq & S_{N+3} \leq ... \leq S_{N+2n-1} \leq S_{N+2n+1} \leq ... \\
& \leq S \leq ... \leq S_{N+2n} \leq S_{N+2n-2} \leq ... \leq S_{N+2} \leq S_N,
\end{aligned}
$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Dakle, $S_{N+1} \leq S \leq S_N$, $S_{N+3} \leq S \leq S_{N+2}$, ..., $S_{N+2n-1} \leq S \leq S_{N+2n-2}$, $S_{N+2n+1} \leq S \leq S_{N+2n}$, ... .

Kraće, za $k \geq N$ (ne zaboravimo da je $N \in \mathbb{N}$ neparan broj), vrijedi

$$S_{k+1} \leq S \leq S_k$$

ako je $k$ neparan broj, ili ekvivalentno

$$S_k \leq S \leq S_{k-1}$$

ako je $k$ paran broj.

Posmatrajmo npr. nejednakosti

$$S_{N+1} \leq S_{N+3} \leq S \leq S_{N+2} \leq S_N.$$

Odavde je,

$$\begin{aligned}
|S - S_N| &\leq |S_{N+1} - S_N| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{N+1} (-1)^{k-1} a_k - \sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} a_k \right| \\
&= \left| (-1)^N a_{N+1} \right| = a_{N+1}, \\
|S - S_{N+1}| &\leq |S_{N+2} - S_{N+1}| = a_{N+2}, \\
|S - S_{N+2}| &\leq |S_{N+3} - S_{N+2}| = a_{N+3},
\end{aligned}$$

itd., tj. $|S - S_k| \leq a_{k+1}$ za sve $k \geq N$.

Drugim riječima, za $k \geq N$, $S$ i $S_k$ se ne mogu razlikovati za više od $a_{k+1}$.

Pretpostavimo sada da je $N$ paran broj.

Shodno tome, posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n = \sum\limits_{n=N_1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ (ponovo želimo da prvi član reda bude nenegativan).

Red $\sum\limits_{n=N_1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je $(N+1)$-vi ostatak reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$. Pri tome, $N_1$ je neparan broj, pa za red $\sum\limits_{n=N_1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ vrijede osobine izvedene za slučaj neparnog $N$.

Označimo sa $\left\{S_n^{'}\right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N_1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

Dakle, $S_n^{'}=\sum\limits_{k=N_1}^{N_1+n-1}(-1)^{k-1}a_k,\ n\in\mathbb{N}$.

Posmatrajmo podnizove $\left\{S_{2n-1}^{'}\right\}$ i $\left\{S_{2n}^{'}\right\}$ niza $\left\{S_n^{'}\right\}$.

Kao i u slučaju neparnog $N$, dobijamo da je niz $\left\{S_{2n-1}^{'}\right\}$ nenegativan, nerastući, pa onda i konvergentan, te da je $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n-1}^{'}=S^{'}=\inf\limits_{n\in\mathbb{N}}S_{2n-1}^{'}$, za neki konačan broj $S^{'}$.

Pri tome je

$$S^{'}\leq ...\leq S_{2n+1}^{'}\leq S_{2n-1}^{'}\leq ...\leq S_3^{'}\leq S_1^{'}.$$

Dalje je $\left\{S_{2n}^{'}\right\}$ konvergentan niz, sa $\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}^{'}=S^{'}$, pa je i niz $\left\{S_n^{'}\right\}$ konvergentan niz sa $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n^{'}=S^{'}$. Dakle, red $\sum\limits_{n=N_1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ je konvergentan, i suma mu je jednaka $S^{'}$.

Sada je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergentan, i suma $S$ mu je jednaka

$S=\sum\limits_{n=1}^{N_1-1}(-1)^{n-1}a_n+S^{'}=\sum\limits_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}a_n+S^{'}$.

Osim toga, niz $\left\{S_{2n}^{'}\right\}$ je neopadajući niz, ograničen odozdo nulom, i ograničen odozgo sa $a_{N_1}$.

Dakle, po Vajerštrasovom teoremu, za niz $\left\{S_{2n}^{'}\right\}$ vrijedi

$\lim\limits_{n\to+\infty}S_{2n}^{'}=S^{'}=\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}S_{2n}^{'}$.

Zaključujemo,

$$\begin{aligned}0\leq &S_2^{'}\leq S_4^{'}\leq ...\leq S_{2n}^{'}\leq S_{2n+2}^{'}\leq ...\leq S^{'}\leq ...\\ \leq &S_{2n+1}^{'}\leq S_{2n-1}^{'}\leq ...\leq S_3^{'}\leq S_1^{'},\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{k=N+1}^{N+2} (-1)^{k-1} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{N+4} (-1)^{k-1} a_k \leq ... \leq \sum_{k=N+1}^{N+2n} (-1)^{k-1} a_k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{N+2n+2} (-1)^{k-1} a_k \leq ... \leq S' \leq ... \leq \sum_{k=N+1}^{N+2n+1} (-1)^{k-1} a_k \\ &\leq \sum_{k=N+1}^{N+2n-1} (-1)^{k-1} a_k \leq ... \leq \sum_{k=N+1}^{N+3} (-1)^{k-1} a_k \leq \sum_{k=N+1}^{N+1} (-1)^{k-1} a_k. \end{aligned}$$

Dodavanjem $\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} a_k$, dobijamo

$$\begin{aligned} S_{N+2} \leq & S_{N+4} \leq ... \leq S_{N+2n} \leq S_{N+2n+2} \leq ... \\ & \leq S \leq ... \leq S_{N+2n+1} \leq S_{N+2n-1} \leq ... \leq S_{N+3} \leq S_{N+1}, \end{aligned}$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Dakle, $S_{N+2} \leq S \leq S_{N+1}$, $S_{N+4} \leq S \leq S_{N+3}$, ..., $S_{N+2n} \leq S \leq S_{N+2n-1}$, $S_{N+2n+2} \leq S \leq S_{N+2n+1}$, ... .

Kraće, za $k \geq N+1$ (ne zaboravimo da je $N \in \mathbb{N}$ paran broj), vrijedi

$$S_{k+1} \leq S \leq S_k$$

ako je $k$ neparan broj, ili ekvivalentno

$$S_k \leq S \leq S_{k-1}$$

ako je $k$ paran broj.

Ako posmatramo npr. nejednakosti

$$S_{N+2} \leq S_{N+4} \leq S \leq S_{N+3} \leq S_{N+1},$$

onda je

$$\begin{aligned}
|S - S_{N+1}| &\leq |S_{N+2} - S_{N+1}| = a_{N+2}, \\
|S - S_{N+2}| &\leq |S_{N+3} - S_{N+2}| = a_{N+3}, \\
|S - S_{N+3}| &\leq |S_{N+4} - S_{N+3}| = a_{N+4},
\end{aligned}$$

itd., tj. $|S - S_k| \leq a_{k+1}$ za sve $k \geq N + 1$.

Dakle, za $k \geq N + 1$, $S$ i $S_k$ se ne mogu razlikovati za više od $a_{k+1}$.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 8.3** Ispitati ponašanje reda $\frac{1}{4} - \frac{1}{7} + \frac{1}{12} - \frac{1}{19} + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3}$.

**Rješenje:** Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2 + 3} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

gdje je $a_n = \frac{1}{n^2+3} > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Vidimo da je dati red alternirajući (Definicija 8.1), pa njegovu konvergenciju možemo pokušati ispitati upotrebom kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2.

Jasno je da je

$$a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2 + 3} < \frac{1}{n^2 + 3} = a_n,$$

za sve $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 1$), te da je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Ovo po Teoremu 8.2 znači da dati red konvergira.

Primijetimo da možemo rezonovati i drugačije.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3}$.

Jasno je da vrijedi $\frac{1}{n^2+3} < \frac{1}{n^2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ (Teorem 4.12), i kriterija upoređivanja (Teorem 1.1), slijedi konvergencija reda

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3} \right|.$$

Ovo po Definiciji 7.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3}$ konvergira apsolutno.

Osim toga, to dalje po Teoremu 7.2 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2+3}$ i konvergira. ■

**Primjer 8.4** Ispitati ponašanje reda $\frac{1}{2} - \frac{2}{5} + \frac{3}{10} - \frac{4}{17} + ... = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$.

**Rješenje:** Poučeni prethodnim primjerom, možemo pokušati odmah ispitati apsolutnu konvergenciju datog reda.

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left| (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} \right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}.$$

U skladu sa Napomenom 4.13, brojnik opšteg člana posljednjeg reda je stepena 1, a nazivnik stepena 2, pa je pomenuti opšti član, ili slobodnije govoreći, posljednji red, stepena $1 - 2 = -1$.

Poredimo ga onda sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Koristimo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1 (vidjeti Primjer 4.14). Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n}{n^2+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2+1} = 1 = L.$$

Pošto je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to po *1.* Teorema 2.1, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je $p$-red kod kojeg je $p = 1$, pa je on po Teoremu 4.12, divergentan.

Ovo znači da je i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n^2+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}\right|$, divergentan.

Po Definiciji 7.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ ne konvergira onda apsolutno.

Dakle, ne možemo rezonovati kao u prethodnom primjeru, i tvrditi bilo šta o konvergenciji reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$. Naime, nije zadovoljena pretpostavka Teorema 7.2, a to je da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ apsolutno konvergira. Drugim riječima, mi moramo posebno ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ konvergira ili ne. Naime, ako neki red ne konvergira apsolutno, onda mi ne možemo tvrditi (bez da dokažemo), da taj red konvergira ili divergira, jer desit će se da neki red ne konvergira apsolutno a da konvergira uobičajeno (uslovna konvergencija opisana Definicijom 7.6), dok će se za neki drugi red koji ne konvergira apsolutno desiti da ne konvergira ni klasično. Npr., red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ ne konvergira apsolutno, ali konvergira uobičajeno (Napomena 7.5), dok red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ne konvergira apsolutno, ali isto tako ne konvergira ni klasično.

Ispitajmo konvergenciju (klasičnu) datog reda.

Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

gdje je $a_n = \frac{n}{n^2+1} > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Dati red je tako alternirajući, pa za ispitivanje njegove konvergencije možemo pokušati primijeniti kriterij za alternirajuće redove, tj. Teorem 8.2.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}
& a_{n+1} - a_n \\
=& \frac{n+1}{(n+1)^2+1} - \frac{n}{n^2+1} = \frac{(n+1)\left(n^2+1\right) - n\left(n^2+2n+2\right)}{(n^2+2n+2)\,(n^2+1)} \\
=& \frac{n^3+n+n^2+1-n^3-2n^2-2n}{(n^2+2n+2)\,(n^2+1)} = \frac{-n^2-n+1}{(n^2+2n+2)\,(n^2+1)}.
\end{aligned}$$

Jasno je da je posljednji izraz negativan (jer $n \in \mathbb{N}$).

Dakle, $a_{n+1} - a_n < 0$, tj. $a_{n+1} < a_n$ za $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je i $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n}{n^2+1} = 0$, to su zadovoljeni uslovi Teorema 8.2, pa je po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ konvergentan.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ nije apsolutno konvergentan, ali je konvergentan klasično (uobičajeno). Ovo, po Definiciji 7.6, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+1}$ konvergira uslovno.

Da je niz $\{a_n\}$ opadajući, mogli smo zaključiti i drugačije.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ na intervalu $I = [1, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je neprekidna na $I$, ima izvod bar unutar $I$, i vrijedi

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \left(x^2+1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{-x^2+1}{\left(x^2+1\right)^2}.$$

Za $x \in (1, +\infty)$ je $x^2 > 1$, tj. $-x^2 + 1 < 0$, pa je $f'(x) < 0$ unutar $I$.

Osim toga, $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $-x^2 + 1 = 0$ ako i samo ako je $x^2 = 1$ ako i samo ako je $x = 1$ ili $x = -1$, pa ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$, na kojem je $f'(x) \equiv 0$.

Ovo znači da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $I$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]). Slijedi,

$$f(1) > f(2) > ... > f(n) > f(n+1) > ...,$$

tj.

$$\frac{1}{1^2+1} > \frac{2}{2^2+1} > ... > \frac{n}{n^2+1} > \frac{n+1}{(n+1)^2+1} > ... .$$

Dakle,

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+1} < \frac{n}{n^2+1} = a_n$$

za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. niz $\{a_n\}$ opada. ■

**Primjer 8.5** Ispitati ponašanje reda $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} + \frac{4}{7} - \frac{5}{9} + ... = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1}$.

**Rješenje:** Možemo pisati,

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n}{2n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n+1}{2(n+1)-1}$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+1}{2n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n,$$

gdje je $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$.

U prethodnom primjeru smo prvo ispitivali apsolutnu konvergenciju datog reda. I u ovom slučaju bi mogli rezonovati na taj način, ali i ne moramo. Vidimo da je dati red alternirajući, pa možemo pokušati primijeniti Teorem 8.2 da ispitamo njegovu konvergenciju.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)+1}{2(n+1)+1} - \frac{n+1}{2n+1}$$
$$= \frac{n+2}{2n+3} - \frac{n+1}{2n+1} = \frac{(n+2)(2n+1) - (n+1)(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$
$$= \frac{2n^2 + n + 4n + 2 - 2n^2 - 3n - 2n - 3}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{-1}{(2n+3)(2n+1)} < 0,$$

pa je $a_{n+1} < a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Ipak, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$, što znači da iako je uslov *1.* Teorema 8.2 zadovoljen, uslov *2.* nije, pa Teorem 8.2 ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Posmatrajmo opšti član $(-1)^{n-1} a_n$ reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, tj. posmatrajmo niz $\left\{(-1)^{n-1} a_n\right\} = \left\{(-1)^{n-1} \frac{n+1}{2n+1}\right\}$.

Svi članovi ovog niza su sadržani u podnizovima $\left\{(-1)^{2n-1} \frac{2n+1}{4n+1}\right\} = \left\{-\frac{2n+1}{4n+1}\right\}$ i $\left\{(-1)^{2n-2} \frac{2n}{4n-1}\right\} = \left\{\frac{2n}{4n-1}\right\}$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} -\frac{2n+1}{4n+1} = -\frac{1}{2},$$
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n}{4n-1} = \frac{1}{2},$$

pa su po Definiciji 7.11 u [DzG1, str. 91], $-\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{2}$ jedini djelimični limesi niza $\left\{(-1)^{n-1} a_n\right\}$. Po Teoremu 7.13 u [DzG1, str. 93], je $\varliminf_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = -\frac{1}{2}$ i $\varlimsup_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = \frac{1}{2}$.

Odavde slijedi da je niz $\left\{(-1)^{n-1} a_n\right\}$ divergentan.

Naime, u suprotnom bi po Posljedici 7.14 u [DzG1, str. 100], vrijedilo $\varliminf_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = \varlimsup_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, što nije slučaj.

Dakle, niz $\left\{(-1)^{n-1} a_n\right\}$ je divergentan, pa ne može vrijediti $\lim_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$.

Pošto ne vrijedi da $(-1)^{n-1} a_n \to 0$ kad $n \to +\infty$, to je po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergentan.

Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira, to onda on ne konvergira apsolutno (inače bi po Teoremu 7.2 i konvergirao).

Ovaj primjer nam pokazuje da je prije upotrebe kriterija za alternirajuće redove (kao i prije upotrebe nekog od drugih kriterija), najbolje prvo provjeriti da li opšti član datog reda teži nuli kad $n \to +\infty$.

Ako opšti član ne teži nuli, onda je dati red po pomenutom Teoremu 1.4 odmah divergentan (pa onda ne konvergira ni apsolutno). Inače, ako opšti član reda teži nuli kad $n \to +\infty$, onda nastavljamo ispitivanje konvergencije datog reda metodama koje za dati red smatramo adekvatnim. ■

## 8.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 8.1.1** Neka $a \in \mathbb{R}$. Ispitati da li red $\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\left|(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(\ln n)^a}{n}$.

U Zadatku 4.1.3 smo dokazali da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$.

Stavimo, $a = -b$.

Sada je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(\ln n)^a}{n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^b}$, pa posljednji red konvergira za $b > 1$, tj. $-a > 1$, i divergira za $b \leq 1$, tj. $-a \leq 1$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{(\ln n)^a}{n}$ konvergira za $a < -1$, i divergira za $a \geq -1$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$ konvergira apsolutno (Definicija 7.1), pa i konvergira, tj. ne divergira (Teorem 7.2) za $a < -1$, te ne konvergira apsolutno za $a \geq -1$.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$ ne konvergira apsolutno za $a \geq -1$, to njegovu konvergenciju moramo posebno ispitati za $a \geq -1$.

Za $a \in \mathbb{R}$, po razmatranju provedenom u Zadatku 4.1.3, postoji broj $N(a) \in \mathbb{N}$, $N(a) \geq 2$, takav da funkcija $\frac{(\ln x)^a}{x}$ opada na $[N(a), +\infty)$.

Specijalno, za $a \geq -1$, postoji broj $N(a) \in \mathbb{N}$, $N(a) \geq 2$, takav da funkcija $\frac{(\ln x)^a}{x}$ opada na $[N(a), +\infty)$.

Slijedi, $\frac{(\ln(n+1))^a}{n+1} < \frac{(\ln n)^a}{n}$ za sve $n \geq N(a)$, tj. niz $\left\{\frac{(\ln n)^a}{n}\right\}_{n=2}^{+\infty}$ je u konačnici opadajući.

Poznato je da je za svako $\alpha > 0$ (ma kako veliko bilo), i svako $\varepsilon > 0$ (ma kako malo bilo), $(\ln x)^\alpha$ manje od $x^\varepsilon$ za dovoljno veliko $x$, tj. da vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^\alpha}{x^\varepsilon} = 0$.

Specijalno, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{x} = 0$ za $a > 0$.

Ako je $a \leq 0$, onda je jasno da je $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{x} = 0$.

Specijalno, za $-1 \leq a \leq 0$, vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{x} = 0$.

Tako, za $a \geq -1$, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)^a}{n} = 0$.

Odavde, iz činjenice da je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$ alternirajući red ($\frac{(\ln n)^a}{n} > 0$ za $n \geq 2$ i sve $a \geq -1$), i kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{(\ln n)^a}{n}$ za $a \geq -1$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n}$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira) za $a\geq -1$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n}$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira) za $a<-1$, ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira) za $a\geq -1$.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n}$ konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $a \geq -1$, to red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\frac{(\ln n)^a}{n}$ konvergira uslovno (Definicija 7.6) za $a\geq -1$. ■

♢ **Zadatak 8.1.2** Neka $a\in\mathbb{R}$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Neka je $a=0$.

Za $n\in\mathbb{N}$ je $\left|(-1)^n\sin\frac{a}{n}\right|=0$.

Ovo znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{a}{n}\right|$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{a}{n}\right|$ konvergentan (i suma mu je jednaka 0).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{a}{n}$ konvergira apsolutno (Definicija 7.1), pa i konvergira, tj. ne divergira (Teorem 7.2) za $a=0$.

Neka je $a>0$.

Postoji sada broj $n_0\in\mathbb{N}$, takav da je $\frac{a}{n}<\frac{\pi}{2}$ za sve $n\geq n_0$.

Slijedi, $0<\sin\frac{a}{n}<1$ za sve $n\geq n_0$, pa je $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\left|(-1)^n\sin\frac{a}{n}\right|=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\sin\frac{a}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Kako je $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, to vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}\cdot a=a=L.$$

Pošto je $L = a$, tj. $0 < L < +\infty$, to redovi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{a}{n}$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju (Teorem 2.1).

Red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira, pa divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{a}{n} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{a}{n}\right|$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], divergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{a}{n}\right|$, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Pretpostavimo sada da je $a < 0$.

Imamo, $|a| = -a > 0$.

Postoji tako broj $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da je $\frac{|a|}{n} < \frac{\pi}{2}$ za sve $n \geq n_0$.

Dobijamo, $0 < \sin \frac{|a|}{n} < 1$ za sve $n \geq n_0$, pa je

$$\begin{aligned} &\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{a}{n}\right| = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \sin \frac{-a}{n}\right| \\ &= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \sin \frac{|a|}{n}\right| = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{|a|}{n}. \end{aligned}$$

Vrijedi,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{|a|}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\sin \frac{|a|}{n}}{\frac{|a|}{n}} \cdot |a| = |a| = L,$$

pa iz $0 < L < +\infty$, divergencije reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin \frac{|a|}{n} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{a}{n}\right|$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin \frac{a}{n}\right|$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno za $a \neq 0$, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $a \neq 0$.

Neka je $a > 0$.

Kako smo već vidjeli, postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ (možemo smatrati da je $n_0$ paran broj), takav da je $\frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}$ za sve $n \geq n_0$, tj. takav da je $0 < \frac{a}{n+1} < \frac{a}{n} < \frac{\pi}{2}$ za $n \geq n_0$.

Odavde je $0 < \sin \frac{a}{n+1} < \sin \frac{a}{n} < 1$ za $n \geq n_0$.

Osim toga, $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \frac{a}{n} = \sin 0 = 0$.

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ zadovoljene pretpostavke kriterija za alternirajuće redove, tj. pretpostavke Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira.

Po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$.

Neka je sada $a < 0$.

Kako smo već konstatovali, postoji broj $n_0 \in \mathbb{N}$ (možemo smatrati da je $n_0$ neparan broj), takav da je $\frac{|a|}{n} < \frac{\pi}{2}$ za sve $n \geq n_0$, tj. takav da je $0 < \frac{|a|}{n+1} < \frac{|a|}{n} < \frac{\pi}{2}$ za $n \geq n_0$.

Odavde je $0 < \sin \frac{|a|}{n+1} < \sin \frac{|a|}{n} < 1$ za $n \geq n_0$.

Osim toga, vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} \sin \frac{|a|}{n} = 0$.

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{|a|}{n}$ zadovoljene pretpostavke Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{|a|}{n} = \sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira.

Po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira za $a \neq 0$.

Zaključujemo, za $a = 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Za $a \neq 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira tamo gdje on ne konvergira apsolutno, tj. za $a \neq 0$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin \frac{a}{n}$ konvergira uslovno (Definicija 7.6) za $a \neq 0$. $\blacksquare$

$\diamondsuit$ **Zadatak 8.1.3** Neka $a \in \mathbb{R} \setminus \{-8, 2\}$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Pretpostavimo da je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = 0$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada $\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right| = 0$.

Ovo znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right|$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right|$ konvergentan (i suma mu je jednaka 0).

Pretpostavimo da je $0 < \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 1$.

Stavimo, $b = \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}$ (za proizvoljno odabrano pa fiksirano $a \in \mathbb{R}$ za koje je $0 < \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 1$).

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{n+1} \cdot b^n\right| = \frac{1}{n+1} \cdot b^n < b^n.$$

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b^n$ [DzG2, str. 17], i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right|$.

Neka je $-1 < \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 0$.

Možemo pisati, $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -b$ (za proizvoljno odabrano pa fiksirano $a \in \mathbb{R}$ za koje je $-1 < \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 0$).

Dakle, $0 < b < 1$, pa je za $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right| = \left|\frac{1}{n+1} \cdot (-1)^n \cdot b^n\right| = \frac{1}{n+1} \cdot b^n < b^n.$$

Odavde, iz konvergencije geometrijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b^n$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right|$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{1}{n+1} \left( \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right)^n \right|$ konvergira za $\left| \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right| < 1$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left( \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right)^n$ konvergira apsolutno (Definicija 7.1), pa i konvergira, tj. ne divergira (Teorem 7.2) za $\left| \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right| < 1$.

Imamo, $\left| \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right| < 1$ ako i samo ako je $-1 < \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < 1$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} -1 < 0$ i $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} + 1 > 0$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8-a^2-6a+16}{a^2+6a-16} < 0$ i $\frac{a^2-4a-8+a^2+6a-16}{a^2+6a-16} > 0$ ako i samo ako je $\frac{-10a+8}{a^2+6a-16} < 0$ i $\frac{2a^2+2a-24}{a^2+6a-16} > 0$ ako i samo ako je $2 \cdot \frac{5a-4}{a^2+6a-16} > 0$ i $2 \cdot \frac{a^2+a-12}{a^2+6a-16} > 0$.

Vrijedi, $5a-4=0$ ako i samo ako je $a=\frac{4}{5}$, te $a^2+a-12=0$ ako i samo ako je $a_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2} = \frac{-1\pm 7}{2}$, tj. ako i samo ako je $a=-4$ ili $a=3$.

Tako, $2 \cdot \frac{5a-4}{a^2+6a-16} > 0$ ako i samo ako $a \in \left(-8, \frac{4}{5}\right) \cup (2, +\infty)$, te $2 \cdot \frac{a^2+a-12}{a^2+6a-16} > 0$ ako i samo ako $a \in (-\infty, -8) \cup (-4, 2) \cup (3, +\infty)$, pa je $\left| \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right| < 1$ ako i samo ako $a \in \left(-4, \frac{4}{5}\right) \cup (3, +\infty)$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left( \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right)^n$ konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira) za $a \in \left(-4, \frac{4}{5}\right) \cup (3, +\infty)$.

Pretpostavimo da je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} > 1$.

Stavimo, $b = \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}$ (za proizvoljno odabrano pa fiksirano $a \in \mathbb{R}$ za koje je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} > 1$).

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left( \frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} \right)^n$ je sada oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n+1}$.

Po Zadatku 7 u [DzG1, str. 16], vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n} = 0$.

Neka je $c > 0$.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{b^n} = 0$, imamo da za $\frac{1}{c} > 0$, postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $\frac{n}{b^n} = \left| \frac{n}{b^n} - 0 \right| < \frac{1}{c}$, tj. $\frac{b^n}{n} > c$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n} = +\infty$, pa je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b^{n+1}}{n+1} = +\infty$.

Tako,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{b} \cdot \frac{b^{n+1}}{n+1} = +\infty,$$

što po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ apsolutno konvergirao, to bi on po Teoremu 7.2 i konvergirao, što nije slučaj.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} > 1$.

Imamo, $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} > 1$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} - 1 > 0$ ako i samo ako je $2 \cdot \frac{5a-4}{a^2+6a-16} < 0$ ako i samo ako $a \in (-\infty, -8) \cup \left(\frac{4}{5}, 2\right)$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $a \in (-\infty, -8) \cup \left(\frac{4}{5}, 2\right)$.

Pretpostavimo da je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < -1$.

Možemo pisati $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -b$ (za proizvoljno odabrano pa fiksirano $a \in \mathbb{R}$ za koje je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < -1$).

Dakle, $b > 1$, i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ima oblik $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n+1}$.

Kako limes $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n+1}$ ne postoji, to ne vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n+1} = 0$, što po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2] znači da red
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{b^n}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ divergira (ne konvergira).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < -1$.

Imamo, $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} < -1$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} + 1 < 0$ ako i samo ako je $2 \cdot \frac{a^2+a-12}{a^2+6a-16} < 0$ ako i samo ako $a \in (-8, -4) \cup (2, 3)$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $a \in (-8, -4) \cup (2, 3)$.

Rezimirajući posljednja dva slučaja, možemo reći da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $a \in (-\infty, -8) \cup (-8, -4) \cup \left(\frac{4}{5}, 2\right) \cup (2, 3)$, tj. za $a \in (-\infty, -4) \setminus \{-8\} \cup \left(\frac{4}{5}, 3\right) \setminus \{2\}$.

Pretpostavimo da je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = 1$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ je oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = 1$.

Imamo, $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = 1$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} - 1 = 0$ ako i samo ako je $2 \cdot \frac{5a-4}{a^2+6a-16} = 0$ ako i samo ako je $a = \frac{4}{5}$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $a = \frac{4}{5}$.

U skladu sa već izloženim, možemo reći da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira za $a \in (-\infty, -4) \setminus \{-8\} \cup \left[\frac{4}{5}, 3\right) \setminus \{2\}$.

Konačno, pretpostavimo da je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -1$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ je sada oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{1}{n+1}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1}$.

Posljednji red divergira, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -1$, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -1$.

Dakle, ispitujemo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1}$.

Ispitajmo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$.

Vrijedi, $\frac{1}{n+2} < \frac{1}{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, te $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

Ovo po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n+1}$ konvergira.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira za $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -1$.

Vrijedi, $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} = -1$ ako i samo ako je $\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16} + 1 = 0$ ako i samo ako je $2 \cdot \frac{a^2+a-12}{a^2+6a-16} = 0$ ako i samo ako je $a = -4$ ili $a = 3$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira za $a = -4$ ili $a = 3$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ konvergira apsolutno za $a \in \left(-4, \frac{4}{5}\right) \cup (3, +\infty)$, konvergira za $a \in \left[-4, \frac{4}{5}\right) \cup [3, +\infty)$, te divergira za $a \in (-\infty, -4) \setminus \{-8\} \cup \left[\frac{4}{5}, 3\right) \setminus \{2\}$.

Tamo gdje red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ ne konvergira apsolutno, on konvergira samo u tačkama $a = -4$ i $a = 3$, pa u tačkama $a = -4$ i $a = 3$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} \left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$ konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 8.1.4** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa nenultim članovima. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$.

**Rješenje:** Po pretpostavci je $a_n \neq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da je $a_n > 0$ za neko $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je $\sin x \leq x$ za sve $x \geq 0$, to je onda $\sin a_n \leq a_n$, tj. $\frac{\sin a_n}{a_n} \leq 1$, odnosno $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} \geq 0$.

Ako je $a_n < 0$ za neko $n \in \mathbb{N}$, onda možemo pisati $a_n = -b_n$ za neko $b_n > 0$.

Sada je $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} = 1 - \frac{\sin(-b_n)}{-b_n} = 1 - \frac{\sin b_n}{b_n} \geq 0$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ je uvijek pozitivan (nenegativan) red.

Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ pozitivan red, to je on apsolutno konvergentan (Definicija

7.1) ako i samo ako je konvergentan, odnosno on nije apsolutno konvergentan ako i samo ako je divergentan.

Po Definiciji 7.6, red konvergira uslovno, ako on konvergira, ali ne konvergira apsolutno. U slučaju pozitivnog reda, uslovna konvergencija bi značila da red konvergira i divergira istovremeno, što nema smisla.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ je pozitivan, pa nas samo zanima njegova konvergencija (divergencija).

Dokažimo da pri datoj pretpostavci na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ može ili da konvergira ili da divergira.

Preciznije, dokažimo da će za neki odabir reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ konvergirati, a za neki drugi odabir reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ divergirati.

Pretpostavimo prvo da je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

U Zadatku 7.1.8 smo dokazali da za $x > 0$ vrijedi nejednakost $\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}$.

Kako je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je onda za $n \in \mathbb{N}$, $\sin a_n \geq a_n - \frac{a_n^3}{6}$, tj. $\frac{\sin a_n}{a_n} \geq 1 - \frac{a_n^2}{6}$, odnosno $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} \leq \frac{1}{6}a_n^2$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan pozitivan red, pa po Zadatku 128 u [DzG2, str. 227], konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n^2$.

Odavde, iz $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} \leq \frac{1}{6}a_n^2$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ može da konvergira.

Izbacimo sada dodatnu pretpostavku da je $a_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, tj. neka je samo $a_n \neq 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\alpha > 0$.

Stavimo, $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n^\alpha}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dobijamo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{n^\alpha}$, $a_n \neq 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Kako je $\frac{1}{(n+1)^\alpha} < \frac{1}{n^\alpha}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$, to je po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj.
Vrijedi, $a_n = \frac{1}{n^\alpha}$, pa je

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin a_n}{a_n} =& 1 - \frac{\sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 - n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha} \\ =& n^\alpha \left( \frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $n \in \mathbb{N}$ paran broj. Sada je $a_n = -\frac{1}{n^\alpha}$, pa je

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\sin a_n}{a_n} =& 1 - \frac{\sin \left(-\frac{1}{n^\alpha}\right)}{-\frac{1}{n^\alpha}} = 1 - n^\alpha \sin \frac{1}{n^\alpha} \\ =& n^\alpha \left( \frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right). \end{aligned}$$

Dakle, $1 - \frac{\sin a_n}{a_n} = n^\alpha \left( \frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right)$ za $n \in \mathbb{N}$.

Uporedimo pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ (koristit ćemo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1).

Po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}$ konvergira za $2\alpha > 1$, tj. za $\alpha > \frac{1}{2}$, te divergira za $0 < 2\alpha \leq 1$, odnosno za $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$.

Imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{\sin a_n}{a_n}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} =& \lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha \left( \frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha} \right)}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} \\ = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} =& \frac{0}{0}. \end{aligned}$$

Stavimo, $t = \frac{1}{n^\alpha}$. Jasno, $n \to +\infty$ ako i samo ako $t \to 0$, pa je

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 - \frac{\sin a_n}{a_n}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{1}{n^\alpha} - \sin \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^{3\alpha}}} = \lim_{t \to 0} \frac{t - \sin t}{t^3}.$$

U Zadatku 2.1.4 smo dokazali da je $\lim\limits_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\frac{1}{6}$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1-\frac{\sin a_n}{a_n}}{\frac{1}{n^{2\alpha}}}=\frac{1}{6}=L$.

Pošto je $0<L<+\infty$, to iz kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Kako smo već vidjeli, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ konvergira za $\alpha>\frac{1}{2}$ i divergira za $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$.

To onda znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ konvergira za $\alpha>\frac{1}{2}$ i divergira za $0<\alpha\leq\frac{1}{2}$.

Zaključujemo, pri datoj postavci na red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$ može ili da konvergira ili da divergira. ■

♢ **Zadatak 8.1.5** Pretpostavimo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\right)$ nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ bez narušavanja poretka, gdje je $1=p_1<p_2<\ldots$ . Pretpostavimo osim toga da je $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$, i da je broj sabiraka u $\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i$ ograničen. Dokazati da tada konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

**Dokaz:** Po pretpostavci, konvergira red

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2+\ldots+a_{p_2-1})+(a_{p_2}+a_{p_2+1}+\ldots+a_{p_3-1})+\ldots\\&+\left(a_{p_n}+a_{p_n+1}+\ldots+a_{p_{n+1}-1}\right)+\ldots\ .\end{aligned}$$

Označimo sa $\left\{S_n^{'}\right\}$ niz parcijalnih suma ovog reda. Za $n\in\mathbb{N}$ je

$$S_n^{'}=(a_1+a_2+\ldots+a_{p_2-1})+(a_{p_2}+a_{p_2+1}+\ldots+a_{p_3-1})+\ldots$$

$$\begin{aligned}
&+ \left(a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}\right) \\
=&a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + ... + a_{p_3-1} + ... \\
&+ a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}.
\end{aligned}$$

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Neka $k \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo parcijalnu sumu $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i = a_1 + a_2 + ... + a_k$ reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Za broj $k \in \mathbb{N}$ je sada jasno da postoji broj $n \in \mathbb{N}$, takav da je

$$\begin{aligned}
S_n^{'} =&a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} + a_{p_2} + a_{p_2+1} + ... + a_{p_3-1} + ... \\
&+ a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} \\
=&a_1 + a_2 + ... + a_k + a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} \\
=&S_k + a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1},
\end{aligned}$$

gdje je $p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1$.

Dakle, $S_k = S_n^{'} - a_{k+1} - ... - a_{p_{n+1}-1}$.

Broj sabiraka u $\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i = a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}$ je ograničen, pa je zbog $p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1$ i broj sabiraka u $- a_{k+1} - ... - a_{p_{n+1}-1}$ ograničen.

Označimo posljednji broj sa $d$.

Možemo pisati,

$$S_k = S_n^{'} - a_{k+1} - a_{k+2} - ... - a_{k+d}.$$

Pošto je $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$, to je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{k\to+\infty} a_{k+i} = 0$ za sve $i \in \{1, 2, ..., d\}$.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right)$ konvergira.

Označimo njegovu sumu sa $S^{'}$.

Imamo, $S^{'} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}$.

Jasno, kada $k \to +\infty$, to i $n \to +\infty$, pa iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{k\to+\infty} S_k &= \lim_{k\to+\infty}\left(S_n^{'} - a_{k+1} - a_{k+2} - ... - a_{k+d}\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} S_n^{'} - \lim_{k\to+\infty} a_{k+1} - ... - \lim_{k\to+\infty} a_{k+d} = S^{'}.\end{aligned}$$

Tako, niz $\{S_k\}$ parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, pa konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = S^{'}$ (suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ jednaka je sumi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$).

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 8.1.6** Dokazati da red $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ konvergira ili divergira istovremeno sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$, gdje je $a_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, i $1 = p_1 < p_2 < ...$ .

**Dokaz:** Red

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)\\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}) - (a_{p_2} + a_{p_2+1} + ... + a_{p_3-1}) +\\ &\quad (a_{p_3} + a_{p_3+1} + ... + a_{p_4-1}) - ...\end{aligned}$$

je ustvari red

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}(-1)^{n-1} a_i\right)\\ &= (a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}) + (-a_{p_2} - a_{p_2+1} - ... - a_{p_3-1}) +\\ &\quad (a_{p_3} + a_{p_3+1} + ... + a_{p_4-1}) + ...\end{aligned}$$

nastao grupisanjem članova reda $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} +$ ... bez narušavanja poretka.

Dovoljno je da dokažemo da red $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1}$ $+ a_{p_3} + ...$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i \right) =$ $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right)$.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... -$ $a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$, a sa $\left\{S_n^{'}\right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i \right)$.

Pretpostavimo da red $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ konvergira.

To znači da konvergira niz $\{S_n\}$.

Po Lemi 7.12 u [DzG1, str. 91], konvergira onda i svaki podniz niza $\{S_n\}$.

Specijalno, konvegira i podniz $\left\{S_{p_{n+1}-1}\right\}$.

Imamo,

$$\begin{aligned} S_{p_2-1} =& a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} = (a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}) = S_1^{'}, \\ S_{p_3-1} =& a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - a_{p_2+1} - ... - a_{p_3-1} \\ =& (a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}) + (-a_{p_2} - a_{p_2+1} - ... - a_{p_3-1}) = S_2^{'}, \end{aligned}$$

itd. Općenito, dakle, $S_{p_{n+1}-1} = S_n^{'}$, $n \in \mathbb{N}$.

Drugim riječima, niz $\left\{S_{p_{n+1}-1}\right\}$ je ustvari niz $\left\{S_n^{'}\right\}$.

Kako niz $\left\{S_{p_{n+1}-1}\right\}$ konvergira, to konvergira niz $\left\{S_n^{'}\right\}$.

Ovo znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right)$ konvergentan.

Pretpostavimo sada da je konvergentan red
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i \right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i \right)$.

Odavde i iz Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4], imamo da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i$ $= 0$.

Osim toga, niz $\left\{S_n'\right\}$ konvergira.

Stavimo, $S' = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n'$.

Neka $k \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo parcijalnu sumu $S_k$ reda $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ .

Za broj $k \in \mathbb{N}$ je sada jasno da postoji prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ (smatrat ćemo radi određenosti da je $n$ paran broj, dok bi analogno razmatranje proveli u neparnom slučaju), takav da je

$$\begin{aligned} S_n' =& (a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1}) + (-a_{p_2} - a_{p_2+1} - ... - a_{p_3-1}) + ... \\ &+ \left(-a_{p_n} - a_{p_n+1} - ... - a_{p_{n+1}-1}\right) \\ =& a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - a_{p_2+1} - ... - a_{p_3-1} + ... \\ &- a_{p_n} - a_{p_n+1} - ... - a_{p_{n+1}-1} \\ =& S_k - a_{k+1} - ... - a_{p_{n+1}-1}, \end{aligned}$$

gdje je $p_n \le k \le p_{n+1} - 1$.

Dakle, $S_k = S_n' + a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}$.

Već smo rekli da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i = 0$.

To znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \ge N$, vrijedi $\left|\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} (-1)^{n-1} a_i\right| < \varepsilon$, tj. $\left|(-1)^{n-1} \sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right| < \varepsilon$, odnosno $\left|\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right| < \varepsilon$, ili

$$a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} = \sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i < \varepsilon.$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabrano pa fiksirano.

Postoji sada indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \ge N$, vrijedi

$$a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} < \varepsilon.$$

Uzmimo $k \in \mathbb{N}$ dovoljno veliko, tako da za odgovarajuće $n \in \mathbb{N}$ ($n$ parno), za koje je $S_k = S_n^{'} + a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}$, $p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1$, vrijedi $n \geq N$.

Kako je $n \geq N$, to je

$$a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} < \varepsilon.$$

Osim toga, iz $p_n \leq k \leq p_{n+1} - 1$, imamo da je

$$a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} < a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} < \varepsilon.$$

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} < \varepsilon.$$

Ovo znači da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}\right) = 0$.

Jasno, kada $k \to +\infty$ to i $n \to +\infty$, pa iz tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$\begin{aligned}\lim_{k \to +\infty} S_k &= \lim_{n \to +\infty} \left(S_n^{'} + a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}\right) \\ &= \lim_{n \to +\infty} S_n^{'} + \lim_{n \to +\infty} \left(a_{k+1} + ... + a_{p_{n+1}-1}\right) \\ &= S^{'}.\end{aligned}$$

Tako, niz $\{S_k\}$ parcijalnih suma reda $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ konvergira, pa i sam red konvergira, i suma mu je jednaka $S^{'}$ (suma reda $a_1 + a_2 + ... + a_{p_2-1} - a_{p_2} - ... - a_{p_3-1} + a_{p_3} + ...$ jednaka je sumi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum\limits_{i=p_n}^{p_{n+1}-1} a_i\right)$).

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 8.1.7** Ispitati konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$.

**Rješenje:** Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n} \right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati.

Imamo, $\lfloor \frac{1}{3} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{2}{3} \rfloor = 0$, $\lfloor \frac{3}{3} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{4}{3} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{5}{3} \rfloor = 1$, $\lfloor \frac{6}{3} \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{7}{3} \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{8}{3} \rfloor = 2$, $\lfloor \frac{9}{3} \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{10}{3} \rfloor = 3$, $\lfloor \frac{11}{3} \rfloor = 3$, ..., pa je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \dots .$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}{n}$, i red

$$\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11}\right) + \dots$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right)$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}{n}$ bez narušavanja poretka.

Kako je $\frac{1}{3(n+1)} + \frac{1}{3(n+1)+1} + \frac{1}{3(n+1)+2} < \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}$ za $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right) = 0$, to po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2}\right)$ konvergira.

Odavde i iz Zadatka 8.1.6, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor - 1}}{n}$.

Po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$.

Tako, po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor}}{n}$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, to on po Definiciji 7.6 konvergira uslovno. ■

♢ **Zadatak 8.1.8** Dokazati da red $1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + ...$ konvergira, i odrediti njegovu sumu.

**Dokaz:** Vidimo da je red dat sa $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$.

Sada je $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{2n+1}{2^n}\right| = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n}$.

Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n (2n+3)}{2^{n+1} (2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{4n+2}$$
$$= \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = r.$$

Pošto je $r = \frac{1}{2} < 1$, to po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \left|(-1)^n \frac{2n+1}{2^n}\right|$ konvergira, tj. apsolutno konvergira red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ (Definicija 7.1).

Odavde i iz Teorema 7.2 slijedi da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ konvergira.

Da red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ konvergira možemo zaključiti i pomoću kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2.

Naime, $\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}} < \frac{2n+1}{2^n}$ ako i samo ako je $2n+3 < 4n+2$ ako i samo ako je $2n > 1$ ako i samo ako je $n > \frac{1}{2}$, što je tačno za $n \in \mathbb{N}$.

Tako, $\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}} < \frac{2n+1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Možemo pisati, $\frac{2n+1}{2^n} = 2 \cdot \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Po Zadatku 7 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, a jasno je da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, pa je po tvrdnjama $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = 0$.

Vidimo da su zadovoljene pretpostavke kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ konvergira.

Red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$ konvergira, pa ima konačnu sumu.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n}$.

Postoji dakle konačan limes $S = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$, i vrijedi $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} = S$.

Odredimo $S$.

Posmatrajmo npr. $S_4 = 1 - \frac{3}{2} + \frac{5}{4} - \frac{7}{8} + \frac{9}{16}$.

Možemo pisati, $S_4 = S_4^{(1)} + S_4^{(2)} + S_4^{(3)} + S_4^{(4)} + S_4^{(5)}$, gdje je $S_4^{(1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$, $S_4^{(2)} = -\frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{8} + \frac{2}{16}$, $S_4^{(3)} = \frac{2}{4} - \frac{2}{8} + \frac{2}{16}$, $S_4^{(4)} = -\frac{2}{8} + \frac{2}{16}$, $S_4^{(4)} = \frac{2}{16}$.

Vrijedi,

$$\begin{aligned} S_4^{(1)} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^5}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ =& \frac{1 - \frac{(-1)^5}{2^5}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^5}{2^5}\right), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned} S_4^{(1)} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ... + \frac{(-1)^4}{2^4} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{4+1}}{2^{4+1}}\right), \\ S_4^{(2)} =& -\frac{2}{2} + \frac{2}{4} - \frac{2}{8} + \frac{2}{16} = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16}\right) \\ =& 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \\ =& 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^4}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1 - \frac{1}{2^4}}{\frac{3}{2}} = -\frac{2}{3}\left(1 - \frac{1}{2^4}\right) \\ =& -\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^5}\right) = \frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2} - \frac{-1}{2^5}\right), \end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
S_4^{(2)} =& S_4^{(1+1)} = 2 \cdot \left( \frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^{1+1}}{2^{1+1}} + ... + \frac{(-1)^4}{2^4} \right) \\
=& \frac{4}{3} \left( \frac{(-1)^1}{2^1} - \frac{(-1)^{4+1}}{2^{4+1}} \right), \\
S_4^{(3)} =& \frac{2}{4} - \frac{2}{8} + \frac{2}{16} = 2 \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \\
=& \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^3}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{(-1)^3}{2^3}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{(-1)^3}{2^3} \right) \\
=& \frac{4}{3} \left( \frac{1}{2^2} - \frac{(-1)^3}{2^5} \right),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
S_4^{(3)} =& S_4^{(2+1)} = 2 \left( \frac{(-1)^2}{2^2} + \frac{(-1)^{2+1}}{2^{2+1}} + ... + \frac{(-1)^4}{2^4} \right) \\
=& \frac{4}{3} \left( \frac{(-1)^2}{2^2} - \frac{(-1)^{4+1}}{2^{n+1}} \right), \\
S_4^{(4)} =& -\frac{2}{8} + \frac{2}{16} = 2 \left( -\frac{1}{8} + \frac{1}{16} \right) = 2 \cdot \left( -\frac{1}{8} \right) \cdot \left( 1 - \frac{1}{2} \right) \\
=& -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} = -\frac{1}{4} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^2}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{6} \left( 1 - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{4}{3} \left( -\frac{1}{2^3} - \frac{-1}{2^5} \right),
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
S_4^{(4)} =& S_4^{(3+1)} = 2 \left( \frac{(-1)^3}{2^3} + \frac{(-1)^{3+1}}{2^{3+1}} + ... + \frac{(-1)^4}{2^4} \right) \\
=& \frac{4}{3} \left( \frac{(-1)^3}{2^3} - \frac{(-1)^{4+1}}{2^{4+1}} \right), \\
S_4^{(5)} =& \frac{2}{16} = 2 \cdot \frac{(-1)^4}{2^4}.
\end{aligned}$$

Općenito, za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je onda $S_n = S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + ... + S_n^{(n+1)}$, gdje je

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ... + \frac{(-)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),\\
S_n^{(2)} =& S_n^{(1+1)} = 2\left(\frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^{1+1}}{2^{1+1}} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)\\
=& \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^1}{2^1} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),\\
S_n^{(3)} =& S_n^{(2+1)} = 2\left(\frac{(-1)^2}{2^2} + \frac{(-1)^{2+1}}{2^{2+1}} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)\\
=& \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^2}{2^2} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),\\
&\vdots\\
S_n^{(n)} =& S_n^{((n-1)+1)} = 2\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n}\right)\\
=& \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),\\
S_n^{(n+1)} =& 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n},
\end{aligned}$$

tj.

$$\begin{aligned}
S_n^{(1)} =& 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - ... + \frac{(-)^n}{2^n} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),\\
S_n^{(k+1)} =& 2\left(\frac{(-1)^k}{2^k} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} + ... + \frac{(-1)^n}{2^n}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^k}{2^k} - \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}}\right),
\end{aligned}$$

$k \in \{1, 2, ..., n-1\}$,

$$S_n^{(n+1)} = 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Tako, za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, vrijedi

$$\begin{aligned} S_n =& S_n^{(1)} + S_n^{(2)} + ... + S_n^{(n+1)} \\ =& \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + \frac{4}{3}\left(\frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^2}{2^2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) \\ & - \frac{4}{3} \cdot (n-1) \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} + 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^1}{2^1} + \frac{(-1)^2}{2^2} + ... + \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \\ = & -\frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}}{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}\right) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

to je za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$,

$$S_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} \cdot \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} - \frac{1}{3} \cdot \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot (-1)^{n+1} + 2 \cdot \frac{(-1)^n}{2^n}.$$

Već smo napomenuli da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, pa je po razmatranju pomenutom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2^{n-1}} = 0$.

Odavde i iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \frac{2}{3} - \frac{4}{9} = \frac{6}{9} - \frac{4}{9} = \frac{2}{9}$.

Tako, suma datog reda iznosi $\frac{2}{9}$, tj. $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{2n+1}{2^n} = \frac{2}{9}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 8.1.9** Dokazati da red $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ konvergira, i odrediti njegovu sumu.

**Dokaz:** Dati red je ustvari red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$.

U Zadatku 32 u [DzG2, str. 93] smo dokazali da je posljednji red konvergentan, i da mu je suma jednaka $\ln 2$.

Za dokaz konvergencije datog reda možemo koristiti i kriterij za alternirajuće redove, tj. Teorem 8.2.

Imamo, $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, pa po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konvergira. ■

◇ **Zadatak 8.1.10** Ispitati konvergenciju reda $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\ldots$ .

**Rješenje:** Vidimo da je dati red ustvari red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$.

Vrijedi, $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left|(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}\right|=\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n+1}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Kako red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$ ne konvergira apsolutno, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati.

Posmatrajmo red

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(-\frac{1}{4}-\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}\right)+\ldots\\=&\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\right)\end{aligned}$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$ bez narušavanja poretka.

Kako je $\frac{1}{3(n+1)+1}+\frac{1}{3(n+1)+2}+\frac{1}{3(n+1)+3}<\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\right)=0$, to po kriteriju za alternirajuće redove, tj.

Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}+\frac{1}{3n+3}\right)$ konvergira.

Odavde i iz Zadatka 8.1.6 slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$.

Kako red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor}\frac{1}{n+1}$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, to on po Definiciji 7.6 konvergira uslovno. ■

◇ **Zadatak 8.1.11** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2q}+\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+...+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-...-\frac{1}{4q}+...$ . Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je nastao tako što smo iz alternirajućeg harmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+...$ uzeli (bez narušavanja poretka) $p$ pozitivnih članova pa $q$ negativnih članova, pa $p$ pozitivnih članova pa $q$ negativnih članova, itd. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira i da mu je suma jednaka $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

**Dokaz:** Po Zadatku 8.1.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira ili divergira istovremeno sa redom $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, gdje je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ dat sa

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{2q}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+...+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2q+2}+\frac{1}{2q+4}+...+\frac{1}{4q}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{4p+1}+\frac{1}{4p+3}+...+\frac{1}{6p-1}\right)-\left(\frac{1}{4q+2}+\frac{1}{4q+4}+...+\frac{1}{6q}\right)+... .$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ je nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ bez narušavanja poretka.

Pri tome, u slučaju konvergencije (ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ili red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$), redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ imaju istu sumu.

Dovoljno je onda da dokažemo da konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ i da mu je suma jednaka $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Posmatrajmo red

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = &\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2q}\right)+\\ &\left(\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+...+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-\frac{1}{4q}\right)+\\ &\left(\frac{1}{4p+1}+\frac{1}{4p+3}+...+\frac{1}{6p-1}-\frac{1}{4q+2}-\frac{1}{4q+4}-...-\frac{1}{6q}\right)+...\end{aligned}$$

nastao grupisanjem članova (po dva člana) reda $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, bez narušavanja poretka.

Ako dokažemo da konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$, i da je $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, onda će po Zadatku 8.1.5 da konvergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$, i suma će mu biti jednaka sumi reda $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

Dovoljno je tako da dokažemo da konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$, da je $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$, i da je suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$ jednaka $\ln 2 + \frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Primijetimo da za red $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n$ vrijedi $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} e_n$, gdje je $e_n = \frac{1}{(n-1)p+1} + \frac{1}{(n-1)p+3} + ... + \frac{1}{(n-1)p+2p-1}$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj, te $e_n = \frac{1}{(n-2)q+2} + \frac{1}{(n-2)q+4} + ... + \frac{1}{(n-2)q+2q}$ ako je $n \in \mathbb{N}$ naparan broj.

Tako, $\lim_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} d_n$.

Vrijedi,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} d_n = &\sum_{n=1}^{+\infty}\Big(\frac{1}{2(n-1)p+1}+\frac{1}{2(n-1)p+3}+...+\frac{1}{2np-1}\\ &-\frac{1}{2(n-1)q+2}-\frac{1}{2(n-1)q+4}-...-\frac{1}{2nq}\Big),\end{aligned}$$

pa je za $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
S_n =& \sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} \Big( \frac{1}{2(k-1)p+1} + \frac{1}{2(k-1)p+3} + ... + \frac{1}{2kp-1} \\
& - \frac{1}{2(k-1)q+2} - \frac{1}{2(k-1)q+4} - ... - \frac{1}{2kq} \Big) \\
=& \left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - ... - \frac{1}{2q}\right) + \\
& \left(\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + ... + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2q+2} - \frac{1}{2q+4} - ... - \frac{1}{4q}\right) + ... \\
& + \Big( \frac{1}{2(n-1)p+1} + \frac{1}{2(n-1)p+3} + ... + \frac{1}{2np-1} \\
& - \frac{1}{2(n-1)q+2} - \frac{1}{2(n-1)q+4} - ... - \frac{1}{2nq} \Big) \\
=& \left(1 + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2np-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2nq}\right) \\
=& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2np-1} + \frac{1}{2np}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{2np}\right) \\
& - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... \frac{1}{2nq}\right) \\
=& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2np}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{np}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{nq}\right).
\end{aligned}
$$

Po Zadatku 6 u [DzG1, str. 74], za svako $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n$, gdje je $C$ Ojlerova konstanta (vidjeti stranu 266 u [DzG1]), i $\{\varepsilon_n\}$ niz takav da je $\lim\limits_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$.

Dobijamo da je za $n \in \mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
S_n =& \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{2np}\right) - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{np}\right) \\
& - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{nq}\right) \\
=& C + \ln 2np + \varepsilon_{2np} - \frac{1}{2}\left(C + \ln np + \varepsilon_{np}\right) - \frac{1}{2}\left(C + \ln nq + \varepsilon_{nq}\right),
\end{aligned}
$$

gdje je $\lim\limits_{2np\to+\infty}\varepsilon_{2np}=0$, $\lim\limits_{np\to+\infty}\varepsilon_{np}=0$ i $\lim\limits_{nq\to+\infty}\varepsilon_{nq}=0$.

Kako $2np\to+\infty$, $np\to+\infty$ i $nq\to+\infty$ kad $n\to+\infty$, to vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{2np}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{np}=0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\varepsilon_{nq}=0$.

Tako, za $n\in\mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}S_n &= \ln 2+\ln np+\varepsilon_{2np}-\frac{1}{2}\ln np-\frac{1}{2}\varepsilon_{np}\\ &\quad -\frac{1}{2}\ln nq-\frac{1}{2}\varepsilon_{nq}\\ &= \ln 2+\frac{1}{2}\ln np-\frac{1}{2}\ln nq+\varepsilon_{2np}-\frac{1}{2}\varepsilon_{np}-\frac{1}{2}\varepsilon_{nq}\\ &= \ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}+\varepsilon_{2np}-\frac{1}{2}\varepsilon_{np}-\frac{1}{2}\varepsilon_{nq},\end{aligned}$$

pa iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}d_n$ konvergira i da mu je suma jednaka $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Kako smo već vidjeli, ovo po Zadatku 8.1.5 znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}c_n$, i da mu je suma jednaka $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Tako, po Zadatku 8.1.6, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}b_n$, i suma mu je jednaka $\ln 2+\frac{1}{2}\ln\frac{p}{q}$.

Dokaz je završen. ■

◊ **Zadatak 8.1.12** Je li članove konvergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ moguće prvo rearanžirati a zatim grupisati tako da dobijeni red divergira ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Potvrdimo prvo da dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergira.

Zaista, $\frac{1}{\sqrt{n+1}}<\frac{1}{\sqrt{n}}$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, pa po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ konvergira.

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} \right)$$
$$= \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \left( \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{1}{\sqrt{9}} + \frac{1}{\sqrt{11}} - \frac{1}{\sqrt{4}} \right) + \dots .$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je nastao tako što smo iz reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} +$ ... uzeli (bez narušavanja poretka) $3$ pozitivna člana pa $1$ negativan i onda ih grupisali, pa ponovo uzeli $3$ pozitivna člana i $1$ negativan pa onda ih grupisali, itd.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je nastao rearanžiranjem a zatim grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$.

Dokažimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Kako je za $n \in \mathbb{N}$, $6n-3 < 6n-1$, tj. $\sqrt{6n-3} < \sqrt{6n-1}$, to je i $\frac{1}{\sqrt{6n-3}} > \frac{1}{\sqrt{6n-1}}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{1}{\sqrt{6n-3}} + \frac{1}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > \frac{1}{\sqrt{6n-5}} + \frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}}.$$

Primijetimo da je $\frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$ ako i samo ako je $\frac{2}{\sqrt{6n-1}} > \frac{1}{\sqrt{2n}}$ ako i samo ako je $4 \cdot 2n > 6n-1$ ako i samo ako je $2n > -1$, što je zadovoljeno za $n \in \mathbb{N}$.

Tako, $\frac{2}{\sqrt{6n-1}} - \frac{1}{\sqrt{2n}} > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n > \frac{1}{\sqrt{6n-5}} > \frac{1}{\sqrt{6n}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

Drugim riječima, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} < \sqrt{6} \cdot a_n.$$

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$ [DzG2, str. 140, Zad. 59], i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. ■

◇ **Zadatak 8.1.13** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

**Rješenje:** Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} &= \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} = \frac{(-1)^n \sqrt{n}-1}{n-1} \\
&= (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$.

Posmatrajmo funkciju $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$ na intervalu $I = [2, \infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna funkcija definisana na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$. Osim toga,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x-1) - \sqrt{x}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{x-1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}}{(x-1)^2} \\
&= \frac{\frac{x-1-2x}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2} = \frac{\frac{-x-1}{2\sqrt{x}}}{(x-1)^2} = \frac{-x-1}{2\sqrt{x}(x-1)^2},
\end{aligned}$$

tj. funkcija $f(x)$ ima izvod na $I$ (bar unutar $I$), i na intervalu $I$ (unutar $I$) vrijedi $f'(x) < 0$.

Kako je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = -1$, to ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$, na kojem je $f'(x) \equiv 0$.

Ovo znači da je $f(x)$ opadajuća funkcija na $I$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Slijedi, $f(2) > f(3) > ...$, tj. $f(n) > f(n+1)$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, ili $\frac{\sqrt{n+1}}{n} < \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Kako je osim toga $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} = 0$, to po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1}$ konvergira.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{-1}{n-1}$.

Sada, po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], divergira i red
$\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} + \left(\frac{-1}{n-1}\right)\right) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left((-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}\right) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ apsolutno konvergirao, onda bi on po Teoremu 7.2 i konvergirao, što nije slučaj.

Dakle, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ ne konvergira (iako ne konvergira apsolutno), to on ne konvergira ni uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 8.1.14** Za $a \in \mathbb{R}$, ispitati konvergenciju i apsolutnu konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

**Rješenje:** Rezonujemo slično kao u Zadatku 7.1.28.

Neka je $a = 0$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je sada $\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right| = |\sin n\pi| = 0$.

Ovo znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$ konvergentan (i suma mu je jednaka 0).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergira apsolutno za $a = 0$ (Definicija 7.1), pa i konvergira (ne divergira) za $a = 0$ (Teorem 7.2).

Neka je sada $a \neq 0$.

Za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right) = (-1)^n \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2} - n\pi\right)\\
&= (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\right)\\
&= (-1)^n \sin\left(\pi\left(\sqrt{n^2+a^2} - n\right)\frac{\sqrt{n^2+a^2}+n}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right)\\
&= (-1)^n \sin\left(\pi \cdot \frac{n^2+a^2-n^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right) = (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.
\end{aligned}$$

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ granične vrijednosti 0 niza $\left\{\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $-\frac{\pi}{2} < \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$, tj. $0 < \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$.

Tako, za $n \geq n_0$ je $0 < \frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} < \frac{\pi}{2}$, pa za $n \geq n_0$ vrijedi $\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} > 0$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

Sada je

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right| = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|(-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right|\\
&= \sum_{n=n_0}^{+\infty} \left|\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\right| = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}.
\end{aligned}$$

Uporedimo ovaj red sa pozitivnim redom $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} \frac{\pi a^2}{2n}$.

Koristimo kriterij upoređivanja limesom, tj. Teorem 2.1.

Poznato je da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{2n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}\cdot\frac{\sqrt{n^2+a^2}+n}{2n}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}{\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}}\cdot\frac{2}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}+1}=1\cdot 1=1=L.$$

Pošto je $L=1$, tj. $0<L<+\infty$, to po *1.* Teorema 2.1, redovi $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ i $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\pi a^2}{2n}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{1}{n}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi da divergira i red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\pi a^2}{2n}$.

Kako smo već konstatovali, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\frac{\pi a^2}{2n}$, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi divergencija reda
$\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}=\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)\right|$, što znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ ne konvergira apsolutno.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ ne konvergira apsolutno, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati.

Već smo vidjeli da je $0<\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\frac{\pi}{2}$ za $n\geq n_0$.

Posmatrajmo onda red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ (možemo ne umanjujući opštost pretpostaviti da je $n_0$ paran broj).

Iz $0<\frac{\pi a^2}{\sqrt{(n+1)^2+a^2}+(n+1)}<\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}<\frac{\pi}{2}$, $n\geq n_0$, imamo da je za $n\geq n_0$ i $\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{(n+1)^2+a^2}+(n+1)}<\sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$.

Osim toga, $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = 0$.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n}$ konvergira.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2] imamo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\frac{\pi a^2}{\sqrt{n^2+a^2}+n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$.

Tako, za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Zaključujemo, za $a = 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira), a za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, red ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$ konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, to on konvergira uslovno za $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. ■

♢ **Zadatak 8.1.15** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

**Rješenje:** Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati.

Imamo, $\lfloor\sqrt{1}\rfloor = 1$, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor = 1$, $\lfloor\sqrt{3}\rfloor = 1$, $\lfloor\sqrt{4}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{5}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{6}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{7}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{8}\rfloor = 2$, $\lfloor\sqrt{9}\rfloor = 3$, ... .

Vidimo da je skup $\mathbb{N}$ u ovom slučaju praktično zapisati u obliku $1^2$, $1^2+1$, $2^2-1$, $2^2$, $2^2+1$, $2^2+2$, $2^2+3$, $3^2-1$, $3^2$, $3^2+1$, ..., $3^2+5$, $4^2-1$, $4^2$, $4^2+1$, ..., $n^2$, $n^2+1$, ..., $(n+1)^2-1$, $(n+1)^2$, $(n+1)^2+1$, ... .

Slijedi, $\left\lfloor\sqrt{1^2}\right\rfloor = 1$, $\left\lfloor\sqrt{1^2+1}\right\rfloor = 1$, $\left\lfloor\sqrt{2^2-1}\right\rfloor = 1$, $\left\lfloor\sqrt{2^2}\right\rfloor = 2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+1}\right\rfloor = 2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+2}\right\rfloor = 2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+3}\right\rfloor = 2$, $\left\lfloor\sqrt{3^2-1}\right\rfloor = 2$, $\left\lfloor\sqrt{3^2}\right\rfloor = 3$, $\left\lfloor\sqrt{3^2+1}\right\rfloor = 3$,

..., $\left\lfloor\sqrt{3^2+5}\right\rfloor = 3$, $\left\lfloor\sqrt{4^2-1}\right\rfloor = 3$, $\left\lfloor\sqrt{4^2}\right\rfloor = 4$, $\left\lfloor\sqrt{4^2+1}\right\rfloor = 4$, ..., $\left\lfloor\sqrt{n^2}\right\rfloor = n$, $\left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor = n$, ..., $\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2-1}\right\rfloor = n$, $\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2}\right\rfloor = n+1$, $\left\lfloor\sqrt{(n+1)^2+1}\right\rfloor$ $= n+1$, ... .

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $\left\lfloor\sqrt{n^2+k}\right\rfloor = n$ za $k \in \{0, 1, ..., 2n\}$.

Zaključujemo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ ustvari red

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{1^2+0}-\frac{1}{1^2+1}-\frac{1}{1^2+2}+\frac{1}{2^2+0}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^2+3}+\frac{1}{2^2+4}\\
&-\frac{1}{3^2+0}-\frac{1}{3^2+1}-\frac{1}{3^2+2}-\frac{1}{3^2+3}-\frac{1}{3^2+4}-\frac{1}{3^2+5}-\frac{1}{3^2+6}+...\\
&+(-1)^n\frac{1}{n^2+0}+(-1)^n\frac{1}{n^2+1}+...+(-1)^n\frac{1}{n^2+2n}\\
&+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+0}+(-1)^{n+1}\frac{1}{(n+1)^2+1}+... .
\end{aligned}
$$

Posmatrajmo red

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}\\
=&\frac{1}{1^2+0}+\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{1^2+2}-\frac{1}{2^2+0}-\frac{1}{2^2+1}-\frac{1}{2^2+2}-\frac{1}{2^2+3}-\frac{1}{2^2+4}\\
&+\frac{1}{3^2+0}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{3^2+4}+\frac{1}{3^2+5}+\frac{1}{3^2+6}-...\\
&+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+0}+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+1}+...+(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+2n}\\
&+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2+0}+(-1)^{n+2}\frac{1}{(n+1)^2+1}+...
\end{aligned}
$$

i red

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{1^2+0}+\frac{1}{1^2+1}+\frac{1}{1^2+2}\right)-\\
&\left(\frac{1}{2^2+0}+\frac{1}{2^2+1}+\frac{1}{2^2+2}+\frac{1}{2^2+3}+\frac{1}{2^2+4}\right)+
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{3^2+0}+\frac{1}{3^2+1}+\frac{1}{3^2+2}+\frac{1}{3^2+3}+\frac{1}{3^2+4}+\frac{1}{3^2+5}+\frac{1}{3^2+6}\right)-...\\
&+(-1)^{n-1}\left(\frac{1}{n^2+0}+\frac{1}{n^2+1}+...+\frac{1}{n^2+2n}\right)+...\\
=&\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n^2+k}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n
\end{aligned}
$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ bez narušavanja poretka.

Za $n\in\mathbb{N}$ je

$$
\begin{aligned}
0<&b_n=\frac{1}{n^2+0}+\frac{1}{n^2+1}+...+\frac{1}{n^2+2n}<\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+...+\frac{1}{n^2}\\
=&\frac{2n+1}{n^2}=\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}.
\end{aligned}
$$

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\right)=0$, i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

Osim toga, za $n\in\mathbb{N}$ imamo da je

$$
\begin{aligned}
&b_n-b_{n+1}\\
=&\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n^2+k}-\sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{1}{(n+1)^2+k}=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{n^2+k}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(n+1)^2+k}\\
&-\frac{1}{(n+1)^2+2n+1}-\frac{1}{(n+1)^2+2n+2}\\
=&\sum_{k=0}^{2n}\frac{(n+1)^2+k-n^2-k}{(n^2+k)\left((n+1)^2+k\right)}-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}\\
=&\sum_{k=0}^{2n}\frac{2n+1}{(n^2+k)\left((n+1)^2+k\right)}-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}\\
>&\sum_{k=0}^{2n}\frac{2n+1}{(n^2+2n)\left((n+1)^2+2n\right)}-\frac{1}{n^2+4n+2}-\frac{1}{n^2+4n+3}=
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\frac{(2n+1)^2}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)} - \frac{1}{n^2+4n+2} - \frac{1}{n^2+4n+3} \\
=&\frac{A(n)}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)(n^2+4n+2)(n^2+4n+3)},
\end{aligned}$$

gdje je

$$\begin{aligned}
A(n) =& (2n+1)^2\left(n^2+4n+2\right)\left(n^2+4n+3\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^2+4n+1\right)\left(n^2+4n+3\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^2+4n+1\right)\left(n^2+4n+2\right) \\
=& \left(4n^2+4n+1\right)\left(n^4+4n^3+3n^2+4n^3+16n^2+12n+2n^2+8n+6\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^4+4n^3+3n^2+4n^3+16n^2+12n+n^2+4n+3\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^4+4n^3+2n^2+4n^3+16n^2+8n+n^2+4n+2\right) \\
=& \left(4n^2+4n+1\right)\left(n^4+8n^3+21n^2+20n+6\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^4+8n^3+20n^2+16n+3\right) - \\
&\left(n^2+2n\right)\left(n^4+8n^3+19n^2+12n+2\right) \\
=& 4n^6+32n^5+84n^4+80n^3+24n^2 \\
&+4n^5+32n^4+84n^3+80n^2+24n \\
&+n^4+8n^3+21n^2+20n+6 \\
&-n^6-8n^5-20n^4-16n^3-3n^2 \\
&-2n^5-16n^4-40n^3-32n^2-6n \\
&-n^6-8n^5-19n^4-12n^3-2n^2 \\
&-2n^5-16n^4-38n^3-24n^2-4n \\
=& 2n^6+16n^5+46n^4+66n^3+64n^2+34n+6 \\
=& 2\left(n^6+8n^5+23n^4+33n^3+32n^2+17n+3\right).
\end{aligned}$$

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
&b_n - b_{n+1} \\
>&\frac{A(n)}{(n^2+2n)(n^2+4n+1)(n^2+4n+2)(n^2+4n+3)} =
\end{aligned}$$

$$\frac{2\left(n^6+8n^5+23n^4+33n^3+32n^2+17n+3\right)}{(n^2+2n)\,(n^2+4n+1)\,(n^2+4n+2)\,(n^2+4n+3)}>0,$$

tj. $b_{n+1}<b_n$.

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,b_n$ zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,b_n$ konvergira.

Odavde i iz Zadatka 8.1.6 slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, to on konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

◊ **Zadatak 8.1.16** Neka $p\in\mathbb{R}$. Ispitati da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ apsolutno konvergira, uslovno konvergira, ili divergira.

**Rješenje:** Rezonujemo slično kao u prethodnom zadatku, tj. Zadatku 8.1.15.
Neka je $p>1$.
Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ je konvergentan red [DzG2, str. 140, Zad. 59], pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ apsolutno konvergentan (Definicija 7.1).

Ovo po Teoremu 7.2 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ i konvergentan (nije divergentan).

Tako, za $p>1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ apsolutno konvergira, te konvergira (ne divergira).
Pretpostavimo da je $p\leq 0$.

Ako je $p=0$, opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ je $(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}$, a on ne teži nuli kad $n\to+\infty$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ divergira (ne konvergira).

Ako je $p<0$, onda je $p=-q$ za neko $q>0$. Opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ je sada $\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}=\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^{-q}}=(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\cdot n^q$, a on ne teži nuli kad $n\to+\infty$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ apsolutno konvergirao, onda bi on i konvergirao, što nije slučaj. Slijedi, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno.

Zaključujemo, za $p\le 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Neka je sada $0<p\le 1$.

Vrijedi, $\lfloor\sqrt{1}\rfloor=1$, $\lfloor\sqrt{2}\rfloor=1$, $\lfloor\sqrt{3}\rfloor=1$, $\lfloor\sqrt{4}\rfloor=2$, $\lfloor\sqrt{5}\rfloor=2$, $\lfloor\sqrt{6}\rfloor=2$, $\lfloor\sqrt{7}\rfloor=2$, $\lfloor\sqrt{8}\rfloor=2$, $\lfloor\sqrt{9}\rfloor=3$, ..., pa je skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ pogodno u ovom slučaju zapisati u obliku $1^2$, $1^2+1$, $1^2+2$, $2^2$, $2^2+1$, $2^2+2$, $2^2+3$, $2^2+4$, $3^2$, $3^2+1$, ..., $3^2+6$, $4^2$, $4^2+1$, ..., $4^2+8$, ..., $n^2$, $n^2+1$, ..., $n^2+2n$, ... .

Slijedi, $\left\lfloor\sqrt{1^2}\right\rfloor=1$, $\left\lfloor\sqrt{1^2+1}\right\rfloor=1$, $\left\lfloor\sqrt{1^2+2}\right\rfloor=1$, $\left\lfloor\sqrt{2^2}\right\rfloor=2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+1}\right\rfloor=2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+2}\right\rfloor=2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+3}\right\rfloor=2$, $\left\lfloor\sqrt{2^2+4}\right\rfloor=2$, $\left\lfloor\sqrt{3^2}\right\rfloor=3$, $\left\lfloor\sqrt{3^2+1}\right\rfloor=3$, ..., $\left\lfloor\sqrt{3^2+6}\right\rfloor=3$, $\left\lfloor\sqrt{4^2}\right\rfloor=4$, $\left\lfloor\sqrt{4^2+1}\right\rfloor=4$, ..., $\left\lfloor\sqrt{4^2+8}\right\rfloor=4$, ..., $\left\lfloor\sqrt{n^2}\right\rfloor=n$, $\left\lfloor\sqrt{n^2+1}\right\rfloor=n$, ..., $\left\lfloor\sqrt{n^2+2n}\right\rfloor=n$, ... .

Tako, za $n\in\mathbb{N}$ je $\left\lfloor\sqrt{n^2+k}\right\rfloor=n$ za $k\in\{0,1,...,2n\}$.

Zaključujemo da je dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ustvari oblika

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{(1^2+0)^p}-\frac{1}{(1^2+1)^p}-\frac{1}{(1^2+2)^p}+\frac{1}{(2^2+0)^p}+\frac{1}{(2^2+1)^p}+...+\frac{1}{(2^2+4)^p}\\
&-\frac{1}{(3^2+0)^p}-\frac{1}{(3^2+1)^p}-...-\frac{1}{(3^2+6)^p}+...
\end{aligned}
$$

$$+ (-1)^n \frac{1}{(n^2+0)^p} + (-1)^n \frac{1}{(n^2+1)^p} + ... + (-1)^n \frac{1}{(n^2+2n)^p} + ... \ .$$

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p} =$$

$$\frac{1}{(1^2+0)^p} + \frac{1}{(1^2+1)^p} + \frac{1}{(1^2+2)^p} - \frac{1}{(2^2+0)^p} - \frac{1}{(2^2+1)^p} - ... - \frac{1}{(2^2+4)^p}$$
$$+ \frac{1}{(3^2+0)^p} + \frac{1}{(3^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(3^2+6)^p} - ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{(n^2+0)^p} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n^2+1)^p} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{(n^2+2n)^p} + ...$$

i red

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{(1^2+0)^p} + \frac{1}{(1^2+1)^p} + \frac{1}{(1^2+2)^p}\right) - \\
&\left(\frac{1}{(2^2+0)^p} + \frac{1}{(2^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(2^2+4)^p}\right) + \\
&\left(\frac{1}{(3^2+0)^p} + \frac{1}{(3^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(3^2+6)^p}\right) + ... \\
&+ (-1)^{n-1}\left(\frac{1}{(n^2+0)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(n^2+2n)^p}\right) + ... \\
=& \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(n^2+k)^p}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n
\end{aligned}$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ bez narušavanja poretka.

Pretpostavimo da je $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{(n^2+0)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(n^2+2n)^p} \\
>& \frac{1}{(n^2+2n)^p} + \frac{1}{(n^2+2n)^p} + ... + \frac{1}{(n^2+2n)^p} = \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} > 0.
\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Odavde, iz $0 < \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} = 0$, što je nemoguće jer je $0 < p \leq \frac{1}{2}$ (limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p}$ je jednak $+\infty$ za $0 < p < \frac{1}{2}$, te jednak 2 za $p = \frac{1}{2}$).

Dakle, kontradikcija, pa ne vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ divergira, pa po Zadatku 8.1.6 divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da divergira (ne konvergira) onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira u ovom slučaju ni apsolutno.

Tako, za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Ostaje da razmotrimo slučaj $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

Kako smo već vidjeli, za $n \in \mathbb{N}$ je (za $p > 0$) $\frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} < b_n$.

Osim toga, za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
b_n =& \frac{1}{(n^2+0)^p} + \frac{1}{(n^2+1)^p} + ... + \frac{1}{(n^2+2n)^p} \\
<& \frac{1}{(n^2+0)^p} + \frac{1}{(n^2+0)^p} + ... + \frac{1}{(n^2+0)^p} = \frac{2n+1}{n^{2p}}.
\end{aligned}$$

Pošto je $p > \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < p \leq 1$), to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n^{2p}} = 0$.

Odavde, iz $\frac{2n+1}{(n^2+2n)^p} < b_n < \frac{2n+1}{n^{2p}}$, $n \in \mathbb{N}$, i sendvič teorema, slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Posmatrajmo razliku $b_n - b_{n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$b_n - b_{n+1} =$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(n^2+k)^p}-\sum_{k=0}^{2(n+1)}\frac{1}{\left((n+1)^2+k\right)^p}\\
&=\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{(n^2+k)^p}-\sum_{k=0}^{2n}\frac{1}{\left((n+1)^2+k\right)^p}\\
&\quad-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+1\right)^p}-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+2\right)^p}\\
&=\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{(n^2+k)^p}-\frac{1}{\left((n+1)^2+k\right)^p}\right)\\
&\quad-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+1\right)^p}-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+2\right)^p}.
\end{aligned}
$$

Za $n\in\mathbb{N}$ je $(n+1)^2<(n+1)^2+2n+1$ i $(n+1)^2<(n+1)^2+2n+2$, pa je $(n+1)^{2p}<\left((n+1)^2+2n+1\right)^p$ i $(n+1)^{2p}<\left((n+1)^2+2n+2\right)^p$, tj. $\frac{1}{(n+1)^{2p}}>\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+1\right)^p}$ i $\frac{1}{(n+1)^{2p}}>\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+2\right)^p}$, odnosno $-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+1\right)^p}>-\frac{1}{(n+1)^{2p}}$ i $-\frac{1}{\left((n+1)^2+2n+2\right)^p}>-\frac{1}{(n+1)^{2p}}$.

Dobijamo da je za $n\in\mathbb{N}$,

$$
b_n-b_{n+1}>\sum_{k=0}^{2n}\left(\frac{1}{(n^2+k)^p}-\frac{1}{\left((n+1)^2+k\right)^p}\right)-\frac{2}{(n+1)^{2p}}.
$$

Posmatrajmo funkciju $g_n(x)=\frac{1}{(n^2+x)^p}-\frac{1}{\left((n+1)^2+x\right)^p}$ na $I=[0,2n]$.

Funkcija $g_n(x)$ je definisana na $I$, elementarna je na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.

Osim toga, za $x\in I$ je

$$
\begin{aligned}
g_n'(x)&=-p\left(n^2+x\right)^{-p-1}+p\left((n+1)^2+x\right)^{-p-1}\\
&=-p\left(\frac{1}{(n^2+x)^{p+1}}-\frac{1}{\left((n+1)^2+x\right)^{p+1}}\right),
\end{aligned}
$$

tj. postoji izvod $g_n^{'}(x)$ na $I$ (bar unutar $I$).

Kako je $n^2 < (n+1)^2$, to je za $x \in I$, $n^2 + x < (n+1)^2 + x$, tj. $\left(n^2+x\right)^{p+1} < \left((n+1)^2+x\right)^{p+1}$, ili $\frac{1}{(n^2+x)^{p+1}} > \frac{1}{\left((n+1)^2+x\right)^{p+1}}$.

Tako, za $x \in I$ (unutar $I$) je $g_n^{'}(x) < 0$, pa ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $I$ na kojem je $g_n^{'}(x) \equiv 0$.

Ovo znači da je funkcija $g_n(x)$ opadajuća na $I$ (vidjeti notu 10 na stranici 85 u [DzG2]).

Slijedi, $g_n(0) > g_n(1) > ... > g_n(2n)$, tj.

$$\frac{1}{(n^2+0)^p} - \frac{1}{\left((n+1)^2+0\right)^p} > \frac{1}{(n^2+1)^p} - \frac{1}{\left((n+1)^2+1\right)^p} > ...$$
$$> \frac{1}{(n^2+2n)^p} - \frac{1}{\left((n+1)^2+2n\right)^p}.$$

Odavde vidimo da za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
& b_n - b_{n+1} \\
& > \sum_{k=0}^{2n} \left( \frac{1}{(n^2+2n)^p} - \frac{1}{\left((n+1)^2+2n\right)^p} \right) - \frac{2}{(n+1)^{2p}} \\
& = (2n+1) \left( \frac{1}{(n^2+2n)^p} - \frac{1}{\left((n+1)^2+2n\right)^p} \right) - \frac{2}{(n+1)^{2p}} \\
& = \frac{2}{n^{2p}} \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right) \left( \frac{1}{(1+\frac{2}{n})^p} - \frac{1}{(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2})^p} \right) - \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^{2p}} \right] \\
& = \frac{2}{n^{2p}} \left[ \left(n+\frac{1}{2}\right) \left( \left(1+\frac{2}{n}\right)^{-p} - \left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-p} \right) - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2p} \right].
\end{aligned}$$

Posmatrajmo funkciju $f(x) = (1+x)^{-p} - 1 + px$ na $[0, +\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je definisana na $[0, +\infty)$, elementarna je na $[0, +\infty)$, pa je kao takva i neprekidna na $[0, +\infty)$.

Osim toga, za $x \in [0, +\infty)$ je

$$f^{'}(x) = -p(1+x)^{-p-1} + p = p\left(1 - \frac{1}{(1+x)^{p+1}}\right),$$

tj. postoji izvod $f^{'}(x)$ na $[0, +\infty)$ (bar unutar $[0, +\infty)$).

Kako za $x \in [0, +\infty)$ vrijedi $x \geq 0$, to je onda i $1 + x \geq 1$, tj. $(1+x)^{p+1} \geq 1$, ili $\frac{1}{(1+x)^{p+1}} \leq 1$, odnosno $-\frac{1}{(1+x)^{p+1}} \geq -1$.

Dobijamo da za $x \in [0, +\infty)$ vrijedi $1 - \frac{1}{(1+x)^{p+1}} \geq 0$.

Tako, za $x \in [0, +\infty)$ (unutar $[0, +\infty)$) je $f^{'}(x) \geq 0$, i ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $[0, +\infty)$ na kojem je $f^{'}(x) \equiv 0$ ($f^{'}(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$).

Ovo znači da je funkcija $f(x)$ rastuća na $[0, +\infty)$.

Slijedi, $f(x) > f(0)$ za $x > 0$, tj. $(1+x)^{-p} - 1 + px > 0$ za $x > 0$, odnosno $(1+x)^{-p} > 1 - px$ za $x > 0$.

Posmatrajmo sada funkciju $g(x) = 1 - px + \frac{p(p+1)}{2}x^2 - (1+x)^{-p}$ na $[0, +\infty)$.

Funkcija $g(x)$ je definisana na $[0, +\infty)$, elementarna je na $[0, +\infty)$, pa je kao takva i neprekidna na $[0, +\infty)$.

Osim toga, za $x \in [0, +\infty)$ je

$$\begin{aligned} g^{'}(x) &= -p + p(p+1)x + p(1+x)^{-p-1} \\ &= p\left(\frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x\right), \end{aligned}$$

tj. postoji izvod $g^{'}(x)$ na $[0, +\infty)$ (bar unutar $[0, +\infty)$).

Posmatrajmo i funkciju $h(x) = \frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x$ na $[0, +\infty)$.

Funkcija $h(x)$ je definisana na $[0, +\infty)$, elementarna je na $[0, +\infty)$, pa je kao takva i neprekidna na $[0, +\infty)$.

Osim toga, za $x \in [0, +\infty)$ je

$$\begin{aligned} h^{'}(x) &= (-p-1)(1+x)^{-p-2} + (p+1) \\ &= (p+1)\left(1 - \frac{1}{(1+x)^{p+2}}\right), \end{aligned}$$

tj. postoji izvod $h^{'}(x)$ na $[0, +\infty)$ (bar unutar $[0, +\infty)$).

Kako za $x \in [0, +\infty)$ vrijedi $x \geq 0$, to je onda i $1 + x \geq 1$, tj. $(1 + x)^{p+2} \geq 1$, ili $\frac{1}{(1+x)^{p+2}} \leq 1$, odnosno $-\frac{1}{(1+x)^{p+2}} \geq -1$.

Dobijamo da za $x \in [0, +\infty)$ vrijedi $1 - \frac{1}{(1+x)^{p+2}} \geq 0$.

Tako, za $x \in [0, +\infty)$ (unutar $[0, +\infty)$) je $h^{'}(x) \geq 0$, i ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $[0, +\infty)$ na kojem je $h^{'}(x) \equiv 0$ ($h^{'}(x) = 0$ ako i samo ako je $x = 0$).

Ovo znači da je funkcija $h(x)$ rastuća na $[0, +\infty)$.

Slijedi, $h(x) \geq h(0)$ za $x \geq 0$, tj. $\frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x \geq 0$ za $x \geq 0$ ($h(x) > h(0)$ za $x > 0$, tj. $\frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x > 0$ za $x > 0$, i $\frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x = 0$ za $x = 0$).

Tako, za $x \in [0, +\infty)$ (unutar $[0, +\infty)$) je $g^{'}(x) \geq 0$, i ne postoji podinterval $(\alpha, \beta)$ intervala $[0, +\infty)$ na kojem je $g^{'}(x) \equiv 0$ ($g^{'}(x) = 0$ ako i samo ako je $\frac{1}{(1+x)^{p+1}} - 1 + (p+1)x = 0$ ako i samo ako je $x = 0$).

Ovo znači da je funkcija $g(x)$ rastuća na $[0, +\infty)$.

Slijedi, $g(x) > g(0)$ za $x > 0$, tj. $1 - px + \frac{p(p+1)}{2}x^2 - (1+x)^{-p} > 0$ za $x > 0$, odnosno $(1+x)^{-p} < 1 - px + \frac{p(p+1)}{2}x^2$ za $x > 0$, ili $-(1+x)^{-p} > -1 + px - \frac{p(p+1)}{2}x^2$ za $x > 0$.

Kako je $(1+x)^{-p} > 1 - px$ za $x > 0$, to za $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-p} > 1 - \frac{2p}{n}$.

S druge strane, $-(1+x)^{-p} > -1 + px - \frac{p(p+1)}{2}x^2$ za $x > 0$, pa je za $n \in \mathbb{N}$

$$-\left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{-p} > -1 + \frac{4p}{n} + \frac{p}{n^2} - \frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2,$$

$$-\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-p} > -1 + \frac{2p}{n} - \frac{2p(2p+1)}{2} \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Sada je za $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{-p} - \left(1 + \frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^{-p} \\
>&1 - \frac{2p}{n} - 1 + \frac{4p}{n} + \frac{p}{n^2} - \frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2 \\
=&\frac{2p}{n} + \frac{p}{n^2} - \frac{p(p+1)}{2}\left(\frac{4}{n} + \frac{1}{n^2}\right)^2,
\end{aligned}$$

te

$$
\begin{aligned}
&\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-p}-\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-p}\right)\\
>&\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2p}{n}+\frac{p}{n^2}-\frac{p\,(p+1)}{2}\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\right)\\
=&2p+\frac{p}{n}-\frac{p\,(p+1)}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2+\frac{p}{n}+\frac{p}{2n^2}-\frac{p\,(p+1)}{4}\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\\
=&2p+\frac{2p}{n}+\frac{p}{2n^2}-\frac{p\,(p+1)}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2-\frac{p\,(p+1)}{4}\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2,
\end{aligned}
$$

i

$$
\begin{aligned}
&\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-p}-\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-p}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2p}\\
>&2p+\frac{2p}{n}+\frac{p}{2n^2}-\frac{p\,(p+1)}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2-\frac{p\,(p+1)}{4}\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\\
&-1+\frac{2p}{n}-p\,(2p+1)\cdot\frac{1}{n^2}\\
=&2p-1+\frac{4p}{n}+\frac{p}{2n^2}-p\,(2p+1)\cdot\frac{1}{n^2}\\
&-\frac{p\,(p+1)}{2}\left(\frac{4}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)^2-\frac{p\,(p+1)}{4}\left(\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^2\\
=&2p-1+c_n.
\end{aligned}
$$

Tako, za $n\in\mathbb{N}$ je

$$
\begin{aligned}
&b_n-b_{n+1}\\
>&\frac{2}{n^{2p}}\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\left(1+\frac{2}{n}\right)^{-p}-\left(1+\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^{-p}\right)-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-2p}\right]\\
>&\frac{2}{n^{2p}}\left(2p-1+c_n\right).
\end{aligned}
$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} (2p-1+c_n) = 2p-1$.

Primijetimo da zbog $p > \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2} < p \leq 1$), vrijedi $2p-1 > 0$, te $\frac{1}{2}(2p-1) > 0$.

Posmatrajmo okolinu $\left(2p-1-\frac{2p-1}{2}, 2p-1+\frac{2p-1}{2}\right)$, tj. okolinu $\left(\frac{2p-1}{2}, \frac{6p-3}{2}\right)$, odnosno okolinu $\left(\frac{1}{2}(2p-1), \frac{3}{2}(2p-1)\right)$ tačke $2p-1$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(\frac{1}{2}(2p-1), \frac{3}{2}(2p-1)\right)$ granične vrijednosti $2p-1$ niza $\{2p-1+c_n\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $n_0 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $\frac{1}{2}(2p-1) < 2p-1+c_n < \frac{3}{2}(2p-1)$.

Tako, za $n \geq n_0$ je

$$b_n - b_{n+1} > \frac{2}{n^{2p}} \cdot \frac{1}{2}(2p-1) = \frac{1}{n^{2p}}(2p-1) > 0,$$

tj. $b_{n+1} < b_n$.

Imamo, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, i $b_{n+1} < b_n$ za $n \geq n_0$, pa po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ konvergira.

Odavde i iz Zadatka 8.1.6 slijedi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ konvergira.

Tako, po pomenutom Teoremu 1.8 u [DzG2], konvergira (ne divergira) onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$.

Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, to zbog $\frac{1}{2} < p \leq 1$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ divergira [DzG2, str. 140-142, Zad. 59].

Drugim riječima, za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno.

Zaključujemo, za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno, te konvergira (ne divergira).

Rezimirajmo, za $p > 1$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), za $\frac{1}{2} < p \leq 1$ red ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red ne konvergira apsolutno, ne konvergira (divergira), te za $p \leq 0$, red ne konvergira apsolutno, ne konvergira (divergira).

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$ ne konvergira apsolutno za $p \leq 1$. Kako on konvergira za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, to on konvergira uslovno za $\frac{1}{2} < p \leq 1$ (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 8.1.17** Neka je $\varepsilon_n = 1$ za $2^{2k} \leq n < 2^{2k+1}$ i $\varepsilon_n = -1$ za $2^{2k+1} \leq n < 2^{2k+2}$, gdje $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ispitati konvergenciju redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n \ln n}$.

**Rješenje:** Neka je $k = 0$. Sada je $\varepsilon_n = 1$ za $1 \leq n < 2$ i $\varepsilon_n = -1$ za $2 \leq n < 2^2$. Ako je $k = 1$, onda je $\varepsilon_n = 1$ za $2^2 \leq n < 2^3$ i $\varepsilon_n = -1$ za $2^3 \leq n < 2^4$.

Isto tako, za $k = 2$, imamo da je $\varepsilon_n = 1$ za $2^4 \leq n < 2^5$ te $\varepsilon_n = -1$ za $2^5 \leq n < 2^6$, itd.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ je oblika

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} - ... - \frac{1}{15} + ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}-1} + ...,$$

dok je red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n \ln n}$ oblika

$$- \frac{1}{2\ln 2} - \frac{1}{3\ln 3} + \frac{1}{4\ln 4} + ... + \frac{1}{7\ln 7} - \frac{1}{8\ln 8} - \frac{1}{9\ln 9} - ... - \frac{1}{15\ln 15} + ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} + (-1)^{n-1} \frac{1}{(2^{n-1}+1)\ln(2^{n-1}+1)} + ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1}-1)\ln(2^{n-1}+2^{n-1}-1)} + ... .$$

Posmatrajmo red

$$\frac{1}{1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + ... + \frac{1}{7}\right) - \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{9} + ... + \frac{1}{15}\right) + ...$$
$$+ (-1)^{n-1} \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + ... + \frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}-1}\right) + ...$$

$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\frac{1}{2^{n-1}+k}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}$ bez narušavanja poretka.

Osim toga, posmatrajmo red

$$\begin{aligned}&\sum_{n=2}^{+\infty}-\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}\\ =&\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}-\frac{1}{4\ln 4}-...-\frac{1}{7\ln 7}+\frac{1}{8\ln 8}+\frac{1}{9\ln 9}+...+\frac{1}{15\ln 15}-...\\ &+(-1)^n\frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}}+(-1)^n\frac{1}{(2^{n-1}+1)\ln(2^{n-1}+1)}+...\\ &+(-1)^n\frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1}-1)\ln(2^{n-1}+2^{n-1}-1)}+...,\end{aligned}$$

i red

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{2\ln 2}+\frac{1}{3\ln 3}\right)-\left(\frac{1}{4\ln 4}+...+\frac{1}{7\ln 7}\right)+\left(\frac{1}{8\ln 8}+...+\frac{1}{15\ln 15}\right)-...\\ &+(-1)^n\left(\frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}}+\frac{1}{(2^{n-1}+1)\ln(2^{n-1}+1)}+...\right.\\ &\left.+\frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1}-1)\ln(2^{n-1}+2^{n-1}-1)}\right)+...=\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n c_n\end{aligned}$$

nastao grupisanjem članova reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}-\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$ bez narušavanja poretka.

Za $n\in\mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}b_n=&\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^{n-1}+1}+...+\frac{1}{2^{n-1}+2^{n-1}-1}\\ >&\frac{2^{n-1}}{2^{n-1}+2^{n-1}-1}=\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}}>0.\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}b_n=0$.

Odavde, iz $0 < \frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} < b_n$, $n \in \mathbb{N}$, i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = 0$, što je nemoguće jer je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2-\frac{1}{2^{n-1}}} = \frac{1}{2}$.

Dakle, kontradikcija, pa ne vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$.

Ovo znači da opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, b_n$ ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, b_n$ divergira.

Sada, iz Zadatka 8.1.6 slijedi da i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ apsolutno konvergirao (Definicija 7.1), onda bi on po Teoremu 7.2 i konvergirao, što je nemoguće.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n}$ ne konvergira, to on ne konvergira ni uslovno (Definicija 7.6).

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n\, c_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi

$$
\begin{aligned}
0 <& c_n = \frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)\ln(2^{n-1}+1)} + \ldots \\
&+ \frac{1}{(2^{n-1}+2^{n-1}-1)\ln(2^{n-1}+2^{n-1}-1)} \\
<& \frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} \\
=& \frac{2^{n-1}}{2^{n-1}\ln 2^{n-1}} = \frac{1}{\ln 2^{n-1}}.
\end{aligned}
$$

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln 2^{n-1}} = 0$, i sendvič teorema, slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = 0$.

Dokažimo da je niz $\{c_n\}_{n=2}^{+\infty}$ opadajući niz.

Zaista, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi

$$
\begin{aligned}
c_{n+1} &= \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^n+k)\ln(2^n+k)} \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left( \frac{1}{(2^n+2k)\ln(2^n+2k)} + \frac{1}{(2^n+2k+1)\ln(2^n+2k+1)} \right) \\
&< \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \left( \frac{1}{(2^n+2k)\ln(2^n+2k)} + \frac{1}{(2^n+2k)\ln(2^n+2k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{2}{(2^n+2k)\ln(2^n+2k)} = \sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \frac{1}{(2^{n-1}+k)\ln\left(2\left(2^{n-1}+k\right)\right)} \\
&< \sum_{k=0}^{2^n-1} \frac{1}{(2^{n-1}+k)\ln(2^{n-1}+k)} = c_n.
\end{aligned}
$$

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n c_n$ zadovoljene pretpostavke kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2. Po ovom kriteriju, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n c_n$ konvergira, pa po Zadatku 8.1.6 konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} -\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$.

Odavde i iz tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$ konvergira (ne divergira).

Vrijedi, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left|\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}\right| = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$.

Po Primjeru 4.16, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n}$ divergira, pa red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$ ne konvergira apsolutno.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$ ne konvergira apsolutno, konvergira, i ne divergira.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$ ne konvergira apsolutno, ali konvergira, to on konvergira uslovno. ■

♢ **Zadatak 8.1.18** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$.

**Rješenje:** Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}+(-1)^n-(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}+(-1)^n} \cdot \frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} \\
&= (-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n-1} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin\frac{1}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Osim toga, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, imamo da je $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{2}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i $0 < \sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sin\frac{1}{\sqrt{n}} < 1$.

Kako je i $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, to vidimo da su za red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira.

Sada, iz $\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i $\frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, dobijamo da je $\frac{1}{n}\sin\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Osim toga, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Tako, zadovoljeni su uslovi kriterija za alternirajuće redove za red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, pa i ovaj red konvergira.

Iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}}$ i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$, i tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi i konvergencija reda

$$\sum_{n=2}^{+\infty}\left((-1)^n \sin\frac{1}{\sqrt{n}} + (-1)^n \frac{1}{n-1}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \sum_{n=2}^{+\infty} a_n.$$

Posmatrajmo sada pozitivan red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Znamo da je $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n-1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 = L.$$

Pošto je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to iz kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi da redovi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ istovremeno ili konvergiraju ili divergiraju.

Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], to je onda i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ divergentan red.

Po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], divergentan je onda i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} -\frac{\sqrt{n}}{n-1} \sin \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ konvergira a red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ divergira, pa po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], divergira (ne konvergira) i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Ako bi red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ apsolutno konvergirao (Definicija 7.1), to bi po Teoremu 7.2 ovaj red i konvergirao, što je nemoguće.

Dakle, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ne konvergira apsolutno.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n + \sqrt{n}} \sin \frac{1}{\sqrt{n}}$ ne konvergira, to on ne konvergira ni uslovno (Definicija 7.6). ■

◇ **Zadatak 8.1.19** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left( \sqrt[n]{a} - 1 \right)$, gdje je $a > 1$ konstanta.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

Za $n\in\mathbb{N}$ je $0<\frac{1}{n}$, pa kako je $a>1$, to je $a^0<a^{\frac{1}{n}}$, tj. $\sqrt[n]{a}-1>0$.

Po $(e)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{a}=1$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=0$.

Takođe, za $n\in\mathbb{N}$ je $\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}$ pa je $a^{\frac{1}{n+1}}<a^{\frac{1}{n}}$, tj. $\sqrt[n+1]{a}-1<\sqrt[n]{a}-1$.

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po tom kriteriju red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ konvergira.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi da konvergira (ne divergira) i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$.

Po Zadatku 2.1.3, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ divergira, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$ konvergira, ali ne i apsolutno, to on konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 8.1.20** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz. Dokazati da iz $\varliminf\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, iz $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\le 0$ slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$, te da iz $\varlimsup\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)<0$, takođe slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $l=\varliminf\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)>0$.

Kako je $l>0$, to možemo odabrati neki broj $p>0$, takav da je $l>p>0$.

Po Zadatku 24 u [DzG1, str. 128], za broj $p > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > l - p$.

Stavimo, $\alpha = l - p > 0$.

Tako, za $n \geq N$, vrijedi $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) > \alpha$.

Imamo da je za $n \geq N$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 > \frac{\alpha}{n}$, tj. $\frac{a_n}{a_{n+1}} > 1 + \frac{\alpha}{n}$, odnosno $\frac{a_n}{a_{n+1}} > \frac{n+\alpha}{n}$, ili $\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{n}{n+\alpha} < 1$.

Drugim riječima, $a_{n+1} < a_n$ za sve $n \geq N$, što znači da je zadovoljen prvi uslov kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2.

Da bi po ovom kriteriju slijedilo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira, dovoljno je još dokazati da je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$.

Neka je $n \geq N$.

Možemo pisati,

$$
\begin{aligned}
0 < a_{n+1} =& \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot ... \cdot \frac{a_{N+1}}{a_N} \cdot a_N \\
<& \frac{n}{n+\alpha} \cdot \frac{n-1}{n-1+\alpha} \cdot ... \cdot \frac{N}{N+\alpha} \cdot a_N \\
=& \frac{1}{1+\frac{\alpha}{n}} \cdot \frac{1}{1+\frac{\alpha}{n-1}} \cdot ... \cdot \frac{1}{1+\frac{\alpha}{N}} \cdot a_N = b_n \cdot a_N.
\end{aligned}
$$

Dokažimo da za niz $\{b_n\}_{n=N}^{+\infty}$ vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = 0$.

Neka je $n \geq N$.

Po Bernulijevoj nejednakosti [DzG1, str. 15-16], vrijedi

$$
\begin{aligned}
c_n =& \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)\left(1 + \frac{\alpha}{n-1}\right) ... \left(1 + \frac{\alpha}{N}\right) \\
\geq& 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\alpha}{n-1} + ... + \frac{\alpha}{N} = 1 + S_{n+1-N},
\end{aligned}
$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}$ ($S_n = \sum\limits_{k=N}^{N+n-1} \frac{\alpha}{k}$, $n \in \mathbb{N}$).

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira [DzG2, str. 5-6], i suma mu je jednaka $+\infty$.

Po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], divergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}$, i suma mu je jednaka $+\infty$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da divergira red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{\alpha}{n}$, i da mu je suma jednaka $+\infty$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1-N} = +\infty$.

Tako, iz

$$c_n \geq 1 + S_{n+1-N},$$

$n \geq N$, dobijamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n = +\infty$.

Pošto je $b_n = \frac{1}{c_n}$, $n \geq N$, to je onda $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \cdot a_N = 0$.

Iz $0 < a_{n+1} < b_n \cdot a_N$, $n \geq N$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n \cdot a_N = 0$, i sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$, pa je po pomenutom Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Kako smo već konstatovali, ovo znači da su zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po ovom kriteriju, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 0$.

Ovo znači da je $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \leq 0$, tj. $\frac{a_n}{a_{n+1}} \leq 1$, odnosno $a_n \leq a_{n+1}$.

Tako, $0 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ .

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{1}{2}a_1, \frac{1}{2}a_1\right)$ granične vrijednosti 0 niza $\{a_n\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ipak, ovo je kontradikcija s obzirom da je $\frac{1}{2}a_1 < a_1 \leq a_2 \leq \ldots$ .

Zaključujemo, nije $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa nije ni $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$.

Tako, po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira.

Konačno, pretpostavimo da je $L = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < 0$.

Kako je $L < 0$, to možemo odabrati neki broj $q > 0$, takav da je $L + q < 0$.

Po Zadatku 23 u [DzG1, str. 128], za broj $q > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) < L + q < 0$.

Tako, za $n \geq N$, vrijedi $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 < 0$, tj. $\frac{a_n}{a_{n+1}} < 1$, odnosno $a_n < a_{n+1}$.

Drugim riječima, vrijedi $0 < a_N < a_{N+1} < \ldots$ .

Ako bi pretpostavili da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, onda bi okolina $\left(-\frac{1}{2}a_N, \frac{1}{2}a_N\right)$ tačke 0 sadržavala sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\{a_n\}$.

Ovo je kontradikcija sa činjenicom da je $0 < \frac{1}{2}a_N < a_N < a_{N+1} < \ldots$ .

Zaključujemo, nije $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa nije ni $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$.

Ovo, kao i u prethodnom slučaju, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 8.1.21** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz. Pretpostavimo da postoji $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, i ograničen niz $\{\beta_n\}$, takvi da je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira za $\alpha > 0$ i divergira za $\alpha \leq 0$.

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $\alpha \neq 0$.

Iz $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}$ slijedi da je $\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}$, tj. da je $n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha + \frac{\beta_n}{n^{\varepsilon}}$.

Kako je $\{\beta_n\}$ ograničen niz, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta_n}{n^{\varepsilon}} = 0$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$.

Odavde i iz Posljedice 7.14 u [DzG1, str. 100], zaključujemo da je $\varliminf\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \varlimsup\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \alpha$.

Tako, ako je $\alpha > 0$, onda iz Zadatka 8.1.20 imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira.

Ako je $\alpha < 0$, onda ponovo iz Zadatka 8.1.20 imamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira.

Ostaje da razmotrimo slučaj $\alpha = 0$.

Neka je $\alpha = 0$.

Sada je $\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}$.

Možemo pisati,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{a_{n+1}} &= \frac{1}{a_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} \\
&= \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{\beta_1}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1 + \frac{\beta_2}{2^{1+\varepsilon}}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}}\right).
\end{aligned}
$$

Po pretpostavci, niz $\{\beta_n\}$ je ograničen, pa postoji $\beta > 0$, takvo da je $|\beta_n| < \beta$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tako, $-\beta < \beta_n < \beta$, $n \in \mathbb{N}$, pa je

$$
\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 + \frac{\beta}{1^{1+\varepsilon}}\right)\left(1 + \frac{\beta}{2^{1+\varepsilon}}\right) \ldots \left(1 + \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}\right).
$$

Po Zadatku 8 u [DzG1, str. 73], vrijedi $1 + a < e^a$ za sve $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Za $a = 0$ je $1 + a = 1$ i $e^a = 1$, pa vidimo da ustvari vrijedi nejednakost $1 + a \leq e^a$ za $a \in \mathbb{R}$.

Specijalno, za $1 + a > 0$ ($a > -1$), imamo da je $1 + a \leq e^a$, tj. da je $\ln(1 + a) \leq a$.

Dobijamo,

$$
\begin{aligned}
\ln \frac{1}{a_{n+1}} &< \ln \frac{1}{a_1} + \ln\left(1 + \frac{\beta}{1^{1+\varepsilon}}\right) + \ldots + \ln\left(1 + \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}\right) \\
&\leq \ln \frac{1}{a_1} + \frac{\beta}{1^{1+\varepsilon}} + \ldots + \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}} \\
&= \ln \frac{1}{a_1} + S_n,
\end{aligned}
$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$ je konvergentan red [DzG2, str. 140-141, Zad. 59], pa je po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}$.

Označimo sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}$ sa $S$.

Imamo, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$.

Tako, $\{S_n\}$ je konvergentan niz, pa je po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17] i ograničen.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\beta}{n^{1+\varepsilon}}$ je pozitivan red, pa je $\{S_n\}$ rastući niz.

Kako je $\{S_n\}$ rastući niz koji je ograničen (a onda ograničen i odozgo), to je po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], niz $\{S_n\}$ ne samo konvergentan (jer to već znamo), nego vrijedi i jednakost $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} S_n$.

Po osobinama supremuma [DzG1, str. 152-153], imamo da je $S_n \leq S$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tako,

$$\ln\frac{1}{a_{n+1}} < \ln\frac{1}{a_1} + S_n \leq \ln\frac{1}{a_1} + S,$$

pa je

$$e^{\ln\frac{1}{a_{n+1}}} < e^{\ln\frac{1}{a_1}+S} = e^{\ln\frac{1}{a_1}} \cdot e^S,$$

tj. $\frac{1}{a_{n+1}} < \frac{1}{a_1} \cdot e^S$, ili $a_{n+1} > \frac{a_1}{e^S} > 0$.

Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(-\frac{a_1}{e^S}, \frac{a_1}{e^S}\right)$ granične vrijednosti 0 niza $\{a_n\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnnogo elemenata niza.

Ipak, ovo je kontradikcija sa činjenicom da je $\frac{a_1}{e^S} < a_{n+1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Zaključujemo, nije $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa nije ni $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$.

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira.

Rezimirajmo, za $\alpha > 0$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ konvergira, a za $\alpha \leq 0$ divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 8.1.22** Pretpostavimo da za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, ne vrijedi uslov kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, da je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$ ili da ne vrijedi uslov da je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \geq N$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki broj. Da li tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira ?

**Rješenje:** Odgovor je negativan.
U Zadatku 7.1.19 smo posmatrali red oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = a + b^2 + a^3 + b^4 + ...,$$

gdje su $a$ i $b$ konstante takve da je $0 < a < b < 1$.

Drugim riječima, ovdje je $a_n = a^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj, te $a_n = b^n$ ako je $n \in \mathbb{N}$ paran broj.

Dobili smo upotrebom ojačanog kriterija korijena, tj. Teorema 6.4, da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira.

Ovo po Definiciji 7.1 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

Tako, svaki red navedenog oblika apsolutno konvergira, pa po Teoremu 7.2 i konvergira (ne divergira).

Posmatrajmo konkretan slučaj kada je $a = \frac{1}{3} < \frac{1}{2} = b$.

Imamo, red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + ...$$

apsolutno konvergira, te konvergira (ne divergira).

Ako posmatramo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} a_n\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, pa kako posljednji red konvergira, to onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ apsolutno konvergira, a onda i konvergira (ne divergira).

Ovdje je $a_n = \frac{1}{3^n}$ ako je $n \in \mathbb{N}$ neparan broj, te $a_n = \frac{1}{2^n}$ ako je $n \in \mathbb{N}$ paran broj.

Tvrdimo da ne vrijedi uslov da je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \geq N$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki broj.

Dovoljno je da dokažemo da je $a_n < a_{n+1}$ za sve neparne brojeve $n$, $n \geq 3$, tj. dovoljno je da dokažemo da je $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ za sve $k \in \mathbb{N}$.

Zaista, za $k = 1$ je $a_{2k+1} = a_3 = \frac{1}{3^3} = \frac{1}{27}$, i $a_{2k+2} = a_4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$, pa je $a_{2k+1} < a_{2k+2}$.

Pretpostavimo da je $a_{2k+1} = \frac{1}{3^{2k+1}} < \frac{1}{2^{2k+2}} = a_{2k+2}$ za neko $k \geq 1$.

Sada je,

$$\begin{aligned} a_{2(k+1)+1} =& a_{2k+3} = \frac{1}{3^{2k+3}} = \frac{1}{3^{2k+1}} \cdot \frac{1}{3^2} < \frac{1}{2^{2k+2}} \cdot \frac{1}{2^2} \\ =& \frac{1}{2^{2(k+1)+2}} = a_{2k+2}. \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, slijedi da je $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tj. da je $a_n < a_{n+1}$ za sve neparne $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Tako, iako nije zadovoljen uslov kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, da je $a_{n+1} \leq a_n$ za sve $n \geq N$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki broj, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ne mora da divergira. ■

♢ **Zadatak 8.1.23** Pretpostavimo da za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, ne vrijedi uslov kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, da je $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$. Da li tada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Naime, nije $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = 0$, pa nije ni $\lim\limits_{n \to +\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0$.

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ divergira. ■

♢ **Zadatak 8.1.24** Ako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red, a $\{b_n\}$ ograničen niz, da li je onda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergentan red ?

**Rješenje:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ne mora biti konvergentan.

Zaista, neka je $a_n = b_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, te $\frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Kako je $|b_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to je niz $\{b_n\}$ ograničen.

Ipak, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{2n-2}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6]. ■

♢ **Zadatak 8.1.25** Je li kriterij za alternirajuće redove, tj. Teorem 8.2, kriterij za utvrđivanje uslovne konvergencije redova ?

**Rješenje:** Odgovor je negativan.

Naime, kriterij za alternirajuće redove, tj. Teorem 8.2 nam govori da pod određenim uslovima, alternirajući red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$, $a_n \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, konvergira. Ipak, ovaj kriterij nam ne govori da pod pomenutim uslovima red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ ne konvergira apsolutno.

Da bi neki kriterij mogli proglasiti kriterijem za utvrđivanje uslovne konvergencije redova, to bi taj kriterij (u skladu sa Definicijom 7.6), morao obezbjeđivati uslove pod kojim neki red konvergira, ali ne konvergira apsolutno.

Kako smo već konstatovali, kriterij za alternirajuće redove ne nudi ovakve uslove. ■

♢ **Zadatak 8.1.26** Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$ i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira, da li onda konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ?

**Rješenje:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ ne mora da konvergira[24].

Zaista, neka je $a_n = b_n = (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Jasno, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Kao i u Zadatku 8.1.24, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2.

Ipak, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{2n-2}\frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6]. ■

[24] Rješenje ponudila kolegica Melika Alibegić, studentica prve godine kompjuterskih nauka Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a Univerziteta u Sarajevu.

♢ **Zadatak 8.1.27** Ako je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$ i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira, da li onda konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ?

**Rješenje:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da konvergira[25].

Primijetimo da u postavci zadatka nije dato da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ pozitivni. Ono što se sigurno pretpostavlja je da je $b_n \neq 0$ za $n\in\mathbb{N}$.

Ipak, ako bi redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ bili pozitivni, to bi iz datih pretpostavki, i kriterija upoređivanja limesom, slijedila konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Kako za redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ne pretpostavljamo pozitivnost, to je za očekivati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da konvergira.

Zaista, neka je $b_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ i $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}$ za $n\in\mathbb{N}$.

Kako smo već vidjeli u Zadatku 8.1.24, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira, to po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}\right)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Vrijedi i da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$. Zaista,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n}}{(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{(-1)^{n-1}\sqrt{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}\right)=1.$$

[25]Rješenje ponudio kolega Adi Hujić, student prve godine kompjuterskih nauka Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a Univerziteta u Sarajevu.

Tako, pri datim pretpostavkama, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da konvergira. ■

♢ **Zadatak 8.1.28** Pretpostavimo da niz $\{a_n\}$ opada ka nuli. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$.

**Rješenje:** Koristit ćemo Štolcov teorem[26] [DzG1, str. 131, Zad. 46].
Stavimo, $x_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ i $y_n = n$ za $n \in \mathbb{N}$.
Kako je $n < n+1$ za $n \in \mathbb{N}$, to je $\{y_n\}$ rastući niz, i pri tome je $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = +\infty$.
Vrijedi,

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{(a_1 + a_2 + ... + a_n) - (a_1 + a_2 + ... + a_{n-1})}{n - (n-1)} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{1} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0. \end{aligned}$$

Odavde i iz Štolcovog teorema slijedi da je

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \frac{a_1 + a_2 + ... + a_n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} \\ =& \lim_{n\to+\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = 0. \end{aligned}$$

Neka $n \in \mathbb{N}$.
Niz $\{a_n\}$ je opadajući, pa je $a_1 > a_2 > ... > a_n > a_{n+1} > ...$ .
Slijedi,

$$a_1 + a_2 + ... + a_n > a_{n+1} + a_{n+1} + ... + a_{n+1} = na_{n+1},$$

tj.

$$\begin{aligned} &n(a_1 + a_2 + ... + a_n) + a_1 + a_2 + ... + a_n \\ >& n(a_1 + a_2 + ... + a_n) + na_{n+1}, \end{aligned}$$

[26]Rješenje ponudila kolegica Imana Alibašić, studentica prve godine kompjuterskih nauka Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a Univerziteta u Sarajevu.

odnosno

$$(n+1)(a_1+a_2+...+a_n) > n(a_1+a_2+...+a_{n+1}),$$

ili

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{n+1}}{n+1} < \frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}.$$

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ zadovoljene pretpostavke kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po ovom kriteriju red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ konvergira (ne divergira).

Kako je

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n},$$

a posljednji red po Zadatku 1.1.17 divergira (bez obzira na to da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira ili ne), to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ konvergira, ali ne i apsolutno, to on konvergira uslovno (Definicija 7.6).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$ ne konvergira apsolutno, konvergira, ne divergira, te konvergira uslovno. ■

♢ **Zadatak 8.1.29** Da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergira ako je $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n = 0$ ?

**Rješenje:** Dati red je alternirajući red.

Ako bi niz $\{a_n\}$ bio u konačnici nerastući, tj. ako bi postojao $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_{n+1} \leq a_n$, onda bi po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konvergirao.

Ipak, pretpostavka da je $\{a_n\}$ u konačnici nerastući niz nije data, pa je za očekivati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ne mora da konvergira (primijetimo da po Zadatku 8.1.22 red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ može da konvergira).

Posmatrajmo[27] red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2+(-1)^{n-1}}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$ konvergira (Zadatak 8.1.9), pa po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}$.

S druge strane, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}$ konvergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ divergira, to po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^{n-1}\cdot\frac{2}{n}+(-1)^{n-1}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right)$$
$$=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{2+(-1)^{n-1}}{n}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$$

divergira.

Jasno, $a_n=\frac{2+(-1)^{n-1}}{n}>0$ za $n\in\mathbb{N}$, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$.

Primijetimo da niz $\{a_n\}$ nije u konačnici nerastući.

Naime, za parne brojeve $n\in\mathbb{N}$, vrijedi $a_n<a_{n+1}$, tj. vrijedi $a_{2k}<a_{2k+1}$ za $k\in\mathbb{N}$.

Zaista, za $k\in\mathbb{N}$ je $\frac{1}{4}<k$, tj. $1<4k$, odnosno $2k+1<6k$, ili $a_{2k}=\frac{1}{2k}<\frac{3}{2k+1}=a_{2k+1}$.

Tako, pri datim pretpostavkama, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$ ne mora da konvergira[28]. ■

[27]Rješenje ponudio kolega Amin Aganović, student prve godine primijenjene matematike Odsjeka za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a Univerziteta u Sarajevu.

[28]Zadatak nam ustvari govori da tvrdnja kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, ne mora da vrijedi ukoliko se iz kriterija izbaci pretpostavka da je niz $\{a_n\}$ u konačnici nerastući.

## 8.2 Redovi razmatrani u sklopu lekcije alternirajući redovi

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{n^2+3}$

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n}{n^2+1}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2n-1}$

(4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{(\ln n)^a}{n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\sin\frac{a}{n}$

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{a^2-4a-8}{a^2+6a-16}\right)^n$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\sin a_n}{a_n}\right)$

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\right)$

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i\right)$

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}}{n}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{2n+1}{2^n}$

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}\frac{1}{n+1}$

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+a^2}\right)$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$

(18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n^p}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n}$

(20) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{\varepsilon_n}{n\ln n}$

(21) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\sqrt{n}}{(-1)^n+\sqrt{n}}\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$

(22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\left(\sqrt[n]{a}-1\right)$

(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n$

(24) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\,\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n}$

(26) $\displaystyle\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-...-\frac{1}{2q}+$
$\displaystyle\frac{1}{2p+1}+\frac{1}{2p+3}+...+\frac{1}{4p-1}-\frac{1}{2q+2}-\frac{1}{2q+4}-...-\frac{1}{4q}+...$

# 9 Rezultati Košija

Nepobitna je činjenica da se većina studenata kalkulusa, koji (na taj način) dođu u dodir sa teorijom beskonačnih redova, obično fokusira na uži krug teorema koji govore o konvergenciji i divergenciji (konvergenciji i divergenciji redova).

Studenti obično ovladavaju kriterijem divergencije [DzG2, str. 4, Teo. 1.4], kriterijem za alternirajuće redove (Teorem 8.2), kriterijem količnika (Teorem 5.2), kriterijem korijena (Teorem 6.2), te nekim varijantama kriterija upoređivanja (Teorem 1.1 uglavnom).

Opšta je poruka da nakon upravo pobrojanih, slobodno možemo reći, preliminarnih rezultata, studij beskonačnih redova postaje prilično težak i to jako brzo.

Znamo da postoje redovi o čijoj konvergenciji nam navedeni kriteriji ne mogi reći bilo šta (sa nekim od tih redova smo se već upoznali, drugi se konstruišu). Dakle, na takve redove pomenuti kriteriji nisu primjenjivi.

Skoro stihijska i gotovo očekivana reakcija studenata kalkulusa je da oni odustaju u momentu kada kriterij količnika i kriterij korijena daju neodređeni slučaj $r = 1$ i $\rho$ $= 1$, redom (tvrdnje 3. Teorema 5.2 i 6.2).

Autor potvrđuje činjenicu da ne postoji kriterij ili skup kriterija koji bi za svaki beskonačni red mogli sistematično ustanoviti da li on konvergira ili ne (mnogo toga zavisi od naše intuicije i iskustva). Ipak, važno je istaći da postoji određeni broj sofisticiranijih i snažnijih kriterija (od prethodno navedenih), koji su podjednako jednostavni za upotrebu i koji mogu ispitati konvergenciju gotovo svih redova koji se pojavljuju u praksi. Studenti se upoznaju sa nekim od njih, a ovladavaju njima u mjeri koja zavisi od stepena uloženog truda, razumjevanja, i učinjenog progresa uopšte. S druge strane, ovi kriteriji su itekako dobro poznati ekspertima u oblasti teorije redova. Tako, iako bi se za neke od kriterija koji slijede moglo reći da su blago teži za primjenu u odnosu na kriterije rađene u prethodnim sekcijama, i ovi, novi, su generalno jednostavni, a sa druge strane vrlo jaki. Takođe, isto kao i u slučaju kriterija prethodnih sekcija, i sada postoje redovi koji će da prkose svakom od kriterija koji slijede. Ohrabrujuća je činjenica da su takvi redovi uglavnom patološkog tipa.

U Definiciji 4.1 u [DzG1, str. 38] smo za niz $\{x_n\}$ rekli da je Košijev ili fundamentalan, ako (ako i samo ako) za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n$ $\geq N$, vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Za brojeve $m$ i $n$, gdje je $m$, $n \geq N$, vrijedi $m \geq n$ ili $n \geq m$, pa uvijek možemo pretpostaviti da je obezbjeđen poredak, tj. da vrijedi npr. uslov $m \geq n$.

Tako, možemo reći da je niz $\{x_n\}$ Košijev ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji

$N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Rezonujući kao u [DzG1, str. 8], zaključujemo onda da niz $\{x_n\}$ nije Košijev ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|x_m - x_n| \geq \varepsilon$.

Dokazali smo opšti Košijev kriterij konvergencije, tj. dokazali smo da je niz $\{x_n\}$ Košijev ako i samo ako je $\{x_n\}$ konvergentan niz [DzG1, str. 40, Teo. 4.5].

Shodno tome smo konstatovali da je niz $\{x_n\}$ divergentan ako i samo ako $\{x_n\}$ nije Košijev niz [DzG1, str. 44].

**Teorem 9.1 (Košijev kriterij)** *Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako za svako $\varepsilon >$ 0, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi*

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira niz $\{S_n\}$ njegovih parcijalnih suma [DzG2, str. 1, Def. 1.1], ako i samo ako je niz $\{S_n\}$ Košijev, ako i samo ako za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| = \left| \sum_{k=1}^{m} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k \right| = |S_m - S_n| < \varepsilon.$$

Dokaz je završen. ■

**Primjedba 9.2** Jasno je sada da tvrdnju Teorema 9.1 možemo koristiti i u formi: red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira ako i samo ako postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \geq \varepsilon.$$

**Primjer 9.3** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Ako je $b_n = \frac{a_n}{r_n}$, $n \in \mathbb{N}$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentan.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ za $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ za $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = \sum_{k=1}^{n-1} a_k + r_n = S_{n-1} + r_n$$

za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pošto je

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = r_1,$$

to možemo pisati i

$$S = S_0 + r_1,$$

gdje smo stavili da je $S_0 = 0$.

Dakle,

$$S = S_{n-1} + r_n$$

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Za $n = 2$ je $S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2$.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Dakle, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni, je veća od nule.

Pošto je $r_1 = S$, to je onda i $r_1 > 0$.

Red $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, je konvergentan red sa pozitivnim članovima, pa je i njegova suma onda pozitivna, tj. vrijedi, $r_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ima smisla onda posmatrati količnike $b_n = \frac{a_n}{r_n}$, $n \in \mathbb{N}$, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Dokazat ćemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira upotrebom Primjedbe 9.2, tj. dokazat ćemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} b_k \right| \geq \varepsilon$.

Odaberimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Uzmimo neko $n > N$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$ i njegovu sumu $r_{n+1}$.

Vrijedi, $r_{n+1} = \lim\limits_{q \to +\infty} S_q^{'}$, gdje je $\left\{ S_q^{'} \right\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} a_k$.

Dakle, $S_q^{'} = \sum\limits_{k=n+1}^{n+q} a_k$, $q \in \mathbb{N}$.

Iz $r_{n+1} > 0$ slijedi $r_{n+1} - \frac{r_{n+1}}{2} = \frac{r_{n+1}}{2} > 0$.

Sada je $\left(r_{n+1} - \frac{r_{n+1}}{2}, r_{n+1} + \frac{r_{n+1}}{2}\right)$, tj. $\left(\frac{r_{n+1}}{2}, \frac{3r_{n+1}}{2}\right)$ jedna okolina tačke $r_{n+1}$.

Pošto je $r_{n+1} = \lim\limits_{q \to +\infty} S_q^{'}$, to po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka okolina granične vrijednosti $r_{n+1}$, pa specijalno i okolina $\left(\frac{r_{n+1}}{2}, \frac{3r_{n+1}}{2}\right)$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza $\left\{ S_q^{'} \right\}$.

Drugim riječima, postoji indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $q \geq N_1$, vrijedi $S_q^{'} \in \left(\frac{r_{n+1}}{2}, \frac{3r_{n+1}}{2}\right)$.

Dakle, $S_q^{'} > \frac{r_{n+1}}{2}$ za $q \geq N_1$.

Odaberimo neko $q \geq N_1$.
Stavimo, $m = n + q$.
Vrijedi, $m = n + q \geq n + 1 > n$. Pošto je,

$$S = S_n + r_{n+1} = S_{n+1} + r_{n+2} = S_{n+2} + r_{n+3} = ...,$$

i $S_n < S_{n+1} < S_{n+2} < ...$ (jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima), to je $r_{n+1} > r_{n+2} > r_{n+3} > ...$ . Slijedi,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=n+1}^{m} b_k = \sum_{k=n+1}^{n+q} \frac{a_k}{r_k} \\
=&\frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+2}} + ... + \frac{a_{n+q}}{r_{n+q}} \geq \frac{a_{n+1}}{r_{n+1}} + \frac{a_{n+2}}{r_{n+1}} + ... + \frac{a_{n+q}}{r_{n+1}} \\
=&\frac{1}{r_{n+1}} \sum_{k=n+1}^{n+q} a_k = \frac{1}{r_{n+1}} \cdot S_q' > \frac{1}{r_{n+1}} \cdot \frac{r_{n+1}}{2} = \frac{1}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Zaključujemo, postoji $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n > N$, $m > n$, takvi da je

$$\left| \sum_{k=n+1}^{m} b_k \right| = \sum_{k=n+1}^{m} b_k > \varepsilon.$$

Ovo, kako smo već konstatovali, po Primjedbi 9.2 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergentan.

Dokaz je završen. ■

**Teorem 9.4 (Košijev kriterij kondenzacije)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ pozitivan red čiji članovi $b_n$ obrazuju nerastući niz. Tada redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

**Dokaz:** Imamo, $b_k \geq b_{k+1}$ za sve $k \in \mathbb{N}$, tj.

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots .$$

Označimo sa $\{S_n\}$ resp. $\{T_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$.
Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} 2^k b_{2^k}$, $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}
S_3 =& b_1 + b_2 + b_3 \leq b_1 + b_2 + b_2 \\
=& b_1 + 2b_2 = b_1 + T_1, \\
S_7 =& b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 = S_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7 \\
\leq& S_3 + b_4 + b_4 + b_4 + b_4 = S_3 + 4b_4 \\
\leq& b_1 + T_1 + 4b_4 = b_1 + 2b_2 + 4b_4 = b_1 + T_2.
\end{aligned}$$

Možemo naslutiti da će za $n \geq 2$ da vrijedi

$$S_{2^n-1} \leq b_1 + T_{n-1}.$$

Za $n = 2$ i $n = 3$ smo već vidjeli da navedena nejednakost vrijedi.
Pretpostavimo da nejednakost $S_{2^n-1} \leq b_1 + T_{n-1}$ vrijedi za neko $n \geq 3$. Imamo,

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}-1} =& S_{2^n-1} + b_{2^n} + b_{2^n+1} + \dots + b_{2^{n+1}-1} \\
\leq& S_{2^n-1} + b_{2^n} + b_{2^n} + \dots + b_{2^n} \\
\leq& S_{2^n-1} + 2^n b_{2^n} \\
\leq& b_1 + T_{n-1} + 2^n b_{2^n} = b_1 + T_n.
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, nejednakost $S_{2^n-1} \leq b_1 + T_{n-1}$, vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

S druge strane,

$$\begin{aligned}
S_2 =& b_1 + b_2 = b_1 + \frac{1}{2} \cdot 2b_2 = b_1 + \frac{1}{2}T_1,\\
S_4 =& b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = S_2 + b_3 + b_4\\
\geq& S_2 + b_4 + b_4 = S_2 + 2b_4 \geq b_1 + \frac{1}{2}T_1 + 2b_4\\
=& b_1 + \frac{1}{2}T_1 + \frac{1}{2} \cdot 4b_4 = b_1 + \frac{1}{2}T_2.
\end{aligned}$$

Naslućujemo da će za $n \geq 1$ da vrijedi

$$S_{2^n} \geq b_1 + \frac{1}{2}T_n.$$

Zaista, za $n = 1$ i $n = 2$, pomenuta nejednakost vrijedi.
Pretpostavimo da pomenuta nejednakost vrijedi za neko $n \geq 2$. Sada je,

$$\begin{aligned}
S_{2^{n+1}} =& S_{2^n} + b_{2^n+1} + b_{2^n+2} + ... + b_{2^{n+1}}\\
\geq& S_{2^n} + b_{2^{n+1}} + b_{2^{n+1}} + ... + b_{2^{n+1}}\\
=& S_{2^n} + 2^n b_{2^{n+1}} = S_{2^n} + \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} b_{2^{n+1}}\\
\geq& b_1 + \frac{1}{2}T_n + \frac{1}{2} \cdot 2^{n+1} b_{2^{n+1}} = b_1 + \frac{1}{2}T_{n+1}.
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, nejednakost $S_{2^n} \geq b_1 + \frac{1}{2}T_n$ vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$.

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ su pozitivni, a za pozitivan red znamo da vrijedi jedna od dvije mogućnosti, ili konvergira ka konačnom nenegativnom broju, ili divergira ka $+\infty$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira.

To znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Jasno, $\{S_{2^n-1}\}_{n=2}^{+\infty}$ je podniz niza $\{S_n\}$ (vidjeti Definiciju 7.1 u [DzG1, str. 75]).

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ i Leme 7.12 u [DzG1, str. 91], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$. Odavde i iz nejednakosti $S_{2^n-1} \leq b_1 + T_{n-1}$, $n \geq 2$ (vidjeti Definiciju 7.7 u [DzG1, str. 84]), imamo da je onda i $\lim\limits_{n\to+\infty} T_{n-1} = +\infty$. Iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ divergira.

Obrnuto, pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ divergira.

Vrijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} T_n = +\infty$.

Iz nejednakosti $b_1 + \frac{1}{2}T_n \leq S_{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi da za podniz $\{S_{2^n}\}$ niza $\{S_n\}$, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^n} = +\infty$.

Ako bi niz $\{S_n\}$ konvergirao, onda bi po pomenutoj Lemi 7.12 konvergirao i svaki podniz niza $\{S_n\}$, što nije slučaj. Dakle, niz $\{S_n\}$ divergira (sa $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$). Ovo znači da divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Dokazali smo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira ako i samo ako divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$.

Ovo onda znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$.

Naime, ako pretpostavimo npr. da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira, onda mora da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$. U suprotnom bi po već dokazanoj tvrdnji divergirao i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$. Tako, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$, i obrnuto.

Dakle, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Dokaz je završen. ■

Kao i u slučaju kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, jasno da je i sada, tj. u slučaju Košijevog kriterija kondenzacije, dovoljno da članovi datog reda budu u konačnici[29] nerastući, tj. vrijedi sljedeći teorem.

[29] Vidjeti Napomenu 1.2.

**Teorem 9.5 (Košijev kriterij kondenzacije)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *pozitivan red čiji su članovi* $b_n$ *u konačnici nerastući. Tada redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ *ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

Košijev kriterij kondenzacije se klasično koristi za dokaz divergencije harmonijskog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. Da ovaj red divergira već smo vidjeli u dokazu Teorema 4.12, te u [DzG2, str. 5-6]. Dokazujemo njegovu divergenciju i upotrebom navedenog kriterija.

**Primjer 9.6** Ispitati ponašanje reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

**Rješenje:** Možemo pisati $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je pozitivan red čiji članovi $b_n$ obrazuju opadajući niz.

Po Košijevom kriteriju kondenzacije, tj. Teoremu 9.4, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$, ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Pošto je opšti član reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ jednak 1, to on ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$ divergira.

Ovo po Košijevom kriteriju kondenzacije znači da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$. ■

Primjetimo da se u sklopu Košijevog kriterija kondenzacije (Teoremi 9.4 i 9.5), pojavljuju stepeni $2^n$.

Gledano sa aspekta dokaza kriterija, uloga ovih stepena je opravdana. S druge strane, njihova pojava je na određeni način proizvoljna. Naime, prirodno je da se zapitamo da li ulogu stepena $2^n$ mogu igrati stepeni $3^n$ ili brojevi tipa $n^2$, i sl.

Odgovore na ovakva pitanja nam daje sljedeći, Šlemilhov[30] teorem, kao svojevrsna

[30]Vidjeti notu 25 u [DzG2, str. 144].

generalizacija Košijevog kriterija kondenzacije, i kao dokaz da možemo ustvari izvesti mnogo jači rezultat.

**Teorem 9.7 (Šlemilhov kriterij kondenzacije)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red čiji članovi obrazuju nerastući niz. Neka je* $p_1 < p_2 < ...$ *strogo rastući niz pozitivnih cijelih brojeva, takvih da je*

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}} \leq C$$

*za sve* $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$*, gdje je* $C > 0$ *neka konstanta. Tada redovi* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *i* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ *ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

**Dokaz:** Postupamo kao u dokazu Košijevog kriterija kondenzacije, tj. kao u dokazu Teorema 9.4.

Označimo sa $\{S_n\}$ resp. $\{T_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (p_{k+1} - p_k)\, a_{p_k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iz uslova $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$ za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, dobijamo da je $p_k - p_{k-1} \geq \frac{1}{C}(p_{k+1} - p_k)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$. Imamo,

$$\begin{aligned}
S_{p_2} =& S_{p_1} + a_{p_1+1} + a_{p_1+2} + ... + a_{p_2} \\
\geq& S_{p_1} + a_{p_2} + a_{p_2} + ... + a_{p_2} = S_{p_1} + (p_2 - p_1)\, a_{p_2} \\
\geq& S_{p_1} + \frac{1}{C}(p_3 - p_2)\, a_{p_2} \\
=& S_{p_1} + \frac{1}{C}(p_3 - p_2)\, a_{p_2} + \frac{1}{C}(p_2 - p_1)\, a_{p_1} - \frac{1}{C}(p_2 - p_1)\, a_{p_1} \\
=& S_{p_1} + \frac{1}{C}T_2 - \frac{1}{C}T_1 = S_{p_1} - \frac{1}{C}T_1 + \frac{1}{C}T_2, \\
S_{p_3} =& S_{p_2} + a_{p_2+1} + a_{p_2+2} + ... + a_{p_3} \geq
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&S_{p_2}+a_{p_3}+a_{p_3}+...+a_{p_3}=S_{p_2}+(p_3-p_2)\,a_{p_3}\\
\geq &S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_2+\frac{1}{C}(p_4-p_3)\,a_{p_3}\\
= &S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_3.
\end{aligned}$$

Možemo naslutiti da će za $n\geq 2$, da vrijedi

$$S_{p_n}\geq S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_n.$$

Za $n=2$ i $n=3$ smo već vidjeli da navedena nejednakost vrijedi.

Pretpostavimo da nejednakost $S_{p_n}\geq S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_n$ vrijedi za neko $n\geq 3$. Imamo,

$$\begin{aligned}
S_{p_{n+1}}=&S_{p_n}+a_{p_n+1}+a_{p_n+2}+...+a_{p_{n+1}}\\
\geq &S_{p_n}+a_{p_{n+1}}+a_{p_{n+1}}+...+a_{p_{n+1}}=S_{p_n}+(p_{n+1}-p_n)\,a_{p_{n+1}}\\
\geq &S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_n+\frac{1}{C}(p_{n+2}-p_{n+1})\,a_{p_{n+1}}\\
= &S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_{n+1}.
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, nejednakost $S_{p_n}\geq S_{p_1}-\frac{1}{C}T_1+\frac{1}{C}T_n$, vrijedi za sve $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

S druge strane,

$$\begin{aligned}
S_{p_3-1}=&S_{p_2-1}+a_{p_2}+a_{p_2+1}+...+a_{p_3-1}\\
\leq &S_{p_2-1}+a_{p_2}+a_{p_2}+...+a_{p_2}=S_{p_2-1}+(p_3-p_2)\,a_{p_2}\\
= &S_{p_2-1}+(p_2-p_1)\,a_{p_1}+(p_3-p_2)\,a_{p_2}-(p_2-p_1)\,a_{p_1}\\
= &S_{p_2-1}+T_2-T_1=S_{p_2-1}-T_1+T_2,\\
S_{p_4-1}=&S_{p_3-1}+a_{p_3}+a_{p_3+1}+...+a_{p_4-1}\\
\leq &S_{p_3-1}+a_{p_3}+a_{p_3}+...+a_{p_3}=S_{p_3-1}+(p_4-p_3)\,a_{p_3}\\
\leq &S_{p_2-1}-T_1+T_2+(p_4-p_3)\,a_{p_3}=S_{p_2-1}-T_1+T_3.
\end{aligned}$$

Naslućujemo da će za $n \geq 3$ da vrijedi

$$S_{p_n-1} \leq S_{p_2-1} - T_1 + T_{n-1}.$$

Zaista, za $n = 3$ i $n = 4$, navedena nejednakost vrijedi.
Pretpostavimo da pomenuta nejednakost vrijedi za neko $n \geq 4$. Sada je,

$$\begin{aligned}
S_{p_{n+1}-1} =& S_{p_n-1} + a_{p_n} + a_{p_n+1} + ... + a_{p_{n+1}-1} \\
\leq& S_{p_n-1} + a_{p_n} + a_{p_n} + ... + a_{p_n} = S_{p_n-1} + (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n} \\
\leq& S_{p_2-1} - T_1 + T_{n-1} + (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n} \\
=& S_{p_2-1} - T_1 + T_n.
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije, nejednakost $S_{p_n-1} \leq S_{p_2-1} - T_1 + T_{n-1}$, vrijedi za sve $n \geq 3$.

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ su pozitivni, a za pozitivan red znamo da vrijedi jedna od dvije mogućnosti, ili konvergira ka konačnom nenegativnom broju, ili divergira ka $+\infty$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

To znači da je $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Jasno, $\{S_{p_n-1}\}_{n=3}^{+\infty}$ je podniz niza $\{S_n\}$ (vidjeti Definiciju 7.1 u [DzG1, str. 75]).

Iz $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ i Leme 7.12 u [DzG1, str. 91], slijedi da je $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{p_n-1} = +\infty$. Odavde i iz nejednakosti $S_{p_n-1} \leq S_{p_2-1} - T_1 + T_{n-1}$, $n \geq 3$ (vidjeti Definiciju 7.7 u [DzG1, str. 84]), imamo da je onda i $\lim\limits_{n \to +\infty} T_{n-1} = +\infty$. Iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], slijedi da je i $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ divergira.

Obrnuto, pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ divergira.

Vrijedi, $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = +\infty$.

Iz nejednakosti $S_{p_1} - \frac{1}{C}T_1 + \frac{1}{C}T_n \leq S_{p_n}$, $n \geq 2$, slijedi da za podniz $\{S_{p_n}\}_{n=2}^{+\infty}$ niza $\{S_n\}$, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{p_n} = +\infty$.

Ako bi niz $\{S_n\}$ konvergirao, onda bi po pomenutoj Lemi 7.12 konvergirao i svaki podniz niza $\{S_n\}$, što nije slučaj.

Dakle, niz $\{S_n\}$ divergira (sa $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$).

Ovo znači da divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokazali smo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira ako i samo ako divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$.

Ovo onda znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$.

Naime, ako pretpostavimo npr. da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, onda mora da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$. U suprotnom bi po već dokazanoj tvrdnji divergirao i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Tako, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$, i obrnuto.

Dakle, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Dokaz je završen. ■

I u slučaju Šlemilhovog kriterija kondenzacije, dovoljno je da članovi datog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ budu u konačnici nerastući, tj. vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 9.8 (Šlemilhov kriterij kondenzacije)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red čiji su članovi $a_n$ u konačnici nerastući. Neka je $p_1 < p_2 < ...$ strogo rastući niz pozitivnih* *cijelih brojeva, takvih da je*

$$\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$$

*za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, gdje je $C > 0$ neka konstanta. Tada redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1}-p_n)\, a_{p_n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.*

**Primjer 9.9** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

**Rješenje:** Dati red podsjeća na geometrijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$ (vidjeti strane 14-21 u [DzG2]). Ipak, prisustvo kvadratnog korijena u opštem članu datog reda komplikuje stvari.

Mogli bismo pokušati primijeniti kriterij količnika (Teorem 5.2).

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

Imamo,

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}}}{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{\sqrt{n}-\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{n}+\sqrt{n+1}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{n-(n+1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = \lim_{n\to+\infty} 2^{\frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} \\ &= 2^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{-1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}} = 2^0 = 1. \end{aligned}$$

Tako, kriterij količnika, tj. Teorem 5.2, ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Možemo pokušati sa kriterijem korijena, tj. Teoremom 6.2. Sada je,

$$\begin{aligned} \rho &= \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}}} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{2^{\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}}} = \frac{1}{2^0} = 1. \end{aligned}$$

Dakle, kriterij korijena, tj. Teorem 6.2, takođe ne daje odgovor na pitanje o konvergenciji datog reda.

Kriterij koji će nam omogućiti da ispitamo konvergenciju datog reda će biti Šlemilhov kriterij kondenzacije (u formi Teorema 9.7).

Jasno, članovi reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ su opadajući.

Naime, iz $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, slijedi $2^{\sqrt{n}} < 2^{\sqrt{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$, pa je $a_n = \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} > \frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}} = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.

Stavimo, $p_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

Sada je, $1^2 < 2^2 < ...$, tj. $p_1 < p_2 < ...$ .

Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Posmatrajmo izraz $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned} &\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} = \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2-(k-1)^2} \\ =&\frac{k^2+2k+1-k^2}{k^2-k^2+2k-1} = \frac{2k+1}{2k-1}. \end{aligned}$$

Primijetimo da je $\frac{2k+1}{2k-1} \leq 3$ za $k \geq 2$.

Zaista, nejednakost $\frac{2k+1}{2k-1} \leq 3$ je zadovoljena ako i samo ako je $2k+1 \leq 6k-3$, ako i samo ako je $4 \leq 4k$, ako i samo ako je $k \geq 1$.

Ovo je tačno (jer je $k \geq 2$), pa je $\frac{2k+1}{2k-1} \leq 3$ za $k \geq 2$.

Drugim riječima, postoji konstanta $C = 3$, takva da je $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Ovo znači da je zadovoljen Šlemilhov kriterij kondenzacije, tj. Teorem 9.7, pa po njemu, redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ i

$$\begin{aligned} &\sum_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1}-p_n)\, a_{p_n} \\ =&\sum_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^2-n^2\right) \frac{1}{2^{\sqrt{n^2}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(n^2+2n+1-n^2\right) \frac{1}{2^n} = \end{aligned}$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n,$$

ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Ispitajmo konvergenciju posljednjeg reda.

U njemu ne figuriše kvadratni korijen kao u polaznom redu, pa će kriterij količnika sada da bude primjenjiv. Zaista,

$$r = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{2(n+1)+1}{2^{n+1}}}{\frac{2n+1}{2^n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{2\,(2n+1)} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+3}{4n+2} = \frac{1}{2} < 1.$$

Ovo po 1. Teorema 5.2 znači da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2n+1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$ konvergentan, pa je po Teoremu 9.7, i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ konvergentan. ■

## 9.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 9.1.1** Koristeći Košijev kriterij, tj. Teorem 9.1, dokazati da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{n}$.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos k\alpha - \cos(k+1)\alpha}{k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|S_m - S_n| < \varepsilon$. Imamo,

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\cos k\alpha - \cos(k+1)\,\alpha}{k} \right|$$
$$= \left| \frac{\cos(n+1)\,\alpha}{n+1} - \frac{\cos(n+2)\,\alpha}{n+1} + \frac{\cos(n+2)\,\alpha}{n+2} - \frac{\cos(n+3)\,\alpha}{n+2} + \ldots \right.$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\cos m\alpha}{m}-\frac{\cos(m+1)\alpha}{m}\Bigg| \\
=&\left|\frac{\cos(n+1)\alpha}{n+1}+\cos(n+2)\alpha\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+1}\right)+...\right. \\
&\left.+\cos m\alpha\left(\frac{1}{m}-\frac{1}{m-1}\right)-\frac{\cos(m+1)\alpha}{m}\right| \\
=&\left|\frac{\cos(n+1)\alpha}{n+1}-\frac{\cos(n+2)\alpha}{(n+1)(n+2)}-...-\frac{\cos m\alpha}{(m-1)m}-\frac{\cos(m+1)\alpha}{m}\right| \\
\leq&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+...+\frac{1}{(m-1)m}+\frac{1}{m} \\
=&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{n+1}<\frac{2}{n}.
\end{aligned}
$$

Zahtjevamo da je $\frac{2}{n}<\varepsilon$.

Odavde je $n>\frac{2}{\varepsilon}$, pa je traženo $N$ dato sa $N=\left\lfloor\frac{2}{\varepsilon}\right\rfloor+1$ (vidjeti Zadatke 1-7 u [DzG1, str. 5-15]).

Tako, za svako $\varepsilon>0$, postoji $N\in\mathbb{N}$, $N=\left\lfloor\frac{2}{\varepsilon}\right\rfloor+1$, takav da za sve $m,n\geq N$, $m\geq n$, vrijedi $|S_m-S_n|<\varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da dati red konvergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.2** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ pozitivan konvergentan red, takav da je $\{a_n\}$ opadajući niz. Dokazati da je $\lim\limits_{n\to+\infty}na_n=0$.

**Dokaz:** Neka je $\varepsilon>0$ proizvoljan broj.

Pošto je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergentan red, to po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, za $\frac{\varepsilon}{2}>0$, postoji $N\in\mathbb{N}$, takav da za sve $m,n\geq\mathbb{N}$, $m\geq n$, vrijedi

$$|a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_m|<\frac{\varepsilon}{2},$$

tj.

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_m<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Po pretpostavci, $\{a_n\}$ je opadajući niz, pa je $a_1 > a_2 > ... > a_{n+1} > a_{n+2} > ...$ .

Dobijamo da je za $m$, $n \geq N$, $m \geq n$,

$$
\begin{aligned}
(m-n)\, a_m =& a_m + a_m + ... + a_m \\
\leq& a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_m < \frac{\varepsilon}{2}.
\end{aligned}
$$

Odavde je za $m = 2n > n$, $na_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}$, tj. $2na_{2n} < \varepsilon$.

S druge strane, za $m = 2n+1$, imamo da je $(n+1)\, a_{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}$, odnosno, $(2n+2)\, a_{2n+1} < \varepsilon$.

Kako je $(2n+1)\, a_{2n+1} < (2n+2)\, a_{2n+1}$, to je onda i $(2n+1)\, a_{2n+1} < \varepsilon$.

Stavimo, $N_1 = 2N$.

Iz $2na_{2n} < \varepsilon$ i $(2n+1)\, a_{2n+1} < \varepsilon$ za $n \geq N$, vidimo da vrijedi $na_n < \varepsilon$ za $n \geq N_1$.

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N_1$, vrijedi $|na_n - 0| = na_n < \varepsilon$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

Dokaz je završen[31]. ■

♢ **Zadatak 9.1.3** Upotrebom Košijevog kriterija, tj. Teorema 9.1, dokazati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos\alpha^n}{n^2}$.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\cos\alpha^k}{k^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|S_m - S_n| < \varepsilon$. Imamo,

[31] Iz dokaza vidimo da se moglo pretpostaviti da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nenegativan konvergentan red, takav da je $\{a_n\}$ nerastući niz.

$$\begin{aligned}
|S_m - S_n| &= \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\cos \alpha^k}{k^2} \right| \\
&\leq \sum_{k=n+1}^{m} \left| \frac{\cos \alpha^k}{k^2} \right| \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{m^2} \\
&< \frac{1}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + ... + \frac{1}{(m-1)m} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m} \\
&= \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Zahtjevamo da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$.

Odavde je $n > \frac{1}{\varepsilon}$, pa je traženo $N$ dato sa $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$ (vidjeti Zadatke 1-7 u [DzG1, str. 5-15]).

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, $N = \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|S_m - S_n| < \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da dati red konvergira.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 9.1.4** Upotrebom Košijevog kriterija, tj. Primjedbe 9.2, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dovoljno je da dokažemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|S_m - S_n| \geq \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{4}$, i $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Stavimo $n = N$ i $m = 2N$.

Dakle, vrijedi $m, n \geq N$ i $m \geq n$ $(m > n)$. Sada je

$$|S_m - S_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} =$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} + \frac{1}{N+2} + ... + \frac{1}{N+N} \\
\geq &\frac{1}{N+N} + \frac{1}{N+N} + ... + \frac{1}{N+N} = \frac{N}{2N} = \frac{1}{2} > \frac{1}{4} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Tako, postoji $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{4}$), takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$ ($m = 2N$, $n = N$), takvi da je $|S_m - S_n| > \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju (Primjedba 9.2), znači da dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.5** Upotrebom Košijevog kriterija, tj. Primjedbe 9.2, dokazati divergenciju reda $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$ .

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Dovoljno je da dokažemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|S_m - S_n| \geq \varepsilon$.

Stavimo, $\varepsilon = \frac{1}{6}$.

Neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Uzmimo, $m = 6N$ i $n = 3N$. Jasno, $m, n \geq N$ i vrijedi $m \geq n$ ($m > n$). Sada je

$$\begin{aligned}
&|S_m - S_n| = |S_{6N} - S_{3N}| \\
= &\Bigg| 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{3N-2} + \frac{1}{3N-1} - \frac{1}{3N} + \\
&\frac{1}{3N+1} + \frac{1}{3N+2} - \frac{1}{3N+3} + ... + \frac{1}{6N-2} + \frac{1}{6N-1} - \frac{1}{6N} \\
&- 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - ... - \frac{1}{3N-2} - \frac{1}{3N-1} + \frac{1}{3N} \Bigg| \\
= &\frac{1}{3N+1} + \frac{1}{3N+2} - \frac{1}{3N+3} + \frac{1}{3N+4} + \frac{1}{3N+5} - \frac{1}{3N+6} + ... \\
&+ \frac{1}{6N-2} + \frac{1}{6N-1} - \frac{1}{6N} \\
> &\frac{1}{3N+1} + \frac{1}{3N+4} + ... + \frac{1}{6N-2} =
\end{aligned}$$

$$\frac{1}{3N+1}+\frac{1}{3(N+1)+1}+\frac{1}{3(N+2)+1}+...+\frac{1}{3(N+(N-1))+1}$$
$$>\frac{1}{6N-2}+\frac{1}{6N-2}+...+\frac{1}{6N-2}=\frac{N}{6N-2}>\frac{N}{6N}=\frac{1}{6}=\varepsilon.$$

Tako, postoji $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{6}$), takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$ ($m = 6N$, $n = 3N$), takvi da je $|S_m - S_n| > \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju (Primjedba 9.2), znači da dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 9.1.6** Koristeći Košijev kriterij, tj. Primjedbu 9.2, dokazati da divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Dovoljno je da dokažemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|S_m - S_n| \geq \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{4}$, i $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Stavimo $n = N$ i $m = 2N$.

Jasno, $m, n \geq N$, i vrijedi $m \geq n$ ($m > n$). Imamo,

$$|S_m - S_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}\right| = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}} = \sum_{k=N+1}^{2N}\frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{(N+1)(N+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(N+2)(N+3)}}+...+\frac{1}{\sqrt{2N(2N+1)}}$$
$$>\frac{1}{\sqrt{(N+2)^2}}+\frac{1}{\sqrt{(N+3)^2}}+...+\frac{1}{\sqrt{(2N+1)^2}}$$
$$=\frac{1}{N+2}+\frac{1}{N+3}+...+\frac{1}{N+N-1}$$
$$>\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{2N+2}+...+\frac{1}{2N+1}=\frac{N}{2N+1}>\frac{N}{4N}=\frac{1}{4}=\varepsilon.$$

Tako, postoji $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{4}$), takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$ ($m = 2N$, $n = N$), takvi da je $|S_m - S_n| > \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju (Primjedba 9.2), znači da dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 9.1.7** Neka je $H_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nH_n}$ divergira.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma datog reda.

Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{kH_k}$, $n \in \mathbb{N}$.

Po Košijevom kriteriju, tj. Primjedbi 9.2, dovoljno je da dokažemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|S_m - S_n| \geq \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$, i $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Stavimo $n = N$. Sada je

$$
\begin{aligned}
&|S_m - S_n| = |S_m - S_N| = \left| \sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{kH_k} \right| \\
&= \sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{kH_k} = \sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{H_k} (H_k - H_{k-1}) \\
&\geq \sum_{k=N+1}^{m} \frac{1}{H_m} (H_k - H_{k-1}) \\
&= \frac{1}{H_m} (H_{N+1} - H_N + H_{N+2} - H_{N+1} + ... + H_m - H_{m-1}) \\
&= \frac{1}{H_m} (H_m - H_N) = 1 - \frac{H_N}{H_m}.
\end{aligned}
$$

Po [DzG2, str. 5-6], harmonijski red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira, i suma mu je jednaka $+\infty$, tj. vrijedi $\lim\limits_{m \to +\infty} H_m = +\infty$.

Slijedi, $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{H_N}{H_m}\right) = 1$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ granične vrijednosti 1 niza $\left\{1 - \frac{H_N}{H_m}\right\}_{m=1}^{+\infty}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n$, takav da za sve $m \geq m_0$, vrijedi 1 $- \frac{H_N}{H_m} > \frac{1}{2}$.

Neka je onda $m$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj iz $\mathbb{N}$, takav da je $m > m_0$.

Imamo, $m, n \geq N$ i $m \geq n$ $(m > n)$, pri čemu je $|S_m - S_n| \geq 1 - \frac{H_N}{H_m} > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Tako, postoji $\varepsilon > 0$ $(\varepsilon = \frac{1}{2})$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$ $(n = N)$, takvi da je $|S_m - S_n| > \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju (Primjedba 9.2), znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nH_n}$ divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.8** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red. Dokazati[32] da za svako $p \in \mathbb{N}$, vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}) = 0$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $\left| \sum\limits_{k=n+1}^{m} a_k \right|$ $< \varepsilon$.

Neka je $n \geq N$ i $p \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Sada, za $m = n + p > n \geq N$, imamo da je

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| < \varepsilon.$$

[32] Rezultat dat ovim zadatkom se može smatrati ojačanom varijantom Teorema 1.4 u [DzG2, str. 4]. Kontrapozicija rezultata tvrdi da ako postoji $p \in \mathbb{N}$ takav da je $\lim\limits_{n \to +\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}) \neq 0$, da je onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan. Drugim riječima, ako postoji $p \in \mathbb{N}$ i $\varepsilon > 0$, takvi da za svako $N \in \mathbb{N}$, postoji $n \geq N$, takav da je $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}| \geq \varepsilon$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan. Ovakva varijanta dijela Primjedbe 9.2 zna biti pogodna za primjene u konkretnim situacijama. Naime, za konkretne odabire broja $p \in \mathbb{N}$, izraz $|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p}|$ se često drastično pojednostavljuje (bez obzira na eventualnu složenost niza $\{a_n\}$). Primijetimo i to da obrat tvrdnje zadatka ne vrijedi (vidjeti Zadatak 74 u [DzG2, str. 171]). Ovo nam ustvari govori da rezultat dat zadatkom možemo smatrati oslabljenom, tj. minijaturnom verzijom Košijevog kriterija, tj. Teorema 9.1.

Tako, za proizvoljan broj $p \in \mathbb{N}$, imamo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} - 0| < \varepsilon.$$

ovo znači da je za svako $p \in \mathbb{N}$, zadovoljeno $\lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p})$ $= 0$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.9 (Putnam [12, 1952, B5])**[33] Neka je $\{a_n\}$ monoton niz, takav da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. Dokazati da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$.

**Dokaz:** Ako je niz $\{a_n\}$ rastući, tj. ako je $a_1 < a_2 < ...$, onda možemo smatrati da je $a_1 \leq a_2 \leq ...$, tj. možemo smatrati da je niz $\{a_n\}$ neopadajući.

Isto tako, ako je niz $\{a_n\}$ opadajući, onda možemo smatrati da je on nerastući.

Tako, razmatranje možemo svesti na slučajeve kada je niz $\{a_n\}$ neopadajući ili nerastući.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, pa je po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Ako je niz $\{a_n\}$ neopadajući, tj. ako je $a_1 \leq a_2 \leq ...$, onda je sigurno $a_n \leq 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Naime, ako bi za neko $N \in \mathbb{N}$, vrijedilo $a_N > 0$, onda bi imali da je $0 < a_N \leq a_{N+1} \leq ...$, što bi značilo da van okoline $(-a_N, a_N)$ granične vrijednosti 0 niza $\{a_n\}$, leži beskonačno mnogo elemenata niza. Ovo bi bilo u kontradikciji sa Zadatkom 25 u [DzG1, str. 17], tj. sa činjenicom da svaka okolina granične vrijednosti niza sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Tako, vidimo da u slučaju neopadajućeg niza $\{a_n\}$, vrijedi $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq 0$.

Analogno, u slučaju nerastućeg niza $\{a_n\}$, imamo da je $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq 0$.

Neka je $\{a_n\}$ nerastući niz.

Sada je $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq 0$, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nenegativan red.

[33] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$.

Vrijedi, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, te $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} k\,(a_k - a_{k+1})$, $n \in \mathbb{N}$.

Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$
\begin{aligned}
P_n =& \sum_{k=1}^{n} k\,(a_k - a_{k+1}) \\
=& 1 \cdot (a_1 - a_2) + 2 \cdot (a_2 - a_3) + ... + n \cdot (a_n - a_{n+1}) \\
=& a_1 + (2-1)\,a_2 + (3-2)\,a_3 + ... + a_n\,(n - (n-1)) - na_{n+1} \\
=& a_1 + a_2 + ... + a_n + na_{n+1} = S_n + na_{n+1} \\
=& S_n + (n+1)\,a_{n+1} - a_{n+1}.
\end{aligned}
$$

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, to postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = S$ ($S$ je suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je nenegativan konvergentan red, takav da je $\{a_n\}$ nerastući niz, pa je po Zadatku 9.1.2, $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$ (vidjeti notu Zadatka 9.1.2).

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\,a_{n+1} = 0$.

Isto tako, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$.

Sada, iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} P_n =& \lim_{n\to+\infty} S_n + \lim_{n\to+\infty} (n+1)\,a_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} (-a_{n+1}) \\
=& S + 0 + 0 = S.
\end{aligned}
$$

Ovo znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$, i da mu je suma jednaka $S$ (red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$ ima istu sumu kao red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$).

Tako, tvrdnja zadatka vrijedi u slučaju nerastućeg niza $\{a_n\}$.

Pretpostavimo sada da je $\{a_n\}$ neopadajući niz.

Imamo, $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq 0$, pa je $-a_1 \geq -a_2 \geq ... \geq 0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$. Pri tome, ako je $S$ suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, onda je $-S$ suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$.

Tako $\{-a_n\}$ je nerastući nenegativan niz, takav da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -a_n$ konvergira, pa po prvom dijelu dokaza (koji se odnosi na nerastuće nizove), imamo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(-a_n - (-a_{n+1})\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(a_{n+1} - a_n\right)$, i da mu je suma jednaka $-S$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -n\left(a_{n+1} - a_n\right) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$, i da mu je suma jednaka $-(-S) = S$.

Zaključujemo, tvrdnja zadatka vrijedi i u slučaju kada je $\{a_n\}$ neopadajući niz.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 9.1.10** Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma pozitivnog divergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ divergira, a da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ konvergira.

**Dokaz:** Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$, a sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$.

Imamo, $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k}$, $n \in \mathbb{N}$, te $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{S_k^2}$, $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo prvo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$.

Po Košijevom kriteriju, tj. Primjedbi 9.2, dovoljno je da dokažemo da postoji $\varepsilon > 0$, takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$, takvi da je $|P_m - P_n| \geq \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon = \frac{1}{2}$, i $N \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj.

Stavimo $n = N$. Sada je

$$\begin{aligned}|P_m - P_n| = |P_m - P_N| &= \left|\sum_{k=N+1}^{m} \frac{a_k}{S_k}\right| \\ &= \sum_{k=N+1}^{m} \frac{a_k}{S_k} \geq \sum_{k=N+1}^{m} \frac{a_k}{S_m} = \frac{1}{S_m} \sum_{k=N+1}^{m} a_k \\ &= \frac{1}{S_m}\left(S_m - S_N\right) = 1 - \frac{S_N}{S_m}.\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan divergentan red, pa mu je suma jednaka $+\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Tako, $\lim\limits_{m \to +\infty} S_m = +\infty$.

Slijedi, $\lim\limits_{m \to +\infty} \left(1 - \frac{S_N}{S_m}\right) = 1$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ granične vrijednosti 1 niza $\left\{1 - \frac{S_N}{S_m}\right\}_{m=1}^{+\infty}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $m_0 \in \mathbb{N}$, $m_0 \geq n$, takav da za sve $m \geq m_0$, vrijedi 1 $- \frac{S_N}{S_m} > \frac{1}{2}$.

Neka je tako $m$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj iz $\mathbb{N}$, takav da je $m > m_0$.

Imamo, $m, n \geq N$ i $m \geq n$ ($m > n$), pri čemu je $|P_m - P_n| \geq 1 - \frac{S_N}{S_m} > \frac{1}{2} = \varepsilon$.

Tako, postoji $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = \frac{1}{2}$), takav da za sve $N \in \mathbb{N}$, postoje $m, n \geq N$, $m \geq n$ ($n$ $= N$), takvi da je $|P_m - P_n| > \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju (Primjedba 9.2), znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ divergira.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$.

Po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon >$ 0, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|Q_m - Q_n| < \varepsilon$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.

Posmatrajmo $|Q_m - Q_n|$. Imamo,

$$|Q_m - Q_n| = \left|\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k^2}\right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k^2} <$$

$$\sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{S_k \cdot S_{k-1}} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k \cdot S_{k-1}} = \sum_{k=n+1}^{m} \left( \frac{1}{S_{k-1}} - \frac{1}{S_k} \right)$$
$$= \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} + \frac{1}{S_{n+1}} - \frac{1}{S_{n+2}} + ... + \frac{1}{S_{m-1}} - \frac{1}{S_m}$$
$$= \frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_m} < \frac{1}{S_n}.$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{S_n} = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ granične vrijednosti 0 niza $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{1}{S_n} < \varepsilon$.

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|Q_m - Q_n| < \frac{1}{S_n} < \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ konvergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.11** Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma pozitivnog divergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\beta}}$ konvergira za svako $\beta > 0$.

**Dokaz:** Neka je $\beta > 0$ proizvoljno odabrano pa fiksirano.

Jasno je da postoji broj $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, takav da je $\frac{1}{p} < \beta$.

Neka je $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ jedan takav broj.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$.

Dokažimo da posljednji red konvergira.

Po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|P_m - P_n| < \varepsilon$, gdje je $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$.

Dakle, $P_n = \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{a_k}{S_k \cdot S_{k-1}^{\frac{1}{p}}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.

Posmatrajmo $|P_m - P_n|$. Imamo,

$$|P_m - P_n| = \left| \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{a_k}{S_k \cdot S_{k-1}^{\frac{1}{p}}} \right| = \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{a_k}{S_k \cdot S_{k-1}^{\frac{1}{p}}}$$
$$= \sum_{k=n+2}^{m+1} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k \cdot S_{k-1}^{\frac{1}{p}}}.$$

Dokažimo da za $n \geq 2$ vrijedi nejednakost

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} \leq p \left( \frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}} - \frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}} \right),$$

odnosno ekvivalentna nejednakost

$$1 - \frac{S_{n-1}}{S_n} \leq p \left( 1 - \frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}} \right).$$

Neka je $0 < x \leq 1$.
Imamo, $1 - x \geq 0$, te

$$0 < 1 < 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1} \leq 1 + 1 + 1 + ... + 1 = p,$$

pa je

$$1 - x^p = (1 - x) \left( 1 + x + x^2 + ... + x^{p-1} \right) \leq p (1 - x).$$

Tako, za $0 < x \leq 1$ vrijedi nejednakost $1 - x^p \leq p (1 - x)$.
Neka je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.
Stavimo, $x = \left( \frac{S_{n-1}}{S_n} \right)^{\frac{1}{p}}$.
Jasno je da je $0 < x < 1$, pa iz nejednakosti $1 - x^p \leq p (1 - x)$ dobijamo da je

$$1-\frac{S_{n-1}}{S_n}\leq p\left(1-\frac{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Kako je $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ proizvoljan broj, to posljednja nejednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, pa za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ vrijedi i njoj ekvivalentna nejednakost

$$\frac{S_n-S_{n-1}}{S_n\cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}\leq p\left(\frac{1}{S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_n^{\frac{1}{p}}}\right).$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}|P_m-P_n|&=\sum_{k=n+2}^{m+1}\frac{S_k-S_{k-1}}{S_k\cdot S_{k-1}^{\frac{1}{p}}}\leq\sum_{k=n+2}^{m+1}p\left(\frac{1}{S_{k-1}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_k^{\frac{1}{p}}}\right)\\&=p\left(\frac{1}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_{n+2}^{\frac{1}{p}}}+\frac{1}{S_{n+2}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_{n+3}^{\frac{1}{p}}}+...+\frac{1}{S_m^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_{m+1}^{\frac{1}{p}}}\right)\\&=p\left(\frac{1}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}}-\frac{1}{S_{m+1}^{\frac{1}{p}}}\right)<\frac{p}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}}.\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan divergentan red, pa mu je suma jednaka $+\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Tako, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, pa je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} = +\infty$.

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{p}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}} = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ granične vrijednosti 0 niza $\left\{\frac{p}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{p}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}} < \varepsilon$.

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|P_m - P_n| < \frac{p}{S_{n+1}^{\frac{1}{p}}} < \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$ konvergira.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, te i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n-1} = +\infty$, to postoji indeks $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq 2$, takav da za sve $n \geq N_1$, vrijedi $S_{n-1} > 1$.

Ovo znači da za $n \geq N_1$, imamo da je $\frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\beta}} < \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\frac{1}{p}}}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\beta}}$.

Kako je $\beta > 0$ bio proizvoljno odabran pa fiksiran broj, to red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\beta}}$ konvergira za sve $\beta > 0$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 9.1.12** Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma pozitivnog divergentnog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan divergentan red, pa mu je suma jednaka $+\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Neka je $\alpha > 1$.

Sada je $\alpha - 1 > 0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $0 < S_{n-1} < S_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Odavde je $S_{n-1}^{\alpha-1} < S_n^{\alpha-1}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, a onda i

$$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}} = \frac{a_n}{S_n \cdot S_n^{\alpha-1}} < \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\alpha-1}}.$$

Kako je $\alpha - 1 > 0$, to po Zadatku 9.1.11, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\alpha-1}}$ konvergira.

Tako, iz $\frac{a_n}{S_n^\alpha} < \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\alpha-1}}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], imamo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$.

Pretpostavimo sada da je $\alpha \leq 1$.

Ako je $\alpha = 0$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan red.

Ako je $\alpha < 0$, onda je $\alpha = -\beta$ za neko $\beta > 0$, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{-\beta}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot S_n^\beta$.

Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \cdot S_n^\beta}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} S_n^\beta = +\infty,$$

pa iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \cdot S_n^\beta = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$.

Konačno, neka je $0 < \alpha \leq 1$.

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, to postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $S_n > 1$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je sada $S_n^\alpha \leq S_n$, tj. $\frac{1}{S_n^\alpha} \geq \frac{1}{S_n}$, odnosno $\frac{a_n}{S_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{S_n}$.

Po Zadatku 9.1.10, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ divergira, pa iz $\frac{a_n}{S_n} \leq \frac{a_n}{S_n^\alpha}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja (Teorem 1.1), slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^\alpha}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.13** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konvergira.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u

[DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, tj. vrijedi $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. neka je $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...,$$

tj. $S = S_{n-1} + r_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $S_1 < S_2 < ...$, što znači da je $r_2 > r_3 > ...$ .

Kako je

$$r_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2 > r_2,$$

to možemo pisati $r_1 > r_2 > ...$ .

Drugim riječima, $\{r_n\}$ je opadajući niz.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Dakle, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni je veća od nule, pa je i $r_1 > r_2 > ... > 0$ (ima smisla posmatrati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$).

Dokažimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konvergira.

Po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m$, $n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|P_m - P_n| < \varepsilon$, gdje je $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$.

Imamo, $P_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}$, $n \in \mathbb{N}$.
Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.
Posmatrajmo $|P_m - P_n|$. Vrijedi,

$$|P_m - P_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} \right| = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}}.$$

Kako smo već istakli, za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ je $S = S_{k-1} + r_k = S_k + r_{k+1}$, pa je i $r_k - r_{k+1} = S_k - S_{k-1} = a_k$. Dakle,

$$\begin{aligned}
|P_m - P_n| &= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{a_k}{\sqrt{r_k}} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{r_k - r_{k+1}}{\sqrt{r_k}} \\
&= \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right)\left(\sqrt{r_k} + \sqrt{r_{k+1}}\right)}{\sqrt{r_k}} \\
&< \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right)\left(\sqrt{r_k} + \sqrt{r_k}\right)}{\sqrt{r_k}} = 2 \sum_{k=n+1}^{m} \left(\sqrt{r_k} - \sqrt{r_{k+1}}\right) \\
&= 2\left(\sqrt{r_{n+1}} - \sqrt{r_{n+2}} + \sqrt{r_{n+2}} - \sqrt{r_{n+3}} + ... + \sqrt{r_m} - \sqrt{r_{m+1}}\right) \\
&= 2\left(\sqrt{r_{n+1}} - \sqrt{r_{m+1}}\right) < 2\sqrt{r_{n+1}}.
\end{aligned}$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$.

Po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52] je onda i $\lim\limits_{n \to +\infty} r_{n+1} = 0$, te $\lim\limits_{n \to +\infty} 2\sqrt{r_{n+1}} = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-\varepsilon, \varepsilon)$ granične vrijednosti 0 niza $\left\{2\sqrt{r_{n+1}}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $2\sqrt{r_{n+1}} < \varepsilon$.

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi $|P_m - P_n| < 2\sqrt{r_{n+1}} < \varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ konvergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.14** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$ konvergira za $\alpha < 1$ i divergira za $\alpha \geq 1$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, tj. vrijedi $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. neka je $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...,$$

tj. $S = S_{n-1} + r_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $S_1 < S_2 < ...$, što znači da je $r_2 > r_3 > ...$ .

Kako je

$$r_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2 > r_2,$$

to možemo pisati $r_1 > r_2 > ...$ .

Drugim riječima, $\{r_n\}$ je opadajući niz.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Dakle, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni je veća od nule, pa je i $r_1 > r_2 > ... > 0$ (ima smisla posmatrati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$).

Pretpostavimo prvo da je $\alpha \geq 1$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka, pa specijalno i okolina $(-1, 1)$ granične vrijednosti 0 niza $\{r_n\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

Ovo znači da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $r_n < 1$.

Odavde i iz $1 \leq \alpha$ imamo da je $r_n \geq r_n^\alpha$ za $n \geq N$, tj. da je za $n \geq N$, $\frac{a_n}{r_n^\alpha} \geq \frac{a_n}{r_n}$.

Po Primjeru 9.3, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n}$ divergira, pa iz $\frac{a_n}{r_n} \leq \frac{a_n}{r_n^\alpha}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$.

Neka je sada $\alpha < 1$.

Jasno je da postoji broj $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$, takav da je $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$.

Neka je $p \in \mathbb{N}$, $p > 1$ jedan takav broj.

Već smo konstatovali da iz $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$ imamo da je $r_n < 1$ za $n \geq N > 1$.

Odavde i iz $\alpha < 1 - \frac{1}{p}$ slijedi da je $r_n^\alpha > r_n^{1-\frac{1}{p}}$ za $n \geq N$, tj. da je za $n \geq N$,

$$\frac{a_n}{r_n^\alpha} < \frac{a_n}{r_n^{1-\frac{1}{p}}} = \frac{a_n}{r_n} \cdot r_n^{\frac{1}{p}}.$$

Kako smo već istakli, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $S = S_{n-1} + r_n = S_n + r_{n+1}$, pa je i $r_n - r_{n+1} = S_n - S_{n-1} = a_n$.

Tako, za $n \geq N$ je

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{r_n^\alpha} &< \frac{a_n}{r_n} \cdot r_n^{\frac{1}{p}} = \frac{r_n - r_{n+1}}{r_n} \cdot r_n^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(1 - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right) \cdot r_n^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

U Zadatku 9.1.11 smo dokazali da za $0 < x \leq 1$ vrijedi nejednakost $1 - x^p \leq p\,(1 - x)$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.

Stavimo, $x = \left(\frac{r_{n+1}}{r_n}\right)^{\frac{1}{p}}$.

Jasno je da je $0 < x < 1$, pa iz nejednakosti $1 - x^p \leq p\,(1-x)$ dobijamo da je

$$1 - \frac{r_{n+1}}{r_n} \leq p\left(1 - \frac{r_{n+1}^{\frac{1}{p}}}{r_n^{\frac{1}{p}}}\right),$$

tj. da je

$$\left(1 - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right) \cdot r_n^{\frac{1}{p}} \leq p\left(r_n^{\frac{1}{p}} - r_{n+1}^{\frac{1}{p}}\right).$$

Kako je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan broj, to posljednja nejednakost vrijedi za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je za $n \geq N$

$$\frac{a_n}{r_n^{\alpha}} < \left(1 - \frac{r_{n+1}}{r_n}\right) \cdot r_n^{\frac{1}{p}} \leq p\left(r_n^{\frac{1}{p}} - r_{n+1}^{\frac{1}{p}}\right).$$

Dokažimo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^{\alpha}}$ konvergira.

Po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, dovoljno je da dokažemo da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $N_1 \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m,\, n \geq N_1,\, m \geq n$, vrijedi $|P_m - P_n| < \varepsilon$, gdje je $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^{\alpha}}$.

Imamo, $P_n = \sum\limits_{k=N}^{N+n-1} \frac{a_k}{r_k^{\alpha}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj.

Posmatrajmo $|P_m - P_n|$. Vrijedi,

$$|P_m - P_n| = \left|\sum_{k=N}^{N+m-1} \frac{a_k}{r_k^{\alpha}} - \sum_{k=N}^{N+n-1} \frac{a_k}{r_k^{\alpha}}\right| = \left|\sum_{k=N+n}^{N+m-1} \frac{a_k}{r_k^{\alpha}}\right|$$
$$= \sum_{k=N+n}^{N+m-1} \frac{a_k}{r_k^{\alpha}} \leq \sum_{k=N+n}^{N+m-1} p\left(r_k^{\frac{1}{p}} - r_{k+1}^{\frac{1}{p}}\right) =$$

$$p\left(r_{N+n}^{\frac{1}{p}}-r_{N+n+1}^{\frac{1}{p}}+r_{N+n+1}^{\frac{1}{p}}-r_{N+n+2}^{\frac{1}{p}}+\ldots+r_{N+m-1}^{\frac{1}{p}}-r_{N+m}^{\frac{1}{p}}\right)$$
$$=p\left(r_{N+n}^{\frac{1}{p}}-r_{N+m}^{\frac{1}{p}}\right)<pr_{N+n}^{\frac{1}{p}}.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n=0$, to je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{N+n}=0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} pr_{N+n}^{\frac{1}{p}}=0$.

Po pomenutom Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], sada okolina $(-\varepsilon,\varepsilon)$ granične vrijednosti $0$ niza $\left\{pr_{N+n}^{\frac{1}{p}}\right\}$, sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

To znači da postoji indeks $N_1\in\mathbb{N}$, takav da za sve $n\geq N_1$, vrijedi $pr_{N+n}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

Tako, za svako $\varepsilon>0$, postoji $N_1\in\mathbb{N}$, takav da za sve $m,n\geq N_1$, $m\geq n$, vrijedi $|P_m-P_n|<pr_{N+n}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

Ovo po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, znači da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^\alpha}$ konvergira.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{r_n^\alpha}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.15** Upotrebom Košijevog kriterija kondenzacije, tj. Teorema 9.5, ispitati konvergenciju redova $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ i $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$.

**Rješenje:** Primijetimo da smo u Zadacima 4.1.3 i 4.1.4 već ispitali konvergenciju navedenih redova. Tamo smo upotrebom integralnog kriterija, tj. Teorema 4.5, dokazali da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ konvergira za $\alpha>1$ i divergira za $\alpha\leq 1$, te da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{1}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$ divergira.

Posmatrajmo prvo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Ovaj red je pozitivan.

Za $\alpha>0$, članovi ovog reda su jasno opadajući, pa po Košijevom kriteriju kondenzacije, redovi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}b_n$ i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}2^nb_{2^n}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}2^n\cdot\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^\alpha}=\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{(n\ln 2)^\alpha}$

$= \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha} \cdot n^{\alpha}}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $0 < \alpha \leq 1$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], imamo da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $0 < \alpha \leq 1$.

Sada, iz $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln 2)^{\alpha} \cdot n^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $0 < \alpha \leq 1$.

Ovo po Košijevom kriteriju kondenzacije znači da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $0 < \alpha \leq 1$.

Ako je $\alpha = 0$, onda je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2], divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ divergira za $\alpha = 0$.

Ako je $\alpha < 0$, onda je $\alpha = -\beta$ za neko $\beta > 0$, pa je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{\beta}}{n}$.

Pošto je $\lim\limits_{n \to +\infty} (\ln n)^{\beta} = +\infty$, to postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da je $(\ln n)^{\beta} > 1$ za $n \geq N$, tj. da je $\frac{1}{n} < \frac{(\ln n)^{\beta}}{n}$ za $n \geq N$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^{\beta}}{n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$.

Pošto je $n \geq 3 > e$, to je $\ln n > \ln e = 1$, pa je $\ln \ln n > \ln 1 = 0$.

Tako, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$ je pozitivan red.

Jasno je da su članovi ovog reda opadajući, pa po Košijevom kriteriju kondenzacije, redovi $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} c_n$ i $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} 2^n c_{2^n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \ln 2^n \cdot \ln \ln 2^n} =$ $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln 2 \cdot \ln(n \ln 2)}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$ divergira za $\alpha \leq 1$, pa specijalno divergira za $\alpha = 1$, tj. divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Ovo po pomenutom Teoremu 1.6 u [DzG2] znači da divergira red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$.

Pošto je $0 < \ln 2 < 1$, to za $n \geq 3$ vrijedi $0 < n \ln 2 < n$, tj. $\ln(n \ln 2) < \ln n$, odnosno $n \ln 2 \cdot \ln(n \ln 2) < n \ln 2 \cdot \ln n < n \ln n$.

Tako, za $n \geq 3$ je $\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{n \ln 2 \cdot \ln(n \ln 2)}$.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \ln 2 \cdot \ln(n \ln 2)}$.

Ovo po Košijevom kriteriju kondenzacije znači da red
$\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$ divergira. ■

♢ **Zadatak 9.1.16** Neka je $\{a_n\}$ opadajući niz pozitivnih brojeva. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red

$$(a) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n} \qquad (b) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2} \qquad (c) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3}$$

**Dokaz:** $(a)$ Stavimo, $p_k = 3^k$, $k \in \mathbb{N}$.
Sada je $3 < 3^2 <$ ..., tj. $p_1 < p_2 <$ ... .
Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Posmatrajmo izraz $\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}}$. Vrijedi,

$$\frac{p_{k+1} - p_k}{p_k - p_{k-1}} = \frac{3^{k+1} - 3^k}{3^k - 3^{k-1}} = \frac{3^k (3-1)}{3^{k-1}(3-1)} = 3.$$

Tako, postoji konstanta $C = 3$, takva da je $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Šlemilhovog kriterija kondenzacije, tj. Teorema 9.8, pa po njemu redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(3^{n+1} - 3^n\right) a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n (3-1)\, a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot 3^n a_{3^n}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Ako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot 3^n a_{3^n}$ konvergira, onda po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3^n a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$.

Obrnuto, ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$, onda po pomenutom Teoremu 1.6 konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot 3^n a_{3^n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 2 \cdot 3^n a_{3^n}$ ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$.

$(b)$ Stavimo, $p_k = k^2$, $k \in \mathbb{N}$.

U Primjeru 9.9 smo vidjeli da je $p_1 < p_2 < ...$, i da postoji konstanta $C = 3$, takva da je $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Sada, po Šlemilhovom kriteriju kondenzacije, tj. Teoremu 9.8, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^2 - n^2\right) a_{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n+1)a_{n^2}}{na_{n^2}} = 2$, to po kriteriju uspoređivanja limesom, tj. Teoremu 2.1, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_{n^2}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Slijedi, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$ ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} na_{n^2}$.

$(c)$ Očekivano, stavimo $p_k = k^3$, $k \in \mathbb{N}$.
Sada je $1^3 < 2^3 <$ ..., tj. $p_1 < p_2 <$ ... .
Neka je $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Posmatrajmo izraz $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} &= \frac{(k+1)^3-k^3}{k^3-(k-1)^3} = \frac{k^3+3k^2+3k+1-k^3}{k^3-k^3+3k^2-3k+1} \\ &= \frac{3k^2+3k+1}{3k^2-3k+1}.\end{aligned}$$

Primijetimo da je $3k^2 - 3k - 1 > 0$ za $k \in \mathbb{R}$, pa specijalno i za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Dokažimo da je $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq 3$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.
Neka $k \in \mathbb{N}$, i neka je $k \geq 2$.
Nejednakost $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq 3$, tj. $\frac{3k^2+3k+1}{3k^2-3k+1} \leq 3$ je ekvivalentna sa $3k^2 + 3k + 1 \leq 9k^2 - 9k + 3$, tj. $6k^2 - 12k + 2 \geq 0$, odnosno sa $3k^2 - 6k + 1 \geq 0$.
Vrijedi, $3k^2 - 6k + 1 = 0$ ako i samo ako je $k = \frac{6\pm\sqrt{36-12}}{6} = \frac{6\pm\sqrt{24}}{6} = \frac{6\pm2\sqrt{6}}{6} = \frac{3\pm\sqrt{6}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{3}$.
Tako, $3k^2 - 6k + 1 \geq 0$ ako i samo ako $k \in \left(-\infty, 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}\right] \cup \left[1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$.
Vrijedi, $1 + \frac{\sqrt{6}}{3} < 2$ jer je $\frac{\sqrt{6}}{3} < 1$, odnosno $\sqrt{6} < 3$.
Ovo znači da za naše $k \geq 2$ imamo da $k \in \left[1 + \frac{\sqrt{6}}{3}, +\infty\right)$, pa nejednakost $3k^2 - 6k + 1 \geq 0$ vrijedi.
Drugim riječima, za $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$, vrijedi nejednakost $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq 3$.
Tako, postoji konstanta $C = 3$, takva da je $\frac{p_{k+1}-p_k}{p_k-p_{k-1}} \leq C$ za sve $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Šlemilhovog kriterija kondenzacije, tj. Teorema 9.8, pa po njemu redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n) a_{p_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left((n+1)^3 - n^3\right) a_{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(3n^2 + 3n + 1\right) a_{n^3}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\left(3n^2+3n+1\right)a_{n^3}}{n^2 a_{n^3}} = 3$, to po kriteriju upoređivanja limesom, tj. Teoremu 2.1, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(3n^2 + 3n + 1\right) a_{n^3}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(3n^2+3n+1\right) a_{n^3}$ ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 9.1.17** Upotrebom Šlemilhovih kriterija kondenzacije izvedenih u Zadatku 9.1.6, za $a>0$, ispitati konvergenciju redova:

$$(a)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad (b)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} \qquad (c)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$$

$$(d)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} \qquad (e)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$$

**Rješenje:** $(a)$ Konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ smo već ispitali u Primjeru 9.9.

Tamo smo iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$ dobili konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red čiji su članovi opadajući.

U $(b)$ Zadatka 9.1.16 smo vidjeli da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2}$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$.

Tako, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (2n+1)\, a_{n^2}$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2}$.

Odavde i iz $(b)$ Zadatka 9.1.16, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$.

$(b)$ Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red sa opadajućim članovima.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ iz $(a)$ Zadatka 9.1.16.

Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \cdot \frac{1}{2^{\ln 3^n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{2^{n \ln 3}}$.
Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{2^{n\ln 3}}} = \frac{3}{2^{\ln 3}} = \rho.$$

Kako je $\ln 3 > 1 > 0$, to je $2^{\ln 3} < e^{\ln 3} = 3$, pa je $\rho = \frac{3}{2^{\ln 3}} > \frac{3}{3} = 1$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ divergira, pa po $(a)$ Zadatka 9.1.16, divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$.

$(c)$ Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red čiji su članovi opadajući.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ iz $(a)$ Zadatka 9.1.16.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \cdot \frac{1}{3^{\ln 3^n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{3^{n \ln 3}}$.
Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{3^{n\ln 3}}} = \frac{3}{3^{\ln 3}} = \rho.$$

Pošto je $\ln 3 > 1$, to je $3^{\ln 3} > 3$, pa je $\rho = \frac{3}{3^{\ln 3}} < \frac{3}{3} = 1$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ konvergira, pa po $(a)$ Zadatka 9.1.16, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$.

$(d)$ Po pretpostavci je $a > 0$, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red.

Neka je $a > 1$.

Sada su članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ opadajući.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ iz $(a)$ Zadatka 9.1.16.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n \cdot \frac{1}{a^{\ln 3^n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{n \ln 3}}$.
Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{a^{n\ln 3}}} = \frac{3}{a^{\ln 3}} = \rho.$$

Ako je $a > e$, onda iz $\ln 3 > 1 > 0$ imamo da je $a^{\ln 3} > e^{\ln 3} = 3$, pa je $\rho = \frac{3}{a^{\ln 3}} < \frac{3}{3} = 1$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ konvergira, pa po $(a)$ Zadatka 9.1.16, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ konvergira.

Ako je $1 < a < e$, onda iz $\ln 3 > 1 > 0$, slijedi da je $a^{\ln 3} < e^{\ln 3} = 3$, pa je $\rho = \frac{3}{a^{\ln 3}} > \frac{3}{3} = 1$.

Tako, po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ divergira, pa po $(a)$ Zadatka 9.1.16, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ divergira.

Ako je $a = e$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Napokon, pretpostavimo da je $0 < a \leq 1$.

Ako je $a = 1$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$, pa opšti član reda ne teži nuli kad $n \to +\infty$, što po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ divergira.

Isto tako, za $0 < a < 1$, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} = +\infty$, pa po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ konvergira za $a > e$ i divergira za $0 < a \leq e$.

$(e)$ Kako je $a > 0$, to je dati red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$, pozitivan.

Neka je $a > 1$.

Članovi reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ su sada jasno opadajući.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$ iz $(a)$ Zadatka 9.1.16.

Vrijedi, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 3^n a_{3^n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 3^n \cdot \frac{1}{a^{\ln\ln 3^n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln(n\ln 3)}}$.

Kako je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^n}{a^{\ln(n\ln 3)}}}{\frac{3^n}{a^{\ln n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a^{\ln n}}{a^{\ln(n\ln 2)}} = \lim_{n\to+\infty} a^{\ln n - \ln(n\ln 3)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} a^{\ln\frac{n}{n\ln 3}} = a^{\ln\frac{1}{\ln 3}} = a^{\ln(\ln 3)^{-1}} = a^{-\ln\ln 3} = \frac{1}{a^{\ln\ln 3}} > 0,$$

to po kriteriju upoređivanja limesom, tj. Teoremu 2.1, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln(n\ln 3)}}$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln n}}$.

Pošto je

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{3^n}{a^{\ln n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{3}{a^{\frac{\ln n}{n}}} = 3 > 1,$$

to po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln n}}$ divergira, pa divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{3^n}{a^{\ln(n\ln 3)}}$, što po $(a)$ Zadatka 9.1.16 znači da divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$.

Ako je $a = 1$, onda je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 1$. Opšti član posljednjeg reda ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$ divergira.

Konačno, ako je $0 < a < 1$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}} = +\infty$, pa po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$ divergira za sve $a > 0$. ■

◊ **Zadatak 9.1.18** Dokazati da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$ divergira za svaki pozitivan niz $\{a_n\}$.

**Dokaz:** Posmatrajmo redove $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$.

Ovi redovi su pozitivni a za pozitivan red znamo da ili konvergira ka nekom nenegativnom broju ili divergira ka $+\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Tako, ili je $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} = A$ za neki konačan broj $A \geq 0$, ili je $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} = +\infty$.

Ako red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ divergira, onda je po upravno rečenome, $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = +\infty$.

Odavde, iz činjenice da je $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} = A$ ili $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} = +\infty$, i tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{na_n} + \frac{a_{n+1}}{na_n} \right)$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n} = +\infty.$$

Tako, u slučaju divergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ dobijamo divergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Vidimo da je dovoljno da dokažemo da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ implicira divergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1+a_{n+1}}{a_n}$.

U skladu sa već izloženim, dovoljno je onda da dokažemo da konvergencija reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ povlači divergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{na_n}$.

Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz, takav da red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{na_n}$ konvergira.

Po Košijevom kriteriju, tj. Teoremu 9.1, za $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$, postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $m, n \geq N$, $m \geq n$, vrijedi

$$\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_{k+1}}{ka_k}=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{a_{k+1}}{ka_k}\right|=|S_m-S_n|<\varepsilon=\frac{1}{4}.$$

Stavimo, $n=N$.
Imamo da za $m\geq N$, vrijedi $\sum\limits_{k=N+1}^{m}\frac{a_{k+1}}{ka_k}<\frac{1}{4}$.
Specijalno, za $m=N+q$, $q\in\mathbb{N}$, je $\sum\limits_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{ka_k}<\frac{1}{4}$.
Pretpostavimo još da je $q>N$.
Možemo reći da za $q>N$ vrijedi $\sum\limits_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{ka_k}<\frac{1}{4}$.
Tako, za $q>N$ je

$$\frac{1}{4}>\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{ka_k}>\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{(N+q)\,a_k}$$
$$=\frac{q}{N+q}\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{qa_k}>\frac{q}{q+q}\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{qa_k}=\frac{1}{2}\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{qa_k},$$

tj.

$$\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{qa_k}<\frac{1}{2}.$$

Iz nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo da je za $q>N$,

$$\frac{1}{2}>\sum_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{qa_k}=\frac{\sum\limits_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{a_k}}{q}$$
$$\geq\sqrt[q]{\prod_{k=N+1}^{N+q}\frac{a_{k+1}}{a_k}}=\sqrt[q]{\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}\cdot\frac{a_{N+3}}{a_{N+2}}\cdot\ldots\cdot\frac{a_{N+q+1}}{a_{N+q}}}=\sqrt[q]{\frac{a_{N+q+1}}{a_{N+1}}},$$

tj. da je $a_{N+q+1} < \frac{a_{N+1}}{2^q}$.

Odavde vidimo da za $q > N$ vrijedi $(N+q+1)\,a_{N+q+1} < (N+q+1)\,\frac{a_{N+1}}{2^q}$, tj.

$$\begin{aligned}\frac{1}{(N+q+1)\,a_{N+q+1}} &> \frac{2^q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}}\\ =&\frac{2^q}{q}\cdot\frac{q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}} = \frac{1}{\frac{q}{2^q}}\cdot\frac{q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}}.\end{aligned}$$

Po Zadatku 7 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{q\to+\infty}\frac{q}{2^q} = 0$, pa je

$$\lim_{q\to+\infty}\frac{2^q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}} = \lim_{q\to+\infty}\frac{1}{\frac{q}{2^q}}\cdot\frac{q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}} = +\infty.$$

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{q=N+1}^{+\infty}\frac{2^q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}}$ divergira.

Odavde, iz $\frac{2^q}{N+q+1}\cdot\frac{1}{a_{N+1}} < \frac{1}{(N+q+1)a_{N+q+1}}$, $q \geq N+1$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{q=N+1}^{+\infty}\frac{1}{(N+q+1)a_{N+q+1}} = \sum\limits_{n=2N+2}^{+\infty}\frac{1}{na_n}$.

Tako, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=2N+2}^{+\infty}\frac{1}{na_n}$ i Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{na_n}$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 9.1.19** Neka je $\{a_n\}$ rastući niz pozitivnih brojeva, takav da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$ divergira. Dokazati da divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$.

**Dokaz:** Niz $\{a_n\}$ je rastući, pa je $a_{n-1} < a_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $(n-1)\,a_{n-1} < (n-1)\,a_n < na_n$, tj.
$na_n - (n-1)\,a_{n-1} > 0$.

Ovo znači da je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ pozitivan red.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$.
Imamo, $S_n = \sum\limits_{k=2}^{n+1} \frac{1}{ka_k-(k-1)a_{k-1}}$, $n \in \mathbb{N}$.
Posmatrajmo podniz $\{S_{2^n-1}\}$ niza $\{S_n\}$.
Imamo,

$$\begin{aligned}S_{2^n-1} &= \sum_{k=2}^{2^n} \frac{1}{ka_k - (k-1)\,a_{k-1}}\\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{ka_k - (k-1)\,a_{k-1}} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-1}} \frac{1}{ka_k - (k-1)\,a_{k-1}}.\end{aligned}$$

Nejednakost između aritmetičke i geoemetrijske sredine nam daje

$$\begin{aligned}&\frac{\sum\limits_{k=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-1}} \frac{1}{ka_k-(k-1)a_{k-1}}}{2^{l-1}}\\ \geq &\frac{2^{l-1}}{\sum\limits_{k=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-1}} \frac{1}{\frac{1}{ka_k-(k-1)a_{k-1}}}} = \frac{2^{l-1}}{\sum\limits_{k=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-1}} (ka_k - (k-1)\,a_{k-1})}.\end{aligned}$$

Vrijedi,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^{l-1}+2^{l-1}} (ka_k - (k-1)\,a_{k-1})\\ &= \left(2^{l-1}+1\right) a_{2^{l-1}+1} - 2^{l-1}a_{2^{l-1}} + \left(2^{l-1}+2\right) a_{2^{l-1}+2} - \left(2^{l-1}+1\right) a_{2^{l-1}+1} +\\ &\quad ... + 2^l a_{2^l} - \left(2^{l-1}-1\right) a_{2^{l-1}-1} = 2^l a_{2^l} - 2^{l-1}a_{2^{l-1}} < 2^l a_{2^l},\end{aligned}$$

pa je

$$\frac{\sum\limits_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{ka_k-(k-1)a_{k-1}}}{2^{l-1}} > \frac{2^{l-1}}{2^l a_{2^l}} = \frac{1}{2a_{2^l}},$$

tj.

$$\sum_{k=2^{l-1}+1}^{2^l} \frac{1}{ka_k - (k-1)\,a_{k-1}} > \frac{2^{l-1}}{2a_{2^l}} = \frac{2^l}{4a_{2^l}}.$$

Slijedi,

$$S_{2^n-1} > \sum_{l=1}^{n} \frac{2^l}{4a_{2^l}}.$$

Po pretpostavci, $\{a_n\}$ je rastući niz pozitivnih brojeva, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ pozitivan red čiji su članovi opadajući.

Odavde, iz divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$, i Košijevog kriterija kondenzacije, tj. Teorema 9.5, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{a_{2^n}}$.

Posljednji red je pozitivan, pa kako divergira, to vrijedi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{a_{2^n}} = +\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Sada, iz $(a)$ Teorema 1.8 imamo da je i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4a_{2^n}} = +\infty$.

Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4a_{2^n}}$.

Imamo, $P_n = \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{2^l}{4a_{2^l}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n}{4a_{2^n}} = +\infty$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$.

Osim toga, $S_{2^n-1} > \sum\limits_{l=1}^{n} \frac{2^l}{4a_{2^l}}$, pa je $S_{2^n-1} > P_n$.

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = +\infty$, imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2^n-1} = +\infty$.

Ako bi niz $\{S_n\}$ konvergirao, to bi po Posljedici 7.15 u [DzG1, str. 103] konvergirao i njegov podniz $\{S_{2^n-1}\}$, što nije slučaj.

Tako, niz $\{S_n\}$ divergira, pa red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{na_n-(n-1)a_{n-1}}$ divergira.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 9.1.20** Neka je $a > 0$ i $b > 0$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$.

Posmatrajmo osim toga funkciju $f(x) = \frac{(\ln x)^a}{x^b}$ na intervalu $I = [N, +\infty)$, gdje je $N$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj iz $\mathbb{N}$, takav da je $N > e^{\frac{a}{b}} > 1$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna, definisana na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$.

Za $x \in I$, imamo

$$\begin{aligned} f'(x) =& \frac{\left((\ln x)^a\right)' \cdot x^b - (\ln x)^a \cdot \left(x^b\right)'}{x^{2b}} = \frac{a(\ln x)^{a-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot x^b - (\ln x)^a \cdot bx^{b-1}}{x^{2b}} \\ =& \frac{a(\ln x)^{a-1} \cdot x^{b-1} - b(\ln x)^a x^{b-1}}{x^{2b}} = \frac{(\ln x)^{a-1} x^{b-1}(a - b \cdot \ln x)}{x^{2b}}, \end{aligned}$$

pa na $I$ (bar unutar $I$) postoji izvod $f'(x)$.

Pošto $x \in I$, to je $x \geq N > e^{\frac{a}{b}}$, pa je $\ln x > \frac{a}{b}$, tj. $a - b \cdot \ln x < 0$.

Tako, $f'(x) < 0$ za $x \in I$.

Ovo znači da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $I$ (vidjeti notu 10 na stranici 85 u [DzG2]).

Slijedi, $\frac{(\ln N)^a}{N^b} > \frac{(\ln(N+1))^a}{(N+1)^b} > ...$, što znači da je $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ pozitivan red čiji su članovi u konačnici opadajući.

Po Košijevom kriteriju kondenzacije, tj. Teoremu 9.5, redovi $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ i $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 2^n b_{2^n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{(\ln 2)^a \cdot n^a}{2^{nb}}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}$.

Po $(f)$ Zadatka 5 u [DzG1, str. 16] je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}} = \lim_{n\to+\infty} 2 \cdot \frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^a}{2^b} = \frac{1}{2^{b-1}}.$$

Ako je $b > 1$, onda je $b - 1 > 0$, pa je $2^{b-1} > 1$, odnosno $\frac{1}{2^{b-1}} < 1$.

Ovo po kriteriju korijena, tj. Teoremu 6.2, znači da red $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}$, a onda i red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira za $b > 1$ (u skladu je sa Zadatkom 1.1.20).

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8] imamo da za $b > 1$ konvergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$.

Ako je $0 < b < 1$, onda je $b - 1 < 0$, pa je $2^{b-1} < 1$, odnosno $\frac{1}{2^{b-1}} > 1$.

Ovo po pomenutom kriteriju korijena znači da red $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}$, a onda i red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, te konačno red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ divergira za $0 < b < 1$.

Ako je $b = 1$, onda je red $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}$ oblika $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^n} = \sum_{n=2}^{+\infty} n^a$.

Jasno je da je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^a = +\infty$, tj. jasno je da opšti član posljednjeg reda ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum_{n=2}^{+\infty} 2^n \cdot \frac{n^a}{2^{nb}}$ divergira za $b = 1$.

Ovo znači da red $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, a onda i red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ divergira za $b = 1$.

Kako je $\sum_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \cdot \frac{(\ln n)^a}{n^b}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, to iz upravo provedenog razmatranja nad redom $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$, i Definicije 7.1, zaključujemo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira apsolutno za $b > 1$, te ne konvergira apsolutno za $0 < b \leq 1$.

Po Teoremu 7.2 znamo da iz apsolutne konvergencije reda slijedi njegova konvergencija.

Tako, red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira apsolutno za $b > 1$, pa i konvergira za $b > 1$.

Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ ne konvergira apsolutno za $0 < b \leq 1$, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $0 < b \leq 1$.

Red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{(\ln n)^a}{n^b} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} a_n$ je alternirajući red.

Vidjeli smo da je $a_N > a_{N+1} > ...$, tj. vidjeli smo da je $\{a_n\}$ u konačnici opadajući niz.

Osim toga, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^a}{n^b} = 0$ (vidjeti obrazloženje u rješenju Zadatka 8.1.1).

Tako, zadovoljeni su uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira (bez obzira na $b$, tj. konvergira za svako $b > 0$).

Rezimirajmo, za $b > 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), za $0 < b \leq 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira).

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira tamo gdje ne konvergira apsolutno, tj. za $0 < b \leq 1$, to po Definiciji 7.6 red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$ konvergira uslovno za $0 < b \leq 1$. ■

## 9.2 Redovi razmatrani kriterijima Košija ili Šlemilha (običnim ili kondenzovanim)

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n}$

(2) $\sum_{n=1}^{+\infty} 2^n b_{2^n}$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty} (p_{n+1} - p_n)\, a_{p_n}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$

(6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n\alpha - \cos(n+1)\alpha}{n}$

(7) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos \alpha^n}{n^2}$

(8) $1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + ...$

(9) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$

(10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nH_n}$

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$

(12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$

(14) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \cdot S_{n-1}^{\beta}}$

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$

(16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^{\alpha}}$

(18) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\alpha}}$

(19) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln\ln n}$

(20) $\sum_{n=1}^{+\infty} 3^n a_{3^n}$

(21) $\sum_{n=1}^{+\infty} n a_{n^2}$

(22) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 a_{n^3}$

(23) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$

(24) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$

(25) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ (26) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$

(27) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{1 + a_{n+1}}{a_n}$ (28) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{na_n - (n-1)\, a_{n-1}}$

(29) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(\ln n)^a}{n^b}$

# 10 Rezultati Kumera

Sekcija je posvećena Kumerovom[34] kriteriju za ispitivanje konvergencije (divergencije) pozitivnih redova.

**Teorem 10.1 (Kumerov kriterij)** *Neka je* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red i* $\{d_n\}$ *niz pozitivnih brojeva.*

1. *Ako je u konačnici*[35]
$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \geq K$$
*ili ekvivalentno*
$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \geq K,$$
*gdje je* $K > 0$ *neka konstanta, onda je red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan.*

2. *Ako je u konačnici*
$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \leq 0$$
*ili ekvivalentno*
$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \leq 0,$$
*i red* $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ *divergira, onda je red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

---

[34] **Ernst Eduard Kummer**, 1810-1893. god. n.e., njemački matematičar. Vješt u primijenjenoj matematici, Kumer je obučavao oficire njemačke vojske za balistiku. Nakon toga je 10 godina predavao u gimnaziji, njemačkom ekvivalentu srednje škole. Tu je inspirisao i matematičku karijeru Leopolda Kronekera. Kumer je dao doprinos različitim oblastima matematike. Bavio se relacijama među hipergeometrijskim redovima. U algebarskoj geometriji je poznat po pojmu "Kumerova površ" (Kummer quartic surface). Geometrija ovakvih površi je intenzivno razmatrana u devetnaestom vijeku. Kumer je 1850. godine dokazao da Fermaov Posljednji Teorem vrijedi za prost eksponent $p$ ako je $p$ regularan broj. Uveo je pojam ideala, a kako se kasnije ispostavilo, njegove metode su bile bliže $p$-adskim, nego onim teorije ideala. Kumerova proširenja polja nose naziv po njemu. Ovakva proširenja, u apstraktnoj algebri i teoriji brojeva, nastaju adjungovanjem $n$-tih korijena elemenata polaznog polja koje već sadrži primitivni $n$-ti korijen iz jedinice.

[35] Vidjeti Napomenu 1.2.

**Dokaz:** *1.* Pošto uslov $d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \geq K$ vrijedi u konačnici, to postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da je

$$d_k - \frac{a_{k+1}}{a_k} d_{k+1} \geq K$$

za sve $k \geq N$.

Možemo pisati,

$$a_k d_k - a_{k+1} d_{k+1} \geq K a_k,$$

$k \geq N$, tj.

$$\frac{1}{K} (a_k d_k - a_{k+1} d_{k+1}) \geq a_k,$$

$k \geq N$.

Uzmimo sada proizvoljno $n \geq N$, i stavimo u posljednju nejednakost $k = N$, $N + 1$, ..., $n$. Dobijamo,

$$\begin{aligned} \frac{1}{K} (a_N d_N - a_{N+1} d_{N+1}) &\geq a_N, \\ \frac{1}{K} (a_{N+1} d_{N+1} - a_{N+2} d_{N+2}) &\geq a_{N+1}, \\ &\vdots \\ \frac{1}{K} (a_n d_n - a_{n+1} d_{n+1}) &\geq a_n. \end{aligned}$$

Sabiranjem, slijedi

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leq \frac{1}{K} (a_N d_N - a_{n+1} d_{n+1}).$$

Pošto su red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i niz $\{d_n\}$ pozitivni, to je $a_{n+1} d_{n+1} > 0$, tj. $-a_{n+1} d_{n+1} < 0$, odnosno $a_N d_N - a_{n+1} d_{n+1} < a_N d_N$. Tako,

$$\sum_{k=N}^{n} a_k < \frac{1}{K} a_N d_N.$$

Pošto je $n \geq N$ proizvoljno, to nam posljednja nejednakost govori da je niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ ograničen odozgo sa $\frac{1}{K} a_N d_N$. Osim toga, red $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ je pozitivan red (jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red), pa je niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$, rastući niz.

Ovo, po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], znači da je niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ konvergentan niz, pa je red $\sum\limits_{k=N}^{+\infty} a_k$ konvergentan.

Sada, iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], imamo da je i red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

*2.* Pošto je u konačnici

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \leq 0,$$

to postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da je

$$d_k - \frac{a_{k+1}}{a_k} d_{k+1} \leq 0,$$

tj.

$$\frac{\frac{1}{d_{k+1}}}{\frac{1}{d_k}} \leq \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

za sve $k \geq N$.

Odavde, iz pozitivnosti redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$, divergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$, i kriterija upoređivanja količnika (Teorem 3.1), slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokaz je završen. ■

Kao i pojedini kriteriji izvedeni u prethodnim sekcijama, tako i Kumerov kriterij ima slabiju ali često pogodniju za primjenu varijantu. Drugim riječima, vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 10.2 (Kumerov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red i* $\{d_n\}$ *niz pozitivnih brojeva. Pretpostavimo da postoji limes*[36]

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right)$$

*ili ekvivalentno limes*

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1}\right).$$

*Ako je* $K > 0$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan. Ako je* $K < 0$ *i red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ *divergira, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

**Dokaz:** Pretpostavimo da je $K > 0$.

Ako je $K = +\infty$, onda po Definiciji 7.7 u [DzG1, str. 84], za konstantu $K_1$, gdje je $K_1 > 0$ proizvoljno odabrana pa fiksirana konstanta, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1} > K_1.$$

Ovo znači da je u konačnici

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1} > K_1,$$

pa je po 1. Teorema 10.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Ako nije $K = +\infty$, onda je $0 < K < +\infty$, pa niz $\left\{d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right\}$ konvergira.

Uzmimo neku konstantu $K_1$, takvu da je $0 < K_1 < K < +\infty$.

Iz konvergencije niza $\left\{d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right\}$, nejednakosti $K_1 < K$, i tvrdnje $(a)$ Teorema 3.1 u [DzG1, str. 31], imamo da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

[36] Pretpostavljamo da navedeni limes postoji, tj. da je navedeni limes ili konačan ili beskonačan.

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} > K_1.$$

Dakle, ponovo je u konačnici

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} > K_1,$$

pa je po 1. Teorema 10.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Pretpostavimo sada da je $K < 0$ i da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergira.

Ako je $K = -\infty$, onda po pomenutoj Definiciji 7.7, za konstantu $K_1 = 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} < K_1 = 0.$$

Dakle, u konačnici je

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} < 0,$$

i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergira, pa po 2. Teorema 10.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Ako nije $K = -\infty$, onda je $-\infty < K < 0$, pa niz $\left\{d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}\right\}$ konvergira.

Iz konvergencije niza $\left\{d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}\right\}$, nejednakosti $K < 0$, i pomenute tvrdnje $(a)$ Teorema 3.1 u [DzG1], slijedi da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} < 0.$$

Tako, u konačnici je

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} < 0,$$

i red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergira, pa po 2. Teorema 10.1, divergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokaz je završen. ■

Kumerov originalni dokaz iz 1835. godine je bio komplikovan, pa zbog toga i ne rado prihvaćen u matematičkim krugovima u to vrijeme. Pedeset godina kasnije pojavio se dokaz kakav danas poznajemo (Teorem 10.1). Kumerov kriterij u formi Teorema 10.1 daje vrlo snažne dovoljne uslove za konvergenciju ili divergenciju pozitivnih redova. Njegova vrijednost ogleda se u tome što je on izvor mnogih drugih kriterija (neki su u stanju da ga nazovu šemom za generisanje kriterija, prije nego jednim konkretnim kriterijem). Tako, kriteriji koje ćemo susresti u sekcijama koje slijede, tj. kriteriji Rabea, Bertrana i Gausa će da budu specijalni slučajevi Kumerovog kriterija za konkretne odabire nizova $\{d_n\}$ u Teoremu 10.1. Većina kriterija prethodnih sekcija, a kako smo već napomenuli i sam Kumerov kriterij (u formi Teorema 10.1 ili 10.2), daju dovoljne uslove za konvergenciju. Da je Kumerov kriterij znatno drugačiji od ostalih kriterija svoga vremena govori činjenica da za njega vrijedi i više. Drugim riječima, Kumerov kriterij je istovremeno i dovoljan i potreban za konvergenciju, tj. obrati implikacija 1. i 2. Teorema 10.1 takođe vrijede. Tako, vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 10.3 (Kumerov kriterij)** *Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red.*

1. *Red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako postoji pozitivan niz $\{d_n\}$, i realan broj $K > 0$, takvi da u konačnici vrijedi*

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \geq K$$

*ili ekvivalentno*

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \geq K.$$

2. *Red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira ako i samo ako postoji pozitivan niz $\{d_n\}$, takav da je red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergentan, i da u konačnici vrijedi*

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \leq 0$$

*ili ekvivalentno*

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \leq 0.$$

Činjenica je da tvrdnja Teorema 10.3 nije dovoljno isticana u literaturi, bar ne u onoj nivoa udžbenika dodiplomskog studija matematike. Shodno tome, još jednom skrećemo pažnju na njenu vrijednost.

Kako smo već istakli, Kumerov kriterij je generator mnogih drugih kriterija tj. "Kumerovi kriteriji" su vrlo raznovrsni.

Imajući u vidu tvrdnju Teorema 10.3, u stanju smo da konstatujemo da svaki pozitivan red ili konvergira ili divergira za pogodno odabran niz $\{d_n\}$. Naime, ako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, onda on ili konvergira ka nekom broju $A \geq 0$ ili divergira ka $+\infty$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]). Ovo, po Teoremu 10.3, koristeći prvo implikaciju slijeva nadesno a onda zdesna nalijevo, znači da ili postoji niz $\{d_n\}$ takav da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, ili postoji niz $\{d_n\}$ takav da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira. Upravo je ova snažna izjava razlog otežane i rijeđe upotrebljivosti Kumerovog kriterija. Naime, vidimo da je Kumerov kriterij ustvari spoljašnje prirode u odnosu na dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Drugim riječima, odabir niza $\{d_n\}$ mora da dođe od samog čitaoca, tj. od onog ko ispituje konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Takav odabir onda zavisi od intuicije, iskustva, itd., i jasno je da u opisanoj konstalaciji odnosa nema mjesta za pretjerani optimizam i motivisanost. Ipak, zbog već pomenutih kriterija proizašlih iz Kumerovog kriterija (sekcije koje slijede), a koji su unutrašnje prirode u odnosu na dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, Kumerov kriterij ima izrazitu praktičnu vrijednost.

Iako to nismo eksplicitno naveli, jasno je iz konteksta da (kao i u slabijim varijantama kriterija prethodnih sekcija), slučaj $K = 0$ u Kumerovom kriteriju (Teorem 10.2) ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

## 10.1 Riješeni zadaci

$\diamondsuit$ **Zadatak 10.1.1** Dokazati da je kriterij količnika, tj. Teorem 5.1 resp. Teorem 5.2, specijalan slučaj Kumerovog kriterija, tj. Teorema 10.1 resp. Teorema 10.2.

**Dokaz:** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red.

Posmatrajmo niz pozitivnih brojeva $\{d_n\}$, gdje je $d_n = 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Na ovaj niz možemo primijeniti tvrdnju 1. Kumerovog kriterija (Teorem 10.1).

Osim toga, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} 1$ je divergentan red jer mu opšti član ne teži nuli kad $n \to +\infty$ (Teorem 1.4 u [DzG2, str. 4]), pa možemo primijeniti i tvrdnju 2. pomenutog Kumerovog kriterija.

Tako, ako je u konačnici

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \geq K,$$

tj.

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot 1 \geq K,$$

odnosno

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1 - K,$$

gdje je $K > 0$ neka konstanta, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Ovdje je $K > 0$, ali uočimo da ne može biti $K \geq 1$ (inače bi imali da je u konačnici $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 0$, što nije slučaj).

Tako, $0 < K < 1$, pa je $0 < 1 - K < 1$.

Stavimo, $q = 1 - K \in (0, 1)$.

Možemo reći da ako je u konačnici

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

gdje je $q \in (0, 1)$ neka konstanta, da onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira (ovo je upravo tvrdnja 1. Teorema 5.1).

S druge strane, ako je u konačnici

$$d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot d_{n+1} \leq 0,$$

tj.

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot 1 \leq 0,$$

odnosno

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1,$$

onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira (ovo je tvrdnja 2. Teorema 5.1).

Zaključujemo, Teorem 5.1 je specijalan slučaj Teorema 10.1.

Dokažimo da je i Teorem 5.2 specijalan slučaj Teorema 10.2.

Neka je i dalje $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, i $\{d_n\}$ niz, gdje je $d_n = 1$, $n \in \mathbb{N}$.

Možemo primijeniti tvrdnje Kumerovog kriterija (Teorem 10.2).

Ovdje ćemo koristiti osobine granične vrijednosti date Teoremom 2.2 u [DzG1, str. 19].

Po Teoremu 10.2, ako postoji limes

$$K = \lim_{n \to +\infty} \left( d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot d_{n+1} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right),$$

gdje je $K > 0$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Preformulisano, ako postoji limes

$$r = 1 - K = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n},$$

gdje je $r < 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan (ovo je upravo tvrdnja 1. Teorema 5.2).

Po Teoremu 10.2, ako postoji limes

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot d_{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

gdje je $K < 0$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Drugim riječima, ako postoji limes

$$r = 1 - K = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

gdje je $r > 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan (ovo je tvrdnja 2. Teorema 5.2).

Konačno, ako postoji limes

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot d_{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

gdje je $K = 0$, onda po napomeni datoj nakon Teorema 10.3, Kumerov kriterij, tj. Teorem 10.2, ne daje odgovor na pitanje da li dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ili ne.

Drugim riječima, ako postoji limes

$$r = 1 - K = \lim_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n},$$

gdje je $r = 1$, onda kriterij ne daje odgovor na pitanje da li dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ili ne (ovo je tvrdnja 3. Teorema 5.2).

Tako, Teorem 5.2 je specijalan slučaj Teorema 10.2.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 10.1.2** Dokazati Kumerov kriterij u formi Teorema 10.3.

**Dokaz:** U Teoremu 10.1 smo dokazali jedan smjer tvrdnji Teorema 10.3. Dokažimo da vrijede i obrnute tvrdnje.

Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red.

Pretpostavimo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Dokažimo da postoji pozitivan niz $\{d_n\}$, i realan broj $K > 0$, takvi da u konačnici vrijedi

$$d_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \geq K.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $r_n$ sumu reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Imamo, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. neka je $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...,$$

tj. $S = S_{n-1} + r_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $S_1 < S_2 < ...$, što znači da je $r_2 > r_3 > ...$ .

Kako je

$$r_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2 > r_2,$$

to možemo pisati $r_1 > r_2 > ...$ .

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Dakle, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni je veća od nule, pa je i $r_1 > r_2 > ... > 0$.

Neka je $K = 1 > 0$ i $\{d_n\}$ niz, gdje je $d_n = \frac{r_{n+1}}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako smo već istakli, za $n \in \mathbb{N}$ je $S = S_n + r_{n+1} = S_{n+1} + r_{n+2}$, pa je i $r_{n+1} - r_{n+2} = S_{n+1} - S_n = a_{n+1}$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} d_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} &= \frac{r_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{r_{n+2}}{a_{n+1}} \\ =& \frac{r_{n+1}}{a_{n+1}} - \frac{r_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{r_{n+1} - r_{n+2}}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_{n+1}} = 1 = K, \end{aligned}$$

što znači da željena implikacija tvrdnje 1. Teorema 10.3 vrijedi.

Pretpostavimo sada da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokažimo da postoji pozitivan niz $\{d_n\}$, takav da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergentan, i da u konačnici vrijedi

$$d_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} \leq 0.$$

Kao i do sada, neka $\{S_n\}$ označava niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je divergentan, pa po Zadatku 9.1.10, divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{S_n}{a_n}}$.

Ovo nas navodi na pomisao da definišemo niz $\{d_n\}$ sa $d_n = \frac{S_n}{a_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pa, neka je niz $\{d_n\}$ definisan na opisani način.

Kako smo već istakli, sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{d_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\frac{S_n}{a_n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ divergira.

Osim toga, za $n \in \mathbb{N}$ je

$$d_n \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} = \frac{S_n}{a_n} \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}} - \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} =$$

$$\frac{S_n}{a_{n+1}} - \frac{S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{S_n - S_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{-a_{n+1}}{a_{n+1}} = -1 < 0.$$

Tako, željena implikacija tvrdnje 2. Teorema 10.3 takođe vrijedi.
Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 10.1.3** Neka je $a > 0$ i $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$, gdje je $A_n = \frac{a_1}{a_2+a} \cdot \frac{a_2}{a_3+a} \cdot ... \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+a}$, $n \in \mathbb{N}$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ je pozitivan red.
Posmatrajmo niz $\{d_n\}$, gdje je $d_n = a_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$.
Za $n \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned}
& d_n \cdot \frac{A_n}{A_{n+1}} - d_{n+1} \\
=& a_{n+1} \cdot \frac{\frac{a_1}{a_2+a} \cdot \frac{a_2}{a_3+a} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+a}}{\frac{a_1}{a_2+a} \cdot \frac{a_2}{a_3+a} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{a_{n+1}+a} \cdot \frac{a_{n+1}}{a_{n+2}+a}} - a_{n+2} \\
=& a_{n+1} \cdot \frac{a_{n+2}+a}{a_{n+1}} - a_{n+2} = a_{n+2} + a - a_{n+2} = a > 0.
\end{aligned}$$

Ovo po Kumerovom kriteriju, tj. Teoremu 10.1, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ konvergira.
Dokaz je završen. ■

# 11 Kriteriji Rabea, Bertrana i Gausa

Izvedimo prvo kriterij Rabea.

Kriterij je dobio naziv po švicarskom matematičaru i fizičaru Rabeu[37].

Ekvivalentan kriterij je otkrio mađarski matematičar Bolyai[38].

**Teorem 11.1 (Rabeov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red.*

1. *Ako je u konačnici*[39]

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\geq r$$

*ili ekvivalentno*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)\geq r,$$

[37] **Joseph Ludwig Raabe**, 1801-1859. god. n.e., švicarski matematičar. Veliki dio života proveo je podučavajući na Institutu u Cirihu. Budući da su mu roditelji bili siromašni, Rabe je bio prisiljen da zarađuje za život od rane mladosti dajući privatne časove. Studij matematike je završio 1820. godine u Beču. U jesen 1831. godine se preselio u Cirih, gdje je postao profesor matematike 1833. godine. Najpoznatiji je po kriteriju za ispitivanje konvergencije (divergencije) pozitivnih redova. Riječ je o kriteriju koji po njemu nosi ime, tj. Rabeovom kriteriju. Poznat je i po integralu logaritma gama funkcije, tj. Rabeovom integralu

$$\int\limits_a^{a+1}\log\Gamma\left(t\right)dt=\frac{1}{2}\log 2\pi+a\log a-a,$$

gdje je $a\geq 0$.

[38] **Farkas Bolyai**, 1775-1856. god. n.e., mađarski matematičar, u Njemačkoj poznat i pod imenom Wolfgang Bolyai. Poznat je uglavnom po svom radu iz oblasti geometrije, nad kojom je i proveo glavni dio svog profesionalnog životnog vijeka. Njegov glavni rad "Tentamen juventutem studiosam in elementa matheseos purae, elementaris ac sublimioris, methodo intuitiva, evidentiaque huic propria, introducendi", tj. "Pokušaj upoznavanja mladih studenata sa čistom, elementarnom i višom matematikom intuitivnom metodom i dokazima primjerenim tome" je bio pokušaj rigoroznog i sistematskog zasnivanja geometrije, aritmetike, algebre i analize. Njegovo razmatranje konvergencije beskonačnih redova uključuje otkriće kriterija ekvivalentnog kriteriju Rabea. Kriterij su otkrili neovisno jedan od drugog, i to otprilike u isto vrijeme. Među ostalim značajnim idejama njegovog rada su: opšta definicija funkcije, i definicija jednakosti dviju figura u ravni ako se obje figure mogu podijeliti na konačan jednak broj po parovima kongruentnih dijelova.

[39] Vidjeti Napomenu 1.2.

*gdje je $r > 1$ neka konstanta, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.*

2. *Ako je u konačnici*

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \leq 1$$

*ili ekvivalentno*

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1,$$

*onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.*

**Dokaz:** Posmatrajmo niz pozitivnih brojeva $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$, gdje je $d_n = n-1$. Na ovaj niz možemo primijeniti tvrdnju 1. Kumerovog kriterija (Teorem 10.1).

Osim toga, po [DzG2, str. 5-6],

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n-1} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$$

je divergentan harmonijski red, pa možemo primijeniti i tvrdnju 2. pomenutog Kumerovog kriterija.

Tako, ako je u konačnici

$$(n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot n \geq K,$$

tj.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq K + 1 = r_1,$$

gdje je $K > 0$ ($r_1 > 1$) neka konstanta, onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Ako je u konačnici

$$(n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot n \leq 0,$$

tj.

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\leq 1,$$

onda red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

Kao što smo Rabeov kriterij, tj. Teorem 11.1 izveli iz Kumerovog kriterija, tj. Teorema 10.1, tako ćemo i sljedeći teorem, tj. slabiju varijantu Rabeovog kriterija izvesti iz slabije varijante Kumerovog kriterija, tj. Teorema 10.2.

**Teorem 11.2 (Rabeov kriterij)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red. Pretpostavimo da postoji limes*[40]

$$r=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

*ili ekvivalentno limes*

$$r=\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right).$$

*Ako je $r>1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. Ako je $r<1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.*

**Dokaz:** Posmatrajmo niz pozitivnih brojeva $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$, gdje je $d_n=n-1$.
Po [DzG2, str. 5-6], red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{n-1}=\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{d_n}$$

je divergentan harmonijski red.

[40]Pretpostavljamo da navedeni limes postoji, tj. da je navedeni limes konačan ili beskonačan.

Tako, za niz $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$ i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ vrijede sve tvrdnje Kumerovog kriterija, tj. Teorema 10.2.

Po pretpostavci postoji limes

$$r = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right).$$

Neka je $r > 1$.

Pretpostavimo prvo da je $r = +\infty$.

Dakle, $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to +\infty$ kad $n \to +\infty$.

Ovo znači da i $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 \to +\infty$ kad $n \to +\infty$. tj. da je

$$\begin{aligned}
+\infty &= \lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

odnosno da postoji

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, i da je $K = +\infty > 0$.

Po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $1 < r < +\infty$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je

$$\begin{aligned}
0 < & r - 1 = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

pri čemu je posljednji limes konačan.

Slijedi, ponovo postoji

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, i vrijedi $K = r - 1 > 0$.

Tako, po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Neka je sada $r < 1$.

Pretpostavimo da je $r = -\infty$.

Imamo, $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \to -\infty$ kad $n \to +\infty$, pa i $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 \to -\infty$ kad $n \to +\infty$.

Drugim riječima,

$$\begin{aligned}
-\infty &= \lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ovo znači da postoji

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, i da je $K = -\infty < 0$.

Tako, po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Konačno, neka je $-\infty < r < 1$.

Po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 2.2, vrijedi

$$\begin{aligned}
0 > r - 1 &= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = \lim_{n\to+\infty}\left((n-1) - \frac{a_{n+1}}{a_n}\cdot n\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n}d_{n+1}\right),
\end{aligned}$$

pri čemu je posljednji limes konačan.

Dakle, postoji

$$K = \lim_{n\to+\infty} \left( d_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} d_{n+1} \right)$$

u Teoremu 10.2, i vrijedi $K = r - 1 < 0$.

Ovo po Teoremu 10.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Dokaz je završen. ■

U napomeni datoj nakon Teorema 10.3 smo istakli da slučaj $K = 0$ u Kumerovom kriteriju (Teorem 10.2), ne daje odgovor na pitanje da li posmatrani red konvergira ili ne. Isto tako i sada, slučaj $r = 1$ u Rabeovom kriteriju (Teorem 11.2), ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Konačno, izvedimo i ojačanu varijantu Rabeovog kriterija.

**Teorem 11.3 (Ojačani Rabeov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Definišimo*[41] $r_1$ *i* $r_2$ *sa*

$$r_1 = \liminf_{n\to+\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$
$$r_2 = \limsup_{n\to+\infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

*ili sa*

$$r_1 = \liminf_{n\to+\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$
$$r_2 = \limsup_{n\to+\infty} n \left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

*Ako je* $r_1 > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $r_2 < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

[41] Vidjeti notu Teorema 6.4.

**Dokaz:** Neka je $r_1 > 1$.
Uzmimo proizvoljno $r$ takvo da je $r_1 > r > 1$ pa ga fiksirajmo.
Pošto je

$$r_1 = \liminf_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

to iz $r_1 > r$ i Zadatka 24 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > r$.

Ovo znači da je u konačnici $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) > r$, gdje je $r > 1$, pa je po Teoremu 11.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Neka je sada $r_2 < 1$.
Pošto je

$$r_2 = \limsup_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right),$$

to iz $r_2 < 1$ i Zadatka 23 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$.

Tako, u konačnici je $n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1$, pa je po Teoremu 11.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 11.4** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}$ divergira.

**Dokaz:** Stavimo,

$$a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}.$$

Iz oblika $a_n$ je jasno da nije teško tražiti količnike $\frac{a_{n+1}}{a_n}$.

Prirodno je onda da pokušamo primijeniti kriterij količnika u formi Teorema 5.2. Imamo,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)\cdot(2n+1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)\cdot(2n+2)}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}} = \frac{2n+1}{2n+2}.$$

Limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ postoji, i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{2n+2} = 1,$$

pa po 3. Teorema 5.2 znamo da kriterij količnika (u posmatranoj formi) ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Primijenit ćemo sada Rabeov kriterij u formi Teorema 11.2. Vrijedi,

$$\begin{aligned} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= n\left(1-\frac{2n+1}{2n+2}\right) \\ =&n\cdot\frac{2n+2-2n-1}{2n+2} = \frac{n}{2n+2}. \end{aligned}$$

Limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ postoji, i vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+2} = \frac{1}{2} < 1,$$

pa po Rabeovom kriteriju (Teorem 11.2), dati red divergira. ■

**Primjer 11.5** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{1}{n+1}$ konvergira.

**Dokaz:** Stavimo,

$$a_n = \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)} \cdot \frac{1}{n+1}.$$

Rezonujemo kao u prethodnom primjeru.
Prvo, pokušamo primijeniti kriterij količnika. Imamo,

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} =& \frac{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)\cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)\cdot (2n+2)} \cdot \frac{1}{n+2}}{\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{n+1}} \\
=& \frac{(2n+1)\,(n+1)}{(2n+2)\,(n+2)} = \frac{2n^2+2n+n+1}{2n^2+4n+2n+4} \\
=& \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+6n+4}.
\end{aligned}
$$

Limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ postoji, i vrijedi

$$
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+3n+1}{2n^2+6n+4} = 1,
$$

pa po 3. Teorema 5.2 znamo da kriterij količnika ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Drugo, primijenimo Rabeov kriterij. Sada je,

$$
\begin{aligned}
n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) &= n\left(1-\frac{2n^2+3n+1}{2n^2+6n+4}\right) \\
=& n\cdot \frac{2n^2+6n+4-2n^2-3n-1}{2n^2+6n+4} = \frac{3n^2+3n}{2n^2+6n+4}.
\end{aligned}
$$

Limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ postoji, i vrijedi

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{3n^2+3n}{2n^2+6n+4} = \frac{3}{2} > 1,
$$

pa po Rabeovom kriteriju (Teorem 11.2), dati red konvergira. ■

Izvedimo sada kriterij Bertrana[42].

**Teorem 11.6 (Bertranov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red.*

1. *Ako je u konačnici*[43]

$$\ln n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right) \geq b$$

*ili ekvivalentno*

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \geq b,$$

*gdje je* $b > 1$ *neka konstanta, onda red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira.*

2. *Ako je u konačnici*

$$\ln n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right) \leq 1$$

*ili ekvivalentno*

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1,$$

*onda red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

**Dokaz:** Neka je zadovoljena pretpostavka tvrdnje 1.
Postoji dakle $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

[42] **Joseph Louis François Bertrand**, 1822-1900. god. n.e., francuski matematičar. Bavio se teorijom brojeva, diferencijalnom geometrijom, teorijom vjerovatnoće i termodinamikom. Pretpostavio je 1845. godine, da postoji bar jedan prost broj između $n$ i $2n-2$ za svako $n > 3$. Čebišev je dokazao ovu konjekturu, sada poznatu kao Bertranov postulat, 1850. godine. Bertran je poznat po paradoksu iz oblasti teorije vjerovatnoće, te još jednom paradoksu iz oblasti teorije igara, koji po njemu nose ime (Bertranovi paradoksi). Bio je prvi koji je 1849. godine definisao realne brojeve upotrebom Dedekindovih presjeka.

[43] Vidjeti Napomenu 1.2.

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\geq b.$$

Za $n\geq N$, možemo pisati

$$n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-n\ln n-\ln n\geq b,$$

tj.

$$n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln n\geq b,$$

odnosno

$$\begin{aligned}&n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)\\ \geq&b-(n+1)\ln(n+1)+(n+1)\ln n\\ =&b-(n+1)\ln\frac{n+1}{n}=b-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Po Zadatku 6 u [DzG1, str. 70], za $n\in\mathbb{N}$, vrijede nejednakosti

$$\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n},$$

pa je za $n\in\mathbb{N}$

$$1<(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{n+1}{n}.$$

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n}=1$, sendvič teorema [DzG1, str. 31, Teo. 3.1 $(b)$], slijedi da je i

$$\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Pošto je $b > 1$, to možemo pisati $b = 1 + 2K$ za neko $K > 0$, pa je po $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19],

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty}\left(b-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ =&\lim_{n\to+\infty}\left(1+2K-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)\\ =&1+2K-1=2K>K.\end{aligned}$$

Odavde i iz $(a)$ Teorema 3.1 u [DzG1, str. 31], imamo da postoji $N_1 \in \mathbb{N}$, $N_1 \geq N$ (možemo smatrati da je $N_1 \geq N$, jer ako to inicijalno nije, onda ga možemo povećati, tj. odabrati tako da bude $N_1 \geq N$), takav da za sve $n \geq N_1$, vrijedi

$$b-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)>K.$$

Dakle, za $n \geq N_1$ je

$$n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\ln(n+1)>K,$$

tj.

$$d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}>K,$$

gdje je $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$ niz pozitivnih brojeva dat sa $d_n = n\ln n$, $n \geq 2$.

Tako, za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i niz $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$ je u konačnici

$$d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}>K,$$

pa je po 1. Kumerovog kriterija (Teorem 10.1), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Neka je sada zadovoljena pretpostavka tvrdnje 2.

Postoji dakle $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) \leq 1.$$

Odavde, kao i u prethodnom slučaju, dobijamo da za $n \geq N$, vrijedi

$$\begin{aligned} & n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1) \\ \leq & 1 - (n+1) \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right). \end{aligned}$$

Kako smo već vidjeli, vrijedi $\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ za sve $n \in \mathbb{N}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$, tj. $-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < -1$, odnosno $1-(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1-1 = 0$.

Zaključujemo, za $n \geq N$ je

$$n \ln n \frac{a_n}{a_{n+1}} - (n+1) \ln (n+1) < 0,$$

tj.

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} < 0,$$

gdje je, kao i u 1., $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$ niz pozitivnih brojeva $d_n = n \ln n$, $n \geq 2$.

Po Primjeru 4.16, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergira.

Tako, za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i niz $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$ je u konačnici

$$d_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - d_{n+1} < 0,$$

pri čemu red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$ divergira, pa je po 2. Kumerovog kriterija (Teorem 10.1), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz je zaveršen. ■

Slabija varijanta Bertranovog kriterija ima očekivano sljedeći oblik.

**Teorem 11.7 (Bertranov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Pretpostavimo da postoji limes*[44]

$$b = \lim_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right)$$

*ili ekvivalentno limes*

$$b = \lim_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right).$$

*Ako je* $b > 1$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan. Ako je* $b < 1$*, onda je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergentan.*

**Dokaz:** Posmatrajmo niz pozitivnih brojeva $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$, gdje je $d_n = n \ln n$.
Po Primjeru 4.16, red

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{d_n}$$

divergira.

Tako, za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i niz $\{d_n\}_{n=2}^{+\infty}$, vrijede sve tvrdnje Kumerovog kriterija, tj. Teorema 10.2.

Po pretpostavci postoji limes

$$b = \lim_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right).$$

Neka je $b > 1$.

Pretpostavimo prvo da je $b = +\infty$. Dakle,

[44] Pretpostavljamo da navedeni limes postoji, tj. da je navedeni limes konačan ili beskonačan.

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)\to+\infty$$

kad $n\to+\infty$.

U dokazu Teorema 11.6 smo vidjeli da

$$(n+1)\ln\frac{n+1}{n}=(n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\to 1$$

kad $n\to+\infty$. Slijedi,

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-(n+1)\ln\frac{n+1}{n}\to+\infty$$

kad $n\to+\infty$, tj.

$$\begin{aligned}+\infty=\lim_{n\to+\infty}&\left(n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-n\ln n-\ln n\right.\\&\left.-(n+1)\ln(n+1)+n\ln n+\ln n\right)\\=\lim_{n\to+\infty}&\left(n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\,ln\,(n+1)\right)\\=\lim_{n\to+\infty}&\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Ovo znači da postoji

$$K=\lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, i da je $K=+\infty>0$.

Po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $1<b<+\infty$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je

$$\begin{aligned}
0 <& b-1 = \lim_{n\to+\infty} \ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right) - \lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\frac{n+1}{n} \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-(n+1)\ln\frac{n+1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\,ln\,(n+1)\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Pošto je posljednji limes konačan (jednak $b-1$), to ponovo postoji

$$K = \lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, i vrijedi $K = b-1 > 0$.

Tako, po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Neka je sada $b < 1$.

Pretpostavimo da je $b = -\infty$.

Imamo,

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right) \to -\infty$$

kad $n \to +\infty$, pa i

$$\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-(n+1)\ln\frac{n+1}{n} \to -\infty$$

kad $n \to +\infty$, tj.

$$-\infty = \lim_{n\to+\infty}\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-(n+1)\ln\frac{n+1}{n}\right) =$$

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\,ln\,(n+1)\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ovo znači da postoji

$$K=\lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, pri čemu red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{d_n}$ divergira, i da je $K=-\infty<0$.

Tako, po Teoremu 10.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ divergira.

Konačno, neka je $-\infty<b<1$.

Po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 2.2, vrijedi

$$\begin{aligned}
0>&b-1\\
&=\lim_{n\to+\infty}\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-\lim_{n\to+\infty}(n+1)\ln\frac{n+1}{n}\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(\ln n\left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)-1\right)-(n+1)\ln\frac{n+1}{n}\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(n\ln n\frac{a_n}{a_{n+1}}-(n+1)\,ln\,(n+1)\right)\\
&=\lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

Posljednji limes je konačan (jednak $b-1$), pa postoji

$$K=\lim_{n\to+\infty}\left(d_n\frac{a_n}{a_{n+1}}-d_{n+1}\right)$$

u Teoremu 10.2, pri čemu red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1}{d_n}$ divergira, i gdje je $K=b-1<0$.

Ovo po Teoremu 10.2 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ divergira. ■

Napomenimo još jednom da slučaj $K = 0$ u Kumerovom kriteriju (Teorem 10.2), slučaj $r = 1$ u Rabeovom kriteriju (Teorem 11.2), i slučaj $b = 1$ u Bertranovom kriteriju (Teorem 11.7), ne daju odgovor na pitanje da li posmatrani red konvergira ili ne.

Izvedimo i ojačanu verziju Bertranovog kriterija.

**Teorem 11.8 (Ojačani Bertranov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Definišimo*[45] $b_1$ *i* $b_2$ *sa*

$$b_1 = \liminf_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right),$$
$$b_2 = \limsup_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( 1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} \right) - 1 \right),$$

*ili sa*

$$b_1 = \liminf_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right),$$
$$b_2 = \limsup_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right).$$

*Ako je* $b_1 > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $b_2 < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

**Dokaz:** Neka je $b_1 > 1$.
Uzmimo proizvoljno $b$ takvo da je $b_1 > b > 1$ pa ga fiksirajmo.
Pošto je

$$b_1 = \liminf_{n\to+\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right),$$

to iz $b_1 > b$ i Zadatka 24 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) > b.$$

[45] Vidjeti notu Teorema 6.4.

Ovo znači da je u konačnici

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) > b,$$

gdje je $b > 1$, pa je po Teoremu 11.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan.

Neka je sada $b_2 < 1$.

Pošto je

$$b_2 = \limsup_{n \to +\infty} \ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right),$$

to iz $b_2 < 1$ i Zadatka 23 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) < 1.$$

Tako, u konačnici je

$$\ln n \left( n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) - 1 \right) < 1,$$

pa je po Teoremu 11.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz je završen. ■

Konačno, izvedimo i kriterij Gausa[46].

Kako ćemo vidjeti u nastavku, Gausov kriterij će biti u stanju da se suoči sa neodređenim slučajem $r = 1$ Rabeovog kriterija (Teorem 11.2).

[46]**Johann Carl Friedrich Gauss**, 1777-1855. god. n.e., njemački matematičar i fizičar. Dao je doprinos mnogim oblastima matematike i nauke. Poznat pod nazivom "Princeps mathematicorum" ili "Najveći matematičar", te pod nazivom "Najveći matematičar od doba antike", Gaus je dao ogroman doprinos mnogim oblastima matematike i nauke, te je svrstan među nauticajnije matematičare uopšte. Gaus je bio čudo od djeteta. Sa jedva tri godine ispravio je matematičku grešku koju je načinio njegov otac. Sa sedam godina riješio je problem iz teorije aritmetičkih nizova, i to brže od svih ostalih učenika (u razredu od 100 učenika). Postoji više verzija ove priče, sa različitim detaljima vezano za prirodu posmatranog niza. Najčešća je ona koja govori o tome da se tražilo sabiranje brojeva od 1 do 100. Svoje životno djelo "Disquisitiones Arithmeticae" je kompletirao 1798. godine, kada je imao 21 godinu, a objavljeno je 1801. Djelo je bilo od fundamentalnog značaja za utemeljenje teorije brojeva kao discipline, i oblikovalo ju je u formu u kakvoj je danas poznajemo. Veliko otkriće je napravio 1796. godine, kada

**Teorem 11.9 (Gausov kriterij)** *Neka je* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Pretpostavimo da možemo pisati*

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},$$

*gdje je* $\{\theta_n\}$ *ograničen niz,* $\alpha$, $\beta$, $\gamma \in \mathbb{R}$ *konstante, i* $\gamma > 0$.

*Tada, ako je* $\alpha < 1$, *red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $\alpha > 1$, *red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira. Ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta > 1$, *red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta \leq 1$, *red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

**Dokaz:** Neka je $\alpha \neq 1$.

Pošto je $\beta \in \mathbb{R}$ konstanta i $\{\theta_n\}$ ograničen niz, to vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\beta}{n} = 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}} = 0$.

Odavde i iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \left( \alpha - \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}} \right) = \alpha.$$

Posljednji limes dakle postoji, pa je po kriteriju količnika, tj. Teoremu 5.2, red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan za $\alpha < 1$, a divergentan za $\alpha > 1$.

Neka je sada $\alpha = 1$. Imamo,

$$1 - \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\beta}{n} - \frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},$$

tj.

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \beta - \frac{\theta_n}{n^{\gamma}}.$$

---

je dokazao da se pravilni mnogougao može konstruisati pomoću linijara i šestara ako je broj njegovih strana jednak proizvodu različitih Fermaovih prostih brojeva i stepena broja 2. Iste godine je konstruisao i pravilni sedamnaestougao. U svom doktoratu 1799. godine, dokazao je osnovni teorem algebre, tj. da svaki pravi polinom jedne promjenjive sa kompleksnim koeficijentima ima bar jedan kompleksan korijen. Između ostalog, uveo je pojam kongruencije, te dokazao Fermaov Posljednji Teorem za vrijednost $n = 5$.

Ponovo, $\{\theta_n\}$ je ograničen niz, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta_n}{n^\gamma} = 0$.

Po pomenutim tvrdnjama Teorema 2.2 je onda

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty}\left(\beta - \frac{\theta_n}{n^\gamma}\right) = \beta.$$

Postoji tako posljednji limes, pa je po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan za $\beta > 1$, a divergentan za $\beta < 1$.

Konačno, neka je $\alpha = 1$ i $\beta = 1$. Vrijedi,

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = 1 - \frac{\theta_n}{n^\gamma},$$

tj.

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1 = -\frac{\theta_n}{n^\gamma},$$

odnosno

$$\ln n\left(n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right) = -\frac{\theta_n \ln n}{n^\gamma}.$$

Znamo da pozitivan stepen $n^\gamma$ brže teži ka $+\infty$ u odnosu na $\ln n$ kad $n \to +\infty$. Odavde i iz ograničenosti niza $\{\theta_n\}$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\theta_n \ln n}{n^\gamma} = 0$.

Iz tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 2.2 imamo da je

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} \ln n\left(n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) - 1\right)\\ &= \lim_{n\to+\infty} -\frac{\theta_n \ln n}{n^\gamma} = 0.\end{aligned}$$

Posljednji limes postoji. Pošto mu je vrijednost jednaka $0$ $(< 1)$, to je po Bertranovom kriteriju, tj. Teoremu 11.7, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Dokaz je završen. ■

Gausov kriterij se pojavljuje i u sljedećem ekvivalentnom obliku.

**Teorem 11.10 (Gausov kriterij)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Pretpostavimo da možemo pisati*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \alpha + \frac{\beta}{n} + \frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},$$

*gdje je* $\{\theta_n\}$ *ograničen niz,* $\alpha$*,* $\beta$*,* $\gamma \in \mathbb{R}$ *konstante, i* $\gamma > 0$*.*

*Tada, ako je* $\alpha > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $\alpha < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira. Ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $\alpha = 1$ *i* $\beta \leq 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

**Primjer 11.11** Neka je $p > 0$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}{n!}$ divergira.

**Dokaz:** Poučeni Primjerima 11.4 i 11.5, odmah ćemo primijeniti Rabeov kriterij, tj. Teorem 11.2.

Stavimo,

$$a_n = \frac{p\,(p+1)\,(p+2)\,...\,(p+n-1)}{n!}.$$

Sada je,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)(p+n)}{(n+1)!}}{\frac{p(p+1)(p+2)...(p+n-1)}{n!}} = \frac{p+n}{n+1}.$$

Primijetimo da je odavde $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$, pa kao što smo i očekivali, kriterij količnika, tj. Teorem 5.2 ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Imamo,

$$\begin{aligned} &n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\\ =&n\left(1-\frac{p+n}{n+1}\right)=n\left(\frac{n+1-p-n}{n+1}\right)=\frac{n\,(1-p)}{n+1}. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,(1-p)}{n+1}=1-p<1.$$

Ovo po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2 znači da posmatrani red divergira. ■

Dok je za ispitivanje konvergencije prethodnog reda bilo dovoljno upotrijebiti Rabeov kriterij, to će za ispitivanje konvergencije njegove generalizacije biti potreban "oštriji" Gausov kriterij.

**Primjer 11.12** Neka je $a>0$ i $b>0$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}$ konvergira za $b-a>1$ i divergira za $b-a\le 1$.

**Dokaz:** Stavimo,

$$a_n=\frac{a\,(a+1)\,(a+2)\dots(a+n-1)}{b\,(b+1)\,(b+2)\dots(b+n-1)}.$$

Sada je,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)(a+n)}{b(b+1)(b+2)...(b+n-1)(b+n)}}{\frac{a(a+1)(a+2)...(a+n-1)}{b(b+1)(b+2)...(b+n-1)}}=\frac{a+n}{b+n}.$$

Odavde je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, pa kriterij količnika, tj. Teorem 5.2 ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Osim toga je,

$$
\begin{aligned}
&n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\\
=&n\left(1-\frac{a+n}{b+n}\right)=n\left(\frac{b+n-a-n}{b+n}\right)=\frac{n\,(b-a)}{b+n}.
\end{aligned}
$$

Dakle,

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{n\,(b-a)}{b+n}=b-a.
$$

Ovo po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, znači da dati red konvergira za $b-a$ $>1$, i divergira za $b-a<1$.

Ipak, Rabeov kriterij nam nije dovoljan za ispitivanje konvergencije datog reda u rubnom slučaju $b-a=1$.

Kako smo već napomenuli, u ovakvoj situaciji primijenit ćemo Gausov kriterij.

Možemo pisati,

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a+n}{b+n}=1+\frac{a+n}{b+n}-1\\
=&1+\frac{a+n-b-n}{b+n}=1+\frac{a-b}{b+n}=1-\frac{b-a}{n+b}\\
=&1-\frac{\frac{b-a}{n+b}\cdot n}{n}=1-\frac{\frac{(b-a)(n+b-b)}{n+b}}{n}\\
=&1-\frac{b-a}{n}+\frac{\frac{b(b-a)n}{n+b}}{n^2}=\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},
\end{aligned}
$$

gdje je $\alpha=1$, $\beta=b-a$, $\gamma=1>0$, i $\theta_n=\frac{b(b-a)n}{n+b}$, $n\in\mathbb{N}$.

Pošto je

$$
\begin{aligned}
|\theta_n|=&\left|\frac{b\,(b-a)\,n}{n+b}\right|=b\,|b-a|\,\frac{n}{n+b}\\
<&b\,|b-a|\,\frac{n}{n}=b\,|b-a|\,,
\end{aligned}
$$

to je niz $\{\theta_n\}$ ograničen.

Dakle, zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.9, pa je po njemu dati red konvergentan za $b-a>1$ i divergentan za $b-a \leq 1$.

Dokaz je završen. ■

**Napomena 11.13** Primijetimo da smo se sa redom iz Primjera 11.12 već susreli u Zadatku 13 u [DzG2, str. 50].

Tako smo dokazali da je

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\,(a+1)\,(a+2)\ldots(a+n-1)}{b\,(b+1)\,(b+2)\ldots(b+n-1)} = \frac{a}{b-a-1}$$

za $a>0$ i $b>a+1$ $(b-a>1)$.

Ovo je u skladu sa zaključkom Primjera 11.12 da navedeni red konvergira za $b-a>1$.

## 11.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 11.1.1** Upotrebom Rabeovog kriterija, tj. Teorema 11.2, ispitati konvergenciju redova:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} \qquad (e)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2} \qquad (f)\ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$$

$$(g)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n} \qquad (h)\ \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$$

**Rješenje:** $(a)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{n+1-n}{n+1}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1=r.$$

Pošto je $r=1$, to Rabeov kriterij (u formi Teorema 11.2), ne daje odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ konvergira ili ne (vidjeti napomenu datu nakon dokaza Teorema 11.2)

Primijetimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1}=1$, pa kao što je za očekivati (Napomena 5.5), kriterij količnika (u formi Teorema 5.2), ne daje odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ konvergira ili ne.

Inače, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

$(b)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{n^2}{(n+1)^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{(n+1)^2-n^2}{(n+1)^2}=\lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{n^2+2n+1-n^2}{n^2+2n+1}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{2n^2+n}{n^2+2n+1}=2=r.$$

Pošto je $r=2>1$, to po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira.

Primijetimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{(n+1)^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^2}{n^2+2n+1}=1$, pa kriterij količnika (u formi Teorema 5.2), ne daje odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$ konvergira ili ne.

$(c)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

U $(e)$ Zadatka 5.1.1 smo upotrebom kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergira, gdje smo vidjeli da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{n+1}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{2n-n-1}{2n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{2} = +\infty = r.$$

Kako je $r = +\infty > 1$, to po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$ konvergira.

$(d)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$.
Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{n!\,(n+1)^{n+1}}{(n+1)!n^n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\frac{1}{n}}.$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = -\infty$ $= r$, pa iz $r < 1$, i kriterija Rabea, tj. Teorema 11.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$.

$(e)$ Označimo dati red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$ sa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

U $(b)$ Zadatka 5.1.1 smo vidjeli da kriterij količnika (u formi Teorema 5.2), ne daje odgovor na pitanje da li ovaj red konvergira ili ne, te da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n^3-n^2-n+1}{n^3}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{n^3-n^2-n+1}{n^3}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \cdot \frac{n^3-n^3+n^2+n-1}{n^3} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3+n^2-n}{n^3} = 1 = r.$$

Pošto je $r = 1$, to Rabeov kriterij (u formi Teorema 11.2), ne daje odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$ konvergira ili ne (vidjeti napomenu datu nakon dokaza Teorema 11.2).

Inače, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$ je divergentan red (vidjeti $(f)$ Zadatka 2.1.1).

$(f)$ Stavimo $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n$.

U $(f)$ Zadatka 5.1.1 smo upotrebom kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, dokazali da posmatrani red divergira, i da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{9}{8}$ za sve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1 - \frac{9}{8}\right) = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{8} = -\infty = r.$$

Kako je $r = -\infty < 1$, to po kriteriju Rabea, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$ divergira.

$(g)$ Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

U $(g)$ Zadatka 5.1.1 smo upotrebom kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$ divergira.

Pri tome, dokazali smo da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{5}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{n+1}{5}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{5-n-1}{5}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{-n^2+4n}{5} = -\infty = r.$$

Pošto je $r=-\infty<1$, to po kriteriju Rabea, tj. po Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{5^n}$ divergira.

$(h)$ Možemo pisati, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$.

U $(h)$ Zadatka 5.1.1 smo upotrebom kriterija količnika, tj. Teorema 5.2, dokazali da dati red konvergira.

Dobili smo da je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)}$ za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 3$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{7^3}{(2n-3)(2n-4)}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{(2n-3)(2n-4)-7^3}{(2n-3)(2n-4)} = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{4n^2-8n-6n+12-7^3}{4n^2-8n-6n+12}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{4n^3-14n^2+\left(12-7^3\right)n}{4n^2-14n+12} = +\infty = r.$$

Pošto je $r=+\infty>1$, to po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty}\frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$ konvergira. ■

◇ **Zadatak 11.1.2** Neka je $\{a_n\}$ niz definisan rekurzivno sa $a_1=a_2=1$, i $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{n^2}\cdot a_{n-1}$ za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$. Upotrebom Rabeovog kriterija, tj. Teorema 11.1, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{a_n}$.

**Rješenje:** Imamo, $a_1 = a_2 = 1 > 0$.
Slijedi, $a_3 = a_2 + \frac{1}{2^2} \cdot a_1 > a_2 > 0$, pa $a_4 = a_3 + \frac{1}{3^2} \cdot a_2 > a_3 > 0$, itd.
Općenito je onda $a_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, te $a_2 < a_3 < ...$ .
Tako, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je pozitivan red.
Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $a_n < a_{n+1}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $a_{n-1} < a_n$, tj. $\frac{a_{n-1}}{a_n} < 1$.
Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, vrijedi

$$\begin{aligned} n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) &= n\left(\frac{\frac{1}{a_n}}{\frac{1}{a_{n+1}}} - 1\right) = n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n} - 1\right) \\ &= n\left(\frac{a_n + \frac{1}{n^2} \cdot a_{n-1}}{a_n} - 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} - 1\right) \\ &= n \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_n} < \frac{1}{n} \cdot 1 < 1. \end{aligned}$$

Ovo znači da je u konačnici $n\left(\frac{b_n}{b_{n+1}} - 1\right) < 1$, pa po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.1, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$ divergira. ■

♢ **Zadatak 11.1.3** Neka je $a > 0$. Koristeći Rabeov kriterij, tj. Teorem 11.2, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n \to +\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Imamo,

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{\frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}}{\frac{(n+1)!}{(a+1)(a+2)...(a+n)(a+n+1)}} - 1\right) \\ = \lim_{n \to +\infty} n\left(\frac{a+n+1}{n+1} - 1\right) &= \lim_{n \to +\infty} n \cdot \frac{a+n+1-n-1}{n+1} = \lim_{n \to +\infty} \frac{an}{n+1} = a. \end{aligned}$$

Ako je $a > 1$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ konvergira.

S druge strane, za $0 < a < 1$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Ako je $a = 1$, onda je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)...(a+n)}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].

Zaključujemo, dati red konvergira za $a > 1$ i divergira za $0 < a \leq 1$. ■

◇ **Zadatak 11.1.4** Neka su $a$, $b$ i $c$ pozitivne konstante. Upotrebom Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.9, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{b(b+1)...(b+n-1)}{c(c+1)...(c+n-1)}$.

**Rješenje:** Rezonujemo kao u Primjeru 11.12.
Stavimo,

$$a_n = \frac{a\,(a+1)\,...\,(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{b\,(b+1)\,...\,(b+n-1)}{c\,(c+1)\,...\,(c+n-1)}.$$

Sada je,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{a(a+1)...(a+n)}{(n+1)!} \cdot \frac{b(b+1)...(b+n)}{c(c+1)...(c+n)}}{\frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{b(b+1)...(b+n-1)}{c(c+1)...(c+n-1)}}$$
$$= \frac{a+n}{n+1} \cdot \frac{b+n}{c+n} = \frac{ab+(a+b)\,n+n^2}{c+(c+1)\,n+n^2}.$$

Možemo pisati,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \frac{ab+(a+b)\,n+n^2}{c+(c+1)\,n+n^2} - 1$$
$$= 1 + \frac{n^2+(a+b)\,n+ab-n^2-(c+1)\,n-c}{n^2+(c+1)\,n+c} = 1 + \frac{(a+b-c-1)\,n+ab-c}{n^2+(c+1)\,n+c}$$

$$
\begin{aligned}
&=1-\frac{(c+1-a-b)\,n+c-ab}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
&=1-\frac{c+1-a-b}{n}+\frac{c+1-a-b}{n}-\frac{(c+1-a-b)\,n+c-ab}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
&=1-\frac{c+1-a-b}{n}\\
&\quad+\frac{1}{n^2}\left[(c+1-a-b)\,n-\frac{(c+1-a-b)\,n^3+(c-ab)\,n^2}{n^2+(c+1)\,n+c}\right]\\
&=1-\frac{c+1-a-b}{n}\\
&\quad+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)\,n^2+c\,(c+1-a-b)\,n}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
&=\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},
\end{aligned}
$$

gdje je $\alpha=1$, $\beta=c+1-a-b$, $\gamma=1>0$, i

$$
\theta_n=\frac{((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)\,n^2+c\,(c+1-a-b)\,n}{n^2+(c+1)\,n+c},
$$

$n\in\mathbb{N}$.

Pošto je

$$
\begin{aligned}
|\theta_n|=&\frac{\left|((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)\,n^2+c\,(c+1-a-b)\,n\right|}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
\leq&\frac{|((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)|\,n^2+|c\,(c+1-a-b)|\,n}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
\leq&\frac{|((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)|\,n^2+|c\,(c+1-a-b)|\,n^2}{n^2+(c+1)\,n+c}\\
<&\frac{|((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)|\,n^2+|c\,(c+1-a-b)|\,n^2}{n^2}\\
=&\,|((c+1-a-b)\,(c+1)+ab-c)|+|c\,(c+1-a-b)|\,,
\end{aligned}
$$

to je niz $\{\theta_n\}$ ograničen.

Tako, zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.9, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a(a+1)...(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{b(b+1)...(b+n-1)}{c(c+1)...(c+n-1)}$ konvergira za $\beta = c+1-a-b > 1$, tj. za $c > a+b$, i divergira za $\beta = c+1-a-b \leq 1$, odnosno za $c \leq a+b$. ■

♢ **Zadatak 11.1.5** Neka $p \in \mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

**Rješenje:** Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p}{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(1-\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{-p\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)'}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} pn^2\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{p-1}\cdot\frac{(2n+1)'\cdot(2n+2)-(2n+1)\cdot(2n+2)'}{(2n+2)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} pn^2\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{p-1}\cdot\frac{2\,(2n+2)-2\,(2n+1)}{(2n+2)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} pn^2\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^{p-1}\cdot\frac{2}{(2n+2)^2}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} p\left(\frac{2+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}}\right)^{p-1}\cdot\frac{2}{\left(2+\frac{2}{n}\right)^2} = \frac{p}{2}.$$

Zaključujemo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\frac{p}{2}.$$

Ako je $\frac{p}{2}>1$, tj. $p>2$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira.

S druge strane, za $\frac{p}{2}<1$, tj. $p<2$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Ako je $\frac{p}{2}=1$, tj. $p=2$, onda Rabeov kriterij (u formi Teorema 11.2), ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne (vidjeti napomenu datu nakon dokaza Teorema 11.2).

U ovakvoj situaciji koristimo Gausov kriterij, tj. Teorem 11.9 (vidjeti rješenje Primjera 11.12).

Neka je onda $p=2$.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$.

Sada je

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}.$$

Možemo pisati,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+8n+4}=\frac{4n^2+8n+4-(4n+3)}{4n^2+8n+4}\\ &=1-\frac{4n+3}{4n^2+8n+4}=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{4n+3}{4n^2+8n+4}\\ &=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left[n-\frac{4n^3+3n^2}{4n^2+8n+4}\right]\\ &=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4n^3+8n^2+4n-4n^3-3n^2}{4n^2+8n+4}\\ &=1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{5n^2+4n}{4n^2+8n+4}=\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},\end{aligned}$$

gdje je $\alpha=1$, $\beta=1$, $\gamma=1>0$, i $\theta_n=\frac{5n^2+4n}{4n^2+8n+4}$, $n\in\mathbb{N}$.

Pošto je

$$|\theta_n| = \frac{5n^2+4n}{4n^2+8n+4} \le \frac{5n^2+4n^2}{4n^2+8n+4} = \frac{9n^2}{4n^2+8n+4}$$
$$< \frac{9n^2}{4n^2} = \frac{9}{4},$$

to je niz $\{\theta_n\}$ ograničen.

Tako, zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.9, pa po njemu (zbog $\alpha = 1$, $\beta = 1$), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2$ divergira.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira za $p > 2$ i divergira za $p \le 2$. ■

♢ **Zadatak 11.1.6** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red i $k \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da postoji limes $g = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+k}} - 1\right)$. Dokazati upotrebom Rabeovog kriterija da za $g > k$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a za $g < k$ divergira.

**Dokaz:** Ako je $k = 1$, onda pretpostavljamo da postoji limes $g = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$.

Ako je $g > 1$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. S druge strane, za $g < 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, tvrdnja zadatka vrijedi za $k = 1$.

Neka je $k = 2$.

Pretpostavljamo sada da postoji limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+2}} - 1\right)$.

Posmatrajmo podnizove $\left\{(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} - 1\right)\right\}$ i $\left\{2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} - 1\right)\right\}$ niza $\left\{n\left(\frac{a_n}{a_{n+2}} - 1\right)\right\}$.

Iz $g = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+2}} - 1\right)$ i Leme 7.12 u [DzG1, str. 91], slijedi da je $g = \lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}} - 1\right)$.

Možemo pisati, $g = \lim_{n\to+\infty}(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right)$.
Pretpostavimo da je $g > 2$.
Neka je $g = +\infty$.
Iz $\lim_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right) = g = +\infty$, slijedi da je i $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right) = +\infty > 1$, pa je po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ konvergentan.

S druge strane, $\lim_{n\to+\infty}(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = g = +\infty$, pa za svaku konstantu $C > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi
$(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) > C$. Odavde je
$2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) > (2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) > C$ za $n \geq N$, pa je i
$\lim_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = +\infty = g$. Tako, vrijedi i $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = +\infty > 1$, što po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $2 < g < +\infty$, tj. da je $g$ konačan broj veći od 2.
Iz $\lim_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right) = g$ i tvrdnje $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je $\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\cdot 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}}-1\right) = \frac{g}{2} > 1$.

Ovo po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, znači da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ konvergira.

S druge strane, $\lim_{n\to+\infty}(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = g$, te $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1} = 0$, pa po tvrdnji $(b)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], imamo da je $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2n-1}\cdot(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = 0\cdot g = 0$. Odavde, iz

$$\lim_{n\to+\infty}\left[2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) - \left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right) = g,$$

i tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)\\
=&\lim_{n\to+\infty}\left[\left(2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)-\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)\right)+\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)\right]\\
=&g+0=g.
\end{aligned}
$$

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{2}\cdot 2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}}-1\right)=\frac{g}{2}>1$, pa po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ konvergira.

Tako, za $g>2$, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ konvergiraju.

Označimo sa $S_n^{'}$ resp. $S_n^{''}$, $n$-tu parcijalnu sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$.

Imamo, $S_n^{'}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k-1}$, $S_n^{''}=\sum\limits_{k=1}^{n} a_{2k}$, $n\in\mathbb{N}$.

Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo sume oblika $S_{2n}$, $n\in\mathbb{N}$.

Neka je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan broj. Imamo,

$$
S_{2n}=\sum_{k=1}^{2n} a_k=\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{n} a_{2k}=S_n^{'}+S_n^{''}.
$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ resp. $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ je konvergentan, pa postoje $a\in\mathbb{R}$ resp. $b\in\mathbb{R}$, takvi da je $a=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'}$ resp. $b=\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{''}$.

Odavde, iz $S_{2n}=S_n^{'}+S_n^{''}$, $n\in\mathbb{N}$, i tvrdnje $(a)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$
\lim_{n\to+\infty} S_{2n}=\lim_{n\to+\infty}\left(S_n^{'}+S_n^{''}\right)=\lim_{n\to+\infty} S_n^{'}+\lim_{n\to+\infty} S_n^{''}=a+b.
$$

Tako, niz $\{S_{2n}\}$, tj. podniz $\{S_{2n}\}$ niza $\{S_n\}$ konvergira.

Odavde, iz monotonosti niza $\{S_n\}$ (niz $\{S_n\}$ je rastući jer je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red), i Zadatka 7 u [DzG1, str. 118], slijedi konvergencija niza $\{S_n\}$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Pretpostavimo sada da je $g < 2$.

Neka je $g = -\infty$.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}} - 1\right) = g = -\infty$, slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}} - 1\right) = -\infty < 1$, pa je po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ divergentan.

S druge strane, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = g = +\infty$, pa za svaku konstantu $C < 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi
$(2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) < C$. Odavde je
$2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) < (2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) < C$ za $n \geq N$, pa je i
$\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = -\infty = g$. Tako, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = -\infty$ $< 1$, što po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2 znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ divergira.

Pretpostavimo sada da je $-\infty < g < 2$, tj. da je $g$ konačan broj manji od 2.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}} - 1\right) = g$ (kao u slučaju $2 < g < +\infty$), imamo da je
$\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n}}{a_{2(n+1)}} - 1\right) = \frac{g}{2} < 1$.

Ovo po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ divergira.

S druge strane, $\lim\limits_{n\to+\infty} (2n-1)\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = g$, pa kao u slučaju $2 < g < +\infty$, dobijamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = g$.

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_{2n-1}}{a_{2(n+1)-1}} - 1\right) = \frac{g}{2} < 1$, pa po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ divergira.

Tako, za $g < 2$, redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n}$ divergiraju.

Ovi redovi su pozitivni, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{'} = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n^{''} = +\infty$ (vidjeti notu 34 na strani 157 u [DzG2]).

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{2n} = +\infty$.

Ako bi niz $\{S_n\}$ konvergirao, onda bi po Posljedici 7.15 u [DzG2, str. 103], konvergirao i svaki podniz niza $\{S_n\}$. Dakle, kontradikcija, pa niz $\{S_n\}$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, tvrdnja zadatka vrijedi za $k = 2$.

Analogno razmatranje bi proveli u slučaju $k \geq 3$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 11.1.7** Neka je $a > 0$ proizvoljan pozitivan broj, i $\{b_n\}$ pozitivan niz koji konvergira ka $b$. Dokazati upotrebom Rabeovog kriterija da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)}$ konvergira za $b > a$ i divergira za $b < a$. Mora li dati red konvergirati za $b = a$ ?

**Dokaz:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)}}{\frac{(n+1)!a^{n+1}}{(a+b_1)(2a+b_2)...((n+1)a+b_{n+1})}} - 1\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{(n+1)\,a + b_{n+1}}{(n+1)\,a} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\cdot\frac{(n+1)\,a + b_{n+1} - (n+1)\,a}{(n+1)\,a}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{nb_{n+1}}{(n+1)\,a} = \lim_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{a + \frac{a}{n}}.$$

Po pretpostavci je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$, pa je po razmatranju provedenom u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = b$.

Tako, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_{n+1}}{a+\frac{a}{n}} = \frac{b}{a}$.

Ako je $\frac{b}{a} > 1$, tj. $b > a$, onda je po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)}$ konvergentan.

S druge strane, za $\frac{b}{a} < 1$, tj. $b < a$, po istom kriteriju, dati red je divergentan.

Primijetimo da za $b = a$ dati red ne mora biti konvergentan.
Naime, neka je $b = a > 0$.
Neka je $\{b_n\}$ konstantan niz, tj. neka je $b_n = b = a$ za sve $n \in \mathbb{N}$.
Niz $\{b_n\}$ je konstantan niz, pa je kao takav konvergentan.
Osim toga, $\{b_n\}$ je pozitivan niz.
Drugim riječima, niz $\{b_n\}$ zadovoljava uslove Zadatka.
Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)}$ je sada oblika
$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+a)(2a+a)...(na+a)} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (n+1)a} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{a^n (n+1)!} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa divergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n}$ $= \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)(2a+b_2)...(na+b_n)}$ [DzG2, str. 8, Teo. 1.6].
Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 11.1.8** Neka $p \in \mathbb{R}$. Upotrebom Rabeovog kriterija, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+p}}$.

**Rješenje:** Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$. Označimo ga sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n \to +\infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right)$. Imamo,

$$\lim_{n \to +\infty} n \left( \frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} n \left( \frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{(n+1)^{p-\frac{1}{2}}}} - 1 \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} n \left( \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{p-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{2}} - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\left( \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{2}} - 1 \right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} = \lim_{n \to +\infty} \frac{\left(p - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{2}-1} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left(p - \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{p-\frac{1}{2}-1} = p - \frac{1}{2}.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = p - \frac{1}{2}$.

Ako je $p - \frac{1}{2} > 1$, tj. $p > \frac{3}{2}$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ konvergira.

S druge strane, za $p - \frac{1}{2} < 1$, tj. $p < \frac{3}{2}$, po istom kriteriju, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ divergira.

Ako je $p = \frac{3}{2}$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa je po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], divergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}$ konvergira za $p > \frac{3}{2}$ i divergira za $p \leq \frac{3}{2}$.

Sjetimo se Stirlingove aproksimacije za $n!$ (vidjeti notu 19 u [DzG2, str. 113]).

Aproksimacija nam govori da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$.

Označimo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{n^{p-\frac{1}{2}}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot e^n \cdot n^{p-\frac{1}{2}}}{n^{n+p}\cdot\sqrt{2\pi}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n!\cdot e^n\cdot n^{-\frac{1}{2}}}{n^n\cdot\sqrt{2\pi}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1 = L.$$

Pošto je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Slijedi, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{n!\cdot e^n}{n^{n+p}}$ konvergira za $p > \frac{3}{2}$ i divergira za $p \leq \frac{3}{2}$. ■

♢ **Zadatak 11.1.9** Neka je $p > 0$ i $q \in \mathbb{R}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)...(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$ konvergira za $q > p$ i divergira za $q < p$.

**Dokaz:** Stavimo,

$$a_n = \frac{p\,(p+1)\,...\,(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}.$$

Sada je,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{p(p+1)...(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}}{\frac{p(p+1)...(p+n)}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{(n+1)^q}} = \frac{n+1}{p+n} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q.$$

Odavde je $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+p}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q}$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n+p}{n+1} \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^q} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$, što znači da kriterij količnika, tj. Teorem 5.2, ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right)$. Imamo,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{n+1}{n+p} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^q - 1\right) \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{n+1}{n+p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q - 1}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}.
\end{aligned}$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{n+1}{n+p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q - 1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1\cdot(n+p)-(n+1)\cdot 1}{(n+p)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q + \frac{n+1}{n+p} \cdot q\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1} \cdot \frac{-1}{n^2}}{\frac{-1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{p-1}{(n+p)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q - \frac{q}{n^2} \cdot \frac{n+1}{n+p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1}}{\frac{-1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\frac{(1-p)\,n^2}{(n+p)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^q + q \cdot \frac{n+1}{n+p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1}\right] \\
&= 1 - p + q.
\end{aligned}$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=1-p+q$.

Ako je $1-p+q>1$, tj. $q>p$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!}\cdot\frac{1}{n^q}$ konvergira.

S druge strane, za $1-p+q<1$, tj. $q<p$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

◊ **Zadatak 11.1.10** Neka $p\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$ konvergira za $\frac{p}{2}+q>1$ i divergira za $\frac{p}{2}+q<1$.

**Dokaz:** Označimo dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}$ sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{n^q}}{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p\cdot\frac{1}{(n+1)^q}}-1\right)=$$

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1\right)=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q-1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\right)'\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q+\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\right)'}{\frac{-1}{n^2}}.$$

Sada je,

$$\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\right)'\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^q+\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^q\right)'$$

$$
\begin{aligned}
&= p \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p-1} \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)' \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} \\
&\quad + \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot q\left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1} \cdot \frac{-1}{n^2} \\
&= p \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p-1} \cdot \frac{2\cdot(2n+1)-(2n+2)\cdot 2}{(2n+1)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} \\
&\quad - \frac{q}{n^2} \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1} \\
&= \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p-1} \cdot \frac{-2p}{(2n+1)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} - \frac{q}{n^2} \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1}.
\end{aligned}
$$

Dobijamo da je,

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} - 1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p-1} \cdot \frac{-2p}{(2n+1)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} - \frac{q}{n^2} \cdot \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1}}{\frac{-1}{n^2}} \\
&= \lim_{n\to+\infty} \left[\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p-1} \cdot \frac{2pn^2}{(2n+1)^2} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q} + q\left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^{p} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^{q-1}\right] \\
&= \frac{p}{2} + q.
\end{aligned}
$$

Zaključujemo,

$$
\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \frac{p}{2} + q.
$$

Ako je $\frac{p}{2} + q > 1$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^{p} \cdot \frac{1}{n^q}$ konvergira.

S druge strane, za $\frac{p}{2} + q < 1$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 11.1.11** Neka je $p>0$, $q>0$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{p(p+1)...(p+n-1)}{q(q+1)...(q+n-1)}\right)^{\alpha}$ konvergira za $(q-p)\,\alpha>1$ i divergira za $(q-p)\,\alpha<1$.

**Dokaz:** Stavimo,

$$a_n=\left(\frac{p\,(p+1)\,...\,(p+n-1)}{q\,(q+1)\,...\,(q+n-1)}\right)^{\alpha}.$$

Sada je,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left(\frac{p(p+1)...(p+n-1)}{q(q+1)...(q+n-1)}\right)^{\alpha}}{\left(\frac{p(p+1)...(p+n)}{q(q+1)...(q+n)}\right)^{\alpha}}=\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha}.$$

Odavde je $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\frac{n+p}{n+q}\right)^{\alpha}$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n+p}{n+q}\right)^{\alpha}=1$, što znači da kriterij količnika, tj. Teorem 5.2 ne daje odgovor na pitanje da li dati red konvergira ili ne.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to+\infty}n\left(\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha}-1\right)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha}-1}{\frac{1}{n}}=\frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha}-1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{1\cdot(n+p)-(n+q)\cdot1}{(n+p)^2}}{\frac{-1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{\alpha\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{p-q}{(n+p)^2}}{\frac{-1}{n^2}}=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+q}{n+p}\right)^{\alpha-1}\cdot\frac{(q-p)\,\alpha n^2}{(n+p)^2}=(q-p)\,\alpha.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=(q-p)\,\alpha.$

Ako je $(q-p)\,\alpha > 1$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p(p+1)...(p+n-1)}{q(q+1)...(q+n-1)}\right)^{\alpha}$ konvergira.

S druge strane, za $(q-p)\,\alpha < 1$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 11.1.12** Neka $\alpha \in \mathbb{R}$. Koristeći Bertranov kriterij, tj. Teorem 11.7, dokazati da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \prod\limits_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k}\right)^{-1}$ konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha < 1$.

**Dokaz:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ je sada

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n+1}} =& \frac{\prod\limits_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k}\right)^{-1}}{\prod\limits_{k=2}^{n} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k}\right)^{-1}} \\
=& \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln^2 n}\right)^{-1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln^2 n}.
\end{aligned}$$

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right)$. Imamo,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln^2 n} - 1\right) - 1\right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(n\left(\frac{1}{n} + \frac{\alpha}{n \ln n} + \frac{1}{n \ln^2 n}\right) - 1\right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(1 + \frac{\alpha}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n} - 1\right) \\
=& \lim_{n\to+\infty} \ln n \left(\frac{\alpha}{\ln n} + \frac{1}{\ln^2 n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\alpha + \frac{1}{\ln n}\right) = \alpha.
\end{aligned}$$

Ako je $\alpha > 1$, onda po Bertranovom kriteriju, tj. Teoremu 11.7, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \prod\limits_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k}\right)^{-1}$ konvergira.

S druge strane, za $\alpha < 1$, po istom kriteriju, dati red divergira.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 11.1.13** Neka $p \in \mathbb{R}$. Ispitati kovergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

**Rješenje:** Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$.

U Zadatku 11.1.5 smo upotrebom Rabeovog i Gausovog kriterija vidjeli da posljednji red konvergira za $p > 2$ i divergira za $p \leq 2$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira apsolutno za $p > 2$ (Definicija 7.1), te da ne konvergira apsolutno za $p \leq 2$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira apsolutno za $p > 2$, pa po Teoremu 7.2, i konvergira za $p > 2$.

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ ne konvergira apsolutno za $p \leq 2$, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $p \leq 2$.

Prvo, neka je $p < 0$.

Sada je $p = -q$ za neko $q > 0$. Možemo pisati, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^q$.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned} (2n)!! &= (2n)\,(2n-2)\,(2n-4) \cdot ... \cdot 2 \\ &= (2n)\,(2\,(n-1))\,(2\,(n-2)) \cdot ... \cdot 2 = 2^n \cdot n!, \end{aligned}$$

te

$$\begin{aligned} (2n-1)!! \cdot 2^n \cdot n! &= (2n-1)\,(2n-3) \cdot ... \cdot 1 \cdot (2n)\,(2n-2) \cdot ... \cdot 2 \\ &= (2n)\,(2n-1)\,(2n-2)\,(2n-3) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = (2n)!, \end{aligned}$$

tj. da je $(2n)!! = 2^n \cdot n!$ i $(2n-1)!! = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!}$.

Slijedi,

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^n \cdot n!} = \frac{(2n)!}{(2^n \cdot n!)^2} = \frac{(2n)!}{4^n \, (n!)^2}.$$

Sjetimo se Stirlingove aproksimacije za $n!$ (vidjeti notu 19 u [DzG2, str. 113]). Aproksimacija nam govori da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n} = 1$.

Slijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{4^n \, (n!)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n)!}{\sqrt{4n\pi}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}} \cdot \sqrt{4n\pi}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{4^n \cdot \frac{((n)!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} \cdot 2n\pi \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n)!}{\sqrt{4n\pi}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{((n)!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}} \cdot \frac{2\sqrt{n\pi}\cdot 4^n \cdot n^{2n} \cdot e^{2n}}{4^n \cdot 2n\pi \cdot n^{2n} \cdot e^{2n}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(2n)!}{\sqrt{4n\pi}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{((n)!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n\pi}} = \frac{1}{1} \cdot 0 = 0,$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}} = +\infty$, te

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^q = +\infty.$$

Ovo znači da nije tačno da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = 0$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ divergira.

Ako je $p = 0$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}$. Opšti član ovog reda ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ divergira za $p \leq 0$.

Neka je sada $0 < p \leq 2$.

Već smo vidjeli da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} = 0$, pa je i $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p = 0$. Osim toga je

$$\frac{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p}{\left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p} = \left(\frac{2n+2}{2n+1}\right)^p = \left(1+\frac{1}{2n+1}\right)^p > 1,$$

tj.

$$\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p > \left(\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}\right)^p.$$

Vidimo da su zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira.

Rezimirajmo, za $p > 2$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), za $0 < p \leq 2$, red ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), a za $p \leq 0$, dati red ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Kako za $0 < p \leq 2$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, to on za $0 < p \leq 2$ konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 11.1.14** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}$.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty}a_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, vrijedi

$$a_n = \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!} = \frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}\cdot\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n-2)} =$$

$$\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot ...\cdot (2n-3)\,(2n-2)}{2^n\cdot n!\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot ...\cdot 2\cdot (n-1)}=\frac{(2n-2)!}{2^n\cdot n!\cdot 2^{n-1}\cdot (n-1)!}$$
$$=\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\cdot n!\cdot (n-1)!}.$$

Tako, za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}}=&\frac{\frac{(2n-2)!}{2^{2n-1}\cdot n!\cdot(n-1)!}}{\frac{(2n)!}{2^{2n+1}\cdot(n+1)!\cdot n!}}=\frac{(2n-2)!\cdot 2^{2n+1}\cdot (n+1)!\cdot n!}{(2n)!\cdot 2^{2n-1}\cdot n!\cdot (n-1)!}\\ =&\frac{2^2\cdot (n+1)\cdot n}{(2n)\cdot (2n-1)}=\frac{2\,(n+1)}{2n-1}=\frac{2n+2}{2n-1}\\ =&\frac{2n-1+3}{2n-1}=1+\frac{3}{2n-1}=1+\frac{3}{2n}-\frac{3}{2n}+\frac{3}{2n-1}\\ =&1+\frac{\frac{3}{2}}{n}+\frac{3}{2n-1}-\frac{3}{2n}=1+\frac{\frac{3}{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\left[\frac{3n^2}{2n-1}-\frac{3n^2}{2n}\right]\\ =&1+\frac{\frac{3}{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{6n^3-6n^3+3n^2}{2n\,(2n-1)}\\ =&1+\frac{\frac{3}{2}}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{3n^2}{2n\,(2n-1)}=\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},\end{aligned}$$

gdje je $\alpha=1$, $\beta=\frac{3}{2}$, $\gamma=1>0$, i $\theta_n=\frac{3n^2}{2n(2n-1)}$, $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Pošto je za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$,

$$|\theta_n|=\frac{3n^2}{2n\,(2n-1)}<\frac{3n^2}{2n\cdot n}=\frac{3n^2}{2n^2}=\frac{3}{2},$$

to je niz $\{\theta_n\}$ ograničen.

Tako, zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.10, pa po njemu (zbog $\alpha=1$, $\beta=\frac{3}{2}$), red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\frac{1\cdot 3\cdot ...\cdot(2n-3)}{2^n\cdot n!}$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 11.1.15** Neka $p\in\mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$.

**Rješenje:** Vrijedi, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$.
Označimo posljednji red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Sada je,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\frac{2^{np}\cdot(n!)^{2p}}{((2n+1)!)^p}\cdot 2^{np}}{\frac{2^{(n+1)p}\cdot((n+1)!)^{2p}}{((2n+3)!)^p}\cdot 2^{(n+1)p}}$$

$$=\frac{4^{np}\cdot(n!)^{2p}\cdot((2n+3)!)^p}{4^{(n+1)p}\cdot((n+1)!)^{2p}\cdot((2n+1)!)^p} = \frac{(2n+3)^p\cdot(2n+2)^p}{4^p\cdot(n+1)^{2p}}$$

$$=\left(\frac{(2n+3)\,(2n+2)}{4\,(n+1)^2}\right)^p = \left(\frac{4n^2+4n+6n+6}{4n^2+8n+4}\right)^p = \left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^p.$$

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right) = \lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^p-1}{\frac{1}{n}} = \frac{0}{0}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^p-1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{p\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^{p-1}\cdot\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)'}{\frac{-1}{n^2}}$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{p\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^{p-1}\cdot\frac{(8n+10)\cdot\left(4n^2+8n+4\right)-\left(4n^2+10n+6\right)\cdot(8n+8)}{(4n^2+8n+4)^2}}{\frac{-1}{n^2}}.$$

Kako je

$$(8n+10)\cdot\left(4n^2+8n+4\right)-\left(4n^2+10n+6\right)\cdot(8n+8) =$$

$$\begin{aligned}&32n^3+64n^2+32n+40n^2+80n+40\\&-32n^3-32n^2-80n^2-80n-48n-48\\=&-8n^2-16n-8,\end{aligned}$$

to je

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\left(\frac{4n^2+10n+6}{4n^2+8n+4}\right)^p-1\right)'}{\left(\frac{1}{n}\right)'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{p\left(\frac{2n^2+5n+3}{2n^2+4n+2}\right)^{p-1}\cdot\frac{-8\left(n^2+2n+1\right)}{16\left(n^2+2n+1\right)^2}}{\frac{-1}{n^2}}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{p}{2}\cdot\left(\frac{2n^2+5n+3}{2n^2+4n+2}\right)^{p-1}\cdot\frac{n^2}{n^2+2n+1}=\frac{p}{2}.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\frac{p}{2}$.

Ako je $\frac{p}{2}>1$, tj. $p>2$, onda po Rabeovom kriteriju, tj. Teoremu 11.2, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$ konvergira.

S druge strane, za $\frac{p}{2}<1$, tj. $p<2$, po istom kriteriju, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$ divergira.

Neka je $\frac{p}{2}=1$, tj. neka je $p=2$.

Imamo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^2\cdot 2^{2n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{2^{2n}\cdot(n!)^4\cdot 2^{2n}}{((2n+1)!)^2}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{16^n\cdot(n!)^4}{((2n+1)!)^2}$.

Sada je,

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n}&=\left(\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+10n+6}\right)^2=\left(\frac{2n^2+4n+2}{2n^2+5n+3}\right)^2\\&=\left(\frac{(n+1)(2n+2)}{(n+1)(2n+3)}\right)^2=\frac{(2n+2)^2}{(2n+3)^2}\\&=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+12n+9}.\end{aligned}$$

Možemo pisati,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{4n^2+8n+4}{4n^2+12n+9}=\frac{4n^2+12n+9-4n-5}{4n^2+12n+9}=$$

$$\begin{aligned}
1-\frac{4n+5}{4n^2+12n+9} &= 1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n}-\frac{4n+5}{4n^2+12n+9}\\
=&1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\left[n-\frac{4n^3+5n^2}{4n^2+12n+9}\right]\\
=&1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{4n^3+12n^2+9n-4n^3-5n^2}{4n^2+12n+9}\\
=&1-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{7n^2+9n}{4n^2+12n+9}=\alpha-\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},
\end{aligned}$$

gdje je $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = 1 > 0$, i $\theta_n = \frac{7n^2+9n}{4n^2+12n+9}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je

$$\begin{aligned}
|\theta_n| =& \frac{7n^2+9n}{4n^2+12n+9} \le \frac{7n^2+9n^2}{4n^2+12n+9}\\
=&\frac{16n^2}{4n^2+12n+9} < \frac{16n^2}{4n^2} = 4,
\end{aligned}$$

to je $\{\theta_n\}$ ograničen niz.

Tako, zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.9, pa po njemu (zbog $\alpha = 1$, $\beta = 1$), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ divergira.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira za $p > 2$ i divergira za $p \le 2$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira apsolutno za $p > 2$ (Definicija 7.1), te da ne konvergira apsolutno za $p \le 2$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira apsolutno za $p > 2$, pa po Teoremu 7.2, i konvergira za $p > 2$.

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ ne konvergira apsolutno za $p \le 2$, to njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $p \le 2$.

Prvo, neka je $p < 0$.

Sada je $p = -q$ za neko $q > 0$. Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\, \frac{4^{np}\cdot(n!)^{2p}}{((2n+1)!)^p} =$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{((2n+1)!)^q}{4^{nq}\cdot(n!)^{2q}}=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{((2n+1)!)}{4^n\cdot(n!)^2}\right)^q.$$

Sjetimo se Stirlingove aproksimacije za $n!$ (vidjeti notu 19 u [DzG2, str. 113]). Aproksimacija nam govori da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n!}{\sqrt{2n\pi}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n}=1$.

Slijedi,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{4^n\cdot\frac{(n!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}\cdot 2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}{\frac{(2n+1)!}{\sqrt{2(2n+1)\pi}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}\cdot\sqrt{2\left(2n+1\right)\pi}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n+1)!}{\sqrt{2(2n+1)\pi}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}}\cdot\frac{4^n\cdot 2n\pi\cdot n^{2n}\cdot e^{2n+1}}{e^{2n}\cdot\sqrt{2\left(2n+1\right)\pi}\cdot(2n+1)^{2n+1}}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n+1)!}{\sqrt{2(2n+1)\pi}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}}\cdot\frac{(2n)^{2n}\cdot 2n\pi\cdot e}{\sqrt{2\left(2n+1\right)\pi}\cdot(2n+1)\left(2n+1\right)^{2n}}\\
=&\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n!)^2}{2n\pi\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}}}{\frac{(2n+1)!}{\sqrt{2(2n+1)\pi}\cdot\left(\frac{2n+1}{e}\right)^{2n+1}}}\cdot\frac{2n\pi e}{2n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{2\left(2n+1\right)\pi}}\cdot\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}}\\
=&\frac{1}{1}\cdot\pi e\cdot 0\cdot\frac{1}{e}=0,
\end{aligned}$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot(n!)^2}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{\frac{4^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}}=+\infty$, te $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{(2n+1)!}{4^n\cdot(n!)^2}\right)^q=+\infty$.

Ovo znači da nije tačno da je $\lim\limits_{n\to+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}=0$, pa po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{2^n\cdot(n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p\cdot 2^{pn}$ divergira.

Ako je $p=0$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}$. Opšti član ovog reda ne teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ divergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ divergira za $p \leq 0$.

Neka je sada $0 < p \leq 2$.

Već smo vidjeli da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!} = 0$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn} = \lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{4^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p = 0$.

Osim toga, vidjeli smo da je

$$\frac{\left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}}{\left(\frac{2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\right)^p \cdot 2^{p(n+1)}} = \left(\frac{4n^2 + 10n + 6}{4n^2 + 8n + 4}\right)^p,$$

što znači da je

$$\frac{\left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}}{\left(\frac{2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\right)^p \cdot 2^{p(n+1)}}$$
$$= \left(\frac{2n^2 + 5n + 3}{2n^2 + 4n + 2}\right)^p = \left(1 + \frac{n+1}{2n^2 + 4n + 2}\right)^p > 1,$$

tj.

$$\left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn} > \left(\frac{2^{n+1} \cdot ((n+1)!)^2}{(2n+3)!}\right)^p \cdot 2^{p(n+1)}.$$

Vidimo da su zadovoljeni uslovi kriterija za alternirajuće redove, tj. Teorema 8.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira.

Rezimirajmo, za $p > 2$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), za $0 < p \leq 2$, red ne konvergira apsolutno, konvergira (ne divergira), a za $p \leq 0$, dati red ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Kako za $0 < p \leq 2$ red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ konvergira, ali ne konvergira apsolutno, to on za $0 < p \leq 2$ konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 11.1.16** Neka $m \in \mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$.

**Rješenje:** Ovdje je $\binom{m}{n} = \frac{m(m-1)...(m-(n-1))}{n!}$.
Tako, dati red je oblika

$$\frac{m}{1!} + \frac{m\,(m-1)}{2!} + ... + \frac{m\,(m-1)\,...\,(m-(n-1))}{n!} + ... \,.$$

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, možemo pisati

$$\begin{aligned}\binom{m}{n} &= \frac{m \cdot (-1) \cdot (1-m) \cdot ... \cdot (-1) \cdot ((n-1)-m)}{n!} \\ &= (-1)^{n-1}\,\frac{((n-1)-m) \cdot ((n-2)-m)\,...\,(1-m) \cdot m}{n!} \\ &= (-1)^{n-1}\,b_n.\end{aligned}$$

Stavimo, $b_1 = \frac{m}{1!}$.
Dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ je onda oblika

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,b_n =& \frac{m}{1!} - \frac{(1-m)\,m}{2!} + \frac{(2-m)\,(1-m)\,m}{3!} + ... \\ &+ (-1)^{n-1}\,\frac{((n-1)-m)\,((n-2)-m)\,...\,(1-m)\,m}{n!} + ... \,.\end{aligned}$$

Ako je $m = k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onda su svi članovi reda $\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=k+1}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergentan, i suma mu je jednaka $0$.

Odavde, i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za sve $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ konvergira apsolutno za $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Definicija 7.1), te da onda i konvergira za $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (Teorem 7.2).

Pretpostavljamo u nastavku da $m \notin \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Neka je $m < 0$.

Sada je $b_n < 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$.

Jasno, $-b_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}
\frac{-b_n}{-b_{n+1}} &= \frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{\frac{((n-1)-m)((n-2)-m)...(1-m)m}{n!}}{\frac{(n-m)((n-1)-m)...(1-m)m}{(n+1)!}} \\
=& \frac{n+1}{n-m} = \frac{n-m+m+1}{n-m} = 1 + \frac{m+1}{n-m} \\
=& 1 + \frac{m+1}{n} - \frac{m+1}{n} + \frac{m+1}{n-m} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{n(m+1) - (m+1)(n-m)}{(n-m)n} \\
=& 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{nm + n - mn + m^2 - n + m}{(n-m)n} \\
=& 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{m^2+m}{(n-m)n} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m} \\
=& 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}},
\end{aligned}$$

gdje je $\alpha = m+1$, $\varepsilon = 1 > 0$, i $\beta_n = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}$, $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je

$$|\beta_n| = \frac{|m|\,|m+1|\,n}{n-m} < \frac{|m|\,|m+1|\,n}{n} = |m|\,|m+1|\,,$$

to je $\{\beta_n\}$ ograničen niz.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Zadatka 8.1.21, pa po njemu, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$ konvergira za $m+1 > 0$, tj. za $m > -1$, i divergira za $m+1 \leq 0$, tj. za $m \leq -1$.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], imamo da za $m > -1$ konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$, a da ovaj red divergira za $m \leq -1$.

Mi smo posmatrali slučaj $m < 0$, što znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ konvergira za $-1 < m < 0$, i divergira za $m \leq -1$.

Pretpostavimo sada da je $m > 0$.

Ako je npr. $m = e$, onda je $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, $b_3 > 0$, $b_4 > 0$, ..., tj. $b_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

S druge strane, ako je npr. $m = \pi$, onda je $b_1 > 0$, $b_2 < 0$, $b_3 > 0$, $b_4 < 0$, $b_5 < 0$, ..., tj. $b_n < 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$.

Drugim riječima, za $m > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi ili $b_n > 0$ ili $b_n < 0$, pri čemu je $n - m > 0$ za sve $n \geq N$.

Pretpostavimo prvo da za $m > 0$ postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $b_n > 0$, pri čemu je $n - m > 0$ za $n \geq N$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je

$$\frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m} = 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}},$$

gdje je $\alpha = m + 1$, $\varepsilon = 1 > 0$, i $\beta_n = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je $n - m > 0$.

Specijalno je $N - m > 0$, tj. $N > m$, ili $0 < \frac{m}{N} < 1$.

Dakle, $1 - \frac{m}{N} > 0$.

Odaberimo neku konstantu $c > 0$, takvu da je $c < 1 - \frac{m}{N}$, pa je fiksirajmo.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{N}$, te $\frac{m}{n} \leq \frac{m}{N}$, tj. $-\frac{m}{n} \geq -\frac{m}{N}$, odnosno $-m \geq -n \cdot \frac{m}{N}$.

Slijedi da je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, $cn < n - n \cdot \frac{m}{N} \leq n - m$.

Tako, za našu odabranu konstantu $c > 0$, vrijedi $n - m > cn$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je sada

$$|\beta_n| = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m} < \frac{\left(m^2+m\right)n}{cn} = \frac{m^2+m}{c},$$

što znači da je niz $\{\beta_n\}_{n=N}^{+\infty}$, ograničen.

Po pomenutom Zadatku 8.1.21, imamo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ konvergira za $m+1 > 0$, tj. za $m > -1$, i divergira za $m + 1 \leq 0$, tj. za $m \leq -1$.

Mi posmatramo slučaj $m > 0$, pa vidimo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n$ konvergira za $m > 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ konvergira za $m > 0$.

Pretpostavimo sada da za $m > 0$ postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $b_n < 0$, pri čemu je $n - m > 0$ za $n \geq N$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je

$$
\begin{aligned}
\frac{-b_n}{-b_{n+1}} =& \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1 + \frac{m+1}{n} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{\left(m^2 + m\right) n}{n - m} \\
=& 1 + \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^{1+\varepsilon}},
\end{aligned}
$$

gdje je $\alpha = m + 1$, $\varepsilon = 1 > 0$, i $\beta_n = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}$.

Kao i u slučaju $b_n > 0$, $n \geq N$, i sada imamo da za $n \geq N$ vrijedi $n - m > 0$.

Odavde slijedi da postoji konstanta $c > 0$, takva da je $n - m > cn$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Tako, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je

$$
|\beta_n| = \frac{\left(m^2 + m\right) n}{n - m} < \frac{\left(m^2 + m\right) n}{cn} = \frac{m^2 + m}{c},
$$

što znači da je niz $\{\beta_n\}_{n=N}^{+\infty}$ ograničen.

Ponovo su zadovoljeni uslovi Zadatka 8.1.21, pa po njemu red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$ konvergira za $m + 1 > 0$, tj. za $m > -1$, i divergira za $m + 1 \leq 0$, tj. za $m \leq -1$.

Mi posmatramo slučaj $m > 0$, pa vidimo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$ konvergira za $m > 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} (-b_n)$ konvergira za $m > 0$.

Sada, iz pomenute tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], slijedi da za $m>0$ konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{m}{n}$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{m}{n}$ divergira za $m\le -1$ i konvergira za $m>-1$, pri čemu je konvergencija u tačkama $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ apsolutna.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\binom{m}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}b_n\right|$, gdje i dalje pretpostavljamo da $m\notin\mathbb{N}\cup\{0\}$.

Neka je $m<0$.

Sada je $b_n<0$ za sve $n\in\mathbb{N}$, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\binom{m}{n}\right|=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-b_n$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}\frac{-b_n}{-b_{n+1}}=&\frac{b_n}{b_{n+1}}=1+\frac{m+1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}\\=&\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},\end{aligned}$$

gdje je $\alpha=1$, $\beta=m+1$, $\gamma=1>0$, i $\theta_n=\frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}$, $n\in\mathbb{N}$.

Pošto je

$$|\theta_n|=\frac{|m|\,|m+1|\,n}{n-m}<\frac{|m|\,|m+1|\,n}{n}=|m|\,|m+1|\,,$$

to je $\{\theta_n\}$ ograničen niz.

Vidimo da su za red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-b_n$ zadovoljeni uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.10, pa po njemu (zbog $\alpha=1$), red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za $\beta=m+1>1$, tj. za $m>0$, i divergira za $\beta=m+1\le 1$, tj. za $m\le 0$.

Mi posmatramo slučaj $m<0$, pa zaključujemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\binom{m}{n}$ ne konvergira apsolutno za $m<0$.

Neka je sada $m>0$.

Pretpostavimo prvo da postoji indeks $N\in\mathbb{N}$, takav da za sve $n\ge N$, vrijedi $b_n>0$, pri čemu je $n-m>0$ za $n\ge N$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\left|\binom{m}{n}\right|=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}\left|(-1)^{n-1}b_n\right|=\sum\limits_{n=N}^{+\infty}b_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je

$$\begin{aligned}\frac{b_n}{b_{n+1}} =& 1+\frac{m+1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}\\ =&\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},\end{aligned}$$

gdje je $\alpha = 1$, $\beta = m+1$, $\gamma = 1 > 0$, i $\theta_n = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}$.

Neka je $c > 0$ konstanta takva da je $n - m > cn$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ vrijedi

$$|\theta_n| = \frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m} < \frac{\left(m^2+m\right)n}{cn} = \frac{m^2+m}{c},$$

pa je niz $\{\theta_n\}_{n=N}^{+\infty}$ ograničen.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.10, pa po njemu (zbog $\alpha = 1$), red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} b_n = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za $\beta = m+1 > 1$, tj. za $m > 0$, i divergira za $\beta = m+1 \leq 1$, tj. za $m \leq 0$.

Mi posmatramo slučaj $m > 0$, pa imamo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za $m > 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], slijedi da za $m > 0$ konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$.

Drugim riječima, za $m > 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ konvergira apsolutno.

Pretpostavimo sada da postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $b_n < 0$, pri čemu je $n - m > 0$ za $n \geq N$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right| = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|(-1)^{n-1} b_n\right| = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} -b_n$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$ je

$$\begin{aligned}\frac{-b_n}{-b_{n+1}} =& \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1+\frac{m+1}{n}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\left(m^2+m\right)n}{n-m}\\ =&\alpha+\frac{\beta}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\gamma}},\end{aligned}$$

gdje je $\alpha = 1$, $\beta = m+1$, $\gamma = 1 > 0$, i $\theta_n = \frac{(m^2+m)n}{n-m}$.

Neka je $c > 0$ konstanta takva da je $n - m > cn$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, vrijedi

$$|\theta_n| = \frac{(m^2+m)\,n}{n-m} < \frac{(m^2+m)\,n}{cn} = \frac{m^2+m}{c},$$

što znači da je niz $\{\theta_n\}_{n=N}^{+\infty}$ ograničen.

Zadovoljeni su uslovi Gausovog kriterija, tj. Teorema 11.10, pa po njemu (zbog $\alpha = 1$), red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} -b_n = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za $\beta = m+1 > 1$, tj. za $m > 0$, i divergira za $\beta = m+1 \leq 1$, tj. za $m \leq 0$.

Nas zanima slučaj $m > 0$, pa vidimo da red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$ konvergira za $m > 0$.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da za $m > 0$, konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\binom{m}{n}\right|$.

Tako, za $m > 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ apsolutno konvergira.

Imajući u vidu da za $m = 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ apsolutno konvergira, to zaključujemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ ne konvergira apsolutno za $m < 0$, i konvergira apsolutno za $m \geq 0$.

Rezimirajmo, za $m \leq -1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira, za $-1 < m < 0$, red ne konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira, dok za $m \geq 0$, red konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$ konvergira za $-1 < m < 0$, ali ne konvergira apsolutno, to on za $-1 < m < 0$ konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

## 11.2 Redovi razmatrani kriterijima Rabea, Bertrana i Gausa

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{2^n}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p\,(p+1)\,(p+2)\,...\,(p+n-1)}{n!}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\,(a+1)\,(a+2)\,...\,(a+n-1)}{b\,(b+1)\,(b+2)\,...\,(b+n-1)}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot ... \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot ... \cdot (2n)} \cdot \frac{1}{n+1}$ (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!}$

(9) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)^2}$ (10) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{2n+1}}{2^{3n-1}}$

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{2^n \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}\right)^p \cdot 2^{pn}$ (12) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{7^{3n}}{(2n-5)!}$

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{(a+1)\,(a+2)\,...\,(a+n)}$ (14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n}$

(15) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \prod_{k=2}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{k} + \frac{\alpha}{k \ln k} + \frac{1}{k \ln^2 k}\right)^{-1}$ (16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$

(17) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!a^n}{(a+b_1)\,(2a+b_2)\,...\,(na+b_n)}$ (18) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n! \cdot e^n}{n^{n+p}}$

(19) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p\,(p+1)\,...\,(p+n-1)}{n!} \cdot \frac{1}{n^q}$ (20) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p \cdot \frac{1}{n^q}$

(21) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{p\,(p+1)\,...\,(p+n-1)}{q\,(q+1)\,...\,(q+n-1)}\right)^\alpha$ (22) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n!}{5^n}$

(23) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^p$ (24) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot ... \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}$

$$(25) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \binom{m}{n}$$

$$(26) \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a\,(a+1)\,...\,(a+n-1)}{n!} \cdot \frac{b\,(b+1)\,...\,(b+n-1)}{c\,(c+1)\,...\,(c+n-1)}$$

# 12 Kriterij Abel-Dinija

Za razliku od prethodno izvedenih npr. kriterija upoređivanja, koji su kako smo vidjeli spoljašnje prirode u odnosu na posmatrani red (primjenjivi su u onolikoj mjeri koliko je jaka naša baza znanja o konvergentnim i divergentnim redovima), kriterij Abel-Dinija će tretirati čitavu familiju eksplicitno datih redova, i odmah nuditi odgovor na pitanje koji od njih konvergiraju a koji ne. Na ovaj način će mnogi redovi koji se pojavljuju u literaturi, a proizašli su iz raznoraznih računa, ili su prosto tako definisani, moći biti vrlo jednostavno i efikasno analizirani. Kriterij Abel-Dinija nosi naziv po norveškom matematičaru Abelu[47], i manje poznatom italijanskom matematičaru Diniju[48].

**Definicija 12.1** Definišemo $\ln_{(0)} x = x$, $\ln_{(1)} x = \ln x$, $\ln_{(2)} x = \ln(\ln x)$, itd. Općenito, definišemo $\ln_{(0)} x = x$, $\ln_{(n)} x = \ln\left(\ln_{(n-1)} x\right)$, $n \in \mathbb{N}$.

---

[47]**Niels Henrik Abel**, 1802-1829. god. n.e., norveški matematičar. Dao je veliki doprinos različitim oblastima matematike. Najpoznatiji rezultat mu je dokaz nerješivosti opšte jednačine petog stepena pomoću radikala. Inače, ovo pitanje je predstavljalo jedan od velikih otvorenih problema njegovog doba, i nije bilo riješeno više od 250 godina. Bio je inovator na polju eliptičkih funkcija. Otkrio je funkcije koje po njemu nose ime, tj. Abelove funkcije. Svoje rezultate je izveo živeći u siromaštvu, a umro je u 26. godini života od tuberkoloze. Francuski matematičar Charles Hermite je rekao: "Abel je matematičarima ostavio dovoljno da ih drži zauzetim 500 godina". Adrien-Marie Legendre, takođe francuski matematičar, je s druge strane rekao: "Kakvu glavu mladi Norvežanin ima". Abelova nagrada u matematici, originalno predložena 1899. godine kao komplement Nobelovoj nagradi, nosi naziv po Niels Henrik Abelu. Tokom boravka u Parizu 1826. godine, Abel je dobio tuberkolozu. Finansijska situacija ga je natjerala da se 1827. godine vrati u Norvešku. Iako teško bolestan, Božić 1828. godine je proveo sa vjerenicom. Pored djelimičnog oporavka, preminuo je relativno brzo, 6. aprila 1829. godine. Dva dana poslije, dobio je pismo da je imenovan za profesora na Univerzitetu u Berlinu. Dobre vijesti su ipak stigle prekasno. Abel je dokazao da ne postoji opšta algebarska formula za rješenja jednačine stepena većeg od četiri. Shodno tome, i neovisno od rada Galoe (Evariste Galois, 1811-1832. god. n.e., francuski matematičar i aktivist), zasnovao je granu matematike danas poznatu kao teorija grupa. Sa 16 godina je dao rigorozan dokaz da binomni teorem vrijedi za elemente iz $\mathbb{R}$, produžujući na taj način rezultat Ojlera koji je važio za elemente skupa $\mathbb{Q}$. Mnogi tadašnji prominentni matematičari, među kojima Gaus i Koši, kao i cijenjeni matematički časopisi, nisu nažalost prepoznali rad i potencijal mladog Abela. Abelovi rezultati su afirmisani nakon njegove smrti, a prefiks "abelov" ("abelova"), izveden iz njegovog imena, je postao toliko uobičajen u matematici da se dogovorno onda piše malim slovima. Među nekim od mnoštva termina su: abelova grupa, abelova kategorija, abelova varijacija, itd.

[48]**Ulisse Dini**, 1845-1918. god. n.e., italijanski matematičar i političar. Poznat je po svom doprinosu realnoj analizi. Bavio se analizom u doba kada je zasnovana na rigoroznim osnovama. Objavio je traktat 1877. godine pod nazivom: "Osnovi teorije funkcija realne promjenjive". Osim toga, napisao je oko 60 radova. Izveo je kriterij za konvergenciju Furijeovih redova koji po njemu nosi ime, tj. Dinijev kriterij. Bavio se diferencijalnom geometrijom površi baziranoj na radu Beltramija. Dinijev rad na polju teorije realnih funkcija je bio značajan za uvođenje pojma mjere skupa. Teorem o implicitno zadanoj funkciji je u Italiji poznat kao Dinijev teorem.

Znamo da je $\ln x = \log_e x$, pa notacija $\ln_{(n)} x$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ uvedena Definicijom 12.1 ne dovodi do zabune.

U Definiciji 12.1 se pojavljuju funkcije oblika $\ln(\ln(...(\ln(\ln x))...))$. Jasno je da su ovakve funkcije definisane za dovoljno veliko $x$, tj. definisane su u konačnici[49].

**Teorem 12.2 (Kriterij Abel-Dinija)** *Za svako $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, red*

$$\sum_{n=N(k)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n ... \ln_{(k)} n \left(\ln_{(k+1)} n\right)^{\alpha}}$$

*konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$, gdje je $N(k) \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj koji zavisi od $k$.*

**Dokaz:** Koristit ćemo integralni kriterij, tj. Teorem 4.5.

Primijetimo da je u formulaciji teorema broj $N(k) \in \mathbb{N}$ odabran da bude dovoljno velik. Inicijalno, broj $N(k)$ je odabran na ovaj način da bi logaritmi koji se pojavljuju u datom redu imali smisla, tj. da bi postojali. Dodatno, možemo smatrati da je $N(k)$ dovoljno veliko tako da su pomenuti logaritmi pozitivni.

Iz oblika reda

$$\sum_{n=N(k)}^{+\infty} a_n = \sum_{n=N(k)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n ... \ln_{(k)} n \left(\ln_{(k+1)} n\right)^{\alpha}}$$

vidimo da treba da posmatramo funkciju

$$f(x) = \frac{1}{x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\alpha}}$$

na intervalu $[N(k), +\infty)$.

Zbog pomenutog odabira broja $N(k) \in \mathbb{N}$, funkcija $f(x)$ je pozitivna na $[N(k), +\infty)$. Kao elementarna funkcija definisana na $[N(k), +\infty)$, $f(x)$ je neprekidna na $[N(k), +\infty)$.

[49]Vidjeti Napomenu 1.2.

Ako je $\alpha \geq 0$, onda je jasno da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $[N(k), +\infty)$.

Dokažimo da je funkcija $f(x)$ opadajuća na $[N(k), +\infty)$ i u slučaju kada je $\alpha < 0$.

Zbog $\alpha < 0$, možemo pisati $\alpha = -\beta$ za neko $\beta > 0$, pa je

$$f(x) = \frac{\left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta}}{x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x} = \frac{B(x)}{N(x)}.$$

Imamo,

$$f^{'}(x) = \left(\frac{B(x)}{N(x)}\right)^{'} = \frac{B^{'}(x) N(x) - B(x) N^{'}(x)}{(N(x))^2}.$$

Zanima nas $B^{'}(x) N(x) - B(x) N^{'}(x)$. Sada je,

$$\begin{aligned}
& B^{'}(x) N(x) - B(x) N^{'}(x) \\
= & \left(\left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta}\right)^{'} x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x - \\
& \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x\right)^{'} \\
= & \beta \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta-1} \cdot \frac{1}{\ln_{(k)} x} \cdot \frac{1}{\ln_{(k-1)} x} \cdot ... \cdot \frac{1}{\ln_{(1)} x} \cdot \frac{1}{x} \cdot \\
& x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x - \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x\right)^{'} \\
= & \beta \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta-1} - \\
& \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \Bigg( \left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x\right)^{'} \cdot \ln_{(k)} x + \\
& x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x \left(\ln_{(k)} x\right)^{'} \Bigg) \\
= & \beta \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta-1} - \\
& \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \Bigg( \left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x\right)^{'} \cdot \ln_{(k)} x + \\
& x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x \cdot \frac{1}{\ln_{(k-1)} x} \cdot \frac{1}{\ln_{(k-2)} x} \cdot ... \cdot \frac{1}{\ln_{(1)} x} \cdot \frac{1}{x} \Bigg) =
\end{aligned}$$

$$\beta \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta-1} - \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \left(\left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x\right)' \cdot \ln_{(k)} x + 1\right)$$
$$= \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta-1} \left(\beta - \ln_{(k+1)} x\right) -$$
$$\left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\beta} \left(x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k-1)} x\right)' \cdot \ln_{(k)} x.$$

Pošto je $N(k)$ dovoljno veliko, to možemo smatrati da je $\ln_{(k+1)} x > \beta$ za $x \in [N(k), +\infty)$, tj. da je $\beta - \ln_{(k+1)} x < 0$, $x \in [N(k), +\infty)$.

Zaključujemo,

$$B'(x) N(x) - B(x) N'(x) < 0$$

za $x \in [N(k), +\infty)$, tj. $f'(x) < 0$ za $x \in [N(k), +\infty)$.

Tako, funkcija $f(x)$ je opadajuća na $[N(k), +\infty)$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Imamo, funkcija $f(x)$ je definisana na $[N(k), +\infty)$, gdje je neprekidna, pozitivna i opadajuća, pa po integralnom kriteriju, tj. Teoremu 4.5, red $\sum\limits_{n=N(k)}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira nesvojstveni integral $\int\limits_{N(k)}^{+\infty} f(x)\, dx$.

Ispitajmo konvergenciju posljednjeg integrala, tj. integrala

$$I = \int\limits_{N(k)}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln_{(1)} x \ln_{(2)} x ... \ln_{(k)} x \left(\ln_{(k+1)} x\right)^{\alpha}}.$$

Stavimo, $u = \ln_{(k+1)} x$.

Sada je,

$$du = \frac{1}{\ln_{(k)} x} \cdot \frac{1}{\ln_{(k-1)} x} \cdot ... \cdot \frac{1}{\ln_{(1)} x} \cdot \frac{1}{x} dx,$$

a kada $x$ prolazi intervalom $[N(k), +\infty)$, to $u$ prolazi intervalom $\left[\ln_{(k+1)} N(k), +\infty\right)$, pa je

$$I = \int\limits_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{+\infty} \frac{du}{u^{\alpha}}.$$

Posmatrajmo integral $I_n = \int\limits_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{n} \frac{du}{u^\alpha}$.

Za $\alpha = 1$ je

$$I_n = \int\limits_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{n} \frac{du}{u} = \ln u \Big|_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{n} = \ln n - \ln \ln_{(k+1)} N(k) .$$

Jasno, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$, pa nesvojstveni integral $I$ divergira (ka $+\infty$, tj. $I = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$).

Odavde i iz integralnog kriterija slijedi da dati red divergira za $\alpha = 1$.

Za $\alpha \neq 1$ je

$$\begin{aligned} I_n = \int\limits_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{n} \frac{du}{u^\alpha} &= \frac{u^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\Big|_{\ln_{(k+1)} N(k)}^{n} \\ &= \frac{1}{1-\alpha}\left(n^{-\alpha+1} - \left(\ln_{(k+1)} N(k)\right)^{-\alpha+1}\right). \end{aligned}$$

Jasno je da je za $\alpha > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\left(\ln_{(k+1)} N(k)\right)^{\alpha-1}}$, što je konačan broj. Dakle,

$$I = \lim_{n \to +\infty} I_n = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \frac{1}{\left(\ln_{(k+1)} N(k)\right)^{\alpha-1}},$$

tj. nesvojstveni integral $I$ konvergira. Ovo po integralnom kriteriju znači da dati red konvergira za $\alpha > 1$.

S druge strane, za $\alpha < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$, pa i u ovom slučaju nesvojstveni integral divergira (ka $+\infty$, tj. $I = \lim\limits_{n \to +\infty} I_n = +\infty$).

Ponovo, po integralnom kriteriju, dati red divergira za $\alpha < 1$.

Tako, dati red konvergira za $\alpha > 1$ i divergira za $\alpha \leq 1$.

Dokaz je završen. ■

Ako je $k = 0$, red koji se pojavljuje u kriteriju Abel-Dinija, tj. Teoremu 12.2, ima oblik $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^\alpha}$.

Za $k=1$, u pitanju je red $\sum\limits_{n=N(1)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\alpha}}$, itd.

Tako, po Teoremu 12.2 konvergiraju npr. redovi $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$, $\varepsilon>0$, $\sum\limits_{n=N(1)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^{\frac{3}{2}}}$, itd., dok divergiraju redovi $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$, $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{\frac{1}{2}}}$, $\sum\limits_{n=N(0)}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{-100}}$, $\sum\limits_{n=N(1)}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n \ln \ln n}$, itd.

Vidimo da je Teorem 12.2 na određeni način generalizacija Teorema 4.12 (o $p$-redovima).

Jasno je da i Teorem 4.12 i Teorem 12.2 direktno obezbjeđuju informaciju o konvergenciji (divergenciji) redova koje tematiziraju. S druge strane, kako smo već vidjeli u slučaju $p$-redova, te informacije možemo itekako dobro iskoristiti prilikom ispitivanja konvergencije (divergencije) drugih redova upotrebom kriterija upoređivanja.

Jednostavno je za uočiti da su Rabeov i Bertranov kriterij formom slični. Drugim riječima, djeluje kao da je Bertranov kriterij nastao usložnjavanjem Rabeovog kriterija (ovdje govorimo o parovima Teorema: 11.1 i 11.6, 11.2 i 11.7 te 11.3 i 11.8).

Zapravo, to i jeste slučaj. Preciznije, i Rabeov i Bertanov kriterij su specijalni slučajevi opštijeg kriterija, rijeđe susretanog u literaturi, a poznatog takođe pod nazivom "Bertranov kriterij". Ovaj se kriterij, kao i već izvedeni kriteriji prethodne sekcije, pojavljuje u nekoliko formi. Navodimo ih u nastavku bez dokaza. Naime, njihovi dokazi su dugi (više su naučnog a ne udžbeničkog karaktera, tj. odudaraju od koncepta udžbenika), čisto su tehničke prirode (ne donose kvalitativno bilo kakvu novu informaciju), izvode se upotrebom kriterija upoređivanja i Abel-Dinijevog kriterija, pa ih zbog svega navedenog izostavljamo.

**Teorem 12.3 (Bertranov kriterij, prvi oblik)** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *pozitivan red. Za* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*, definišimo niz* $\{b_n(k)\}_{n=N(k)}^{+\infty}$ *implicitno sa*

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n \ln_{(1)} n} + \ldots + \frac{1}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n \ldots \ln_{(k-1)} n} + \frac{b_n(k)}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n \ldots \ln_{(k-1)} n \ln_{(k)} n},$$

*gdje je $N(k) \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj koji zavisi od $k$.*

*Pretpostavimo da za neko $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, postoji limes*[50] $b_k = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n(k)$. *Ako je $b_k > 1$ onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. Ako je $b_k < 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.*

*Općenitije, za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definišimo*[51]

$$\begin{aligned} b_{k,1} &= \liminf_{n \to +\infty} b_n(k), \\ b_{k,2} &= \limsup_{n \to +\infty} b_n(k). \end{aligned}$$

*Neka je $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Ako je $b_{k,1} > 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira. Ako je $b_{k,2} < 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.*

**Teorem 12.4 (Bertranov kriterij, drugi oblik)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red. Za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definišimo niz $\{b_n(k)\}_{n=N(k)}^{+\infty}$ implicitno sa*

$$\begin{aligned} \frac{a_{n+1}}{a_n} =& 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n \ln_{(1)} n} - ... - \\ & \frac{1}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n ... \ln_{(k-1)} n} - \frac{b_n(k)}{n \ln_{(1)} n \ln_{(2)} n ... \ln_{(k-1)} n \ln_{(k)} n}, \end{aligned}$$

*gdje je $N(k) \in \mathbb{N}$ dovoljno velik broj koji zavisi od $k$.*

*Pretpostavimo da za neko $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, postoji limes $b_k = \lim\limits_{n \to +\infty} b_n(k)$. Ako je $b_k > 1$ onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. Ako je $b_k < 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.*

*Općenitije, za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, definišimo*

$$\begin{aligned} b_{k,1} &= \liminf_{n \to +\infty} b_n(k), \\ b_{k,2} &= \limsup_{n \to +\infty} b_n(k). \end{aligned}$$

[50] Pretpostavljamo da navedeni limes postoji, tj. da je navedeni limes konačan ili beskonačan.

[51] Vidjeti notu Teorema 6.4.

*Neka je* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$*. Ako je* $b_{k,1} > 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergira. Ako je* $b_{k,2} < 1$*, red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *divergira.*

Ako je $k = 0$, onda je niz $\{b_n(0)\}_{n=N(0)}^{+\infty}$ u Teoremu 12.3 definisan "implicitno" sa

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{b_n(0)}{n}.$$

Odavde vidimo da indeks $n$ može da prolazi cijelim skupom $\mathbb{N}$, pa je $N(0) = 1$, tj. $\{b_n(0)\}_{n=N(0)}^{+\infty} = \{b_n(0)\}_{n=1}^{+\infty} = \{b_n(0)\}$.

Osim toga, sada je

$$b_n(0) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Tako, po Teoremu 12.3, ako postoji limes

$$b_0 = \lim_{n\to+\infty} b_n(0) = \lim_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$

i ako je $b_0 > 1$, onda je dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan. Ako je s druge strane $b_0 < 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan.

Općenitije, ako je $b_{0,1} > 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, a ako je $b_{0,2} < 1$, onda je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergentan, gdje je

$$b_{0,1} = \liminf_{n\to+\infty} b_n(0) = \liminf_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right),$$
$$b_{0,2} = \limsup_{n\to+\infty} b_n(0) = \limsup_{n\to+\infty} n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Upravo izvedene tvrdnje ne predstavljaju ništa drugo do tvrdnje Rabeovog kriterija date Teoremima 11.2 i 11.3.

Da smo prilikom izvođenja, umjesto Teorema 12.3 koristili Teorem 12.4, dobili bismo druge varijante tvrdnji Teorema 11.2 i 11.3.

Dakle, za $k = 0$, iz Teorema 12.3 i 12.4 dobijamo tvrdnje Teorema 11.2 i 11.3, tj. dobijamo tvrdnje Rabeovog kriterija.

Za $k = 1$, iz Teorema 12.3 i 12.4 dobili bismo tvrdnje Bertranovog kriterija date Teoremima 11.7 i 11.8.

Inače, među nekolicinom udžbenika koji uopšte tretiraju pitanje Bertranovog kriterija, velika većina se bavi samo slučajevima $k = 0$ i $k = 1$.

Ako tvrdnje Teorema 12.3 i 12.4 uporedimo sa tvrdnjom Teorema 12.2, onda vidimo da Bertranov kriterij možemo na određeni način smatrati unutrašnjom varijantom Abel-Dinijevog kriterija. Naime, Bertranov kriterij implicira direktnu upotrebu količnika članova posmatranog reda, što u određenjim situacijama zna biti izravnije za primjenu u odnosu na kriterij Abel-Dinija.

Pozitivna strana Bertranovih kriterija datih Teoremima 12.3 i 12.4 za $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je ta da su oni sistematični. To znači da ako Bertranov kriterij ne daje odgovor na pitanje o konvergenciji datog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ za neko konkretno $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, onda ga možemo pokušati primijeniti za vrijednost $k + 1$, pa onda eventualno za vrijednost $k + 2$, itd. Konkretnije, Teoremi 12.3 i 12.4 govore (na prvi pogled) o implicitno zadanim nizovima $\{b_n(k)\}_{n=N(k)}^{+\infty}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Iznad smo vidjeli kako u Teoremu 12.3 za $k = 0$ konstruišemo konkretan niz $\{b_n(0)\}_{n=N(0)}^{+\infty}$. Zaključili smo da je $N(0) = 1$, te da je

$$b_n(0) = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Konstatovali smo i kada u ovom slučaju ($k = 0$), dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira a kada divergira. Ako Teorem 12.3 ne može da odgovori na pitanje konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ za vrijednost $k = 0$, onda ga možemo pokušati primijeniti za vrijednost $k = 1$. Pretpostavimo da se nalazimo u ovakvoj poziciji ($k = 1$). Sada je niz $\{b_n(1)\}_{n=N(1)}^{+\infty}$ u Teoremu 12.3 definisan sa

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n(1)}{n \ln n}.$$

Odavde je jasno da indeks $n$ može da prolazi skupom $\{2, 3, ...\}$, tj. da je $N(1) = 2$, odnosno da je $\{b_n(1)\}_{n=N(1)}^{+\infty} = \{b_n(1)\}_{n=2}^{+\infty}$. Na prvi pogled, nizove $\{b_n(0)\}_{n=N(0)}^{+\infty}$, $\{b_n(1)\}_{n=N(1)}^{+\infty}$, ..., tj. nizove $\{b_n(k)\}_{n=N(k)}^{+\infty}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, određujemo nezavisno jedan od drugog. Ipak, uočimo sljedeće. Iz

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = 1 + \frac{1}{n} + \frac{b_n(1)}{n \ln n},$$

$n \in \{2, 3, ...\}$, slijedi da je

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = 1 + \frac{b_n(1)}{\ln n},$$

tj. da je

$$b_n(1) = \ln n \left(n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) - 1\right),$$

odnosno

$$b_n(1) = \ln n \left(b_n(0) - 1\right),$$

$n \in \{2, 3, ...\}$.

Posljednja jednakost nam govori da je niz $\{b_n(1)\}_{n=N(1)}^{+\infty} = \{b_n(1)\}_{n=2}^{+\infty}$ u potpunosti određen nizom $\{b_n(0)\}_{n=N(0)}^{+\infty} = \{b_n(0)\}_{n=1}^{+\infty}$. Niz $\{b_n(2)\}_{n=N(2)}^{+\infty}$ će onda biti u potpunosti određen nizom $\{b_n(1)\}_{n=N(1)}^{+\infty}$, itd. Zbog navedene rekurzivnosti, naši napori uloženi u određivanje konkretnog niza $\{b_n(k)\}_{n=N(k)}^{+\infty}$ (primjenu Bertranovog kriterija za vrijednost $k$) ne propadaju, nego bivaju (u slučaju potrebe) iskorišteni za konstrukciju niza $\{b_n(k+1)\}_{n=N(k+1)}^{+\infty}$ (upotrebu Bertranovog kriterija za vrijednost $k+1$). Upravo je ova osobina Bertranovih kriterija ta koja im daje maksimalnu iskoristivost.

## 12.1 Riješeni zadaci

$\diamondsuit$ **Zadatak 12.1.1** Dokazati da odgovarajući obrat tvrdnje Zadatka 9.1.2 ne vrijedi, tj. da postoji pozitivan opadajući niz $\{a_n\}$, takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$, ali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

**Dokaz:** Posmatrajmo niz $\{a_n\}$, gdje je $a_1 = 1$ i $a_n = \frac{1}{n\ln n}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
Niz $\{a_n\}$ je jasno pozitivan i opadajući.
Pri tome je

$$\lim_{n\to+\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Osim toga, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.
Naime, za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo da divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\ln n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.
Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 12.1.2** Dokazati da red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$, gdje je $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, može konvergirati ili divergirati.

**Dokaz:** Neka je $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.
Vrijedi, $a_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.
Osim toga, po Zadatku 68 u [DzG2, str. 164], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{\frac{n+1}{n}}}$ divergira.
Tako, pri datim pretpostavkama, dati red može divergirati.
Dokažimo da pri datim pretpostavkama, dati red može i konvergirati.
Kako je $1 < 2 < e$, to je $0 < \ln 2 < 1$, pa je $\ln\ln 2 < 0$.

S druge strane, iz $3 > e$ je $\ln 3 > 1$, pa je $\ln\ln 3 > 0$.

Stavimo zbog toga da je $a_n = \frac{2\ln\ln n}{\ln n}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Neka je $a_1 = a_2 = 1$ (mogli smo staviti da je $a_1 = a$ i $a_2 = b$ za proizvoljno odabrane pa fiksirane pozitivne vrijednosti $a$ i $b$).

Tako, $a_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Osim toga je,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\ln\ln n}{\ln n} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2\ln\ln n)'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln n} = 0.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Vidimo da niz $\{a_n\}$ zadovoljava pretpostavke zadatka.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ je

$$\begin{aligned} n^{a_n} &= n^{\frac{2\ln\ln n}{\ln n}} = e^{\ln n^{\frac{2\ln\ln n}{\ln n}}} \\ &= e^{\frac{2\ln\ln n}{\ln n}\cdot\ln n} = e^{2\ln\ln n} = e^{\ln(\ln n)^2} = (\ln n)^2, \end{aligned}$$

pa je $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n\cdot n^{a_n}} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo da posljednji red konvergira ($\alpha = 2$).

Tako, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$ konvergira, pa iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 12.1.3** Ako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ može konvergirati ili divergirati.

**Dokaz:** Neka je $a_n = \frac{1}{n^3}$, $n \in \mathbb{N}$.

Iz zadatka 59 u [DzG2, str. 140] znamo da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ konvergiraju.

Tako, ako pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ može da konvergira.

Neka je sada $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te $a_1 = 1$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, znamo da konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ (slučaj $\alpha = 2$), i da divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ (slučaj $\alpha = 1$).

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, te da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$.

Drugim riječima, ako pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$ može da divergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 12.1.4 (Putnam [10, 1950, A2])**[52] Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$.

**Rješenje:** Vrijedi, $2 \cdot 2 > 2 \cdot 1$, $3 \cdot 3 \cdot 3 > 3 \cdot 2 \cdot 1$, itd.

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $n^n > n!$.

Odavde je $n \ln n = \ln n^n > \ln(n!)$, tj. $\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln(n!)}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo da divergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

[52] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

Odavde, iz $\frac{1}{n \ln n} < \frac{1}{\ln(n!)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$. ■

♢ **Zadatak 12.1.5 (Putnam [43, 1982, A2])**[53] Neka je $B_n(x) = 1^x + 2^x + ... + n^x$ za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$. Dokazati ili opovrgnuti konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n(\log_n 2)}{(n \log_2 n)^2}$.

**Rješenje:** Dokažimo da je posmatrani red konvergentan.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $\log_n 2 > 0$.

Jasno je da je $B_n(x) > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$ i sve $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$.

Tako, dati red je pozitivan red.

Za $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ je $B_1(x) = 1^x = 1 \cdot 1^x$, $B_2(x) = 1^x + 2^x < 2^x + 2^x = 2 \cdot 2^x$, itd.

Općenito, za $n \in \mathbb{N}$ i $x \in \mathbb{R}$, $x > 0$ je $B_n(x) \leq n \cdot n^x$.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, sada vrijedi

$$\frac{B_n(\log_n 2)}{(n \log_2 n)^2} < \frac{n \cdot n^{\log_n 2}}{(n \log_2 n)^2} = \frac{2}{n(\log_2 n)^2}.$$

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo[54] da konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\log_2 n)^2}$, pa po Teoremu 1.1 konvergira dati red. ■

♢ **Zadatak 12.1.6** Ako je $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$, i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira, da li onda divergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ?

**Rješenje:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da divergira.

[53] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

[54] Kriterij Abel-Dinija, tj. Teorem 12.2 smo izveli posmatrajući funkciju $\ln x = \log_e x$. Jasno je da smo tvrdnju kriterija mogli izvesti uz posmatranje funkcije $\log_2 x$. Drugim riječima, jasno je da analogan rezultat vrijedi za funkciju $\log_2 x$.

Primijetimo da u postavci zadatka nije dato da su redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ pozitivni. Ono što se sigurno pretpostavlja je to da je $b_n \neq 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Ipak, ako bi redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ bili pozitivni, to bi iz datih pretpostavki, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1 (treća tvrdnja), slijedila divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Kako za redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ ne pretpostavljamo pozitivnost, to je za očekivati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da divergira.

Zaista, neka je $b_n = \frac{1}{n \ln n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, te $b_1 = 1$, i $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira.

Po Zadatku 8.1.9, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ konvergira, pa po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergira i red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$.

Kako red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergira, a red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ konvergira, to po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \left( \frac{1}{n \ln n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n} \right) = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$ divergira.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.6 u [DzG2], imamo da divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Kako smo već vidjeli u Zadatku 8.1.24, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$ konvergira po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2.

Vrijedi i $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$.

Zaista,

$$\begin{aligned}
\lim_{n \to +\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \to +\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n \ln n} + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}} \\
&= \lim_{n \to +\infty} \frac{\sqrt{n}}{\frac{(-1)^{n-1}}{\ln n} + 1} = +\infty.
\end{aligned}$$

Tako, pri datim pretpostavkama, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ne mora da divergira. ■

♢ **Zadatak 12.1.7** Može li integralni kriterij, tj. Teorem 4.5, biti iskorišten da se dokaže da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$ ne konvergira apsolutno ?

**Rješenje:** Odgovor je potvrdan.

Naime, kriterij Abel-Dinija, tj. Teorem 12.2 smo izveli upotrebom integralnog kriterija, tj. Teorema 4.5.

Takođe, za $k = 1$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n} \right|$, tj. slijedi činjenica da red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n \cdot \ln \ln n}$ ne konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Tako, u konačnici, integralni kriterij, tj. Teorem 4.5, implicira da dati red ne konvergira apsolutno. ■

♢ **Zadatak 12.1.8** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = g$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira za $g > 1$ i divergira za $g < 1$ (slučajevi $g = +\infty$ i $g = -\infty$ su takođe uključeni). Osim toga, dokazati da za $g = 1$ nemamo odgovor na pitanje da li dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ili ne.

**Dokaz:** Primijetimo da smo u Zadatku 3.1.4, upotrebom kriterija upoređivanja količnika, tj. Teorema 3.1, dokazali tvrdnje koje se odnose na slučajeve $g > 1$ i $g < 1$ (uključujući $g = +\infty$ i $g = -\infty$).

Vidimo da je Zadatak 12.1.8 upotpunjenje Zadatka 3.1.4 slučajem $g = 1$, tj. vidimo da Zadatak 12.1.8 možemo smatrati jednim kriterijem za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova.

Dokažimo dio koji se odnosi na slučaj $g = 1$.

Dovoljno je da dokažemo da postoji pozitivan konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, takav da je $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = 1$, te da postoji pozitivan divergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, za koji je $\lim\limits_{n \to +\infty} n \ln \frac{c_n}{c_{n+1}} = 1$.

Posmatrajmo pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.
Ovaj red je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].
Osim toga je

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{c_n}{c_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{n+1}{n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln \left(1+\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1.$$

Posmatrajmo sada pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, gdje je $b_1 = 1$ i $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, imamo da konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} b_n$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi konvergencija i reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.
Osim toga, vrijedi

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{b_n}{b_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{\frac{1}{n(\ln n)^2}}{\frac{1}{(n+1)(\ln(n+1))^2}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{n+1}{n} \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^2 = \lim_{n\to+\infty} \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^{2n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left[\ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + 2\ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n\right].$$

Jasno je da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \ln e = 1$.
Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln \left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = 0$.
Primijetimo da ako je $\{\alpha_n\}$ proizvoljan pozitivan niz koji teži ka 0 kad $n \to +\infty$, da je onda $\lim\limits_{n\to+\infty} (1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$.
Zaista, neka je $\{\alpha_n\}$ jedan niz opisanog oblika.
Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\alpha_n} = +\infty$.
Stavimo, $p_n = \frac{1}{\alpha_n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{p_n\}$ je pozitivan niz, i vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = +\infty$.

Odavde i iz Zadatka 4 u [DzG1, str. 107], imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e$. Dobijamo,

$$\lim_{n\to+\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{1}{\alpha_n}}\right)^{\frac{1}{\alpha_n}} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n} = e.$$

Dokažimo sada da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = 1$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)-\ln n+\ln n}{\ln n}\right)^n$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^n = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(1+\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}}}\right]^{\frac{n\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}\right]^{\frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\ln n}},$$

gdje je $\alpha_n = \frac{\ln\frac{n+1}{n}}{\ln n} > 0$ za $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, pri čemu je $\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n = 0$.

Ovo znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}} = e$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = e^{\frac{1}{+\infty}} = e^0 = 1$.

Tako, $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = \ln 1 = 0$, pa iz $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = 0$.

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1$, i tvrdnje $(a)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{b_n}{b_{n+1}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + 2\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n\right]$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \lim_{n\to+\infty}2\ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = 1+0 = 1.$$

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 12.1.9** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz. Pretpostavimo da je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e}$. Dokazati da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Dokaz:** Pošto je $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e}$, to možemo odabrati $\varepsilon > 0$ tako malo da vrijedi

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}} < \frac{1}{e}.$$

Iz $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}}$ i Zadatka 23 u [DzG1, str. 128], slijedi da postoji $N \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \frac{1}{e^{1+\varepsilon}}$.

Za $n \geq N$ je

$$\frac{1}{\ln\ln n}\cdot\ln(na_n) = \ln(na_n)^{\frac{1}{\ln\ln n}} < \ln\frac{1}{e^{1+\varepsilon}} = -1-\varepsilon,$$

tj. $\ln(na_n) < (-1-\varepsilon)\ln\ln n = \ln(\ln n)^{-1-\varepsilon}$, odnosno
$na_n < (\ln n)^{-1-\varepsilon} = \frac{1}{(\ln n)^{1+\varepsilon}}$, ili $a_n < \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$.

Odavde, iz nejednakosti $a_n < \frac{1}{n(\ln n)^{1+\varepsilon}}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, imamo konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Sada, iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], vidimo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 12.1.10** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red. Pretpostavimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = g$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira za $g > 1$ i divergira za $g < 1$ (ovdje $g$ može biti jednako $+\infty$ ili $-\infty$). Takođe, dokazati da za $g = 1$ nemamo odgovor na pitanje da li red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ili ne.

**Dokaz:** Primijetimo da tvrdnja ovog zadatka predstavlja oslabljenu varijantu logaritamskog kriterija datog Zadatkom 1.1.7 (vidjeti notu Zadatka 1.1.7).

Neka je $-\infty < g < 1$.

Odaberimo po volji pa fiksirajmo $\varepsilon > 0$ tako malo da je $g + \varepsilon < 1$.

Sada je $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ okolina granične vrijednosti $g = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$.

Po Zadatku 25 u [DzG1, str. 17], svaka okolina granične vrijednosti niza sadrži sve izuzev eventualno konačno mnogo elemenata niza.

U slučaju okoline $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$, postoji onda indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < g + \varepsilon$, tj. $\ln \frac{1}{a_n} < (g + \varepsilon) \ln n = \ln n^{g+\varepsilon}$, odnosno $\frac{1}{a_n} < n^{g+\varepsilon}$, ili $a_n > \frac{1}{n^{g+\varepsilon}}$.

Kako je $g + \varepsilon < 1$, to po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140] i Zadatku 126 u [DzG2, str. 226], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{g+\varepsilon}}$ divergira.

Odavde, iz $\frac{1}{n^{g+\varepsilon}} < a_n$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Neka je $g = -\infty$.

Za konstantu $C = -1$, postoji sada indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} < -1$, tj. $\ln \frac{1}{a_n} < -\ln n = \ln \frac{1}{n}$, odnosno $\frac{1}{a_n} < \frac{1}{n}$, ili $a_n > n$.

Odavde, iz $\lim\limits_{n \to +\infty} n = +\infty$, imamo da je i $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = +\infty$, što po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ divergira.

Pretpostavimo sada da je $1 < g < +\infty$.

Odaberimo po volji pa fiksirajmo $\varepsilon > 0$ tako malo da je $1 < g - \varepsilon$.

Po pomenutom Zadatku 25 u [DzG1], za okolinu $(g - \varepsilon, g + \varepsilon)$ granične vrijednosti $g = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > g - \varepsilon$, tj. $\ln \frac{1}{a_n} > (g - \varepsilon) \ln n = \ln n^{g-\varepsilon}$, odnosno $\frac{1}{a_n} > n^{g-\varepsilon}$, ili $a_n < \frac{1}{n^{g-\varepsilon}}$.

Kako je $g - \varepsilon > 1$, to po pomenutom Zadatku 59 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{g-\varepsilon}}$ konvergira.

Odavde, iz $a_n < \frac{1}{n^{g-\varepsilon}}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Neka je $g = +\infty$.

Za konstantu $C = 2$, postoji sada indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $\frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} > 2$, tj. $\ln \frac{1}{a_n} > \ln n^2$, odnosno $\frac{1}{a_n} > n^2$, ili $a_n < \frac{1}{n^2}$.

Po pomenutom Zadatku 59 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira.

Odavde, iz $a_n < \frac{1}{n^2}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dokažimo dio zadatka koji se odnosi na slučaj $g = 1$.

Dovoljno je da dokažemo da postoji pozitivan konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{b_n}}{\ln n} = 1$, te da postoji pozitivan divergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$, za koji je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{c_n}}{\ln n}$ $= 1$.

Posmatrajmo pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$.

Ovaj red je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Osim toga je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{c_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{\ln n} = 1.$$

Posmatrajmo sada pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$, gdje je $b_1 = 1$ i $b_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n$ $\geq 2$.

U Zadatku 12.1.8 smo upotrebom kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, zaključili da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ konvergira.

Osim toga, vrijedi

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{b_n}}{\ln n} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n\,(\ln n)^2}{\ln n} \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n + 2\ln\ln n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1 + 2\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right).\end{aligned}$$

Dokažimo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln n} = 0.$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln n} = \frac{+\infty}{+\infty}$, to možemo pokušati primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4).

Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln\ln n)'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

Zaključujemo, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\ln n}{\ln n} = 0$, pa je po $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], i $\lim\limits_{n\to+\infty} 2\frac{\ln\ln n}{\ln n} = 0.$

Odavde, i iz tvrdnje $(a)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{b_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+2\frac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$$
$$= \lim_{n\to+\infty} 1 + \lim_{n\to+\infty} 2\frac{\ln\ln n}{\ln n} = 1+0 = 1.$$

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 12.1.11** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$.

**Rješenje:** Za $n \in \mathbb{N}$ je $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$, a onda i $0 < \sin\frac{1}{n} < 1$.
Tako, za $n \in \mathbb{N}$ je $\frac{1}{\sin\frac{1}{n}} > 1$.

Žordanova[55] nejednakost tvrdi da za $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, vrijedi $\frac{2}{\pi}x \leq \sin x \leq x$.

[55] **Marie Ennemond Camille Jordan**, 1838-1922. god. n.e., francuski matematičar. Poznat je po radu na polju teorije grupa i uticajnom djelu "Cours d'analyse" iz oblasti analize. Rođen je u Lionu. Po profesiji je bio inžinjer. Poznat je i po ekscentričnoj notaciji i neobičnom odabiru matematičkih simbola. Žordanova: kriva, normalna forma, matrica, mjera, itd., neki su od pojmova koji se vezuju za ime Camille Jordan-a. Mnogo je doprinio da teorija Galoa postane dio opšte matematičke kulture. Bavio se prvim primjerima sporadičnih grupa. Asteroid 25593 Camillejordan, te Institut Camille Jordan nose ime po Camille Jordan-u.

Kako $\frac{1}{n} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \subseteq \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ za $n \in \mathbb{N}$, to je po lijevoj strani Žordanove nejednakosti, $\sin \frac{1}{n} \geq \frac{2}{\pi n}$, tj. $\frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \leq \frac{\pi n}{2}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Tako, $1 < \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \leq \frac{\pi n}{2}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Odavde je $0 < \ln \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \leq \ln \frac{\pi n}{2}$, te $0 < \ln \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \cdot \ln \frac{1}{\sin \frac{1}{n}} \leq \ln \frac{\pi n}{2} \cdot \ln \frac{\pi n}{2}$, tj. $0 < \ln \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{-1} \cdot \ln \left(\sin \frac{1}{n}\right)^{-1} \leq \ln \frac{\pi n}{2} \cdot \ln \frac{\pi n}{2}$, odnosno $0 < \ln^2 \left(\sin \frac{1}{n}\right) \leq \ln \frac{\pi n}{2} \cdot \ln \frac{\pi n}{2}$ za $n \in \mathbb{N}$.

U Zadatku 8 u [DzG1, str. 73] smo dokazali da za $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, vrijedi nejednakost $1 + \alpha < e^{\alpha}$.

Kako je $1 + \alpha = e^{\alpha}$ za $\alpha = 0$, to za $\alpha \in \mathbb{R}$ vrijedi nejednakost $1 + \alpha \leq e^{\alpha}$.

Odavde, za $1 + \alpha > 0$, tj. za $\alpha > -1$, imamo da je $\ln(1 + \alpha) \leq \alpha$.

Stavimo, $1 + \alpha = t > 0$.

Dobijamo da za $t > 0$, vrijedi nejednakost $\ln t \leq t - 1$.

Za $t > 0$ je $t - 1 < t$, pa vidimo da za $t > 0$ vrijedi nejednakost $\ln t < t$.

Neka $n \in \mathbb{N}$, i neka je $n \geq 2$. Vrijedi,

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\ln^2 \left(\sin \frac{1}{n}\right)} &\geq \frac{1}{\ln \frac{\pi n}{2} \cdot \ln \frac{\pi n}{2}} > \frac{1}{\frac{\pi n}{2} \cdot \ln \frac{\pi n}{2}} \\
&= \frac{2}{\pi n \cdot \left(\ln \frac{\pi}{2} + \ln n\right)} > \frac{2}{\pi n (\ln n + \ln n)} = \frac{2}{2\pi n \ln n} = \frac{1}{\pi n \ln n}.
\end{aligned}
$$

Drugim riječima, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $\frac{1}{n \ln n} < \pi \cdot \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$.

Za $k = 0$, iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n \ln n}$.

Odavde, iz $\frac{1}{n \ln n} < \pi \cdot \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, i kriterija uporeďivanja, tj. Teorema 1.1, imamo divergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$.

Sada, iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], dobijamo divergenciju i reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin \frac{1}{n}\right)}$. ■

## 12.2 Redovi razmatrani kriterijem Abel-Dinija

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{1+a_n}}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \sqrt{\frac{a_n}{n}}$

(3) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(n!)}$ (4) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{B_n(\log_n 2)}{(n\log_2 n)^2}$

(5) $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n\cdot\ln n\cdot\ln\ln n}$ (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2\left(\sin\frac{1}{n}\right)}$

# 13 Kriteriji za ispitivanje konvergencije redova sa članovima proizvoljnog znaka

Sa redovima čiji članovi nisu nužno nenegativni smo se već susreli u sekcijama 7 i 8. Traženjem suma pojedinih vrsta takvih redova smo se bavili u [DzG2].

Neka je dat neki red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pretpostavimo da su članovi $a_n$, $n \in \{1, 2, ..., N\}$, gdje je $N \in \mathbb{N}$ neki broj, negativni, a da su ostali članovi datog reda pozitivni. Sada je $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ pozitivan red, pa za ispitivanje njegove konvergencije možemo koristiti aparat izveden u prethodnim sekcijama. Pošto je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ ista, to je onda za ispitivanje konvergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ navedenog tipa, dovoljno znati ispitivati konvergenciju pozitivnih redova. Tako, znamo ispitivati konvergenciju opisanih redova.

Pretpostavimo sada da su članovi $a_n$, $n \in \{1, 2, ..., N\}$ pozitivni, a da su ostali članovi negativni. Red $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ je negativan, pa je red $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (-a_n)$ pozitivan, što znači da ponovo možemo primijeniti materijal prethodnih sekcija. Po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergencija redova $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (-a_n)$ i $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} -(-a_n)$ je ista. Kako smo već istakli, konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} a_n$ je ista, pa je onda i konvergencija redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=N+1}^{+\infty} (-a_n)$ ista. Ovo znači da je za ispitivanje konvergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ opisanog tipa, dovoljno znati ispitivati konvergenciju pozitivnih redova. Pošto znamo ispitivati konvergenciju pozitivnih redova, to onda znamo ispitivati i konvergenciju redova navedenog tipa.

Ako broj pozitivnih i broj negativnih članova datog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ nisu konačni, onda moramo imati na raspolaganju neke nove kriterije za ispitivanje konvergencije takvih redova. Za njihovo izvođenje potrebna nam je tzv. Abelova sumaciona formula. Ova formula ima primjenu i van teorije beskonačnih redova. Koristi se npr. u kombinatorici prilikom određivanja određenih vrsta konačnih suma. Nazivamo je još i "parcijalna sumacija" ili "parcijalno sumiranje" ili "sumiranje po dijelovima", nazivi koji jasno potiču od analogije sa parcijalnom integracijom, tj. "integracijom po dijelovima". Tako, Abelova sumaciona formula teži da bude značajna za teoriju beskonačnih redova u onolikoj mjeri u kojoj je to parcijalna integracija u sklopu diferencijalnog i integralnog računa.

**Teorem 13.1 (Abelova sumaciona formula)** *Neka su $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ proizvoljni nizovi. Neka je $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$. Osim toga, dodatno, stavimo da je $A_0 = 0$. Tada, za sve $1 \leq m \leq n$, vrijedi*

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right).$$

**Dokaz:** Za $k \in \mathbb{N}$ je

$$\begin{aligned} A_k =& a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k, \\ A_{k-1} =& a_1 + a_2 + ... + a_{k-1}, \end{aligned}$$

pa je $A_k - A_{k-1} = a_k$.

Tako, za $k \in \mathbb{N}$, možemo pisati

$$\begin{aligned} a_k b_k =& \left(A_k - A_{k-1}\right) b_k = A_k b_k - A_{k-1} b_k \\ =& A_k b_k - A_k b_{k+1} + A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k \\ =& A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_k b_{k+1} - A_{k-1} b_k. \end{aligned}$$

Imamo,

$$\sum_{k=m}^{n} a_k b_k = \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) +$$

$$\begin{aligned}
&A_m b_{m+1} - A_{m-1} b_m + \\
&A_{m+1} b_{m+2} - A_m b_{m+1} + \ldots + \\
&A_{n-1} b_n - A_{n-2} b_{n-1} + \\
&A_n b_{n+1} - A_{n-1} b_n \\
=&A_n b_{n+1} - A_{m-1} b_m + \sum_{k=m}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Dokaz je završen. ■

Za $m = 1$, Abelovu sumacionu formulu možemo pisati u obliku

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} a_k b_k =&A_n b_{n+1} - A_0 b_1 + \sum_{k=1}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) \\
=&A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) \\
=&A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_n \left(b_n - b_{n+1}\right) \\
=&A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right).
\end{aligned}$$

Izvedimo sljedeći teorem.

**Teorem 13.2** *Neka su* $\{a_n\}$ *i* $\{b_n\}$ *proizvoljni nizovi. Neka je* $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$*,* $n \in \mathbb{N}$*. Osim toga, dodatno, stavimo da je* $A_0 = 0$*. Ako konvergira red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right)$*, i postoji konačan limes* $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n b_{n+1}$*, onda konvergira red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$*.*

**Dokaz:** Neka je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po Abelovoj sumacionoj formuli (slučaj $m = 1$ iznad), vrijedi

$$\begin{aligned} S_n = &\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = A_n b_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) \\ =&A_n b_{n+1} + Q_n, \end{aligned}$$

gdje je $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right)$.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right)$ konvergira, pa konvergira niz $\{Q_n\}$.

Osim toga, po pretpostavci postoji konačan limes $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n b_{n+1}$, pa konvergira i niz $\{A_n b_{n+1}\}$.

Odavde, iz $S_n = A_n b_{n+1} + Q_n$ i Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da konvergira i niz $\{S_n\}$.

Ovo znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

Dokaz je završen. ■

Postoji više posljedica upravo dokazanog teorema, tj. Teorema 13.2. Ne može se sa sigurnošću tvrditi koja od tih posljedica odgovara kojem metematičaru. Ipak, poznat je skup imena koja se tradicionalno vezuju za pomenute rezultate. Pored Abela, tu su i Richard Dedekind, Lejeune Dirichlet, te Paul David du Bois-Reymond.

**Teorem 13.3 (Abel)** *Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red, i $\{b_n\}$ ograničen monoton niz. Tada je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergentan.*

**Dokaz:** Dovoljno je da dokažemo da su zadovoljene pretpostavke Teorema 13.2.

Neka je $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pošto je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ po pretpostavci konvergentan, to je niz $\{A_n\}$ konvergentan.

Niz $\{b_n\}$ je ograničen, pa je ograničen i odozgo i odozdo.

Ako je niz $\{b_n\}$ neopadajući ili rastući, onda iz njegove ograničenosti odozgo i Vajerštrasovog teorema [DzG1, Teo. 5.4, str. 48], slijedi njegova konvergencija.

Ako je $\{b_n\}$ nerastući ili opadajući niz, onda iz njegove ograničenosti odozdo i Teorema 5.5 u [DzG1, str. 49], slijedi njegova konvergencija.

Sada, iz konvergencije nizova $\{A_n\}$ i $\{b_n\}$, slijedi da postoje konačni limesi $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ i razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = b$.

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$ i tvrdnje $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da postoji i konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_{n+1} = Ab$.

Dokažimo da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\,(b_n - b_{n+1})$.

Po Teoremu 7.2 dovoljno je da dokažemo da je ovaj red apsolutno konvergentan, tj. da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |A_n|\,|b_n - b_{n+1}|$.

Pošto je niz $\{A_n\}$ konvergentan, to iz Zadatka 27 u [DzG1, str. 17], slijedi da je on ograničen, pa postoji konstanta $M > 0$, takva da je $|A_n| \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Dokažimo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konvergentan.

Označimo sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma ovog reda.

Imamo, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}|$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\{b_n\}$ neopadajući ili rastući niz. Sada je,

$$\begin{aligned} Q_n =& \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) \\ =& b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \ldots + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_1. \end{aligned}$$

Odavde, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = b$ i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = b - b_1$.

Ovo znači da niz $\{Q_n\}$ konvergira, pa konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$.

Ako je $\{b_n\}$ nerastući ili opadajući niz, onda je

$$Q_n = \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) =$$

$$b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + ... + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1},$$

pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = b_1 - b$.

Ovo ponovo znači da konvergira niz $\{Q_n\}$, te da onda i u ovom slučaju konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$|A_n| \, |b_n - b_{n+1}| \leq M \, |b_n - b_{n+1}| \, .$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |A_n| \, |b_n - b_{n+1}|$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n \left(b_n - b_{n+1}\right)$ je apsolutno konvergentan, pa je po Teoremu 7.2 i konvergentan.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Teorema 13.2, pa po njemu konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 13.4** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n r_n$ konvergira.

**Dokaz:** Koristit ćemo Abelov kriterij, tj. Teorem 13.3.

Po pretpostavci red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Zbog toga, po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergira i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ za $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ za $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Imamo, $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = S_3 + r_4 = ...,$$

gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Pošto je

$$S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = r_1,$$

to možemo pisati i

$$S = S_0 + r_1,$$

gdje smo stavili da je $S_0 = 0$.

Dakle,

$$S = S_0 + r_1 = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = S_3 + r_4 = ... \ .$$

S obzirom da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ red sa pozitivnim članovima, to je $S_0 < S_1 < S_2 < ...$ . Odavde i iz $S_0 + r_1 = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...$ slijedi da je $r_1 > r_2 > r_3 > ...$ .

Tako, niz $\{r_n\}$ je opadajući, tj. monoton je.

Po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], vrijedi $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$, što znači da je niz $\{r_n\}$ konvergentan, pa je on po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], ograničen.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, a niz $\{r_n\}$ je ograničen i monoton, pa je po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n r_n$.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 13.5** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $\{S_n\}$ niz njegovih parcijalnih suma. Dokazati da konvergiraju redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n S_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$.

**Dokaz:** Koristit ćemo Abelov kriterij, tj. Teorem 13.3.
Po pretpostavci red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.
To znači da konvergira niz $\{S_n\}$ njegovih parcijalnih suma.
Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je

$$0 < S_1 < S_2 < \dots .$$

Uzmimo neko $M > 0$, takvo da je

$$0 < M < S_1 < S_2 < \dots,$$

tj. da je $0 < M < S_n$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je niz $\{S_n\}$ konvergentan, to je on po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], ograničen. Specijalno, ograničen je odozgo, pa postoji konstanta $N > 0$, takva da je $S_n < N$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Imamo, $0 < M < S_n < N$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, a niz $\{S_n\}$ je ograničen i rastući, tj. monoton je, pa je po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n S_n$ konvergentan.

Pošto je $S_n > 0$ za sve $n \in \mathbb{N}$, to ima smisla da posmatramo niz $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$.

Iz $0 < S_1 < S_2 < \dots$, slijedi da je $\frac{1}{S_1} > \frac{1}{S_2} > \dots$, tj. slijedi da je niz $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ opadajući, odnosno monoton.

Osim toga, iz $0 < M < S_n < N$ za $n \in \mathbb{N}$, imamo da je $\frac{1}{N} < \frac{1}{S_n} < \frac{1}{M}$ za $n \in \mathbb{N}$, pa je niz $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ ograničen.

Tako, red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a niz $\left\{\frac{1}{S_n}\right\}$ je ograničen i monoton, pa je po Abelovom kriteriju (Teorem 13.3), red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ konvergentan.

Dokaz je završen. ∎

**Teorem 13.6 (Dirichlet[56])** *Neka je* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ *red takav da je niz* $\{A_n\}$ *njegovih parcijalnih suma ograničen. Pretpostavimo da je* $\{b_n\}$ *monoton niz za koji je* $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$*. Dokazati da je konvergentan red* $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$*.*

**Dokaz:** Dokazat ćemo da su zadovoljene pretpostavke Teorema 13.2.

Niz $\{A_n\}$ je ograničen, pa postoji konstanta $K > 0$, takva da je $|A_n| \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50], slijedi da je i $\lim_{n\to+\infty} b_{n+1} = 0$.

Ovo znači da za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi

$$|b_{n+1}| = |b_{n+1} - 0| < \frac{\varepsilon}{K}.$$

[56] **Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet**, 1805-1859. god. n.e., njemački matematičar. Dao je veliki doprinos teoriji brojeva, koji uključuje osnivanje oblasti analitičke teorije brojeva, te teoriji Furijeovih redova, kao i drugim temama matematičke analize. Smatra se jednim od prvih matematičara koji su dali modernu formalnu definiciju funkcije. Iako mu je prezime Lejeune Dirichlet, standardno je poznat kao Dirichlet (Dirihle), posebno po rezultatima koji po njemu nose ime. Uglavnom se bavio teorijom brojeva. Aparatom matematičke analize dokazao je 1837. godine teorem o aritmetičkim progresijama (Dirihleov teorem). Dokaz je za posljedicu imao osnivanje grane teorije brojeva danas poznate kao analitička teorija brojeva. Uveo je karaktere i $L$-funkcije koji po njemu nose ime. Skrenuo je pažnju na razliku između apsolutne i uslovne konvergencije redova. Teorem o aritmetičkim progresijama je generalizovao 1841. godine na slučaj prstena Gausovih cijelih (brojeva) $\mathbb{Z}[i]$. Istraživanjem koje je proveo nad strukturom jedinične grupe kvadratnih polja, dokazao je jedinični teorem (Dirihleov jedinični teorem), što je fundamentalni teorem algebarske teorije brojeva. Prvi je koristio tzv. princip golubove rupe (pigeonhole principle), danas poznat kao Dirihleov princip. Dokazao je Posljednji Fermaov Teorem za slučajeve $n = 5$ i $n = 14$. Konstruisao je primjer funkcije koja nije integrabilna (Dirihleova funkcija), te uveo jezgro i integral koji takođe po njemu nose ime. Po njemu su poznati i pojmovi: Dirihleov problem, Dirihleova energija, Dirihleova distribucija, Dirihleov proces, itd.

Za $n \geq n_0$, imamo

$$|A_n b_{n+1} - 0| = |A_n| \, |b_{n+1}| < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon.$$

Tako, za svako $\varepsilon > 0$, postoji $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, takav da za sve $n \geq n_0$, vrijedi $|A_n b_{n+1} - 0| < \varepsilon$. Ovo znači da je $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n b_{n+1} = 0$, tj. da postoji konačan limes $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n b_{n+1}$.

Dokažimo da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n (b_n - b_{n+1})$.

Po Teoremu 7.2, dovoljno je da dokažemo da je ovaj red apsolutno konvergentan, tj. da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |A_n| \, |b_n - b_{n+1}|$.

Dokažimo prvo da je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konvergentan.

Označimo sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma ovog reda.

Imamo, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}|$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $\{b_n\}$ neopadajući ili rastući niz. Sada je,

$$\begin{aligned} Q_n =& \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k| = \sum_{k=1}^{n} (b_{k+1} - b_k) \\ =& b_2 - b_1 + b_3 - b_2 + \dots + b_{n+1} - b_n = b_{n+1} - b_1. \end{aligned}$$

Odavde, iz $\lim\limits_{n \to +\infty} b_{n+1} = 0$, i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je $\lim\limits_{n \to +\infty} Q_n = -b_1$.

Ovo znači da niz $\{Q_n\}$ konvergira, pa konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$.

Ako je $\{b_n\}$ nerastući ili opadajući niz, onda je

$$\begin{aligned} Q_n =& \sum_{k=1}^{n} |b_k - b_{k+1}| = \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) \\ =& b_1 - b_2 + b_2 - b_3 + \dots + b_n - b_{n+1} = b_1 - b_{n+1}, \end{aligned}$$

pa je $\lim_{n\to+\infty} Q_n = b_1$.

Ovo ponovo znači da konvergira niz $\{Q_n\}$, te da onda i u ovom slučaju konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi,

$$|A_n|\,|b_n - b_{n+1}| \le K\,|b_n - b_{n+1}|\,.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi da konvergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty} |A_n|\,|b_n - b_{n+1}|$.

Dakle, red $\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\,(b_n - b_{n+1})$ je apsolutno konvergentan, pa je po Teoremu 7.2 i konvergentan.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Teorema 13.2, pa po njemu konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

Dokaz je završen. ■

**Teorem 13.7 (Dedekind[57])** *Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ red takav da je niz $\{A_n\}$ njegovih parcijalnih suma ograničen. Pretpostavimo da je $\{b_n\}$ niz za koji je $\lim_{n\to+\infty} b_n = 0$, i red $\sum_{n=1}^{+\infty} (b_n - b_{n+1})$ konvergira apsolutno. Dokazati da je konvergentan red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.*

[57] **Julius Wilhelm Richard Dedekind**, 1831-1916. god. n.e., njemački matematičar. Dao je značajan doprinos teoriji brojeva, apstraktnoj algebri (posebno teoriji prstena), te aksiomatskom zasnivanju aritmetike. Najznačajniji mu je doprinos definicija realnih brojeva pomoću presjeka koji po njemu nose ime, tj. Dedekindovih presjeka. Smatra se takođe pionirom u razvoju moderne teorije skupova i filozofije matematike poznate kao logicizam. Uveo je pojam sličnih skupova, kao skupova između kojih se može uspostaviti bijekcija. Sličnost mu je omogućila da dođe do prve precizne definicije beskonačnog skupa, kao skupa koji je sličan (ekvipotentan) sa svojim pravim podskupom. Dedekind je bio jedan od prvih matematičara koji su cijenili rad Kantora (Georg Cantor) na polju beskonačnih skupova. Pokazao se kao vrijedan saveznik u Kantorovim nesuglasicama sa Kronekerom (Leopold Kronecker), koji se u filozofskom smislu protivio Kantorovim transfinitnim brojevima.

**Dokaz:** Dokazat ćemo da su zadovoljene pretpostavke Teorema 13.2.

Identično kao u dokazu Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, iz ograničenosti niza $\{A_n\}$ i činjenice da je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, dokazujemo da postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_{n+1}$.

Niz $\{A_n\}$ je ograničen, pa postoji konstanta $K > 0$, takva da je $|A_n| \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ je konvergentan.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$|A_n|\,|b_n - b_{n+1}| \leq K\,|b_n - b_{n+1}|\,.$$

Odavde, identično kao u dokazu Teorema 13.6, zaključujemo da je konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\,(b_n - b_{n+1})$.

Tako, iz Teorema 13.2, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 13.8** Dokazati da se Dirihleov kriterij, tj. Teorem 13.6 može izvesti upotrebom Dedekindovog kriterija, tj. Teorema 13.7.

**Dokaz:** Neka vrijede pretpostavke Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6.

Vidimo da su na ovaj način zadovoljene sve pretpostavke Dedekindovog kriterija, tj. Teorema 13.7, osim pretpostavke da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$.

Da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ konvergira, zaključujemo upravo kao u dokazu Teorema 13.6.

Tako, zadovoljene su pretpostavke Dedekindovog kriterija, pa po njemu konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$. Ovo znači da vrijedi Dirihleov kriterij.

Dokaz je završen. ■

**Primjer 13.9** Dokazati da se Abelov kriterij, tj. Teorem 13.3 može izvesti upotrebom Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6.

**Dokaz:** Neka vrijede pretpostavke Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3.

Pošto je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan, to je niz $\{A_n\}$ njegovih parcijalnih suma konvergentan, pa je po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], i ograničen.

Niz $\{b_n\}$ je ograničen i monoton, pa na isti način kao u dokazu Teorema 13.3, zaključujemo da je on konvergentan.

Postoji dakle konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

Niz $\{b_n\}$ je monoton, pa je i niz $\{b_n - b\}$ monoton.

Iz $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$ i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} (b_n - b) = 0$.

Po Dirihleovom kriteriju konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - b)$.

Iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} ba_n$.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n (b_n - b)$ i tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 1.8, slijedi konvergencija i reda

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{+\infty} [a_n (b_n - b) + ba_n] \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n b_n - a_n b + ba_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n.\end{aligned}$$

Ovo znači da vrijedi Abelov kriterij.

Dokaz je završen. ■

**Teorem 13.10 (Bois-Reymond[58])** *Neka je* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ *konvergentan red, i* $\{b_n\}$ *niz takav*

[58]**Paul David Gustav du Bois-Reymond**, 1831-1889. god. n.e., njemački matematičar. Bavio se teorijom funkcija i matematičkom fizikom. Njegovo interesovanje je uključivalo Sturm-Liouville teoriju, integralne jednačine, kalkulus varijacija i Furijeove redove. Uspio je 1873. godine da konstruiše neprekidnu funkciju čiji Furijeov red nije konvergentan. Njegova lema daje dovoljan uslov da funkcija

*da je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$ *konvergentan. Tada je red* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ *konvergentan.*

**Dokaz:** Upotrijebit ćemo Teorem 13.2.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je konvergentan niz $\{A_n\}$ njegovih parcijalnih suma. Zbog toga je po Zadatku 27 u [DzG1, str. 17], niz $\{A_n\}$ ograničen.

Postoji dakle konstanta $K > 0$, takva da je $|A_n| \leq K$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Imamo,

$$|A_n|\,|b_n - b_{n+1}| \leq K\,|b_n - b_{n+1}|\,.$$

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |A_n|\,|b_n - b_{n+1}|$.

Dakle, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n\,(b_n - b_{n+1})$ je apsolutno konvergentan, pa je po Teoremu 7.2 i konvergentan.

Dokažimo još da postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_{n+1}$.

Iz konvergencije niza $\{A_n\}$ slijedi da postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$.

Dokažimo da postoji i konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1}$.

Po pretpostavci konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_n - b_{n+1}| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} |b_{n+1} - b_n|$, pa konvergira i niz $\{Q_n\}$ njegovih parcijalnih suma.

Jasno, $Q_n = \sum\limits_{k=1}^{n} |b_{k+1} - b_k|$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako smo već vidjeli, iz konvergencije niza $\{Q_n\}$ slijedi njegova ograničenost, pa postoji konstanta $c$, takva da je $Q_n < c$ za sve $n \in \mathbb{N}$, tj. da je

$$|b_2 - b_1| + |b_3 - b_2| + ... + |b_{n+1} - b_n| < c$$

bude jednaka nuli gotovo svuda. Du Bois-Reymond je dokazao da je trigonometrijski red koji konvergira ka neprekidnoj funkciji po tačkama ustvari Furijeov red te neprekidne funkcije. Ime mu se vezuje i za fundamentalnu lemu kalkulusa varijacija.

za sve $n \in \mathbb{N}$.

Posljednja nejednakost nam govori da je niz $\{b_n\}$ ograničene varijacije (vidjeti stranu 224 u [DzG1]).

Pošto je niz $\{b_n\}$ ograničene varijacije, to iz Zadatka 3 u [DzG1, str. 55], slijedi da je niz $\{b_n\}$ konvergentan.

Postoji dakle konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = b$.

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = b$.

Sada, iz $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = A$, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_{n+1} = b$, i tvrdnje $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n b_{n+1} = Ab$.

Vidimo da su zadovoljene pretpostavke Teorema 13.2, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira.

Dokaz je završen. ∎

**Primjer 13.11** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n(\ln n)^2}$.

**Rješenje:** Stavimo, $a_n = \frac{1}{n(\ln n)^2}$, $b_n = \arctan n$ za $n \in \{2, 3, ...\}$.

Iz kriterija Abel-Dinija, tj. Teorema 12.2, stavljanjem $k = 0$ i $\alpha = 2$, dobijamo da konvergira red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Znamo da je funkcija $f(x) = \arctan x$ definisana na $\mathbb{R}$, rastuća je na $\mathbb{R}$, i ograničena je na $\mathbb{R}$ ($-\frac{\pi}{2} < f(x) < \frac{\pi}{2}$, $x \in \mathbb{R}$).

Ovo znači da je niz $\{b_n\}_{n=2}^{+\infty}$ ograničen i monoton (rastući).

Vidimo da su zadovoljene pretpostavke Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, pa po njemu konvergira red

$$\sum_{n=2}^{+\infty} a_n b_n = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n(\ln n)^2}.$$

Tako, dati red konvergira. ∎

## 13.1 Riješeni zadaci

♢ **Zadatak 13.1.1** Upotrebom Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$.

**Rješenje:** Znamo da je $\sin \frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, tj. $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$.
Odavde je,

$$\frac{1}{n} \cdot \sin^2 n = \frac{1}{n} \cdot \sin^2 \frac{2n}{2} = \frac{1}{2n} \cdot (1 - \cos 2n),$$

tj. vrijedi

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{2n} - \frac{\cos 2n}{n}\right).$$

Vidimo da je dovoljno da posmatramo redove $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\cos 2n}{n}$.

Po Zadatku 8.1.9, red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$ konvergira, pa po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira i red $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{2n}$.

Imamo,

$$\begin{aligned}
&\sin(a-b) + \sin(a+b)\\
=&\sin a \cos b - \cos a \sin b + \sin a \cos b + \cos a \sin b\\
=&2 \sin a \cos b,
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \cos ka\\
=&2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos a + 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos 2a + ... + 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cos na\\
=&\sin\left(\frac{a}{2} - a\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + a\right) + \sin\left(\frac{a}{2} - 2a\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + 2a\right) + ...\\
&+ \sin\left(\frac{a}{2} - na\right) + \sin\left(\frac{a}{2} + na\right) =
\end{aligned}$$

$$\sin\left(-\frac{a}{2}\right)+\sin\left(\frac{3a}{2}\right)+\sin\left(-\frac{3a}{2}\right)+\sin\left(\frac{5a}{2}\right)+...$$
$$+\sin\left(\frac{a-2na}{2}\right)+\sin\left(\frac{a+2na}{2}\right)$$
$$=-\sin\frac{a}{2}+\sin\frac{3a}{2}-\sin\frac{3a}{2}+\sin\frac{5a}{2}+...-\sin\frac{(2n-1)\,a}{2}+\sin\frac{(2n+1)\,a}{2}$$
$$=\sin\frac{(2n+1)\,a}{2}-\sin\frac{a}{2}.$$

Pošto je $\sin p-\sin q=2\sin\frac{p-q}{2}\cdot\cos\frac{p+q}{2}$, to vidimo da vrijedi

$$2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\cdot\sum_{k=1}^{n}\cos ka=\sin\frac{(2n+1)\,a}{2}-\sin\frac{a}{2}$$
$$=2\sin\frac{\frac{(2n+1)a}{2}-\frac{a}{2}}{2}\cdot\cos\frac{\frac{(2n+1)a}{2}+\frac{a}{2}}{2}$$
$$=2\sin\frac{na}{2}\cdot\cos\frac{(2n+1)\,a}{2},$$

pa za $a\neq 2k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{n}\cos ka=\frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$, gdje je $a_n=(-1)^n\cos 2n$, $b_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Vrijedi,

$$\cos\left(\pi-2\right)n=\cos\left(n\pi-2n\right)$$
$$=\cos n\pi\cdot\cos 2n+\sin n\pi\cdot\sin 2n$$
$$=(-1)^n\cdot\cos 2n+0\cdot\sin 2n=(-1)^n\cos 2n.$$

Sada je,

$$|A_n|=\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos 2k\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}\cos\left(\pi-2\right)k\right|=$$

$$\left|\frac{\sin\frac{n(\pi-2)}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)(\pi-2)}{2}}{\sin\frac{\pi-2}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right|}.$$

Pošto je

$$\begin{aligned}\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right) =& \sin\frac{\pi}{2}\cos 1-\cos\frac{\pi}{2}\sin 1\\ =& 1\cdot\cos 1-0\cdot\sin 1=\cos 1,\end{aligned}$$

a zbog $0<1<\frac{\pi}{2}$ vrijedi $1>\cos 1>\cos\frac{\pi}{2}=0$, to možemo pisati,

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right|}=\frac{1}{\cos 1}.$$

Ovo znači da je niz $\{A_n\}$ parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ ograničen.

Kako osim toga niz $\{b_n\}$, tj. niz $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n\to+\infty$, to po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$ konvergira.

Odavde i iz pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], imamo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$.

Tako, iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}-(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}$, i tvrdnje $(b)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], imamo da konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left((-1)^n\cdot\frac{1}{2n}-(-1)^n\frac{\cos 2n}{n}\right)=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\sin^2 n}{n}.$$

Drugim riječima, dati red konvergira. ■

♢ **Zadatak 13.1.2** Koristeći Dirihleov kriterij, tj. Teorem 13.6, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin n}{n}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}\right)$.

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $b_n = \frac{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$, $a_n = \sin n$, $n \in \mathbb{N}$.

U Zadatku 8.1.28 smo dokazali da za niz $\{c_n\}$ koji opada ka nuli, i niz $\left\{\frac{c_1+c_2+\ldots+c_n}{n}\right\}$ opada ka nuli.

Odavde i iz činjenice da niz $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ opada ka nuli slijedi da i niz $\{b_n\}$ opada ka nuli. Imamo,

$$
\begin{aligned}
&\cos(a-b) - \cos(a+b) \\
=&\cos a \cos b + \sin a \sin b - \cos a \cos b + \sin a \sin b \\
=&2 \sin a \sin b,
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin ka \\
=&2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin a + 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin 2a + \ldots + 2\sin\left(\frac{a}{2}\right)\sin na \\
=&\cos\left(\frac{a}{2}-a\right) - \cos\left(\frac{a}{2}+a\right) + \cos\left(\frac{a}{2}-2a\right) - \cos\left(\frac{a}{2}+2a\right) + \ldots \\
&+\cos\left(\frac{a}{2}-na\right) - \cos\left(\frac{a}{2}+na\right) \\
=&\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{3a}{2} + \cos\frac{3a}{2} - \cos\frac{5a}{2} + \ldots + \cos\frac{a-2na}{2} - \sin\frac{a+2na}{2} \\
=&\cos\frac{a}{2} - \cos\frac{(2n+1)a}{2}.
\end{aligned}
$$

Pošto je $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2} \cdot \sin\frac{p-q}{2}$, to vidimo da vrijedi

$$
\begin{aligned}
&2\sin\left(\frac{a}{2}\right) \cdot \sum_{k=1}^{n} \sin ka = -\left(\cos\frac{(2n+1)a}{2} - \cos\frac{a}{2}\right) \\
=&2\sin\frac{\frac{(2n+1)a}{2}+\frac{a}{2}}{2} \cdot \sin\frac{\frac{(2n+1)a}{2}-\frac{a}{2}}{2} \\
=&2\sin\frac{(n+1)a}{2} \cdot \sin\frac{na}{2},
\end{aligned}
$$

pa za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo da je

$$\sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin \frac{na}{2} \sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Vrijedi,

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\right| = \left|\frac{\sin \frac{n}{2} \sin \frac{(n+1)}{2}}{\sin \frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|}.$$

Pošto je $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, to je $0 < \sin \frac{1}{2} < 1$, pa možemo pisati,

$$|A_n| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Ovo znači da je niz $\{A_n\}$ ograničen.
Niz $\{A_n\}$ je ograničen, a niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ konvergira.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 13.1.3** Upotrebom Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right)$.

**Rješenje:** Vrijedi,

$$\cos\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{\pi n^2 + \pi n - \pi n}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{n\pi\,(n+1) - n\pi}{n+1}\right)$$
$$= \cos\left(n\pi - \frac{n\pi}{n+1}\right) = \cos n\pi \cdot \cos \frac{n\pi}{n+1} + \sin n\pi \cdot \sin \frac{n\pi}{n+1}$$
$$= (-1)^n \cdot \cos \frac{n\pi}{n+1} + 0 \cdot \sin \frac{n\pi}{n+1} = (-1)^n \cdot \cos \frac{n\pi}{n+1} =$$

$$\begin{aligned}
&(-1)^n \cdot \cos \frac{n\pi + \pi - \pi}{n+1} = (-1)^n \cdot \cos \frac{(n+1)\,\pi - \pi}{n+1} \\
&= (-1)^n \cos\left(\pi - \frac{\pi}{n+1}\right) \\
&= (-1)^n \cdot \cos\pi \cos\frac{\pi}{n+1} + (-1)^n \sin\pi \sin\frac{\pi}{n+1} \\
&= (-1)^n \cdot (-1) \cdot \cos\frac{\pi}{n+1} + (-1)^n \cdot 0 \cdot \sin\frac{\pi}{n+1} \\
&= (-1)^{n+1} \cdot \cos\frac{\pi}{n+1},
\end{aligned}$$

pa je dati red oblika $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos\frac{\pi}{n+1}}{\ln^2 n}$.

Označimo posljednji red sa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{\ln^2 n}$, $b_n = \cos\frac{\pi}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Niz $\left\{\frac{1}{\ln^2 n}\right\}_{n=2}^{+\infty}$ opadajući teži ka nuli kad $n \to +\infty$, pa kako je $\frac{1}{\ln^2 n} > 0$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, to po kriteriju za alternirajuće redove, tj. Teoremu 8.2, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\ln^2 n}$ konvergira.

Odavde i iz tvrdnje $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi i konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{1}{\ln^2 n} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Jasno, $|b_n| = \left|\cos\frac{\pi}{n+1}\right| \leq 1$ za sve $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.

Osim toga, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $0 < ... < \frac{\pi}{n+1} < ... < \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ i $1 > ... > \cos\frac{\pi}{n+1} > ... > \cos\frac{\pi}{4} > \cos\frac{\pi}{3} > \cos\frac{\pi}{2} = 0$.

Drugim riječima, $\cos\frac{\pi}{n+2} > \cos\frac{\pi}{n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, tj. niz $\left\{\cos\frac{\pi}{n+1}\right\}_{n=2}^{+\infty}$ je monoton (rastući).

Zaključujemo, $\{b_n\}_{n=2}^{+\infty}$ je ograničen i monoton niz.

Odavde, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$, i Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n b_n$.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right)$ konvergira. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 13.1.4** Neka $p \in \mathbb{R}$. Upotrebom Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$.

**Rješenje:** Ako je $p = 0$, onda je dati red oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{1+\sin\frac{n\pi}{4}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{1}{1+\sin\frac{n\pi}{4}}\right).$$

Ukoliko bi ovaj red konvergirao, to bi po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4] značilo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{n\pi}{4} = 0$.

Odavde i iz Leme 7.12 u [DzG1, str. 91] bi imali da i za podniz $\left\{\sin\frac{(8n-7)\pi}{4}\right\}$ niza $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$, vrijedi $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{(8n-7)\pi}{4} = 0$.

Ipak, $\sin\frac{\pi}{4} = \sin\frac{9\pi}{4} = \sin\frac{17\pi}{4} = ... = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tj. $\sin\frac{(8n-7)\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što znači da nije $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{(8n-7)\pi}{4} = 0$.

U kontradikciju vodi pretpostavka da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{1+\sin\frac{n\pi}{4}}$ konvergira, pa on divergira (ne konvergira).

Ako bi red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{1+\sin\frac{n\pi}{4}}$ konvergirao apsolutno (Definicija 7.1), to bi on po Teoremu 7.2 i konvergirao, što nije slučaj.

Dakle, za $p = 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Neka je $p < 0$.

Možemo pisati, $p = -q$ za neko $q > 0$.

Dati red je sada oblika

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\frac{1}{n^q}+\sin\frac{n\pi}{4}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\frac{\frac{1}{n^q}}{\frac{1}{n^q}+\sin\frac{n\pi}{4}}\right).$$

Upravo smo vidjeli da ne može biti $\lim\limits_{n\to+\infty} \sin\frac{n\pi}{4} = 0$.

To znači da opšti član posljednjeg reda teži ka 1 kad $n \to +\infty$, pa po pomenutom Teoremu 1.4 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{\frac{1}{n^q}+\sin\frac{n\pi}{4}}$ divergira (ne konvergira).

Tako, za $p<0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Pretpostavimo da je $p>0$.

Posmatrajmo red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\cdot\frac{1}{\left|1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right|}.$$

Niz $\left\{\sin\frac{n\pi}{4}\right\}$ je ograničen, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}=0$, što znači da je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right)=1$ (vidjeti tvrdnju $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19]).

Osim toga, vrijednosti niza $\left\{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right\}$ su: $1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{1^p}$, $1+\frac{1}{2^p}$, $1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{3^p}$, $1$, $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}$, $1-\frac{1}{6^p}$, $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7^p}$, $1$, $1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{9^p}$, $1+\frac{1}{10^p}$, $1+\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{11^p}$, $1$, $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{13^p}$, $1-\frac{1}{14^p}$, $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{15^p}$, $1$, ... .

Pošto je $5^p>1$, tj. $\frac{1}{5^p}<1$, i $\frac{\sqrt{2}}{2}<1$, to je $\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{5^p}<1$, odnosno $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}>0$.

Tako, $0<1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}<1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7^p}<1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{13^p}<1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{15^p}<\ldots$ .

Takođe, $6^p>1$, tj. $\frac{1}{6^p}<1$, pa je $1-\frac{1}{6^p}>0$.

Slijedi, $0<1-\frac{1}{6^p}<1-\frac{1}{14^p}<\ldots$ .

Ovo znači da je niz $\left\{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\right\}$ pozitivan i da je njegov minimum dat ili sa $1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}$ ili sa $1-\frac{1}{6^p}$.

Stavimo, $c=\min\left\{1-\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{5^p}, 1-\frac{1}{6^p}\right\}>0$.

Jasno je da je $1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}<2$ za $n\in\mathbb{N}$.

Tako, $0<c\le 1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}<2$ za sve $n\in\mathbb{N}$.

Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}\right| = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p}\cdot\frac{1}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}.$$

Znamo da je $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, tj. $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2}$.
Osim toga je $0 \leq \left|\sin\frac{n\pi}{4}\right| \leq 1$, pa je $\sin^2\frac{n\pi}{4} \leq \left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|$.
Imamo,

$$\begin{aligned}&\frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}} > \frac{\left|\sin\frac{n\pi}{4}\right|}{2n^p}\\ \geq&\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{2n^p} = \frac{1}{2n^p}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^p} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}.\end{aligned}$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \cos\frac{n\pi}{2}$, $b_n = \frac{1}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$.
U rješenju Zadatka 13.1.1 smo dokazali da je za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\cos\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}|A_n| &= \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}\right|\\ &= \left|\frac{\sin\frac{n\cdot\frac{\pi}{2}}{2}\cdot\cos\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{2}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{2}}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{2}\right|} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2},\end{aligned}$$

što znači da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Odavde, iz činjenice da niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, i kriterija Dirihlea, tj. Teorema 13.6, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$.

Po $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^p}$.

Iz Zadatka 59 u [DzG2, str. 140], znamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$ i divergira za $0 < p \leq 1$.

Po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], divergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^p}$ za $0 < p \leq 1$.

Tako, za $0 < p \leq 1$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^p}$ divergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p}$ konvergira, pa po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], za $0 < p \leq 1$, divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^p} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p} \right)$.

Odavde, iz

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{n^p} - \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos \frac{n\pi}{2}}{n^p} < \frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} = \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} \right|,$$

i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} \right|$ za $0 < p \leq 1$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno za $0 < p \leq 1$.

Imamo,

$$\frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} \leq \frac{1}{n^p} \cdot \frac{1}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^p}.$$

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ konvergira za $p > 1$, to po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], za $p > 1$ konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^p}$.

Odavde, iz

$$\left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} \right| = \frac{\left|\sin \frac{n\pi}{4}\right|}{n^p} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^p},$$

i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}} \right|$ za $p > 1$.

Drugim riječima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$ konvergira apsolutno, pa i konvergira (ne divergira) za $p > 1$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno za $0 < p \leq 1$, pa njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati za $0 < p \leq 1$.

Možemo pisati,

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}} = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} \cdot \frac{1}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}} = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} \cdot \frac{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}-\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}$$
$$= \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}\left(1-\frac{\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}\right) = \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}.$$

Posmatrajmo redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}$.

Primijetimo da je zbog $0 < c \leq 1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} < 2$, $n \in \mathbb{N}$, drugi red pozitivan red.

U rješenju Zadatka 13.1.2 smo dokazali da je za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

$$\sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin\frac{na}{2}\sin\frac{(n+1)a}{2}}{\sin\frac{a}{2}}.$$

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} e_n f_n$, gdje je $e_n = \sin\frac{n\pi}{4}$, $f_n = \frac{1}{n^p}$, $n \in \mathbb{N}$, i označimo sa $\{E_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e_n$. Vrijedi,

$$|E_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} e_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin\frac{k\pi}{4}\right| = \left|\frac{\sin\frac{n\cdot\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{(n+1)\cdot\frac{\pi}{4}}{2}}{\sin\frac{\frac{\pi}{4}}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\pi}{8}\right|}.$$

Kako je $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, to je $0 < \sin\frac{\pi}{8} < 1$, pa je $|E_n| \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}}$, što znači da je niz $\{E_n\}$ ograničen.

Osim toga, niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e_n f_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ konvergira (konvergira za $p > 0$).

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}$.

Imamo,

$$\frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}} > \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{2} = \frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{2n^{2p}}$$

$$\frac{1}{2n^{2p}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{2}\right) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}.$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n h_n$, gdje je $g_n = \cos\frac{n\pi}{2}$, $h_n = \frac{1}{n^{2p}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $\{G_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n$. Imamo,

$$|G_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} g_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n}\cos\frac{k\pi}{2}\right| = |A_n| \leq \sqrt{2},$$

pa je niz $\{G_n\}$ ograničen.

Kako osim toga niz $\{h_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, to po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} g_n h_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ konvergira (konvergira za $p > 0$).

Po $(a)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}$ (za $p > 0$).

Po pomenutom Zadatku 59 u [DzG2], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{2p}}$ konvergira za $2p > 1$, tj. za $p > \frac{1}{2}$, i divergira za $0 < 2p \leq 1$, tj. za $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Ponovo po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], imamo da za $0 < p \leq \frac{1}{2}$ divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{2p}}$.

Tako, za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{2p}}$ divergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{2}}{n^{2p}}$ konvergira, pa po pomenutom Zadatku 123 u [DzG2], za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}}\right)$.

Odavde, iz

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{n^{2p}} - \frac{1}{4}\cdot\frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{n^{2p}} < \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}},$$

i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}}$ za $0 < p \leq \frac{1}{2}$.

Ponovo, po $(a)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], za $0 < p \leq \frac{1}{2}$ divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}}$.

Za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}$ konvergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}}$ divergira, pa po pomenutom Zadatku 123 u [DzG2], za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, divergira (ne konvergira) i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}.$$

Zaključujemo, za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin \frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira.

Ostaje da razmotrimo slučaj $\frac{1}{2} < p \leq 1$.

Imamo,

$$\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} \leq \frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{c} = \frac{1}{c} \cdot \frac{\sin^{\frac{n\pi}{4}}}{n^{2p}} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^{2p}}.$$

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{2p}}$ konvergira za $p > \frac{1}{2}$, pa po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], za $p > \frac{1}{2}$ konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^{2p}}$.

Odavde, iz

$$\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}} \leq \frac{1}{c} \cdot \frac{1}{n^{2p}},$$

i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p}}$ za $p > \frac{1}{2}$.

Po tvrdnji $(a)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], za $p > \frac{1}{2}$ konvergira onda i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}$.

Za $p > \frac{1}{2}$ konvergiraju redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\frac{\sin^2 \frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}$, pa po tvrdnji $(b)$ pomenutog Teorema 1.8 u [DzG2], za $p > \frac{1}{2}$ konvergira (ne divergira) i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p} - \frac{\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}}{n^{2p}}}{1+\frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p}}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin\frac{n\pi}{4}}.$$

Rezimirajmo, za $p \leq 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira, za $0 < p \leq \frac{1}{2}$, red ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira, za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, red ne konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira, za $p > 1$, red konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira.

Sažetije, za $p \leq \frac{1}{2}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ ne konvergira apsolutno, ne konvergira, te divergira, za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, red ne konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira, za $p$ $> 1$, red konvergira apsolutno, konvergira, te ne divergira.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin\frac{n\pi}{4}}{n^p+\sin\frac{n\pi}{4}}$ konvergira za $\frac{1}{2} < p \leq 1$, ali ne konvergira apsolutno, to on za $\frac{1}{2} < p \leq 1$ konvergira uslovno (Definicija 7.6). ■

♢ **Zadatak 13.1.5** Da li konvergira red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}$ ?

**Rješenje:** Vrijedi,

$$\sin\left(n+\frac{1}{n}\right) = \sin n \cos\frac{1}{n} + \cos n \sin\frac{1}{n},$$

pa posmatramo redove $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$ i $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}$.

Posmatrajmo prvo red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln\ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \sin n$, $b_n = \frac{1}{\ln\ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$.

U rješenju Zadatka 13.1.2 smo dokazali da je za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin \frac{na}{2} \sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Dobijamo,

$$|A_n| = \left|\sum_{k=3}^{n+2} a_k\right| = \left|\sum_{k=3}^{n+2} \sin k\right| = \left|\frac{\sin \frac{n+2}{2} \sin \frac{n+3}{2}}{\sin \frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|}.$$

Vrijedi, $0 < \frac{1}{2} < \frac{\pi}{2}$, pa je $0 < \sin \frac{1}{2} < 1$, što znači da je $|A_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}$, odnosno da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Kako osim toga niz $\{b_n\}_{n=3}^{+\infty}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, to iz Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln \ln n}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} c_n d_n$, gdje je $c_n = \frac{\sin n}{\ln \ln n}$, $d_n = \cos \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Kako smo već vidjeli, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} c_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n}{\ln \ln n}$ konvergira.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ je $0 < ... < \frac{1}{n} < ... < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $1 > ... > \cos \frac{1}{n} > ... > \cos \frac{1}{4} > \cos \frac{1}{3} > 0$.

Drugim riječima, $\cos \frac{1}{n+1} > \cos \frac{1}{n}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tj. niz $\{d_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je monoton (rastući).

Vrijedi, $|d_n| \leq 1$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, pa je $\{d_n\}_{n=3}^{+\infty}$ ograničen i monoton niz.

Tako, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} c_n$ konvergira, a $\{d_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je ograničen monoton niz, pa po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} c_n d_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ konvergira.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n}{\ln \ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} e_n f_n$, gdje je $e_n = \cos n$, $f_n = \frac{1}{\ln \ln n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Označimo sa $\{E_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} e_n$.

U rješenju Zadatka 13.1.1 smo dokazali da je za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos ka = \frac{\sin \frac{na}{2} \cos \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Dobijamo,

$$|E_n| = \left|\sum_{k=3}^{n+2} e_k\right| = \left|\sum_{k=3}^{n+2} \cos k\right| = \left|\frac{\sin \frac{n+2}{2} \cos \frac{n+3}{2}}{\sin \frac{1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{1}{2}\right|} = \frac{1}{\sin \frac{1}{2}}.$$

Tako, niz $\{E_n\}$ je ograničen.

Kako osim toga niz $\{f_n\}_{n=3}^{+\infty}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, to iz Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} e_n f_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n}{\ln \ln n}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} g_n h_n$, gdje je $g_n = \frac{\cos n}{\ln \ln n}$, $h_n = \sin \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$.

Kako smo već vidjeli, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} g_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n}{\ln \ln n}$ konvergira.

Za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ je $0 < ... < \frac{1}{n} < ... < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{\pi}{2}$, pa je za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, $0 < ... < \sin \frac{1}{n} < ... < \sin \frac{1}{4} < \sin \frac{1}{3} < 1$.

Drugim riječima, $\sin \frac{1}{n} > \sin \frac{1}{n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, tj. niz $\{h_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je monoton (opadajući).

Vrijedi, $|h_n| \leq 1$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, pa je $\{h_n\}_{n=3}^{+\infty}$ ograničen i monoton niz.

Tao, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} g_n$ konvergira, a $\{h_n\}_{n=3}^{+\infty}$ je ograničen monoton niz, pa po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} g_n h_n = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ konvergira.

Iz konvergencije redova $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin n \cos \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$ i $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{\cos n \sin \frac{1}{n}}{\ln \ln n}$, i tvrdnje $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], slijedi i konvergencija reda

$$\sum_{n=3}^{+\infty}\left(\frac{\sin n\cos\frac{1}{n}}{\ln\ln n}+\frac{\cos n\sin\frac{1}{n}}{\ln\ln n}\right)=\sum_{n=3}^{+\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{n}\right)}{\ln\ln n}.$$

Zaključujemo, dati red konvergira. ■

◇ **Zadatak 13.1.6** Neka $a\in\mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na\sin n^2a}{n}$.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na\sin n^2a}{n}=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n$, gdje je $a_n=\sin na\sin n^2a$, $b_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$. Vrijedi,

$$\begin{aligned}&\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\\ =&\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\\ =&2\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$. Imamo,

$$\begin{aligned}|2A_n|&=\left|2\sum_{k=1}^{n}a_k\right|=\left|2\sum_{k=1}^{n}\sin ka\sin k^2a\right|=\left|\sum_{k=1}^{n}2\sin k^2a\sin ka\right|\\ &=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\left(k^2a-ka\right)-\cos\left(k^2a+ka\right)\right)\right|\\ &=\left|\sum_{k=1}^{n}\left(\cos k\left(k-1\right)a-\cos k\left(k+1\right)a\right)\right|\\ &=\Big|1-\cos 2a+\cos 2a-\cos 6a+\cos 6a-\cos 12a+...\\ &\quad+\cos n\left(n-1\right)a-\cos n\left(n+1\right)a\Big|\\ &=\left|1-\cos n\left(n+1\right)a\right|\leq 2,\end{aligned}$$

tj.

$$|A_n| \leq 1.$$

Ovo znači da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Osim toga, niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin n^2 a}{n}$ konvergira.

Tako, dati red konvergira za sve $a \in \mathbb{R}$. ■

◇ **Zadatak 13.1.7** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \sin na}{n}$ konvergira za sve $a \in \mathbb{R}$.

**Dokaz:** Vrijedi,

$$\begin{aligned}
&\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) \\
=&\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta \\
=&2\sin\alpha\cos\beta,
\end{aligned}$$

tj.

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right].$$

Slijedi,

$$\begin{aligned}
\sin na \cos n =& \frac{1}{2}\left[\sin(na+n) + \sin(na-n)\right] \\
=& \frac{1}{2}\sin n(a+1) + \frac{1}{2}\sin n(a-1).
\end{aligned}$$

Posmatrajmo zbog toga redove $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \sin n(a+1)$, $b_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

U rješenju Zadatka 13.1.2 smo dokazali da je za $b \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin kb = \frac{\sin \frac{nb}{2} \sin \frac{(n+1)b}{2}}{\sin \frac{b}{2}}.$$

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Za $a+1 \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. za $a \neq 2k\pi - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, imamo da je

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\,(a+1)\right| = \left|\frac{\sin \frac{n(a+1)}{2} \sin \frac{(n+1)(a+1)}{2}}{\sin \frac{a+1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{a+1}{2}\right|}.$$

Kako je $a \neq 2k\pi - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $\frac{a+1}{2} \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa je $\sin \frac{a+1}{2} \neq 0$, tj. $0 < \left|\sin \frac{a+1}{2}\right| \leq 1$.

Tako, niz $\{A_n\}$ je ograničen.

Osim toga, niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ konvergira za $a \neq 2k\pi - 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ako je $a = 2k\pi - 1$, $k \in \mathbb{Z}$, onda je

$$\sin n\,(a+1) = \sin 2nk\pi = 0,$$

što znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ konvergentan, i suma mu je jednaka nula.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ konvergira za sve $a \in \mathbb{R}$.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n d_n$, gdje je $c_n = \sin n\,(a-1)$, $d_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $\{C_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$.

Za $a-1 \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. za $a \neq 2k\pi + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, imamo da je

$$|C_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \sin k\,(a-1)\right| = \left|\frac{\sin\frac{n(a-1)}{2}\sin\frac{(n+1)(a-1)}{2}}{\sin\frac{a-1}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{a-1}{2}\right|}.$$

Kako je $a \neq 2k\pi + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $\frac{a-1}{2} \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa je $\sin\frac{a-1}{2} \neq 0$, tj. $0 < \left|\sin\frac{a-1}{2}\right| \leq 1$.

Ovo znači da je niz $\{C_n\}$ ograničen.

Niz $\{d_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n d_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$ konvergira za $a \neq 2k\pi + 1$, $k \in \mathbb{Z}$.

Ako je $a = 2k\pi + 1$, $k \in \mathbb{Z}$, onda je

$$\sin n\,(a-1) = \sin 2nk\pi = 0,$$

što znači da su svi članovi reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$ jednaki nuli, pa je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$ konvergentan, i suma mu je jednaka nula.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$ konvergira za sve $a \in \mathbb{R}$.

Redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a+1)}{2n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n(a-1)}{2n}$ konvergiraju za sve $a \in \mathbb{R}$, pa po tvrdnji $(b)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], za svako $a \in \mathbb{R}$, konvergira i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{\sin n\,(a+1)}{2n} + \frac{\sin n\,(a-1)}{2n}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \sin na}{n}.$$

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 13.1.8** Odrediti vrijednosti parametra $a \in \mathbb{R}$, za koje red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ konvergira apsolutno.

**Rješenje:** Posmatramo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin na}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{|\sin na|}{n}$.

Ako je $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, onda su svi članovi posljednjeg reda jednaki nuli, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{\sin na}{n}\right|$ konvergira, i suma mu je jednaka nula.

Ovo znači da za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ konvergira apsolutno (Definicija 7.1).

Pretpostavimo da je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Znamo da je $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$, tj. $\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\cos\alpha}{2}$.

Vrijedi, $0 \leq |\sin na| \leq 1$, pa je $0 \leq \sin^2 na \leq |\sin na| \leq 1$.

Dobijamo,

$$\frac{|\sin na|}{n} \geq \frac{\sin^2 na}{n} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2na}{2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n} - \frac{\cos 2na}{2n}.$$

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2na}{2n}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2na}{2n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \cos 2na$, $b_n = \frac{1}{2n}$, $n \in \mathbb{N}$.

U rješenju Zadatka 13.1.1 smo dokazali da je za $b \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \cos kb = \frac{\sin\frac{nb}{2}\cos\frac{(n+1)b}{2}}{\sin\frac{b}{2}}.$$

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Kako je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $2a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa dobijamo da vrijedi

$$|A_n| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} \cos k\cdot 2a\right| = \left|\frac{\sin\frac{n\cdot 2a}{2}\cos\frac{(n+1)\cdot 2a}{2}}{\sin\frac{2a}{2}}\right| \leq \frac{1}{|\sin a|}.$$

Pošto je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to je $\sin a \neq 0$, tj. $0 < |\sin a| \leq 1$.

Ovo znači da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n \to +\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 2na}{2n}$ konvergira.

Konvergira onda po tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2, str. 12], i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\cos 2na}{2n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6], pa je po pomenutoj tvrdnji $(a)$ Teorema 1.8 u [DzG2], divergentan i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}$ divergira, a red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} -\frac{\cos 2na}{2n}$ konvergira, pa po Zadatku 123 u [DzG2, str. 224], divergira i red

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n} - \frac{\cos 2na}{2n} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin^2 na}{n}.$$

Odavde, iz $\frac{\sin^2 na}{n} \leq \frac{|\sin na|}{n} = \left| \frac{\sin na}{n} \right|$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left| \frac{\sin na}{n} \right|$.

Ovo znači da za $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ ne konvergira apsolutno.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ konvergira apsolutno za $a \in \mathbb{R}$ oblika $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. ■

♢ **Zadatak 13.1.9** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ konvergira.

**Dokaz:** Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{\sqrt{n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}$, $b_n = \arctan n$, $n \in \mathbb{N}$.

U rješenju Zadatka 8.1.12 smo dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Znamo da je funkcija $f(x) = \arctan x$ definisana na $\mathbb{R}$, rastuća na $\mathbb{R}$, i da je $|f(x)| < \frac{\pi}{2}$ za sve $x \in \mathbb{R}$.

Ovo znači da je niz $\{b_n\}$ ograničen ($|b_n| < \frac{\pi}{2}$ za sve $n \in \mathbb{N}$), i monoton (rastući).

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira, a niz $\{b_n\}$ je ograničen i monoton, pa po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ konvergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 13.1.10** Za $a > 1$, ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n}$.

**Rješenje:** Ako je $a = e$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, što je po Zadatku 8.1.9 konvergentan red.

Neka je $a \neq e$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{n}$, $b_n = \sqrt[n]{\ln a}$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako smo već konstatovali, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan red.

Posmatrajmo niz $\{b_n\}$.

Pretpostavimo da je $a > e$.

Sada je $\ln a > 1$.

Kako je $\frac{1}{1} > \frac{1}{2} > ...$, to je $(\ln a)^{\frac{1}{1}} > (\ln a)^{\frac{1}{2}} > ...$, tj. $(\ln a)^{\frac{1}{n}} > (\ln a)^{\frac{1}{n+1}}$ za $n \in \mathbb{N}$, ili $\sqrt[n]{\ln a} > \sqrt[n+1]{\ln a}$, $n \in \mathbb{N}$.

Ovo znači da je $\{b_n\}$ opadajući, tj. monoton niz.

Također, $(\ln a)^{\frac{1}{1}} \geq (\ln a)^{\frac{1}{n}} > 1$, tj. $1 < b_n \leq \ln a$ za sve $n \in \mathbb{N}$, što znači da je niz $\{b_n\}$ ograničen.

Tako, za $a > e$, niz $\{b_n\}$ je ograničen i monoton.

Neka je sada $1 < a < e$.

Slijedi, $0 < \ln a < 1$.

Možemo pisati, $\ln a = \frac{1}{q}$, za neko $q > 1$.

Dobijamo, $b_n = \sqrt[n]{\ln a} = \sqrt[n]{\frac{1}{q}} = \frac{1}{\sqrt[n]{q}}$.

Kako je $q > 1$, to iz slučaja $\ln a > 1$ zaključujemo da je $\left\{ \sqrt[n]{q} \right\}$ opadajući niz koji je ograničen ($1 < \sqrt[n]{q} \leq q$ za sve $n \in \mathbb{N}$).

Ovo znači da je $\{b_n\}$ rastući niz za koji je $\frac{1}{q} \leq \frac{1}{\sqrt[n]{q}} < 1$, tj. $\frac{1}{q} \leq b_n < 1$ za $n \in \mathbb{N}$.

Drugim riječima, za $1 < a < e$, niz $\{b_n\}$ je ograničen i monoton.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira a niz $\{b_n\}$ je ograničen i monoton za $a > e$ i za $1 < a < e$, pa po Abelovom kriteriju, tj. Teoremu 13.3, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n}$ konvergira za $a > e$ i za $1 < a < e$.

Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n}$ konvergira i za $a = e$, to red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n}$ konvergira za sve $a > 1$. ■

♢ **Zadatak 13.1.11** Pretpostavimo da za dati niz $\{a_n\}$, Dirihleov red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a}$ konvergira za $a = a_0$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a}$ konvergira za svako $a > a_0$.

**Dokaz:** Odaberimo po volji $a > a_0$ pa ga fiksirajmo.

Sada je $a - a_0 > 0$.

Odavde i iz $1 < 2 < ... < n < n+1 < ...$ imamo da je $1^{a-a_0} < 2^{a-a_0} < ... < n^{a-a_0} < (n+1)^{a-a_0} < ...$, tj. da je $1 = \frac{1}{1^{a-a_0}} > \frac{1}{2^{a-a_0}} > ... > \frac{1}{n^{a-a_0}} > \frac{1}{(n+1)^{a-a_0}} > ... > 0$.

Ovo znači da je niz $\left\{\frac{1}{n^{a-a_0}}\right\}$ opadajući, tj. monoton i ograničen.

Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^{a_0}} \cdot \frac{1}{n^{a-a_0}} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n d_n,$$

gdje je $c_n = \frac{a_n}{n^{a_0}}$, $d_n = \frac{1}{n^{a-a_0}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n$ konvergira.

Odavde, iz činjenice da je niz $\{d_n\}$ ograničen i monoton, i Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} c_n d_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a}$.

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a}$ konvergira za svako $a > a_0$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 13.1.12** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ konvergira za svako $a \in \mathbb{R}$.

**Dokaz:** Primijetimo da smo se apsolutnom konvergencijom datog reda bavili u Zadatku 13.1.8. Tamo smo dokazali da dati red apsolutno konvergira u tačkama $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Pošto red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ apsolutno konvergira za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, to on po Teoremu 7.2 i konvergira za $a = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

U Zadatku 13.1.8 smo dokazali da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ ne konvergira apsolutno za $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa za $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, njegovu konvergenciju moramo zasebno ispitati.

Neka je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \sin na$, $b_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Primijetimo da je

$$\begin{aligned}
&\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha \\
=&\cos n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \sin n\alpha \sin\frac{\alpha}{2} - \cos n\alpha \cos\frac{\alpha}{2} + \sin n\alpha \sin\frac{\alpha}{2} \\
=&2\sin n\alpha \sin\frac{\alpha}{2}.
\end{aligned}$$

Znamo da je $\sin\frac{\alpha}{2} = 0$ ako i samo ako je $\frac{\alpha}{2} = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, tj. ako i samo ako je $\alpha = 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Tako, za $\alpha \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, dobijamo da je

$$\sin n\alpha = \frac{1}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\left[\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\alpha - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\alpha\right].$$

Mi svakako pretpostavljamo da je $a \neq k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, pa iz izvedene formule imamo da je

$$\begin{aligned}
A_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \sin ka \\
&= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sin\frac{a}{2}} \cdot \left[\cos\left(k - \frac{1}{2}\right)a - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)a\right] =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\cdot\Big[\cos\frac{a}{2}-\cos\frac{3a}{2}+\cos\frac{3a}{2}-\cos\frac{5a}{2}+...\\ &+\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)a-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\Big]\\ =&\frac{1}{2\sin\frac{a}{2}}\left(\cos\frac{a}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right). \end{aligned}$$

Pošto je $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$, to je $\sin\frac{a}{2}\neq 0$, tj. $0<\left|\sin\frac{a}{2}\right|<1$.
Tako, za $a\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$ je

$$|A_n|=\frac{1}{2\left|\sin\frac{a}{2}\right|}\cdot\left|\cos\frac{a}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)a\right|\leq\frac{2}{2\left|\sin\frac{a}{2}\right|}=\frac{1}{\left|\sin\frac{a}{2}\right|},$$

što znači da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Niz $\{b_n\}$ opadajući, tj. monotono teži nuli kad $n\to+\infty$, pa po Dirihleovom kriteriju, tj. Teoremu 13.6, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}$ konvergira.

Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{\sin na}{n}$ konvergira za sve $a\in\mathbb{R}$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 13.1.13 (Putnam [11, 1951, A7])**[59] Dokazati da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$.

**Dokaz:** Stavimo, $b_n=\frac{1}{n}$, $n\in\mathbb{N}$.
Vrijedi, $|b_n|\leq 1$ za sve $n\in\mathbb{N}$, i $b_1>b_2>...$ .
Drugim riječima, $\{b_n\}$ je ograničen monoton (opadajući) niz.

Odavde, iz činjenice da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n$ konvergira, i Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_nb_n=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{n}$.

Dokaz je završen. ■

[59] Vidjeti notu 20 na stranici 134 u [DzG2].

◊ **Zadatak 13.1.14** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$.

**Rješenje:** Neka je $N \in \mathbb{N}$ proizvoljno odabran pa fiksiran broj takav da je $N > e^{100}$.

Posmatrajmo red $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4} = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n b_n$, gdje je $a_n = \sin \frac{n\pi}{4}$, $b_n = \frac{\ln^{100} n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$.

Označimo sa $\{A_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n$.

U rješenju Zadatka 13.1.2 smo dokazali da je za $a \neq 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$,

$$\sum_{k=1}^{n} \sin ka = \frac{\sin \frac{na}{2} \sin \frac{(n+1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}}.$$

Dobijamo,

$$\begin{aligned}|A_n| &= \left| \sum_{k=N}^{N+n-1} a_k \right| = \left| \sum_{k=N}^{N+n-1} \sin k \cdot \frac{\pi}{4} \right| \\ &= \left| \frac{\sin \frac{(N+n-1)\cdot \frac{\pi}{4}}{2} \cdot \sin \frac{(N+n)\cdot \frac{\pi}{4}}{2}}{\sin \frac{\frac{\pi}{4}}{2}} \right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{\pi}{8}\right|}.\end{aligned}$$

Vrijedi, $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$, pa je $0 < \sin \frac{\pi}{8} < 1$, što znači da je $|A_n| \leq \frac{1}{\sin \frac{\pi}{8}}$, odnosno da je niz $\{A_n\}$ ograničen.

Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln^{100} n\right)'}{(n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(100 \ln^{99} n\right) \cdot \frac{1}{n}}{1} = 100 \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^{99} n}{n} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

te

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(\ln^{99} n\right)'}{(n)'}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\left(99\ln^{98} n\right)\cdot\frac{1}{n}}{1}=99\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln^{98} n}{n}=\frac{+\infty}{+\infty},$$

itd., $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(\ln n)'}{(n)'}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$

Zaključujemo[60],

$$\lim_{n\to+\infty} b_n=0.$$

Posmatrajmo funkciju $f(x)=\frac{\ln^{100} x}{x}$ na intervalu $I=[N,+\infty)$.

Funkcija $f(x)$ je elementarna funkcija definisana na $I$, pa je kao takva i neprekidna na $I$. Osim toga,

$$\begin{aligned} f'(x)=&\frac{\left(\ln^{100} x\right)'\cdot x-\left(\ln^{100} x\right)\cdot(x)'}{x^2}\\ =&\frac{\left(100\ln^{99} x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^{100} x}{x^2}=\frac{100\ln^{99} x-\ln^{100} x}{x^2}\\ =&\frac{\ln^{99} x\,(100-\ln x)}{x^2}, \end{aligned}$$

tj. funkcija $f(x)$ ima izvod na $I$ (bar unutar $I$).

Za $x\in I$ je $x\geq N>e^{100}$, pa je za $x\in I$, $\ln x>100$, tj. $100-\ln x<0$.

Drugim riječima, $f'(x)<0$ na $I$ (unutar $I$).

Ovo znači da ne postoji podinterval $(\alpha,\beta)$ intervala $I$, na kojem je $f'(x)\equiv 0$ ($f'(x)=0$ ako i samo ako je $x=1\notin I$ ili $x=e^{100}\notin I$).

Tako, $f(x)$ je opadajuća funkcija na $I$ (vidjeti notu 10 na strani 85 u [DzG2]).

Slijedi, $f(N)>f(N+1)>...$, tj. $b_N>b_{N+1}>...$ .

Ovo znači da je $\{b_n\}_{n=N}^{+\infty}$ opadajući niz.

[60]Do zaključka da je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n=0$ smo mogli doći i rezonom opisanim u Zadatku 1.1.20. Naime, funkcija $\ln x$ sporo raste ka $+\infty$ kad $x\to+\infty$. Isto važi i za funkciju $(\ln x)^a$ ma kako veliko $a>0$ je u pitanju. Drugim riječima, za svako $a>0$ (ma kako veliko bilo), i svako $\varepsilon>0$ (ma kako malo bilo), $(\ln x)^a$ je manje od $x^\varepsilon$ za dovoljno veliko $x$, tj. vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^a}{x^\varepsilon}=0$. Odavde je onda i $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$ $=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln^{100} n}{n}=0$.

Kako je niz $\{A_n\}$ ograničen, a $\{b_n\}_{n=N}^{+\infty}$ opadajući, tj. monoton niz za koji je $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = 0$, to iz Dirihleovog kriterija, tj. Teorema 13.6, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=N}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=N}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi i konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin\frac{n\pi}{4}$. ■

♢ **Zadatak 13.1.15** Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+a)}}$ konvergira za svako $a \geq 0$.

**Dokaz:** Ako je $a = 0$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$, a za ovaj red smo u Zadatku 8.1.15 vidjeli da konvergira.

Pretpostavimo da je $a > 0$.

Možemo pisati,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n\,(n+a)}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n,$$

gdje je $a_n = \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{n}$, $b_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{n}}}$, $n \in \mathbb{N}$.

Kako smo već konstatovali, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

S druge strane, $1+\frac{a}{1} > 1+\frac{a}{2} > ... > 1$, tj. $\sqrt{1+\frac{a}{1}} > \sqrt{1+\frac{a}{2}} > ... > 1$, odnosno $0 < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{1}}} < \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a}{2}}} < ... < 1$.

Ovo znači da je niz $\{b_n\}$ ograničen i rastući, tj. monoton.

Vidimo da su zadovoljene pretpostavke Abelovog kriterija, tj. Teorema 13.3, pa po njemu red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n b_n = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}}{\sqrt{n(n+a)}}$ konvergira.

Tako, dati red konvergira za sve $a \geq 0$.

Dokaz je završen. ■

## 13.2 Redovi razmatrani kriterijima za ispitivanje konvergencije redova sa članovima prozvoljnog znaka

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n r_n$ (2) $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n S_n$

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ (4) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\arctan n}{n (\ln n)^2}$

(5) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$ (6) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin n}{n} \left(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}\right)$

(7) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln^2 n} \cos\left(\pi \cdot \frac{n^2}{n+1}\right)$ (8) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin \frac{n\pi}{4}}{n^p + \sin \frac{n\pi}{4}}$

(9) $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\sin\left(n + \frac{1}{n}\right)}{\ln \ln n}$ (10) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na \sin n^2 a}{n}$

(11) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos n \sin na}{n}$ (12) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$

(13) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ (14) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{\sqrt[n]{\ln a}}{n}$

(15) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n^a}$ (16) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$

(17) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln^{100} n}{n} \cdot \sin \frac{n\pi}{4}$ (18) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{\sqrt{n (n+a)}}$

# 14 Razni riješeni zadaci

$\diamondsuit$ **Zadatak 14.1** Neka $a$, $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$.

**Rješenje:** Pretpostavimo da je $c \neq 0$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}} = \lim_{n\to+\infty} e^{\frac{a+\frac{b}{\ln n}}{c+\frac{d}{\ln n}}} = e^{\frac{a}{c}} \neq 0.$$

Ovo po Teoremu 1.4 u [DzG2, str. 4], znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$ divergira.

Pretpostavimo sada da je $c = 0$.

Dati red je oblika

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{d}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a}{d}\ln n} \cdot e^{\frac{b}{d}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\ln n^{\frac{a}{d}}} \cdot e^{\frac{b}{d}} = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{\frac{a}{d}} \cdot e^{\frac{b}{d}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{\frac{b}{d}}}{n^{-\frac{a}{d}}}.\end{aligned}$$

Ako je $\frac{a}{d} = 0$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{a}{d}} \cdot e^{\frac{b}{d}} = e^{\frac{b}{d}} \neq 0$, pa red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$ divergira.

Isto tako, ako je $\frac{a}{d} > 0$, onda je $\lim\limits_{n\to+\infty} n^{\frac{a}{d}} \cdot e^{\frac{b}{d}} = +\infty$, pa dati red ponovo divergira.

Neka je $\frac{a}{d} < 0$.

Po Zadatku 59 u [DzG2, str. 140] i Zadatku 126 u [DzG2, str. 226], red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^{-\frac{a}{d}}}$ konvergira za $-\frac{a}{d} > 1$, tj. za $\frac{a}{d} < -1$, i divergira za $-\frac{a}{d} \leq 1$, tj. za $\frac{a}{d} \geq -1$.

Rezimirajmo, za $c \neq 0$ dati red divergira.

Za $c = 0$ i $\frac{a}{d} \geq 0$ dati red takođe divergira.

Ako je $c = 0$ i $\frac{a}{d} < -1$ onda dati red konvergira, a za $c = 0$ i $-1 \leq \frac{a}{d} < 0$ dati red divergira. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 14.2** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \ln^2 r_n$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$ za $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$, tj. vrijedi $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. neka je $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...,$$

tj. $S = S_{n-1} + r_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $S_1 < S_2 < ...$, što znači da je $r_2 > r_3 > ...$ .

Kako je

$$r_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2 > r_2,$$

to možemo pisati $r_1 > r_2 > ...$ .

Drugim riječima, $\{r_n\}$ je opadajući niz.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Dakle, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni je veća od nule, pa je i $r_1 > r_2 > ... > 0$ (ima smisla posmatrati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \ln^2 r_n$).

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Neka $\alpha \in \mathbb{R}$, i neka je $0 < \alpha < 1$.

Po Zadatku 9.1.14, pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$ konvergira.

Dati red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \ln^2 r_n$ je oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\ln r_n\right)^2$, pa je i on pozitivan.

Posmatrajmo limes

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \left(\ln r_n\right)^2}{\frac{a_n}{r_n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln r_n\right)^2}{\frac{1}{r_n^\alpha}}.$$

Stavimo, $\frac{1}{r_n} = t_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, i $r_1 > r_2 > ... > 0$, to je $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, i $0 < t_1 < t_2 < ...$ .

Znamo da funkcija $\ln x$ sporo raste ka $+\infty$ kad $x \to +\infty$. Isto važi i za funkciju $(\ln x)^a$ ma kako veliko $a > 0$ je u pitanju. Drugim riječima, za svako $a > 0$ (ma kako veliko bilo), i svako $\varepsilon > 0$ (ma kako malo bilo), $(\ln x)^a$ je manje od $x^\varepsilon$ za dovoljno veliko $x$, tj. vrijedi $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^a}{x^\varepsilon} = 0$. Odavde, i iz $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n = +\infty$, dobijamo

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n \left(\ln r_n\right)^2}{\frac{a_n}{r_n^\alpha}} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln r_n\right)^2}{\frac{1}{r_n^\alpha}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln \frac{1}{t_n}\right)^2}{t_n^\alpha} \\
= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln 1 - \ln t_n\right)^2}{t_n^\alpha} &= \lim_{n\to+\infty} \frac{\left(\ln t_n\right)^2}{t_n^\alpha} = 0.
\end{aligned}$$

Sada, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{r_n^\alpha}$, i kriterija upoređivanja limesom, tj. Teorema 2.1 (tvrdnja 2.), slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \left(\ln r_n\right)^2 = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \ln^2 r_n$.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 14.3** Upotrebom kriterija za ispitivanje konvergencije pozitivnih redova datih Zadatkom 12.1.8, za $a > 0$, ispitati konvergenciju redova:

$$(a)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}} \qquad (b)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}} \qquad (c)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$$

$$(d)\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}} \qquad (e)\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$$

**Rješenje:** Primijetimo da smo konvergenciju datih redova već ispitivali u Zadatku 9.1.17.

Opšte članove navedenih redova ćemo u nastavku klasično označavati sa $a_n$.

$(a)$ Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}}{\frac{1}{2^{\sqrt{n+1}}}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln 2^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ln 2 = \lim_{n\to+\infty} n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\cdot\ln 2$$
$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{n\ln 2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = +\infty = g.$$

Pošto je $g > 1$, to po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$ konvergira.

$(b)$ Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{\frac{1}{2^{\ln n}}}{\frac{1}{2^{\ln(n+1)}}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln 2^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln 2 = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\ln 2 = \ln 2 = g.$$

Kako je $g < 1$, to po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{\ln n}}$ divergira.

$(c)$ Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln\frac{\frac{1}{3^{\ln n}}}{\frac{1}{3^{\ln(n+1)}}} = \lim_{n\to+\infty} n\ln 3^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\ln 3 = \lim_{n\to+\infty}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\ln 3 = \ln 3 = g.$$

Ovdje je $g > 1$, pa po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ konvergira.

$(d)$ Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{\frac{1}{a^{\ln n}}}{\frac{1}{a^{\ln(n+1)}}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln a^{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \cdot \ln a = \lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \ln a = \ln a = g.$$

Ako je $a > e$, onda je $g > 1$, pa po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ konvergira.
Za $0 < a < e$ je $g < 1$, pa po istom zadatku dati red divergira.

Ako je $a = e$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$, što je divergentan harmonijski red [DzG2, str. 5-6].

Tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$ konvergira za $a > e$ i divergira za $0 < a \leq e$.

$(e)$ Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{\frac{1}{a^{\ln\ln n}}}{\frac{1}{a^{\ln\ln(n+1)}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln a^{\ln\ln(n+1)-\ln\ln n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln a^{\ln\frac{\ln(n+1)}{\ln n}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{\ln(n+1)}{\ln n} \cdot \ln a$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n \cdot \ln a.$$

U rješenju Zadatka 12.1.8 smo dokazali da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{\ln(n+1)}{\ln n}\right)^n = 0$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0 \cdot \ln a = 0 = g.$$

Kako je $g < 1$, to po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln \ln n}}$ divergira (za svako $a > 0$). ■

♢ **Zadatak 14.4** Neka je $a > 0$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$.

**Rješenje:** Možemo pokušati primijeniti kriterij dat Zadatkom 12.1.8.
Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.
Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} n \ln \frac{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}{a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n+1}}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} n \ln a^{-\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to+\infty} -\frac{n}{n+1} \cdot \ln a = -\ln a = \ln \frac{1}{a} = g.$$

Ako je $\frac{1}{a} > e$, tj. $0 < a < \frac{1}{e}$, onda je $g > 1$, pa je po Zadatku 12.1.8, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ konvergentan.
Za $\frac{1}{a} < e$, tj. za $a > \frac{1}{e}$ je $g < 1$, pa je po istom zadatku dati red divergentan.
Ako je $a = \frac{1}{e}$, onda je dati red oblika $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{e^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}}$.
Za ovaj red smo u Zadatku 2.1.7 vidjeli da je divergentan.
Zaključujemo, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$ konvergira za $0 < a < \frac{1}{e}$, i divergira za $a \geq \frac{1}{e}$. ■

♢ **Zadatak 14.5** Neka je $\{a_n\}$ rastući niz pozitivnih brojeva koji divergira ka $+\infty$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$ divergira.

**Dokaz:** Po pretpostavci je $0 < a_1 < a_2 < \ldots$, i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.
Stavimo, $b_n = a_{n+1} - a_n$, $n \in \mathbb{N}$.
Kako je $a_n < a_{n+1}$ za $n \in \mathbb{N}$, to je $b_n > 0$ za $n \in \mathbb{N}$.

Tako, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ je pozitivan red.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$.

Imamo,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} b_k = b_1 + b_2 + ...b_n \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + ... + (a_{n+1} - a_n) = a_{n+1} - a_1. \end{aligned}$$

Kako je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = +\infty$, pa je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} b_n$ divergira.

Po Zadatku 9.1.10, sada divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n}$.

Možemo pisati,

$$1 - \frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{a_{n+1}} = \frac{b_n}{S_n + a_1}.$$

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n+a_1}$.

Posmatrajmo i limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\frac{b_n}{S_n}}{\frac{b_n}{S_n+a_1}}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{b_n}{S_n}}{\frac{b_n}{S_n+a_1}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{S_n + a_1}{S_n} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{a_1}{S_n}\right) = 1 = L.$$

Kako je $L = 1$, tj. $0 < L < +\infty$, to po kriteriju upoređivanja limesom, tj. Teoremu 2.1 (tvrdnja 1.), redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n}$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n+a_1}$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n}$ divergira, pa divergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{S_n+a_1} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 14.6** Neka je $\{a_n\}$ ograničen, rastući niz pozitivnih brojeva. Dokazati da za svako $\alpha > 0$, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$ konvergira.

**Dokaz:** Imamo, $0 < a_1 < a_2 < ...$ .

Niz $\{a_n\}$ je ograničen, pa je ograničen i odozgo i odozdo.

Postoji tako konstanta $M > 0$, za koju je $a_n \leq M$ za sve $n \in \mathbb{N}$.

Niz $\{a_n\}$ je rastući i ograničen odozgo, pa je po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], konvergentan.

Stavimo, $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$.

Sada je,

$$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}} \leq \frac{a_{n+1}-a_n}{a_2 \cdot a_1^{\alpha}} = \frac{1}{a_2 \cdot a_1^{\alpha}} \cdot (a_{n+1}-a_n)\,.$$

Posmatrajmo pozitivan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}-a_n)$.

Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma ovog reda.

Vrijedi,

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (a_{k+1}-a_k) \\ &= (a_2-a_1)+(a_3-a_2)+...+(a_{n+1}-a_n) = a_{n+1}-a_1. \end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = A$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], slijedi da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = A$, pa je po tvrdnji $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (a_{n+1}-a_1) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} - \lim\limits_{n\to+\infty} a_1 = A - a_1$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (a_{n+1}-a_n)$ konvergira.

Odavde, iz $\frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}} \leq \frac{1}{a_2 \cdot a_1^{\alpha}} \cdot (a_{n+1}-a_n)$, $n \in \mathbb{N}$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.7** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan konvergentan red. Dokazati da postoji konvergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ koji "opada sporije", u smislu da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_n}{a_n} = +\infty$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Neka je $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, tj. neka je $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Osim toga, iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, i Zadatka 9.1.13, imamo da konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{A_n}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{a_n}{\sqrt{r_n}}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{r_n}}.$$

Kako je $r_1 > r_2 > ... > 0$ (vidjeti npr. Zadatak 9.1.13), to je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{A_n}{a_n} = +\infty$.

Tako, primjer traženog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.8** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan divergentan red. Dokazati da postoji divergentan red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ koji je "manji", u smislu da je $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = +\infty$.

**Dokaz:** Označimo sa $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Kako je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan divergentan red, to je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Po Zadatku 9.1.10, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$ divergira.

Stavimo, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n} = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.

Sada je,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{A_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{\frac{a_n}{S_n}} = \lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty.$$

Tako, primjer traženog reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$ je red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$.

Dokaz je završen. ■

$\diamondsuit$ **Zadatak 14.9** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, i $r_n$, $n \in \mathbb{N}$, suma $n$-tog ostatka reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$. Dokazati da iz konvergencije reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n$ slijedi da je $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = 0$.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je po pretpostavci konvergentan, pa je po Teoremu 1.6 u [DzG2, str. 8], konvergentan i njegov $n$-ti ostatak $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pretpostavci, $r_n$ je suma reda $\sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Označimo sa $S$ sumu reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Imamo, $S = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $r_n = \sum\limits_{k=n}^{+\infty} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Po pomenutom Teoremu 1.6 je

$$S = S_1 + r_2 = S_2 + r_3 = ...,$$

tj. $S = S_{n-1} + r_n$ za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, gdje je $\{S_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Dakle, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, $n \in \mathbb{N}$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan, pa je $S_1 < S_2 <$ ..., što znači da je $r_2 > r_3 >$ ... .

Kako je

$$r_1 = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = S = S_1 + r_2 = a_1 + r_2 > r_2,$$

to možemo pisati $r_1 > r_2 >$ ... .

Drugim riječima, $\{r_n\}$ je opadajući niz.

Pošto je $\sum\limits_{k=2}^{+\infty} a_k$ konvergentan red sa pozitivnim članovima, to za njegovu sumu $r_2$, vrijedi $r_2 \geq 0$ (vidjeti notu 34 u [DzG2, str. 157]).

Slijedi, $S = a_1 + r_2 \geq a_1 > 0$.

Tako, suma konvergentnog reda čiji su članovi pozitivni je veća od nule, pa je i $r_1 > r_2 > ... > 0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je konvergentan, pa je po Teoremu 1.7 u [DzG2, str. 11], $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$.

Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n$ je sada pozitivan red, takav da je $\{r_n\}$ opadajući niz.

Pretpostavimo da je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} r_n$ konvergentan red.

Odavde, i iz Zadatka 9.1.2, imamo da je $\lim\limits_{n\to+\infty} nr_n = 0$.

Kako smo već istakli, za $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ je $S = S_{n-1} + r_n = S_n + r_{n+1}$, pa je i $r_n - r_{n+1} = S_n - S_{n-1} = a_n$.

Tako,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty} na_n &= \lim_{n\to+\infty} n\left(r_n - r_{n+1}\right) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left(nr_n - (n+1)\, r_{n+1} + r_{n+1}\right).\end{aligned}$$

Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} nr_n = 0$, to iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} r_{n+1} = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, r_{n+1} = 0$.

Odavde, i iz tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to+\infty} na_n = \lim_{n\to+\infty} (nr_n - (n+1)\, r_{n+1} + r_{n+1})\\ =&\lim_{n\to+\infty} nr_n + \lim_{n\to+\infty} (-1)\cdot(n+1)\, r_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} r_{n+1}\\ =&0+0+0=0.\end{aligned}$$

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 14.10** Neka je $\{a_n\}$ pozitivan niz, takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}$.

**Rješenje:** Pošto je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$, to za konstantu $C = 3 > 0$, postoji indeks $N \in \mathbb{N}$, $N > 1$, takav da za sve $n \geq N$, vrijedi $a_n > C = 3$.

Tako, iz $a_n > 3$ za $n \geq N > 1$, dobijamo da je za $n \geq N$, i $a_n^{\ln n} > 3^{\ln n}$, tj. $\frac{1}{a_n^{\ln n}} < \frac{1}{3^{\ln n}}$.

Po $(c)$ Zadatka 14.3, znamo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$ konvergira.

Odavde, iz $\frac{1}{a_n^{\ln n}} < \frac{1}{3^{\ln n}}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$, i kriterija upoređivanja, tj. Teorema 1.1, slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}$. ■

◇ **Zadatak 14.11** Neka je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ pozitivan divergentan red, takav da je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k > 1$ za $n \in \mathbb{N}$. Dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ divergira, a da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$ konvergira.

**Dokaz:** Red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ je pozitivan divergentan red, pa je $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = +\infty$, tj. $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = +\infty$ (vidjeti notu 34 na stranici 157 u [DzG2]).

Posmatrajmo prvo red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$.

Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma ovog reda.
Imamo,

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{k+1}}{S_k \ln S_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k \ln S_k}.$$

Procjenjujemo,

$$\int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dx}{x \ln x} \leq \frac{1}{S_k \ln S_k} \int_{S_k}^{S_{k+1}} dx = \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k \ln S_k}.$$

Slijedi,

$$P_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_{k+1} - S_k}{S_k \ln S_k} \geq \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{dx}{x \ln x} = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k}^{S_{k+1}} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \ln \ln x \Big|_{S_k}^{S_{k+1}} = \sum_{k=1}^{n} (\ln \ln S_{k+1} - \ln \ln S_k)$$

$$= \ln \ln S_2 - \ln \ln S_1 + \ln \ln S_3 - \ln \ln S_2 + ... + \ln \ln S_{n+1} - \ln \ln S_n$$

$$= \ln \ln S_{n+1} - \ln \ln S_1.$$

Iz $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$ imamo da je i $\lim\limits_{n \to +\infty} S_{n+1} = +\infty$, pa je onda i

$$\lim_{n \to +\infty} (\ln \ln S_{n+1} - \ln \ln S_1) = +\infty.$$

Odavde, iz $P_n \geq \ln \ln S_{n+1} - \ln \ln S_1$, slijedi da je $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n = +\infty$.

Ovo znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$ divergira.

Posmatrajmo sada red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$, tj. red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$.

Označimo sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma posljednjeg reda.
Imamo,

$$Q_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{a_k}{S_k \ln^2 S_k} = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k \ln^2 S_k}.$$

Procjenjujemo,

$$\int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dx}{x \ln^2 x} \geq \frac{1}{S_k \ln^2 S_k} \int_{S_{k-1}}^{S_k} dx = \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k \ln^2 S_k}.$$

Slijedi,

$$Q_n = \sum_{k=2}^{n+1} \frac{S_k - S_{k-1}}{S_k \ln^2 S_k} \leq \sum_{k=2}^{n+1} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \sum_{k=2}^{n+1} \int_{S_{k-1}}^{S_k} \frac{d(\ln x)}{\ln x}$$

$$= \sum_{k=2}^{n+1} \int_{S_{k-1}}^{S_k} (\ln x)^{-2} \, d(\ln x) = \sum_{k=2}^{n+1} \left. \frac{(\ln x)^{-1}}{-1} \right|_{S_{k-1}}^{S_k} = \sum_{k=2}^{n+1} \left( \frac{1}{\ln S_{k-1}} - \frac{1}{\ln S_k} \right)$$

$$= \frac{1}{\ln S_1} - \frac{1}{\ln S_2} + \frac{1}{\ln S_2} - \frac{1}{\ln S_3} + ... + \frac{1}{\ln S_n} - \frac{1}{\ln S_{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\ln S_1} - \frac{1}{\ln S_{n+1}} < \frac{1}{\ln S_1}.$$

Ovo znači da je niz $\{Q_n\}$ ograničen odozgo sa $\frac{1}{\ln S_1}$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$ je pozitivan, pa je niz $\{Q_n\}$ rastući.

Kako je $\{Q_n\}$ rastući niz koji je ograničen odozgo, to je on po Vajerštrasovom teoremu [DzG1, str. 48, Teo. 5.4], konvergentan.

Tako, konvergentan je red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$.

Odavde i iz Teorema 1.6 u [DzG2, str. 8], slijedi konvergencija reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.12** Neka je $f(x)$ pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na $(0, +\infty)$. Osim toga, neka je $f(x)$ opadajuća funkcija na $(0, +\infty)$. Ako je $\varliminf\limits_{x \to +\infty} \left( -\frac{x f'(x)}{f(x)} \right) > 1$, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergira. S druge strane, ako za dovoljno veliko $x$ vrijedi $-\frac{x f'(x)}{f(x)} \leq 1$, dokazati da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergira.

**Dokaz:** Posmatrajmo na $(0,+\infty)$ funkciju $g(x) = x$.
Funkcija $g(x)$ je pozitivna, neprekidno diferencijabilna funkcija na $(0,+\infty)$.
Osim toga, za $k \geq N_1$, $N_1 = 1 \in \mathbb{N}$, je

$$\int\limits_{k}^{k+n-1} \frac{dx}{g(x)} = \int\limits_{k}^{k+n-1} \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_{k}^{k+n-1} = \ln(k+n-1) - \ln k,$$

što znači da je za svako $k \geq N_1$, niz $\left\{ \int\limits_{k}^{k+n-1} \frac{dx}{g(x)} \right\}$ neograničen.

Vidimo da su zadovoljeni uslovi Zadatka 4.1.5 za funkciju $g(x)$.
Posmatramo izraz $-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)$.
Vrijedi,

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = -\frac{xf'(x)}{f(x)} - 1.$$

Tako, ako je

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{xf'(x)}{f(x)} - 1\right) > 0,$$

tj.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{xf'(x)}{f(x)}\right) > 1,$$

onda po Zadatku 4.1.5, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} f(n)$ konvergira.

S druge strane, ako za dovoljno veliko $x$ vrijedi

$$-g(x)\frac{f'(x)}{f(x)} - g'(x) = -\frac{xf'(x)}{f(x)} - 1 \leq 0,$$

tj.

$$-\frac{xf'(x)}{f(x)} \leq 1,$$

onda po Zadatku 4.1.5, red $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ divergira.

Dokaz je završen. ■

◇ **Zadatak 14.13** Neka je $\{a_n\}$ niz, takav da je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Dokazati da redovi $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

**Dokaz:** Dovoljno je da dokažemo da red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})$.

Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$, a sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})$.

Pretpostavimo da konvergira red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Postoji onda konačan limes $\lim_{n\to+\infty} P_n = P$.

Vrijedi,

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=1}^{n} (a_k + a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \\ &= P_n + \sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1} - a_1 = 2P_n + a_{n+1} - a_1. \end{aligned}$$

Po pretpostavci je $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$.

Odavde, iz $Q_n = 2P_n + a_{n+1} - a_1$, i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n = \lim_{n\to+\infty} (2P_n + a_{n+1} - a_1) = 2P - a_1.$$

Ovo znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + a_{n+1})$.

Obrnuto, pretpostavimo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + a_{n+1})$.
Postoji sada konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = Q$.
Već smo dobili da je $Q_n = 2P_n + a_{n+1} - a_1$, pa je $P_n = \frac{1}{2}Q_n - \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_1$.
Odavde i iz pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], imamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}Q_n - \frac{1}{2}a_{n+1} + \frac{1}{2}a_1\right) = \frac{1}{2}Q + \frac{1}{2}a_1.$$

Tako, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Drugim riječima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(a_n + a_{n+1})$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.14** Neka je $\{a_n\}$ niz, takav da je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, i $a$, $b$, $c$ realne konstante za koje je $a+b+c \neq 0$. Dokazati da redovi $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ i $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$ ili oba konvergiraju ili oba divergiraju.

**Dokaz:** Dovoljno je da dokažemo da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$.

Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$.

Pretpostavimo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Postoji onda konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = P$.
Vrijedi,

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=1}^{n} (aa_k + ba_{k+1} + ca_{k+2}) \\ &= aP_n + bP_n + ba_{n+1} - ba_1 + cP_n + ca_{n+1} + ca_{n+2} - ca_1 - ca_2 \\ &= (a+b+c)\, P_n + (b+c)\, a_{n+1} + ca_{n+2} - ba_1 - ca_1 - ca_2. \end{aligned}$$

Po pretpostavci je $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, pa iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1} = 0$, te $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+2} = 0$.

Odavde, iz dobijenog izraza za $Q_n$, i tvrdnji $(a)$ i $(b)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], slijedi da je

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} Q_n \\ &= \lim_{n\to+\infty} \left((a+b+c)\, P_n + (b+c)\, a_{n+1} + ca_{n+2} - ba_1 - ca_1 - ca_2\right) \\ &= (a+b+c)\, P - ba_1 - ca_1 - ca_2. \end{aligned}$$

Ovo znači da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$.

Obrnuto, pretpostavimo da konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$.
Postoji sada konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = Q$.
Iz već dobijenog izraza za $Q_n$, imamo da je

$$\begin{aligned} P_n =& \frac{1}{a+b+c} \cdot Q_n - \frac{b+c}{a+b+c} \cdot a_{n+1} - \frac{c}{a+b+c} \cdot a_{n+2} \\ &+ \frac{b}{a+b+c} \cdot a_1 + \frac{c}{a+b+c} \cdot a_1 + \frac{c}{a+b+c} \cdot a_2. \end{aligned}$$

Odavde i iz pomenutog Teorema 2.2 u [DzG1], slijedi da je

$$\lim_{n\to+\infty} P_n = \frac{1}{a+b+c}\cdot Q + \frac{b}{a+b+c}\cdot a_1 + \frac{c}{a+b+c}\cdot a_1 + \frac{c}{a+b+c}\cdot a_2.$$

Tako, konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

Drugim riječima, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako konvergira red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.15** Dokazati da ako niz $\{na_n\}$ i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$ konvergiraju, da onda konvergira i red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$.

**Dokaz:** Označimo sa $\{P_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$, a sa $\{Q_n\}$ niz parcijalnih suma reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\,(a_n - a_{n+1})$.

Vrijedi,

$$\begin{aligned} Q_n &= \sum_{k=1}^{n} k\,(a_k - a_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} ka_{k+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} ka_k - \sum_{k=1}^{n} (k+1)\,a_{k+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} \\ &= a_1 - (n+1)\,a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = -\,(n+1)\,a_{n+1} + P_{n+1}. \end{aligned}$$

Niz $\{na_n\}$ konvergira, pa postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} na_n = A$.

Isto tako, red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} n\left(a_n - a_{n+1}\right)$ konvergira, pa postoji konačan limes $\lim\limits_{n\to+\infty} Q_n = Q$.

Odavde i iz razmatranja provedenog u Zadatku 1 u [DzG1, str. 50-52], imamo da je i $\lim\limits_{n\to+\infty} (n+1)\, a_{n+1} = A$.

Tako, iz

$$P_{n+1} = Q_n + (n+1)\, a_{n+1},$$

i tvrdnje $(a)$ Teorema 2.2 u [DzG1, str. 19], dobijamo da je

$$\lim_{n\to+\infty} P_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \left(Q_n + (n+1)\, a_{n+1}\right) = Q + A.$$

Slijedi, $\lim\limits_{n\to+\infty} P_n = Q + A$, što znači da red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Dokaz je završen. ■

♢ **Zadatak 14.16** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

**Rješenje:** Stavimo, $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}} = \sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$.

Red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln\left(\ln\ln n\right)^{\ln n}}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n \cdot \ln\ln\ln n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \ln\ln\ln n = +\infty = g.$$

Pošto je $g = +\infty$, tj. $g > 1$, to po Zadatku 12.1.10 (logaritamskom kriteriju), red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} a_n$ konvergira.

Dakle, red $\sum\limits_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$ konvergira. ■

♢ **Zadatak 14.17** Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$.

**Rješenje:** Označimo dati red sa $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$. Vrijedi,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{\frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln (\ln n)^{\ln \ln n}}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln \ln n)^2}{\ln n} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Možemo pokušati primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\left((\ln \ln n)^2\right)'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 (\ln \ln n) \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \ln \ln n}{\ln n} = \frac{+\infty}{+\infty},$$

te

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(2 \ln \ln n)'}{(\ln n)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{\ln n} \cdot \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{\ln n} = 0.$$

Zaključujemo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = 0 = g.$$

Kako je $g = 0$, tj. $g < 1$, to na osnovu logaritamskog kriterija (Zadatak 12.1.10), red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ divergira.

Tako, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}}$ divergira. ■

♢ **Zadatak 14.18** Neka je $\gamma \geq 0$. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^\gamma}}$.

**Rješenje:** Možemo pisati, $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^\gamma}} = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$.

Red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n$ je pozitivan red.

Posmatrajmo limes $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n}$. Imamo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{\frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^\gamma}}}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln (\ln n)^{(\ln n)^\gamma}}{\ln n}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln n)^\gamma \cdot \ln \ln n}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^{1-\gamma}}.$$

Ako je $\gamma = 1$, onda je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \ln \ln n = +\infty = g.$$

Kako je $g = +\infty$, tj. $g > 1$, to iz logaritamskog kriterija, tj. Zadatka 12.1.10, imamo da red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} a_n = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^\gamma}}$ konvergira.

Neka je $\gamma > 1$.

Sada je $\gamma - 1 > 0$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^{1-\gamma}} =$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^{-(\gamma-1)}} = \lim_{n\to+\infty} (\ln \ln n) \cdot (\ln n)^{\gamma-1} = +\infty.$$

Ponovo, po pomenutom logaritamskom kriteriju, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}$ konvergira.
Pretpostavimo sada da je $0 \leq \gamma < 1$.
Imamo, $1-\gamma > 0$, pa je

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \ln n}{(\ln n)^{1-\gamma}} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

Pokušat ćemo primijeniti l'Hopitalovo pravilo (vidjeti Zadatak 2.1.4). Tako,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(\ln \ln n)'}{\left((\ln n)^{1-\gamma}\right)'} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln n}\cdot\frac{1}{n}}{(1-\gamma)(\ln n)^{-\gamma}\cdot\frac{1}{n}}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1-\gamma}\cdot\frac{1}{(\ln n)^{1-\gamma}} = 0.$$

Zaključujemo,

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln \frac{1}{a_n}}{\ln n} = 0 = g.$$

Kako je $g = 0$, tj. $g < 1$, to iz logaritamskog kriterija (Zadatak 12.1.10), slijedi divergencija reda $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}$.

Rezimirajmo, red $\sum\limits_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}$ konvergira za $\gamma \geq 1$ i divergira za $0 \leq \gamma < 1$. ■

## 14.1 Redovi razmatrani u sekciji razni riješeni zadaci

$$(1)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} e^{\frac{a\ln n+b}{c\ln n+d}}$$

$$(2)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \ln^2 r_n$$

$$(3)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\sqrt{n}}}$$

$$(4)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{\ln n}}$$

$$(5)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^{\ln n}}$$

$$(6)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln n}}$$

$$(7)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{a^{\ln\ln n}}$$

$$(8)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} a^{1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}}$$

$$(9)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$$

$$(10)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}-a_n}{a_{n+1}a_n^{\alpha}}$$

$$(11)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$$

$$(12)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n}$$

$$(13)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} r_n$$

$$(14)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{a_n^{\ln n}}$$

$$(15)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_{n+1}}{S_n \ln S_n}$$

$$(16)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{S_n \ln^2 S_n}$$

$$(17)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$$

$$(18)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + a_{n+1})$$

$$(19)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} (aa_n + ba_{n+1} + ca_{n+2})$$

$$(20)\quad \sum_{n=1}^{+\infty} n(a_n - a_{n+1})$$

$$(21)\quad \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$$

$$(22)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln\ln n}}$$

$$(23)\quad \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(\ln n)^{(\ln n)^{\gamma}}}$$

# BIBLIOGRAFIJA


[Ali] S. A. Ali, The $m$-th Ratio Test: New Convergence Tests for Series, *The American Mathematical Monthly* **115** (2008), pp. 514–524.

[Alt] M. Altman, An Integral Test for Series and Generalized Contractions, *The American Mathematical Monthly* **82** (1975), pp. 827–829.

[AE1] Y. An and T. Edgar, Proof Without Words: Rearranged Alternating Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **49** (2018), p. 35.

[AE2] Y. An and T. Edgar, "Sum" Visual Rearrangements of the Alternating Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **50** (2019), pp. 280–285.

[Apo1] T. M. Apostol, Another Elementary Proof of Euler's Formula for $\zeta\,(2n)$, *The American Mathematical Monthly* **80** (1973), pp. 425–431.

[Apo2] T. M. Apostol, *Mathematical Analysis. 2nd ed.*, Addison-Wesley, New York, 1974.

[Aps] B. Apsen, *Riješeni Zadaci Više Matematike I*, Tehnička Knjiga, Zagreb, 1981.

[Ash] J. M. Ash, Neither a Worst Convergent Series nor a Best Divergent Series Exists, *The College Mathematics Journal* **28** (1997), pp. 296–297.

[AO] B. August and T. J. Osler, Divergence of Series by Rearrangement, *The College Mathematics Journal* **33** (2002), pp. 233–234.

[Ayo] R. Ayoub, Euler and the Zeta Function, *The American Mathematical Monthly* **81** (1974), pp. 1067–1086.

[Bai] R. Baillie, Sums of Reciprocals of Integers Missing a Given Digit, *The American Mathematical Monthly* **86** (1979), pp. 372–374.

[Beh] G. H. Behforooz, Thinning Out the Harmonic Series, *Mathematics Magazine* **68** (1995), pp. 289–293.

[Bei] R. Beigel, Rearranging Terms in Alternating Series, *Mathematics Magazine* **54** (1981), pp. 244–246.

[BB] J. Bell and V. Blasjo, Pietro Mengoli's 1650 Proof that the Harmonic Series Diverges, *Mathematics Magazine* **91** (2018), pp. 341–347.

[Bell] R. Bellman, A Note on the Divergence of a Series, *The American Mathematical Monthly* **50** (1943), pp. 318–319.

[DBen] D. Benko, The Basel Problem as a Telescoping Series, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), pp. 244–250.

[Ben] A. Benyi, Finding the Sums of Harmonic Series of Even Order, *The College Mathematics Journal* **36** (2005), pp. 44–48.

[Ber] E. Berkove, Another Look at Some $p$-Series, *The College Mathematics Journal* **37** (2006), pp. 385–386.

[BW] P. Biler and A. Witkowski, *Problems in Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1990.

[BoWr] R. P. Boas and J. W. Wrench, Partial Sums of the Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **78** (1971), pp. 864–870.

[BoKh] D. D. Bonar and M. J. Khoury, *Real Infinite Series*, The Mathematical Association of America, 2006.

[Bou] L. Bourchtein and A. Bourchtein, *Theory of Infinite Sequences and Series*, Birkhauser, 2021.

[Brads] J. W. Bradshaw, Modified Series, *The American Mathematical Monthly* **46** (1939), pp. 486–492.

[Bri2] R. W. Brink, A New Integral Test for the Convergence and Divergence of Infinite Series, *The American Mathematical Monthly* **25** (1918), pp. 186–204.

[Bri2] R. W. Brink, A Simplified Integral Test for the Convergence of Infinite Series, *The American Mathematical Monthly* **38** (1931), pp. 205–209.

[Bro] T. J. I'a Bromwich, *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, Macmillian and Co. Ltd., London, 1931.

[BCEW] F. Brown, L. Cannon, J. Elich and D. Wright, On Rearrangements of the Alternating Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **16** (1985), pp. 135–138.

[Bur] R. B. Burckel, *An Introduction to Classical Complex Analysis*, Academic Press, New York-San Francisco, 1979.

[Byr] W. E. Byrne, An Infinite Series, *Mathematics Magazine* **17** (1943), pp. 292–295.

[Cag] G. Caglayan, Proof Without Words: Series of Reciprocals of Tetrahedal Numbers, *The College Mathematics Journal* **46** (2015), p. 130.

[Cal] P. Calabrese, A Note on Alternating Series, *The American Mathematical Monthly* **69** (1962), pp. 215–217.

[Car] G. T. Cargo, Some Extensions of the Integral Test, *The American Mathematical Monthly* **73** (1966), pp. 521–525.

[Ceri] B. J. Cerimele, Extensions on a Theme Concerning Conditionally Convergent Series, *Mathematics Magazine* **40** (1967), pp. 120–128.

[Cha] H. Chand, On Some Generalizations of Cauchy's Condensation and Integral Test, *The American Mathematical Monthly* **46** (1939), pp. 338–341.

[Che] H. Chen, A New Ratio Test for Positive Monotone Series, *The College Mathematics Journal* **44** (2013), pp. 139–141.

[CK] H. Chen and C. Kennedy, Harmonic Series Meets Fibonacci Sequence, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), pp. 237–243.

[Chr] B. Christianson, Condensing a Slowly Convergent Series, *Mathematics Magazine* **68** (1995), pp. 298–301.

[Cou] Y. Coudene, A Strange Inequality Concerning Alternating Series, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), pp. 554–557.

[Cru] D. Cruz-Uribe, Relation between Root and Ratio Test, *Mathematics Magazine* **70** (1997), pp. 214–215.

[Cus] A. Cusumano, Boxed Note (Harmonic Series Diverges), *The College Mathematics Journal* **30** (1999), p. 34.

[Dan] D. Daners, A Short Elementary Proof of $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, *Mathematics Magazine* **85** (2012), pp. 361–364.

[Ded] F. Dedagić, *Matematička Analiza*, Univerzitet u Tuzli, Tuzla, 2011.

[Dem] M. S. Demos, Class Notes on Series Related to the Harmonic Series, *Mathematics Magazine* **46** (1973), pp. 40–41.

[Den] D. Deng, On the Convergence of Some Modified $p$-Series, *The College Mathematics Journal* **38** (2007), pp. 223–225.

[Dev] V. Devide, *Riješeni Zadaci iz Više Matematike s Kratkim Repetitorijem Definicija i Teorema II*, Školska Knjiga, Zagreb, 1985.

[Duf] R. J. Duffin, A generalization of the Ratio Test for Series, *The American Mathematical Monthly* **55** (1948), pp. 153–155.

[Dun1] W. Dunham, The Bernoullis and the Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **18** (1987), pp. 18–23.

[Dun2] W. Dunham, *The Calculus Gallery*, Princeton University Press, 2005.

[Edg1] T. Edgar, Proof Without Words: Series of Perfect Powers, *Mathematics Magazine* **90** (2017), p. 286.

[Edg2] T. Edgar, Staircase Series, *Mathematics Magazine* **91** (2018), pp. 92–95.

[Eli] U. Elias, Rearrangement of a Conditionally Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **110** (2003), p. 57.

[Fei] C. Feist and R. Naimi, Almost Alternating Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **35** (2004), pp. 183–191.

[Fer] R. J. Ferdinands, Selective Sums of an Infinite Series, *Mathematics Magazine* **88** (2015), pp. 179–185.

[Fic1] G. M. Fichtenholz, *The Fundamentals of Mathematical Analysis*, Pergamon Press, Oxford, 1965.

[Fic2] G. M. Fichtenholz, *Kurs Diferencijalnog i Integralnog Računa II*, Nauka, Moskva, 1969.

[Fic3] G. M. Fichtenholz, *Infinite Series*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1970.

[FLW] T. Forgacs, J. Luong and J. Williamson, A Note on Infinite Series with Recursively Defined Terms, *The American Mathematical Monthly* **126** (2019), pp. 269–274.

[For] T. Fort, *Infinite Series*, Oxford University Press, 1930.

[Fra] M. Frantz, The Telescoping Series In Perspective, *Mathematics Magazine* **71** (1998), pp. 313–314.

[FB] E. Freitag and R. Busam, *Complex Analysis*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

[Fre] F. J. Freniche, On Riemann's Rearrangement Theorem for the Alternating Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **117** (2010), pp. 442–448.

[FST] D. Fulghesu, J. A. Sellers and C. K. Taylor, Infinite Families of Infinite Series With Integer Sums, *The College Mathematics Journal* **54** (2023), pp. 33–43.

[Gil] L. Gillman, The Alternating Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **32** (2002), pp. 143–145.

[MGil] M. Gilula, A Class of Simple Rearrangements of the Alternating Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), pp. 245–256.

[Goa] M. Goar, Olivier and Abel on Series Convergence: An Episode from Early 19th Century Analysis, *Mathematics Magazine* **72** (1999), pp. 347–355.

[Gor1] R. A. Gordon, Sum Rearrangements, *The College Mathematics Journal* **32** (2001), pp. 377–380.

[Gor2] R. A. Gordon, *Real Analysis: A First Course. 2nd ed.*, Addison-Wesley, New York, 2002.

[Gor3] R. A. Gordon, Some Surprising Series Sums, *Mathematics Magazine* **96** (2023), pp. 20–23.

[Gri] L. S. Grinstein, A Note on Infinite Series, *The College Mathematics Journal* **9** (1978), pp. 46–47.

[DzG1] Dž. Gušić, *Osnovi Teorije Nizova sa Zbirkom Riješenih Zadataka*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2021.

[DzG2] Dž. Gušić, *Teorija redova I (sa zbirkom riješenih zadataka)*, Prirodno-matematički fakultet Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2022.

[HE] L. Hahn and B. Epstein, *Classical Complex Analysis*, Jones and Bartlett Publishers, Inc., London, 1996.

[Ham] R. W. Hamming, Convergent Monotone Series, *The American Mathematical Monthly* **52** (1945), pp. 70–72.

[CHam] C. N. B. Hammond, The Case for Raabe's Test, *Mathematics Magazine* **93** (2020), pp. 36–46.

[HO] C. N. B. Hammond and E. Omey, A Second Look at the Second Ratio Test, *The American Mathematical Monthly* **128** (2021), pp. 579–596.

[HL] Y. Hansheng and B. Lu, Another Proof for the $p$-series Test, *The College Mathematics Journal* **36** (2005), pp. 235–237.

[Hard1] G. H. Hardy, *A Course of Pure Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1946.

[Hard2] G. H. Hardy, *Divergent Series*, American Mathematical Society, Providence, 1991.

[HW] G. H. Hardy and E. M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press, 1959.

[HD] F. Hartman and D. Sprows, Investigating Possible Boundaries Between Convergence and Divergence, *The College Mathematics Journal* **33** (2002), pp. 405–406.

[Hav] J. Havil, *Gamma: Exploring Euler's Constant*, Princeton University Press, 2003.

[Heu] G. A. Heuer, More on Thinned-out Harmonic Series, *Mathematics Magazine* **70** (1997), pp. 214–215.

[Hil] T. H. Hilderbrandt, Remarks on the Abel-Dini Theorem, *The American Mathematical Monthly* **49** (1942), pp. 441–446.

[Hir] I. I. Hirschman, *Infinite Series*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1962.

[Hoa] N. S. Hoang, A Limit Comparison Test for General Series, *The American Mathematical Monthly* **122** (2015), pp. 893–896.

[Hud] M. Hudelson, Proof Without Words: The Alternating Harmonic Series Sums to $\ln 2$, *Mathematics Magazine* **83** (2010), p. 294.

[Huy] E. Huynh, A Second Raabe's Test and Other Series Tests, *The American Mathematical Monthly* **129** (2022), pp. 865–875.

[Hys] J. M. Hyslop, *Infinite Series, 5th. ed.*, Interscience Publisher, Inc., New York, 1959.

[Irw] F. Irwin, A Curious Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **23** (1916), pp. 149–152.

[JR] P. Johnson and R. Redheffer, Scrambled Series, *The American Mathematical Monthly* **73** (1966), pp. 822–828.

[Jun] G. Jungck, An Alternative to the Integral Test, *Mathematics Magazine* **56** (1983), pp. 232–235.

[Kac] S. Kaczkowski, The Limiting Value of a Series With Exponential Terms, *Mathematics Magazine* **89** (2016), pp. 282–287.

[KN] W. J. Kaczor and M. T. Nowak, *Problems in Mathematical Analysis I: Real Numbers, Sequences and Series*, American Mathematical Society, 2000.

[Kan] R. Kantrowitz and M. Schramm, Series that Converge Absolutely but Don't Converge, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), pp. 331–333.

[Kat1] H. Katsuura, Extending the Alternating Series Test, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), pp. 325–330.

[Kat2] H. Katsuura, A New Infinite Series Representation of $\ln k$, *The American Mathematical Monthly* **122** (2015), p. 376.

[Kem] A. J. Kempner, A Curious Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **21** (1914), pp. 48–50.

[Kha] R. Khan, Convergence-Divergence of $p$-Series, *The College Mathematics Journal* **32** (2001), pp. 206–208.

[Khe] A. Kheyfits et. al., A Series Whose Sum is $\ln k$, *The College Mathematics Journal* **30** (1999), pp. 145–146.

[Kil] S. Kilmer, Integration by Parts and Infinite Series, *Mathematics Magazine* **81** (2008), pp. 51–55.

[Kla] G. Klambauer, *Mathematical Analysis*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1975.

[Kli] M. Kline, Euler and Infinite Series, *Mathematics Magazine* **56** (1983), pp. 307–314.

[Kni] W. J. Knight, Convergence and Divergence of $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$, *Mathematics Magazine* **52** (1979), p. 178.

[Kno1] K. Knopp, *Infinite Sequences and Series*, Dover, New York, 1956.

[Kno2] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover, New York, 1990.

[Kob] M. Kobayashi, A Dissection Proof of Leibniz's Series for $\frac{\pi}{4}$, *Mathematics Magazine* **87** (2014), pp. 145–150.

[KG] T. Koshy and Z. Gao, Convergence of a Catalan Series, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), pp. 141–146.

[Kos] W. A. J. Kosmala, *A Friendly Introduction to Analysis: Single and Multivariable. 2nd ed.*, Prentice Hall, New Jersey, 2004.

[KMcN] S. Krantz and J. McNeal, Creating More Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **111** (2004), pp. 32–38.

[Kul] D. E. Kullman, What's Harmonic about the Harmonic Series, *The College Mathematics Journal* **32** (2001), pp. 201–203.

[Kun1] S. Kung, An Application of Condensation, *The College Mathematics Journal* **33** (2002), p. 168.

[Kun2] S. H. Kung, Math Bite: Convergence of $p$-series, *Mathematics Magazine* **76** (2003), p. 140.

[Kura] K. Kuratowski, *Introduction to Calculus*, Pergamon Press, Oxford-Edinburgh-New York, Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1969.

[Kure] S. Kurepa, *Matematička Analiza II. Funkcije Jedne Varijable*, Školska Knjiga, Zagreb, 1997.

[Lari] R. Lariviere, On a Convergence Test for Alternating Series, *Mathematics Magazine* **29** (1955), p. 88.

[Lar] L. C. Larson, *Problem-Solving Through Problem Solving*, Springer-Verlag, New York, 1983.

[Leh] D. H. Lehmer, Interesting Series Involving the Central Binomial Coefficient, *The American Mathematical Monthly* **92** (1985), pp. 449–457.

[Len] N. J. Lennes, The Ratio Test for Convergence of a Series, *The American Mathematical Monthly* **46** (1939), pp. 434–436.

[Leo] P. Leonetti, Convergence Rates of Subseries, *The American Mathematical Monthly* **126** (2019), pp. 163–166.

[Les1] J. Lesko, A Series for $\ln k$, *The College Mathematics Journal* **32** (2001), pp. 119–122.

[Lib] W. F. Libby, A Convergence Test and a Remainder Theorem, *The American Mathematical Monthly* **40** (1933), pp. 216–218.

[Lin] P. Lindstrom, A Note on the Integral Test, *The College Mathematics Journal* **9** (1978), pp. 105–106.

[LV] M. Longo and V. Valori, The Comparison Test: Not Just for Nonnegative Series, *Mathematics Magazine* **79** (2006), pp. 205–210.

[LP] B. Lubeck and V. Ponomarenko, Subsums of the Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), pp. 351–355.

[LM] C. V. Lutzer and J. E. Marengo, The Divergence of Balanced Harmonic-like Series, *The College Mathematics Journal* **37** (2006), pp. 364–369.

[LBGG] I. I. Ljaško, A. K. Boljarčuk, J. G. Gaj and G. P. Golovač, *Zbirka Zadataka iz Matematičke Analize II*, Naša Knjiga, Beograd, 2007.

[Mark] A. I. Markushewich, *Infinite Series*, D. C. Heath & Company, Boston, 1967.

[Mart] I. Martinjak and A. Mimica, Proofs Without Words: A Visual Proof for an Infinite Alternating Sign Series, *The College Mathematics Journal* **52** (2021), p. 204.

[Mil] H. Miller, A Ratio-Type Convergence Test, *The American Mathematical Monthly* **77** (1970), pp. 285–287.

[MiAd] D. S. Mitrinović and D. D. Adamović, *Nizovi i Redovi. Definicije, stavovi, zadaci, problemi*, Naučna Knjiga, Beograd, 1971.

[Moen] C. Moen, Infinite Series with Binomial Coefficients, *Mathematics Magazine* **64** (1991), pp. 53–55.

[Moez] A. R. A. Moez, A Simple Proof of Series Convergence, *The College Mathematics Journal* **18** (1987), p. 410.

[Mor] J. R. Morris, Counterexamples to a Comparison Test for Alternating Series, *The College Mathematics Journal* **17** (1986), pp. 165–166.

[Nel] R. B. Nelsen, Proof Without Words: An Alternating Series, *The College Mathematics Journal* **43** (2012), p. 370.

[New] T. A. Newton, A Note on a Generalization of the Cauchy-Maclaurin Integral Test, *The American Mathematical Monthly* **61** (1954), pp. 331–334.

[Nur] J. R. Nurcombe, A Sequence of Convergence Tests, *The American Mathematical Monthly* **86** (1979), pp. 679–681.

[Olm] J. M. H. Olmstead, *Advanced Calculus*, Appleton-Century-Crofts, New York, 1961.

[Ovc] S. Ovchinnikov, Series with Inverse Function Terms, *The College Mathematics Journal* **42** (2011), pp. 283–288.

[Par] B. Park, On the Divergence of the Prime Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), p. 850.

[Per] I. E. Perlin, Series with Deleted Terms, *The American Mathematical Monthly* **48** (1941), pp. 93–98.

[PT] T. J. Pfaff and M. N. Tran, Series That Probably Converge to One, *Mathematics Magazine* **82** (2009), pp. 42–49.

[Pin] M. A. Pinsky, Averaging an Alternating Series, *Mathematics Magazine* **51** (1978), pp. 235–237.

[Pla1] A. Plaza, Proof Without Words: Mengoli's Series, *Mathematics Magazine* **93** (2010), p. 140.

[Pla2] A. Plaza, The Generalized Harmonic Series Diverges by the AM-GM Inequality, *Mathematics Magazine* **91** (2018), p. 217.

[Pla3] A. Plaza, The Harmonic Series Diverges, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), p. 222.

[PS] G. Polya and G. Szego, *Problems and Theorems in Analysis. Vol. I*, Springer-Verlag, New York, 1972.

[Por] G. J. Porter, An Alternative to the Integral Test for Infinite Series, *The American Mathematical Monthly* **79** (1972), pp. 634–635.

[Rai] E. D. Rainville, *Infinite Series*, The Macmillian Company, New York, 1967.

[Raj] C. T. Rajagopal, Remarks on Some Generalizations of Cauchy's Condensation and Integral Test, *The American Mathematical Monthly* **48** (1941), pp. 441–446.

[Rao] K. P. S. B. Rao, A New Test for Convergence of a Series, *Mathematics Magazine* **67** (1994), pp. 301–302.

[Roy] R. Roy, The Discovery of the Series for $\pi$ by Leibnitz, Gregory, and Nilakantha, *Mathematics Magazine* **63** (1990), pp. 291–306.

[Rud] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1964.

[Sam] H. Samelson, More on Kummer's Test, *The American Mathematical Monthly* **102** (1995), pp. 817–818.

[SS] F. Sanchez and J. M. Sanchis, Darboux Sums and the Sum of the Alternating Harmonic Series, *Mathematics Magazine* **91** (2018), p. 96.

[SB] T. Schmelzer and R. Baillie, Summing a Curious, Slowly Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **115** (2008), pp. 525–540.

[Sha] E. B. Shanks, Convergence of Series with Positive Terms, *The American Mathematical Monthly* **64** (1957), pp. 338–341.

[Shi] T. W. Shilgalis, Flow Chart for Infinite Series, *The College Mathematics Journal* **9** (1978), p. 191.

[Sim] H. A. Simons, Classroom Discussion of a Question on Infinite Series, *Mathematics Magazine* **22** (1948), p. 53.

[Stal] R. Stalley, A Generalization of the Geometric Series, *The American Mathematical Monthly* **56** (1949), pp. 325–328.

[Sta1] O. E. Stanaitis, *An Introduction to Sequences, Series, and Improper Integrals*, Holden-Day, 1967.

[Sta2] O. E. Stanaitis, Integral Tests for Infinite Series, *The American Mathematical Monthly* **78** (1971), pp. 164–170.

[Star] E. L. Stark, The Series $\sum_{k=1}^{+\infty} k^{-s}$, $s = 2, 3, 4, ...$, Once More, *Mathematics Magazine* **47** (1974), pp. 197–202.

[Stef] J. R. Stefausson, Forward Shifts and Backward Shifts in a Rearrangement of a Conditionally Convergent Series, *The American Mathematical Monthly* **111** (2004), pp. 913–914.

[Step] P. Stephenson, The Series of Reciprocals of Triangular Numbers, *Mathematics Magazine* **95** (2022), p. 572.

[Stew] J. Stewart, *Calculus: Early Transcendentals. 5th ed.*, Thomson, Brooks/Cole, 2003.

[SW] G. Stoica and Y. Wardat, A Special Form of Slower Divergent Series, *The American Mathematical Monthly* **130** (2023), p. 186.

[Str] J. M. Strange, Series and High Precision Fraud, *The American Mathematical Monthly* **99** (1992), pp. 622–640.

[Ton] J. Tong, Kummer's Test Gives Characterizations for Convergence or Divergence of all Positive Series, *The American Mathematical Monthly* **101** (1994), pp. 450–452.

[Una] H. Unal, Proof without Words: Sum of an Infinite Series, *The College Mathematics Journal* **40** (2009), p. 39.

[UM] M. P. Ušćumlić and P. M. Miličić, *Zbirka Zadataka iz Više Matematike II*, Nauka, Beograd 1998.

[VaMa] F. Vajzović and M. Malenica, *Diferencijalni Račun Funkcija Više Promjenjivih*, Studentska Štamparija Univerziteta u Sarajevu, Sarajevo, 2002.

[VPR] D. Varberg, E. Purcell and S. Rigdon, *Calculus. 8th ed.*, Prentice Hall, New Jersey, 2000.

[Ver] A. Vernescu, The Summation of a Familly of Series, *The American Mathematical Monthly* **115** (2008), pp. 939–943.

[Vil] M. B. Villarino, The Error in an Alternating Series, *The American Mathematical Monthly* **125** (2018), pp. 360–364.

[Wad1] A. D. Wadhwa, An Interesting Subseries of the Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **82** (1975), pp. 931–933.

[Wad2] A. D. Wadhwa, Some Convergent Subseries of the Harmonic Series, *The American Mathematical Monthly* **85** (1978), pp. 661–663.

[Wan] X. Wang, Convergence-Divergence of $p$-Series, *The College Mathematics Journal* **33** (2002), pp. 314–316.

[War] M. Ward, A Generalized Integral Test for Convergence of Series, *The American Mathematical Monthly* **56** (1949), pp. 170–172.

[Wis] F. P. Wisniowski, A Refinement of Raabe's Test, *The American Mathematical Monthly* **115** (2008), pp. 249–252.

[Wu] Z. Wu, The Convergence Theorems and an Extension of the Ratio Test for a Series, *Mathematics Magazine* **92** (2019), pp. 222–227.

[Yag] A. M. Yaglom and I. M. Yaglom, An elementary derivation of the formulas of Wallis, Leibnitz and Euler for the number $\pi$, *Uspekhi Mat. Nauk* **8** (1953), pp. 181–187.

[Zhe] L. Zheng, An Elementary Proof for Two Alternating Series, *The American Mathematical Monthly* **109** (2002), pp. 187–188.

[Zor] V. A. Zorich, *Mathematical Analysis I*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2004.

INDEKS POJMOVA

## L



## M

**N**

## Nj



## O

## P

## Š



## T

## *Izvodi iz recenzija*

„ ... *Teorija redova II sa zbirkom riješenih zadataka* autora prof. dr. Dženana Gušića, redovnog profesora na naučnim oblastima *Analiza i Teorijska kompjuterska nauka* na Odsjeku za matematičke i kompjuterske nauke PMF-a u Sarajevu, predstavlja prirodni slijed ranijih izdanja autora *Osnovi teorije nizova sa zbirkom riješenih zadataka i Teorija redova I (sa zbirkom riješenih zadataka). Teorija redova II*, kao posljednji dio trilogije iz oblasti brojevnih nizova i redova, obuhvata dio gradiva iz teorije redova (kriteriji konvergencije pozitivnih redova i redova sa članovima promjenjivog znaka, apsolutna i uslovna konvergencija) koji se u skladu sa nastavnim planom i programom izučava u okviru predmeta *Analiza I* na prvoj godini svih studijskih programa matematičkih i kompjuterskih nauka PMF–a u Sarajevu. U udžbeniku su dokazane sve tvrdnje, a posebnu vrijednost mu daju brižljivo odabrani i riješeni zadaci različite težine kojih ima više od 300. Na kraju svakog poglavlja je data sekcija *Razmatrani redovi* koja sadrži listu redova obrađenih u poglavlju i za koje se koriste prvenstveno kriteriji obrađeni u okviru aktuelnog i njemu prethodnih poglavlja. Ova sekcija omogućava svima onima koji se služe udžbenikom da jednostavno detektuju kojim kriterijem se može ispitivati konvergencija datog ili njemu sličnog reda. Neki od zadataka koji su se pojavili na različitim međunarodnim matematičkim takmičenjima predstavljaju pravi izazov za studente – bivše takmičare, ali i sve druge čitaoce. *Teorija redova II* ispunjava sve zahtjeve nastavno–naučne literature namijenjene za oblast matematičke analize (teorija redova) i predstavlja pravi dragulj oblasti, a zajedno sa prethodno pomenutim rukopisima autora čini jedinstvenu cjelinu namijenjenu studentima i kolegama nastavnicima i asistetnima matematičkih i tehničkih fakulteta u Bosni i Hercegovini i šire ...“