

**UNIVERSITY OF SARAJEVO
FACULTY OF SCIENCE**

*Zmaja od Bosne 33-35
Sarajevo
Bosnia and Herzegovina
Phone ++ 387 (0)33 723-723
Fax ++387 (0)33 649-359*

Broj: 01/06-2760/11-2013
Sarajevo, 08.01.2021.

Na osnovu člana 36. Pravila studiranja za treći ciklus studija na Univerzitetu u Sarajevu, Vijeće Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, na elektronskoj sjednici održanoj 08.01.2021. godine, donijelo je

ZAKLJUČAK

I

Usvaja se pozitivan Izvještaj Komisije u sastavu:

1. **Dr. Lejla Smajlović**, redovna profesorica na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uže naučne oblasti: Analiza i Teorija brojeva, **predsjednica**,
2. **Dr. Almasa Odžak**, vanredna profesorica na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uže naučne oblasti: Analiza i Teorija brojeva, **mentorica**,
3. **Dr. Zenan Šabanac**, docent na Prirodno-matematičkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uže naučna oblast: Analiza, **član**,

o ocjeni podobnosti teme doktorske disertacije pod naslovom:

„Modifikovani Liovi koeficijenti za neke klase L -funkcija“,

i **kandidatkinje Medine Sušić, MA**, više asistentice Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu i studentice III ciklusa – dokorskog studija „Matematičke nauke u jugoistočnoj Evropi“ na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu.

II

Izvještaj Komisije dostavlja se Senatu Univerziteta na verifikaciju.

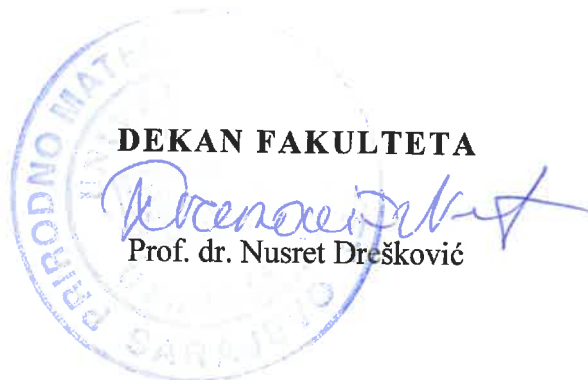
Akt obradila: Edina Drkenda, BA poslovanja

Akt kontrolisala: Jasmina Hasanbegović, dipl.iur.

Akt odobrio: prof. dr. Elvedin Hasović

Dostaviti:

- Senatu Univerziteta
- Kandidatu
- Dosije kandidata
- a/a



Dr. Lejla Smajlović, redovna profesorica na Ekonomskom fakultetu Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uže naučne oblasti: Analiza i Teorija brojeva, **predsjednica**

Dr. Almasa Odžak, vanredna profesorica na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uže naučne oblasti: Analiza i Teorija brojeva, **mentorica**

Dr. Zenan Šabanac, docent na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, doktor matematičkih nauka, uža naučna oblast: Analiza, **član**

VIJEĆU PRIRODNO-MATEMATIČKOG FAKULTETA UNIVERZITETA U SARAJEVU

PREDMET: Izvještaj Komisije za ocjenu podobnosti teme doktorske disertacije pod naslovom "Modifikovani Liovi koeficijenti za neke klase L – funkcija" i kandidatkinje Medine Sušić, MA, više asistentice na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu i studentice III ciklusa – doktorskog studija "Matematičke nauke u jugoistočnoj Evropi" na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu

Rješenjem Dekana Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu broj 01/06-2760/9-2013 od 3.12.2020. godine, a na osnovu prijedloga Vijeća Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu od 5.11.2020. godine i Odluke Senata Univerziteta u Sarajevu broj 01-25-116/20 od 26.11.2020. godine, imenovani smo za članove Komisije za ocjenu podobnosti teme doktorske disertacije "Modifikovani Liovi koeficijenti za neke klase L – funkcija" i uvjeta kandidatkinje Medine Sušić, MA, više asistentice na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu i studentice III ciklusa – doktorskog studija "Matematičke nauke u jugoistočnoj Evropi" na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu.

Na osnovu uvida u priloženu dokumentaciju, podnosimo Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta sljedeći

I Z V J E Š T A J

1. Ispunjenost općih uvjeta za sticanje doktorata nauka

Biografski podaci kandidatkinje

Medina Sušić rođena je 20.06.1988. godine u Visokom. Osnovnu i srednju školu je završila u Visokom. Prvi ciklus studija na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta

Univerziteta u Sarajevu završila je 2009. godine, a drugi ciklus studija 2012. godine. Završni rad drugog ciklusa studija pod naslovom "Oblici ostatka u teoremu o prostim brojevima", rađen pod mentorstvom prof. dr. Muharema Avdispahić, odbranila je u junu 2012. godine. Kandidatkinja je studentica III ciklusa - doktorskog studija „Matematičke nauke u jugoistočnoj Evropi“ na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu. Kandidatkinja je dobitnica Zlatne značke Univerziteta u Sarajevu 2009. godine.

Kretanje u službi

U periodu 2012. – 2013. kandidatkinja je radila kao profesorica matematike u Gimnaziji „Visoko“ u Visokom.

U periodu 2013. – 2018. kandidatkinja je radila na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta na poziciji asistenta za oblast Primijenjena matematika. U akademskoj 2014/2015. godini kandidatkinja je bila angažovana kao vanjska saradnica na Elektrotehničkom fakultetu Univerziteta u Sarajevu na predmetu Linearna algebra i geometrija.

Od 2018. godine kandidatkinja je zaposlena na Odsjeku za matematiku Prirodno-matematičkog fakulteta Univerziteta u Sarajevu kao viša asistentica na oblasti Primijenjena matematika.

Naučni projekti

Kandidatkinja je učesnica uspješno okončanog naučno-istraživačkog projekta „Asimptotsko ponašanje generaliziranih Liovih koeficijenata“, pod voditeljstvom prof. dr. Lejle Smajlović, finansiranog od strane Federalnog ministarstva obrazovanja i nauke, po konkursu za 2014. godinu.

Naučni radovi

- [1] A. Odžak, **M. Zubača**, "On the discretized Li coefficients for a certain class of L-functions" (submitted)
- [2] A.-M. Ernvall-Hytonen, A. Odžak, **M. Sušić**, "On asymptotic behavior of generalized Li coefficients", Taiwanese J. Math 22(6), (2018), 1321-1346
- [3] A.-M. Ernvall-Hytonen, A. Odžak, L. Smajlović, **M. Sušić**, "On generalized Li criterion for a certain class of L-functions", J. Number Theory 156 (2015), 340– 367

Izlaganje na naučnoj konferenciji

- [1] M. Zubača, *On the modified Li coefficients for a certain class of L-functions*, BMS Mathematical Conference, July 12-14, 2018, Sarajevo

2. Podobnost predložene teme doktorske disertacije

Riemannova hipoteza (RH) koja tvrdi da se sve netrivialne nule Riemannove zeta funkcije nalaze na kritičnoj pravoj $\text{Re}(s) = 1/2$ jedan je od najznačajnijih neriješenih matematičkih problema današnjice, problem koji je od strane Clay Mathematics Institute uvršten na listu sedam najvažnijih

milenijskih problema. Postavio ju je B. Riemann 1859. godine. Postavljanje pitanja o položaju nula različitih L -funkcija dovodi do različitih generalizacija Riemannove hipoteze (GRH).

A. Selberg je 1991. godine dao aksiomatsku definiciju klase za koju se vjeruje da sadrži sve L -funkcije koje zadovoljavaju GRH. Elementi te klase su Dirichletovi redovi koji imaju Eulerov proizvod, meromorfno produljenje i zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu Riemannovog tipa.

U literaturi se susreću različite modifikacije Selbergove klase. Proširena Selbergova klasa je klasa L -funkcija koje imaju reprezentaciju u obliku Dirichletovog reda, posjeduju meromorfno produljenje i zadovoljavaju funkcionalnu jednačinu određenog oblika. Smatra se da proširena Selbergova klasa sadrži sve L -funkcije od interesa za teoriju brojeva, ali ona nije pogodna za formulisanje GRH.

Modifikovana Selbergova klasa sadrži sve funkcije proširene Selbergove klase koje posjeduju reprezentaciju u obliku Eulerovog proizvoda i posebno je od interesa jer omogućava bezuvjetnu primjenu rezultata dokazanih za elemente te klase na klasu automorfni L -funkcija.

Činjenica da postoje još neke L -funkcije koje posjeduju reprezentaciju u obliku Eulerovog proizvoda, a nisu sadržane u modifikovanoj Selbergovoj klasi, poput L -funkcije pridružene Rankin-Selberg konvoluciji dvije unitarne kaspidalne automorfne reprezentacije, motivirala je uvođenje opštije klase od modifikovane Selbergove klase.

U radu A.-M. Ernvall-Hytönen, A. Odžak, L. Smajlović, M. Sušić: "On the modified Li criterion for a certain class of L -functions" iz 2015. godine uvedena je klasa $\mathcal{S}^{\#b}(\sigma_0, \sigma_1)$ koja predstavlja proširenje modifikovane Selbergove klase, a sadrži i pomenutu L -funkciju pridruženu Rankin-Selberg konvoluciji. Osim toga uvedena klasa dozvoljava egzistenciju konačno mnogo polova posmatrane funkcije u različitim tačkama kompleksne ravni, što implicira da joj pripadaju određeni proizvodi funkcija iz modifikovane Selbergove klase. Primjeri takvih funkcija su određeni proizvodi Riemann zeta ili Dirichlet L funkcija sa transliranim argumentima.

Istraživanja koja se tiču klase $\mathcal{S}^{\#b}(\sigma_0, \sigma_1)$ su posebno interesantna i značajna zbog raznovrsnosti funkcija koje pripadaju toj klasi. Posebno značajno pitanje je pitanje položaja nula posmatranih funkcija i određivanje oblasti bez nula.

Prilikom istraživanja vezanih za GRH vrlo korisno je proučavati tvrdnje koje su joj ekvivalentne.

Liov kriterij, ekvivalent RH, zasnovan na analitičkim osobinama Riemannove zeta funkcije i formulisan koristeći Liove koeficijente dokazan je 1997. godine. Zbog svoje jednostavnosti predmet je savremenog istraživanja iz oblasti analitičke teorije brojeva koje se vrši u dva pravca: analitički pravac, koji je fokusiran na određivanje aritmetičke formule za Liove koeficijente i izučavanje posljedica aritmetičke formule, te numerički pravac koji je fokusiran na numeričko izračunavanje Liovih koeficijenata, na osnovu definicije ili drugih ekvivalentnih oblika, te uočavanje različitih osobina i postavljanje hipoteza o asimptotskom ponašanju ovih koeficijenata.

Generalizacije Liovih koeficijenata, u smislu klase funkcija kojim su pridruženi i/ili u smislu modifikacije samog oblika koeficijenta uvođenjem određenih parametara, su od interesa. P. Freitas je 2006. godine uveo tzv. τ –Liove koeficijente, generalizaciju Liovih koeficijenata za Riemannovu zeta funkciju. U definiciji τ –Liovih koeficijenata se uvodi dodatni parametar τ i pokazuje se da njihovo ponašanje omogućava klasifikaciju oblasti bez nula. A. Droll je 2012. godine ispitivao vezu τ –Liovih koeficijenata i oblasti bez nula funkcija iz modificirane Selbergove klase. Ispitivanje ove generalizacije Liovih koeficijenata je od posebnog interesa jer omogućava uspostavljanje veze uvedenih koeficijenata sa određenim oblastima bez nula funkcije kojoj su pridruženi posmatrani koeficijenti.

Pomenuta veza, imajući na umu činjenicu da je jedno od centralnih pitanja vezanih za L -funkcije pitanje položaja njihovih nula, kao i činjenica da $\mathcal{S}^{\#b}(\sigma_0, \sigma_1)$ sadrži sve elemente modificirane Selbergove klase, ali druge značajne funkcije, čini ispitivanja vezana za τ –Liove koeficijente pridružene funkcijama te klase značajnim. Predložena istraživanja doktorske disertacije predstavljaju doprinos toj problematici.

U disertaciji su definirani τ –Liovi koeficijenti pridruženi funkcijama $F \in \mathcal{S}^{\#b}(\sigma_0, \sigma_1)$ i izveden je analogon Liovog kriterija u ovom slučaju. Zadatak predložene doktorske disertacije uključuje daljnja istraživanja, analitička i numerička, τ –Liovih koeficijenata pridruženih funkcijama navedene klase.

Rezultate o asimptotskom ponašanju posmatranih koeficijenata, posebno analizirajući arhimedski (doprinos gama faktora iz funkcionalne jednačine) i nearhimedski doprinos kandidatkinja je, zajedno sa A-M. Ernvall-Hytonen i A. Odžak, prezentirala u radu koji je objavljen u časopisu Taiwanese J. Math, koji je obuhvaćen bazama sadržanim u Web of Science. U pomenutom radu prezentirani su i neki numerički rezultati vezani za ponašanje τ –Liovih koeficijenata, bazirani na ekvivalentnim definicijama, za odabrane funkcije iz posmatrane klase.

Rezultati pomenutog rada ilustruju mogućnost korištenja ekvivalentnih definicija za numerička izračunavanja na osnovu kojih je moguće uočavanje zanimljivih osobina, izvlačenje zaključaka i formulisanje određenih hipoteza. Međutim, pokazuje se da su ti proračuni vrlo zahtjevni s aspekta potrebnog vremena izvršenja, kao i po pitanju kontrole greške. Pitanje koje se prirodno nameće je pitanje mogućnosti modifikacije Liovih i τ –Liovih koeficijenata na način da modifikovani koeficijenti budu pogodniji za numerička izračunavanja, ali istovremeno da njihova senzitivnost na GRH (za Liove koeficijente), odnosno oblasti bez nula (za τ –Liove koeficijente), ostane očuvana.

Inicijalni rezultati u tom pravcu su dokazani u radu A. Vorosa iz 2018. godine u kojem su definirani diskretizirani Liovi koeficijenti pridruženi Riemannovoj zeta funkciji i dokazan je odgovarajući asimptotski kriterij za RH.

Predložena doktorska disertacija ima za cilj definiranje i analizu diskretiziranih Liovih koeficijenata sa dodatnim parametrom τ za vrlo široku klasu funkcija $\mathcal{S}^{\#b}(\sigma_0, \sigma_1)$. Dodatni parametar τ omogućava povezivanje asimptotskog ponašanja posmatranih koeficijenata sa egzistencijom oblasti bez nula pridružene L -funkcije, koja zavisi od parametra τ , što pripada vrlo aktuelnom polju istraživanja iz oblasti analitičke teorije brojeva.


Zaključak i prijedlog

Medina Sušić, MA, ispunjava sve zakonske uvjete da pristupi izradi prijavljene doktorske disertacije. Tema disertacije pripada aktuelnoj oblasti matematičkih istraživanja iz oblasti analitičke teorije brojeva, te je podobna za samostalan naučno-istraživački rad nivoa koji se zahtijeva od budućeg doktora matematičkih nauka. Dio rezultata do kojih je kandidatkinja već došla uspješno je prošao ocjenu međunarodne matematičke javnosti. Zbog toga predlažemo Vijeću Prirodno-matematičkog fakulteta da prihvati prijavljenu temu doktorske disertacije "**Modifikovani Liovi koeficijenti za neke klase L -funkcija**" kandidatkinje Medine Sušić, MA.

Sarajevo, decembar 2020.

Komisija:


Prof. dr. Lejla Smajlović


Prof. dr. Almasa Odžak


Doc. dr. Zenan Šabanac